Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 354, 2008 г.

$\boxed{\text{В. Э. Грикуров}^*}$, **М. А. Лялинов**

ДИФРАКЦИЯ H-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НА УГЛОВОМ ИЗЛОМЕ ТОНКОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

В данной работе изучается дифракция поверхностной электромагнитной волны, в которой вектор магнитной напряженности $\vec{H}$ направлен вдоль ребра, на тонкой диэлектрической плоскости, имеющей прямолинейный угловой излом. Угловой излом разбивает $\mathbb{R}^3$ на две клиновидные области Ω_1 и Ω_2 (рис. 1). Ось Oz направлена вдоль ребра, причем поверхностная H-поляризованная волна падает вдоль Γ_+ ортогонально к ребру. В этом случае решение зависит от двух координат x и y. Основной задачей является расчет диаграммы рассеяния (дифракционного коэффициента) волны, расходящейся от ребра. Метод расчета основан на технике Зоммерфильда–Малюжинца, применяемой для задач дифракции в угловых областях [1].

1. Постановка задача

Посредством уравнений Максвелла электромагнитное поле может быть выражено через H_z-компоненту магнитного поля. Обозначим $u_1(r,\varphi)$ H_z-компоненту в области

$$\Omega_1 = \{(r,\varphi); r>0, |\varphi|<\Phi\}, \quad \frac{\pi}{2}<\Phi<\pi,$$

$u_2(r,\varphi)$ в области

$$\Omega_2 = \{(r,\varphi); r>0, |\overline{\varphi}|<\overline{\Phi}\}, \quad \overline{\varphi}=\pi-\varphi,$$

$\overline{\Phi}=\pi-\Phi$. $\Gamma_\pm$ – границы клиновидных областей Ω_1 и Ω_2 совпадают с положением срединной линии углового излома тонкого диэлектрического слоя. Волновое поле

$$u_{1,2} = u^i_{1,2} + v_{1,2} \tag{1}$$

---

*Работа представлена в печать после трагической кончины В. Э. Грикурова.

Работа выполнена при поддержке со стороны программы NATO's Science for Peace, грант CBP.MD.SFPP 982 376 .

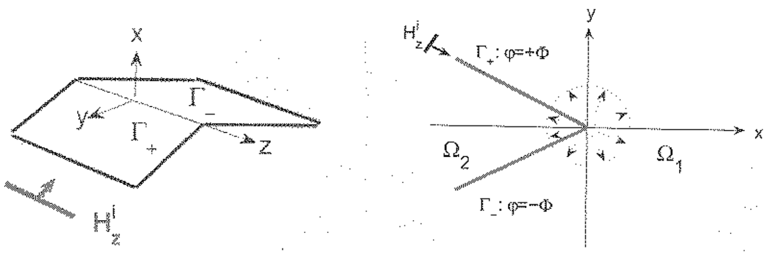

Рис. 1.

представимо суммой поверхностной волны, падающей вдоль Γ_+,

$$
\begin{aligned}
u_1^i(r,\varphi) &= e^{-ikr\cos[(\Phi-\varphi)-\theta]}, \quad |\varphi| \leqslant \Phi,\\
u_2^i(r,\varphi) &= e^{-ikr\cos[(\overline{\Phi}+\overline{\varphi})-\theta]}, \quad |\overline{\varphi}| \leqslant \overline{\Phi},
\end{aligned} \tag{2}
$$

θ – параметр, зависящий от свойств тонкого слоя, и рассеянного поля $v_{1,2}(r,\varphi)$. Из физических соображений ясно, что рассеянное поле состоит из поверхностных волн, отраженных от ребра и прошедших через ребро, и цилиндрической волны, расходящейся от ребра структуры, имеющей асимптотику

$$
v_{1,2}^i(r,\varphi) = \frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}} D_{1,2}(\varphi)\Big[1 + O\Big(\frac{1}{kr}\Big)\Big], \tag{3}
$$

$kr \to \infty$, $D_{1,2}(\varphi)$ – искомая диаграмма рассеяния.

Полное поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца в $\Omega_{1,2}$

$$
(\Delta + k^2)u_{1,2} = 0, \tag{4}
$$

(зависимость от времени $e^{-i\omega t}$ опущена), $k = \omega/c > 0$ – волновое число, граничным условиям

$$
\left[\frac{1}{r}\ \frac{\partial u_1}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\ \frac{\partial u_2}{\partial\varphi}\right]\bigg|_{\Gamma_\pm} = 0, \tag{5}
$$

$$
\left[\frac{1}{r}\ \frac{\partial u_1}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial u_2}{\partial\varphi} \pm ik\sin\theta(u_1 - u_2)\right]\bigg|_{\Gamma_\pm} = 0, \tag{6}
$$

моделирующим волновые процессы вблизи тонкого диэлектрического слоя, считая, что $2/\sin\theta$ – нормированный поверхностный адмитанс тонкого диэлектрического слоя. В дальнейшем мы предполагаем

$$\operatorname{Re}\theta = 0, \quad \operatorname{Im}\theta < 0. \tag{7}$$

Ограничения (7) обеспечивают существование поверхностной волны (2), распространяющейся вдоль Γ_+ к ребру. Волновое поле удовлетворяет условию Мейкснера на ребре и условиям излучения, см. (3).

2. Интегралы Зоммерфельда и редукция задачи к системе функционально-разностных уравнений

Традиционно для целого круга задач дифракции в угловых областях решение ищется в виде интегралов Зоммерфельда

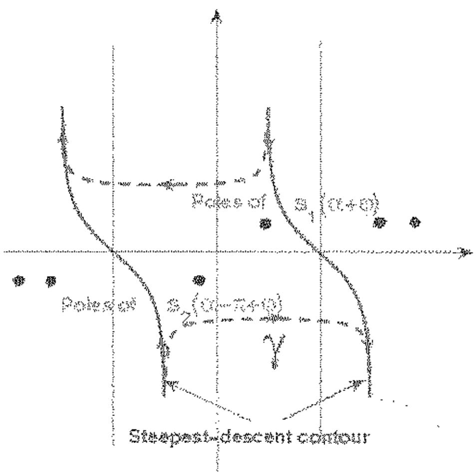

Рис. 2.

$$\begin{aligned} u_1(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{[-ikr\cos\alpha]} s_1(\alpha+\varphi)\,d\alpha, \quad |\varphi| \leqslant \Phi, \\ u_2(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{[-ikr\cos\alpha]} s_2(\alpha-\overline{\varphi}), \qquad |\overline{\varphi}| \leqslant \overline{\Phi}, \end{aligned} \tag{8}$$

где γ хорошо известный контур Зоммерфельда, $s_{1,2}(\alpha)$ – искомые мероморфные функции. Граничные условия выполнены, если неизвестные спектральные функции $s_{1,2}(\alpha)$ удовлетворяют системе функционально-разностных уравнений (Малюжинца)

$$\begin{gathered} R_+(\alpha)s_1(\alpha+\Phi)+R_-(\alpha)s_1(-\alpha+\Phi) \\ = -R_-(\alpha)s_2(\alpha-\overline{\Phi})-R_+(\alpha)s_2(-\alpha-\overline{\Phi}), \end{gathered} \tag{9}$$

$$s_1(\alpha+\Phi)+s_1(-\alpha+\Phi)=s_2(\alpha-\overline{\Phi})+s_2(-\alpha-\overline{\Phi}), \tag{10}$$

$$\begin{gathered} R_-(\alpha)s_1(\alpha-\overline{\Phi})+R_+(\alpha)s_1(-\alpha-\overline{\Phi}) \\ = -R_+(\alpha)s_2(\alpha+\overline{\Phi})-R_-(\alpha)s_2(-\alpha+\overline{\Phi}), \end{gathered} \tag{11}$$

$$s_1(\alpha-\Phi)+s_1(-\alpha-\Phi)=s_2(\alpha+\overline{\Phi})+s_2(-\alpha+\overline{\Phi}), \tag{12}$$

где $R_\pm(\alpha)=\sin\alpha\pm\sin\theta$. Решение системы уравнений (9)–(12) удовлетворяет следующим требованиям

$$s_{1,2}(\alpha)=C^\pm_{1,2}+O\big(e^{\pm i\delta\alpha}\big) \quad \text{при} \quad \alpha\to\pm i\infty, \tag{13}$$

$C^\pm_{1,2}$ – постоянные, $s_1(\alpha)-\frac{1}{\alpha-\alpha_1}$ регулярна в полосе $|\operatorname{Re}\alpha|<\Phi$, $\alpha_1=\Phi-\theta$, $s_2(\alpha)-\frac{1}{\alpha-\alpha_2}$ регулярна в полосе $|\operatorname{Re}\alpha|<\overline{\Phi}$, $\alpha_2=-\overline{\Phi}+\theta$. Условие (13) эквивалентно условию Мейкснера на ребре. Как обычно, задание полюса с известной главной частью равносильно описанию падающей волны.

Система уравнений (9)–(12) не может быть решена явно в общем случае. Однако, она допускает эффективное исследование редукцией к функционально-разностному уравнению второго порядка, а затем, к интегральному уравнению [1, 2].

3. Преобразование к функционально-разностному уравнению второго порядка и его упрощение

Введем обозначение $r(\alpha)=R_-(\alpha)/R_+(\alpha)$ и заметим, что $r^{-1}(-\alpha)=r(\alpha)$. После несложных преобразований из уравнений (9), (10) получаем

$$s_2(\alpha)=\frac{2s_1(\alpha+[\Phi+\overline{\Phi}])}{1-r(\alpha+\overline{\Phi})}+\frac{1+r(\alpha+\overline{\Phi})}{1-r(\alpha+\overline{\Phi})}s_1(-\alpha+[\Phi-\overline{\Phi}]). \tag{14}$$

Совершенно аналогично из уравнений (11), (12) находим

$$s_2(\alpha)=\frac{2s_1(\alpha-[\Phi+\overline{\Phi}])}{1-r^{-1}(\alpha-\overline{\Phi})}+\frac{1+r^{-1}(\alpha-\overline{\Phi})}{1-r^{-1}(\alpha-\overline{\Phi})}s_1(-\alpha-[\Phi-\overline{\Phi}]). \tag{15}$$

Как следствие уравнений (14) и (15) получаем уравнение для $s_1(\alpha)$

$$\begin{aligned}\big[\sin(\alpha+\overline{\Phi})+\sin\theta\big]s_1(\alpha+\pi)+\big[\sin(\alpha-\overline{\Phi})-\sin\theta\big]s_1(\alpha-\pi)\\ =(-1)\big\{\sin(\alpha+\overline{\Phi})s_1(-\alpha+\Phi-\overline{\Phi})\\ +\sin(\alpha-\overline{\Phi})s_1(-\alpha-\Phi+\overline{\Phi})\big\}.\end{aligned} \tag{16}$$

Если найти решение уравнения (16) в правильном классе функций, то вторая спектральная функция $s_2(\alpha)$ определится из соотношений (14) или (15). Хотя формально уравнение (16) не является функционально-разностным уравнением второго порядка, его свойства оказываются очень похожими. Удобно преобразовать уравнение (16) к более простому виду с постоянными коэффициентами в левой части. Для этого рассмотрим специальное решение $F(\alpha)$ вспомогательного уравнения

$$\big[\sin(\alpha+\overline{\Phi})+\sin\theta\big]F(\alpha+\pi)=(-1)[\sin(\alpha-\overline{\Phi})+\sin\theta]F(\alpha-\pi).$$

Нетрудно показать, что решение вспомогательного уравнения можно представить в виде

$$F(\alpha)=\frac{\chi_{\pi/2}(\alpha+\Phi-\theta)\chi_{\pi/2}(\alpha-\overline{\Phi}+\theta)}{\chi_{\pi/2}(\alpha-\Phi+\theta)\chi_{\pi/2}(\alpha+\overline{\Phi}-\theta)}, \tag{17}$$

где $\chi_{\Phi_0}(\alpha)$ специальное решение (обобщенная функция Малюжинца) функционально-разностного уравнения (см. [1, гл. 10])

$$\chi_{\Phi_0}(\alpha+2\Phi_0)/\chi_{\Phi_0}(\alpha-2\Phi_0)=\cos(\alpha/2),$$

имеющее асимптотику

$$\chi_{\Phi_0}(\alpha)\sim c_1^{\pm}e^{\mp\frac{i\alpha^2}{16\Phi_0}-\frac{\ln 2}{4\Phi_0}\alpha},\quad \alpha\to\pm\infty.$$

Построенное решение (17) является мероморфной функцией с асимптотикой

$$F(\alpha)\sim\widehat{C}_{\pm}\exp\Big[\mp\frac{i}{2\Phi}(\Phi-\overline{\Phi})\alpha\Big],\quad \alpha\to\pm i\infty.$$

Будем искать решение уравнения (16) в виде

$$s_1(\alpha)=F(\alpha)\cdot\widetilde{\Psi}(\alpha), \tag{18}$$

где $\widetilde{\Psi}(\alpha)$ – новая неизвестная функция,

$$\widetilde{\Psi}(\alpha) \sim C_{\pm} \exp\Big[\pm \frac{i}{2\Phi}(\Phi - \overline{\Phi})\alpha\Big], \quad \alpha \to \pm i\infty,$$

удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Psi}(\alpha + \pi) - \widetilde{\Psi}(\alpha - \pi) \\ &\quad = (-1)\Big\{a_{+}(\alpha)\widetilde{\Psi}(-\alpha + [\Phi - \overline{\Phi}]) - a_{-}(\alpha)\widetilde{\Psi}(-\alpha - [\Phi - \overline{\Phi}])\Big\}, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$a_{\pm}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha \pm \overline{\Phi})F(-\alpha \pm [\Phi - \overline{\Phi}])}{[\sin(\alpha \pm \overline{\Phi}) \pm \sin\theta]F(\alpha \pm \pi)},$$

$$a_{\pm}(\alpha) \sim a_{\pm}^{0} = \mathrm{const}, \quad \alpha \to \pm i\infty,$$

Оказывается полезным выделить сингулярность, отвечающую падающей поверхностной волне, представив искомую функцию $\widetilde{\Psi}(\alpha)$ в виде

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}(\alpha) &= \Psi(\alpha) + \Psi_i(\alpha), \\ \Psi_i(\alpha) &= \frac{1}{2F(\alpha_1)} \cdot \frac{1}{\sin(\frac{\alpha - \alpha_1}{2})}, \end{aligned} \tag{20}$$

причем $\Psi(\alpha)$ регулярна в полосе $|\operatorname{Re}\alpha| < \pi$. Вследствие уравнения (19), легко проверяем, что $\Psi(\alpha)$ решает неоднородное уравнение

$$\begin{aligned} &\Psi(\alpha + \pi) - \Psi(\alpha - \pi) \\ &= (-1)\left\{a_{+}(\alpha)\Psi(-\alpha + [\Phi - \overline{\Phi}]) - a_{-}(\alpha)\Psi(-\alpha - [\Phi - \overline{\Phi}])\right\} + f_i(\alpha), \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} f_i(\alpha) = &-[\Psi_i(\alpha + \pi) - \Psi_i(\alpha - \pi)] \\ &- \left\{a_{+}(\alpha)\Psi_i(-\alpha + [\Phi - \overline{\Phi}]) - a_{-}(\alpha)\Psi_i(-\alpha - [\Phi - \overline{\Phi}])\right\}. \end{aligned}$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы преобразовать (21) к интегральному уравнению второго рода, “обратив” разностный оператор в левой части уравнения (21).

4. Интегральное уравнение второго рода и аналитическое продолжение спектральной фуккции на комплексную плоскость

Предположим, что $|\operatorname{Re}\alpha| < \pi$, и преобразуем (21) в некоторое интегральное представление для $\Psi(\alpha)$ в указанной полосе. Уравнение (21) имеет вид

$$\Psi(\alpha+\pi) - \Psi(\alpha-\pi) = g(\alpha). \tag{22}$$

Представив $\Psi(\alpha) = \Psi_s(\alpha) + \Psi_a(\alpha)$ в виде суммы четной и нечетной функций, запишем уравнение (22) с помощью двух систем

$$\begin{cases} \Psi_s(\alpha+\pi) - \Psi_s(-\alpha+\pi) = g_a(\alpha), \\ \Psi_s(\alpha-\pi) - \Psi_s(-\alpha-\pi) = -g_a(\alpha), \end{cases} \tag{23}$$

и

$$\begin{cases} \Psi_a(\alpha+\pi) + \Psi_a(-\alpha+\pi) = g_s(\alpha), \\ \Psi_a(\alpha-\pi) + \Psi_a(-\alpha-\pi) = -g_s(\alpha). \end{cases} \tag{24}$$

Системы (23), (24) могут быть решены явно относительно $\Psi_{a,s}(\alpha)$ с помощью преобразования Фурье (по мнимой оси) или посредством эквивалентной техники S-интегралов [1, 3].

Опуская стандартные вычисления (см. [2, 3]), приходим к интегральному представлению в полосе $|\operatorname{Re}\alpha| < \pi$[1]

$$\begin{gathered} \Psi(-\alpha) = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{i\infty}\left[\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha+\pi}{2}\right] \\ \times \left\{a_+(\tau)\Psi(-\tau+[\Phi-\overline{\Phi}]) - a_-(\tau)\Psi(-\tau-[\Phi-\overline{\Phi}])\right\}d\tau \\ -\frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{i\infty}\left[\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha+\pi}{2}\right]f_i(\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{25}$$

Представление (25) позволяет найти $\Psi(\alpha)$ в полосе $|\operatorname{Re}\alpha| < \pi$, если известны значения $\Psi(-\tau \pm [\Phi-\overline{\Phi}])$, $\tau \in (-i\infty, i\infty)$.

Введем вектор $p(\alpha) = (p_+(\alpha), p_-(\alpha))^T$, $p_\pm(\alpha) = \Psi(-\alpha \pm \Phi - \overline{\Phi}])$. Полагая в представлении (25) $\alpha = t - [\Phi - \overline{\Phi}]$ и $\alpha = t + [\Phi - \overline{\Phi}]$, приходим к интегральному уравнению

$$p(t) = \int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\mathbb{K}(t,\tau)p(\tau)d\tau + q(t), \tag{26}$$

[1] Функция $\mathrm{const}\cdot\operatorname{tg}(\alpha/2)$ решает однородное уравнение $\widetilde{\Psi}(\alpha+\pi) - \widetilde{\Psi}(\alpha-\pi) = 0$.

$$t \in (-i\infty, i\infty), \quad q(t) = \big(q_+(t), q_-(t)\big)^T,$$

$$\mathbb{K}(t,\tau) = \frac{i}{4\pi}\begin{pmatrix} K_+(t,\tau)a_+(\tau), & -K_+(t,\tau)a_-(\tau) \\ K_-(t,\tau)a_+(\tau), & -K_-(t,\tau)a_-(\tau) \end{pmatrix},$$

$$K_\pm(t,\tau) = \left[\operatorname{tg}\frac{\widehat{t}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\widehat{t}+\tau}{2}\right]\Bigg|_{\widehat{t}=t_\mp(\Phi-\overline{\Phi})},$$

$$q_\pm(t) = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} K_\pm(t,\tau) f_i(\tau)d\tau.$$

Векторное интегральное уравнение (26) второго рода естественно исследовать в $L_2(-i\infty, i\infty)$. Однако, ядро $\mathbb{K}(t,\tau)$ уравнения не принадлежит классу Гильберта–Шмидта, поэтому напрямую фредгольмовость уравнения установить не удается. Вместо уравнения (26) можно получить эквивалентные ему уравнение, оператор которого представим в виде суммы ограниченно обратимого и компактного операторов, т.е. фредгольмов.

Уравнение (26) может быть решено численно, а результаты оказываются устойчивыми и выдерживают тестирование относительно внутренней сходимости. С помощью представления (25) находятся значения $\Psi(\alpha)$, а значит и $s_1(\alpha)$ в полосе $|\operatorname{Re}\alpha| < \pi$. Опишем процедуру аналитического продолжения спектральных функций $s_{1,2}(\alpha)$ на любую полосу, параллельную мнимой оси и, тем самым, на всю комплексную плоскость. В действительности, достаточно найти аналитическое продолжение в полосу $|\operatorname{Re}\alpha| < \pi + \Phi$,[2] так как при вычислении асимптотики дальнего поля существенны лишь седловые точки и полюса подынтегральных выражений, которые захватываются при деформации контура Зоммерфельда γ в перевальные контуры, проходящие через седловые точки $\pm\pi$ (см. рис. 2).

Если α принадлежит полосе $-\overline{\Phi} < \operatorname{Re}\alpha < 0$, то для вычисления $s_2(\alpha)$ в этой полосе используем уравнение (14), так как $s_1(\alpha)$ уже вычислено на $\{i\mathbb{R}\pm[\Phi-\overline{\Phi}]\}$ и в полосе $|\operatorname{Re}\alpha| < \pi$. Для продолжения $s_2(\alpha)$ в полосу $0 < \operatorname{Re}\alpha < \overline{\Phi}$ используем уравнение (15). Как следствие системы уравнений (9)–(12), выпишем формулы, позволяющие получить

[2] Для функции $s_2(\alpha)$ надо выполнить ее аналитическое продолжение в полосу $|\operatorname{Re}\alpha| < \pi + \overline{\Phi}$.

аналитическое продолжение $s_{1,2}(\alpha)$ на более широкие полосы

$$
\begin{aligned}
s_1(\alpha+2\Phi) &= -\frac{\sin(\alpha+\Phi)}{\sin(\alpha+\Phi)+\sin\theta}s_1(-\alpha) \\
&\quad + \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha+\Phi)+\sin\theta}s_2(\alpha+[\Phi-\overline{\Phi}]), \\
s_1(\alpha-2\Phi) &= -\frac{\sin(\alpha-\Phi)}{\sin(\alpha-\Phi)-\sin\theta}s_1(-\alpha) \\
&\quad - \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha-\Phi)-\sin\theta}s_2(\alpha-[\Phi-\overline{\Phi}]).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Если α в правой части первого уравнения (27) принадлежит полосе $-\Phi < \operatorname{Re}\alpha < \Phi$, то $\alpha + 2\Phi$ лежит в полосе $\Phi < \operatorname{Re}\alpha < 3\Phi$. Аналогично, если α в правой части второго уравнения находится в полосе $-\Phi < \operatorname{Re}\alpha < \Phi$, то аргумент в левой части $\alpha - 2\Phi$ лежит в полосе $-3\Phi < \operatorname{Re}\alpha < \Phi$. При этом, может оказаться так, что необходимо вычислить $s_2(\alpha)$ в правой части (27) в примыкающих к $\{-\overline{\Phi} < \operatorname{Re}\alpha < \overline{\Phi}\}$ полосах $\{\overline{\Phi} < \operatorname{Re}\alpha < 3\overline{\Phi}\}$ и $\{-3\overline{\Phi} < \operatorname{Re}\alpha < -\overline{\Phi}\}$. Это продолжение выполняется с помощью формул

$$
\begin{aligned}
s_2(\alpha+2\overline{\Phi}) &= -\frac{\sin(\alpha+\overline{\Phi})}{\sin(\alpha+\overline{\Phi})+\sin\theta}s_1(-\alpha) \\
&\quad + \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha+\overline{\Phi})+\sin\theta}s_1(\alpha-[\Phi-\overline{\Phi}]), \\
s_2(\alpha-2\overline{\Phi}) &= -\frac{\sin(\alpha-\overline{\Phi})}{\sin(\alpha-\overline{\Phi})-\sin\theta}s_1(-\alpha) \\
&\quad - \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha-\overline{\Phi})-\sin\theta}s_1(\alpha+[\Phi-\overline{\Phi}]).
\end{aligned}
$$

Если параметр $\overline{\Phi}$ достаточно мал, то может потребоваться дальнейшее продолжение $s_2(\alpha)$ в полосы $3\overline{\Phi} < \operatorname{Re}\alpha < 5\overline{\Phi}$ и $5\overline{\Phi} < \operatorname{Re}\alpha < -3\overline{\Phi}$. Считая, что α лежит в полосе $-\overline{\Phi} < \operatorname{Re}\alpha < \overline{\Phi}$, такое продолжение осуществляется с помошью формул[3]

$$
\begin{aligned}
s_2(\alpha+4\overline{\Phi}) = {} & \frac{\sin(3\overline{\Phi}+\alpha)}{\sin(3\overline{\Phi}+\alpha)+\sin\theta}\,\frac{\sin(\alpha+\overline{\Phi})}{\sin(\alpha+\overline{\Phi})+\sin\theta}\,s_2(\alpha) \\
& - \frac{\sin(3\overline{\Phi}+\alpha)}{\sin(3\overline{\Phi}+\alpha)+\sin\theta}\,\frac{\sin\theta}{\sin(\alpha+\overline{\Phi})+\sin\theta}\,s_1(-\alpha+[\Phi-\overline{\Phi}]) \\
& + \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha+3\overline{\Phi})+\sin\theta}\,s_1(\alpha-[\Phi-3\overline{\Phi}]), \\
& \qquad\qquad\qquad \alpha\in\{-\overline{\Phi}<\operatorname{Re}\alpha<\overline{\Phi}\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_2(\alpha-4\overline{\Phi}) = {} & \frac{\sin(\alpha-3\overline{\Phi})}{\sin(\alpha-3\overline{\Phi})-\sin\theta}\,\frac{\sin(\alpha-\overline{\Phi})}{\sin(\alpha-\overline{\Phi})-\sin\theta}\,s_2(\alpha) \\
& + \frac{\sin(\alpha-3\overline{\Phi})}{\sin(\alpha-3\overline{\Phi})-\sin\theta}\,\frac{\sin\theta}{\sin(\alpha-\overline{\Phi})-\sin\theta}\,s_1(-\alpha-[\Phi-\overline{\Phi}]) \\
& - \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha-3\overline{\Phi})-\sin\theta}\,s_1(\alpha+[\Phi-3\overline{\Phi}]), \\
& \qquad\qquad\qquad \alpha\in\{-\overline{\Phi}<\operatorname{Re}\alpha<\overline{\Phi}\}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что формулы для дальнейшего продолжения также легко выписываются, хотя становятся все более громоздкими.

5. Расчет диаграммы рассеяния цилиндрической волны от ребра. Отраженные и прошедшие поверхностные волны

Наиболее важной характеристикой волны (3), рассеянной ребром структуры, является диаграмма рассеяния $D_{1,2}(\varphi)$. Если применить метод перевала к интегралам Зоммерфильда (8), деформируя контуры интегрирования (рис. 2) в перевальные [1], то получаем выражения (см. (3))

$$
\begin{aligned}
D_1(\varphi) &= s_1(-\pi+\varphi)-s_1(\pi+\varphi), \quad |\varphi|\leqslant\Phi, \\
D_2(\varphi) &= s_2(-\pi+\varphi)-s_2(\pi+\varphi), \quad |\overline{\varphi}|\leqslant\overline{\Phi}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

При деформации контура интегрирования пересекаются полюсы спектральных функций, которые определяют падающую, отраженную и прошедшую поверхностные волны. В случае общего положения

[3]Фактически, это итерация формул, использованных выше.

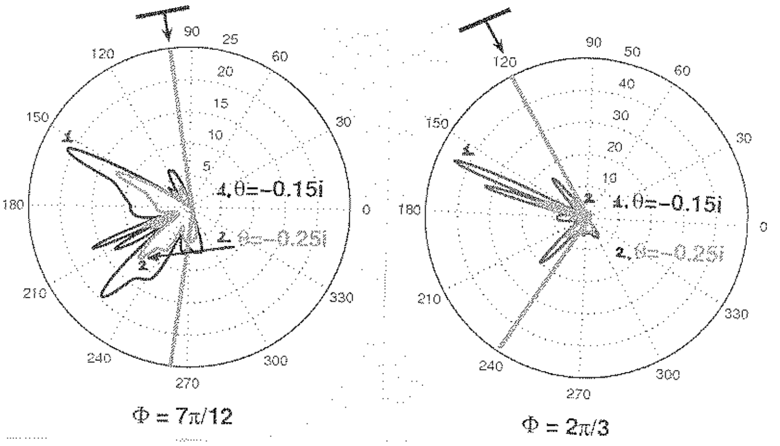

Рис. 3.

эти полюсы не могут находиться в окрестности точек перевала $\pm\pi$, поэтому формулы (28) равномерны по углу наблюдения φ.

На рис. 3 представлены результаты расчета модуля диаграммы $|D_{1,2}(\varphi)|$ для двух различных углов излома и двух импедансов $(\sin\theta)/2$. Расчеты основаны на численном решении интегрального уравнения (26) и процедуре аналитического продолжения, описанной выше.

Рассмотрим случай $\pi/2 < \Phi < 3\pi/4$, $\pi/4 < \overline{\Phi} < \pi/2$, тогда при деформации контура Зоммерфельда в перевальные контуры два полюса $\alpha_1^\pm = \pm(\pi + \Phi + \theta)$ спектральной функции $s_1(\alpha)$ и два полюса $\alpha_2^\pm = \pm(\pi+\overline{\Phi}+\theta)$ функции $s_2(\alpha)$ могут быть захвачены, помимо полюсов, отвечающих падающей волне. При этом, полюсы $\alpha_{1,2}^+$ определяют отраженную от ребра поверхностную волну по теореме о вычетах

$$u_1^s(kr,\varphi) = \operatorname*{res}_{\alpha_1^+} s_1(\alpha)\, e^{ikr\cos[\Phi+\theta-\varphi]}, \quad 0 \leqslant \Phi - \varphi \leqslant \operatorname{gd}(\operatorname{Im}\theta) - \operatorname{Re}\theta,$$
$$u_2^s(kr,\varphi) = \operatorname*{res}_{\alpha_2^+} s_2(\alpha)\, e^{ikr\cos[\overline{\varphi}-\overline{\Phi}-\theta]}, \quad 0 \leqslant \overline{\Phi} - \overline{\varphi} \leqslant -\operatorname{gd}(\operatorname{Im}\theta) - \operatorname{Re}\theta,$$

и прошедшую волну

$$u_1^s(kr,\varphi) = \operatorname*{res}_{\alpha_1^-} s_1(\alpha)\, e^{ikr\cos[-\Phi-\theta-\varphi]}, \quad 0 \leqslant \Phi+\varphi < -\mathrm{gd}\,(\mathrm{Im}\,\theta) - \mathrm{Re}\,\theta,$$

$$u_2^s(kr,\varphi) = \operatorname*{res}_{\alpha_2^-} s_2(\alpha)\, e^{ikr\cos[\overline{\varphi}+\theta+\overline{\Phi}]}, \qquad 0 \leqslant \overline{\Phi}+\overline{\varphi} \leqslant -\mathrm{gd}\,(\mathrm{Im}\,\theta) - \mathrm{Re}\,\theta,$$

где $\mathrm{gd}\,(x) = \mathrm{sign}\,(x)\arccos\,(1/\mathrm{ch}\,x)$, $\mathrm{Re}\,\theta \geqslant 0$. Поверхностные волны распространяются вдоль $\Gamma_\pm$ от ребра ($\mathrm{Re}\,\theta = 0$) со скоростью $c^* = c/\mathrm{ch}\,|\theta|$, c – скорость электромагнитных волн в $\Omega_{1,2}$, и экспоненциально затухают при удалении от $\Gamma_\pm$. Если величина $\overline{\Phi}$ достаточно мала, то число захваченных полюсов растет, а исследование отраженных и прошедших поверхностных волн усложняется. В частности, при достаточно большом количестве полюсов возникает специфическая интерференционная картина в Ω_2, которая требует дополнительного изучения.

В данной работе мы рассмотрели дифракцию поверхностной волны, однако, рассеяние плоской падающей волны на изломе тонкого слоя может быть исследовано вполне аналогично.

Литература

1. V. M. Babich, M. A. Lyalinov, V. E. Grikurov, *Diffraction Theory: The Sommerfeld–Malyuzhinets Technique.* Alpha Acience Int., Oxford, 2008.
2. M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu, *Diffraction of a skew incident plane electromahnetic wave by an impedance wedge.* — Wave Motion **44** (2006), 21–43.
3. M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu, *A solution proceduce for second-order difference equations and its application to electromagnetic-wave diffraction in a wedge-shaped region.* — Proc. Roy. Soc. Lond. **A459** (2003), 3159–3180.

Grikurov V. E., Lyalinov M. A. Diffraction of an H-polarized surface wave by an abgular break of a thin dielectric slab.

This paper reports the recent advance in applications of the Sommerfeld–Malyuzhinets technique to the diffraction problem of a surface wave by an angular break of a thin material slab. The solution is represented by the Sommerfeld intergrals which are then substituted into the boundary conditions. The unknown spectral functions satisfy coupled Malyuzhinets functional equations. The latter are then reduced to the Fredholm second kind integral equations which are solved numerically. The scattering diagram of the cylindrical wave arising from the edge of the structure is computed.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 24 марта 2008 г.