Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 354, 2008 г.

А. С. Благовещенский, Д. А. Федоренко

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ В СЛАБО ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

1. Введение

В данной работе рассматривается динамическая обратная задача для уравнения акустики в среде со слабо горизонтальной неоднородностью в полупространстве $z > 0$. Постановка задачи:

$$\mathrm{A}u_{tt} - \frac{\partial}{\partial z} B u_z - \frac{\partial}{\partial x} B u_x = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{u} \mid_{t<0} = 0, \tag{2}$$

$$\mathrm{u}|_{z=0} = \delta(x)\delta(t), \tag{3}$$

$$\mathrm{u}_z \mid_{z=0} = R(t, x), \tag{4}$$

где коэффициенты A и B слабо зависят от горизонтальной переменной x:

$$\mathrm{A} = A(z, \varepsilon x) = A_0(z) + \varepsilon x A_1(z) + \dots\,, \tag{5}$$

$$\mathrm{B} = B(z, \varepsilon x) = B_0(z) + \varepsilon x B_1(z) + \dots\,, \tag{6}$$

здесь ε – малый параметр, R – данные обратной задачи (отклик).

В данной работе мы построим метод отыскания A_0, B_0, A_1, и B_1.

Уравнение (1) возникает при описании целого ряда волновых процессов, встречающихся в физике, в частности, при распространении звука. В последнем случае u имеет физический смысл давления, $A = 1/(\rho c^2)$, $B = 1/\rho$, где ρ – плотность среды, c — скорость звука (см. [4]).

Из дальнейших рассуждений будет видно, что A_0 и B_0 могут быть найдены с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^2)$ (это уже известный результат).

Работа выполнена при поддержке гранта НШ-5403.2006.1б.

Основной результат данной работы состоит в том, что удалось построить метод нахождения A_1 и B_1 с точностью до поправки, имеющей порядок $O(\varepsilon^2)$. По-видимому, аналогичным способом можно отыскать A_2, B_2 и т.д., но в том случае, если известно разложение отклика по степеням ε. Однако в приложениях зависимость данных обратной задачи от ε неизвестна. Тем самым, в рамках построенного метода, максимум, что мы можем найти, – это A_0, B_0, A_1, B_1 с указанной выше точностью.

Нетрудно понять, что при данных (4) обратная задача является переопределенной, что дает возможность отказаться от части информации, заключенной в $R(t,x)$. В зависимости от того, какая часть информации используется, возможны разные варианты постановки обратной задачи. Возможно ограничиваться заданием нескольких первых моментов функции $R(t,x)$, т.е. интегралов вида $\int R\,(t,x)x^k dx$. Такого рода обратные задачи рассматривались раньше (см. [1, 2]). В [1] рассматривается волновое уравнение с потенциалом: $u_{tt} - u_{xx} - u_{zz} + qu = 0$, где потенциал q предполагается той же структуры, что и коэффициенты A и B. В работе [2] построен метод восстановления A_0, B_0, A_1, B_1 для уравнения акустики (1) по первым четырем моментам функции R.

В нашей работе рассматривается задача восстановления тех же самых коэффициентов по заданному преобразованию Фурье от R по x при двух фиксированых значениях двойственной к x переменной.

На практике, можно применить указанное построение для нескольких выбранных пар значений двойственной к x переменной. Тогда, во-первых, можно контролировать применимость модели слабо горизонтальной неоднородности для исследуемой среды. Если при использовании различных пар значений спектрального параметра получаются близкие значения коэффициентов (точно совпадающими они быть не могут в связи с приближенным заданием данных обратной задачи), то исследуемая среда хорошо отвечает данной моделе и наоборот. Во-вторых, можно использовать различные методы усреднения результатов по парам значений двойственной к x переменной для повышения точности метода.

2. Сведение задачи к цепочке одномерных обратных задач методом преобразования Фурье

Решение прямой задачи (1)–(3) ищем в виде ряда по степеням ε:

$$u = u_0(t,z,x) + \varepsilon u_1(t,z,x) + \dots . \tag{7}$$

Подставляя это разложение в уравнение (1) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим в итоге рекурентную систему уравнений, из которых находится u_0, u_1 и т.д. Тогда, очевидно, отклик будет иметь такую же структуру:

$$R = R_0(t,x) + \varepsilon R_1(t,x) + \dots . \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что u_k (а, следовательно, и R_k) – чётные функции по x при чётных k и нечётные – при нечётных k. Тем самым, по известной функции $R(t,x)$ можно найти $R_0(t,x)$ и $R_1(t,x)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$R_0(t,x) = \frac{R(t,x) + R(t,-x)}{2}, \quad R_1(t,x) = \frac{R(t,x) - R(t,-x)}{2}. \tag{9}$$

Перейдём к решению задачи. Сделаем несколько вспомогательных замен (см. [2, 3]):

$$\begin{gathered} y = \int\limits_0^z \frac{dz}{c(z)}, \quad c(y) = \sqrt{\frac{B_0(y)}{A_0(y)}}, \\ C = c^2, \quad \sigma(y) = \sqrt{B_0(y)A_0(y)}, \end{gathered} \tag{10}$$

$$q(y) = \frac{(\sqrt{\sigma})''}{\sqrt{\sigma}}, \quad \alpha(y) = \frac{A_1(y)}{A_0(y)}, \quad \beta(y) = \frac{B_1(y)}{B_0(y)}, \tag{11}$$

$$y \to y + \varepsilon x m(y), \quad x \to x + \varepsilon n(y), \tag{12}$$

$$m(y) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^y \beta(s)ds, \quad n(y) = -\int\limits_0^y C(s)m(s)ds, \tag{13}$$

$$v = \sqrt{\sigma} u. \tag{14}$$

Тогда исходное уравнение (1) перепишется в виде:

$$v_{tt} - v_{yy} + qv - Cv_{xx} = \varepsilon\Omega[v] + \dots , \tag{15}$$

$$\Omega[v] = -\alpha x v_{tt} + xD_1 v_{xx} + xD_2 v_y + D_3 v_x - x\frac{\sigma'}{2\sigma}D_2 v, \tag{16}$$

$$D_1 = C\beta - mC', \;\; D_2 = \frac{(\beta\sigma)'}{2\sigma} - m\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)', \;\; D_3 = \frac{3}{2}C\beta - m\frac{(C\sigma)'}{\sigma}. \tag{17}$$

Здесь многоточием обозначены члены более высокого порядка по ε.

Теперь представляем v в форме $v_0+\varepsilon v_1+\cdots$ и подставляем в уравнение (15). Тогда для v_0 и v_1 соответственно получается:

$$v_{0tt}-v_{0yy}+qv_0-Cv_{0xx}=0, \tag{18}$$

$$v_0|_{t<0}=0, \tag{19}$$

$$v_0|_{y=0}=\delta(x)\delta(t), \tag{20}$$

$$v_{0y}|_{y=0}=R_0(t,x)+\sigma'(0)\delta(x)\delta(t). \tag{21}$$

$$v_{1tt}-v_{1yy}+qv_1-Cv_{1xx}=\Omega[v_0], \tag{22}$$

$$v_1|_{t<0}=0, \tag{23}$$

$$v_1|_{y=0}=0, \tag{24}$$

$$v_{1y}|_{y=0}=R_1(t,x)+\frac{1}{2}x\beta(0)R_0(t,x). \tag{25}$$

Перейдя к преобразованию Фурье по x, получаем:

$$\widetilde{v}_{0tt}-\widetilde{v}_{0yy}+q_1\widetilde{v}_0=0, \tag{26}$$

$$\widetilde{v}_0|_{t<0}=0, \tag{27}$$

$$\widetilde{v}_0|_{y=0}=\delta(t), \tag{28}$$

$$\widetilde{v}_{0y}|_{y=0}=\widetilde{R}_0(\xi,t)+\sigma'(0)\delta(t), \tag{29}$$

где $q_1(y,\xi)=q(y)+\xi^2C(y)$.

Здесь и в дальнейшем будем считать, без ограничения общности, что $C(0)=1$ и $\sigma(0)=1$.

Задача (26)–(29) – это обратная задача для уравнения струны, методы решения которой известны (см., например, [3]). Из неё мы получаем q_1. Но q_1 зависит от произвольного параметра ξ. Следовательно, решая обратную задачу (26)–(29) для двух разных значений этого параметра, получим систему двух линейных уравнений на q и C с ненулевым детерминантом. В дальнейшем будем считать, что C и σ нам известны.

Далее

$$\widetilde{v}_{1tt} - \widetilde{v}_{1yy} + q_1\widetilde{v}_1 = \\ = \alpha\widetilde{v}_{0tt\xi} + D_1(\xi^2\widetilde{v}_0)_\xi - D_2\widetilde{v}_{0y\xi} - \xi D_3\widetilde{v}_0 + \frac{\sigma'}{2\sigma}D_2\widetilde{v}_{0\xi} \equiv \widetilde{\Omega}, \tag{30}$$

$$\widetilde{v}_1|_{t<0} = 0, \tag{31}$$

$$\widetilde{v}_1|_{y=0} = 0, \tag{32}$$

$$v_{1y}|_{y=0} = \widetilde{R}_1(t,\xi) - \frac{1}{2}\beta(0)\widetilde{R}_0(t,\xi). \tag{33}$$

(Здесь сделаны замены $\widetilde{v}_1 \to i\widetilde{v}_1$, $\widetilde{R}_1 \to i\widetilde{R}_1$.)

Таким образом, вопрос отыскания α и β свёлся к одномерной обратной задаче (30)–(33), где неизвестные функции входят линейно в правую часть уравнения (30). В дальнейшем будем считать заданными значения $\beta(0)$ и $\alpha'(0) + \beta'(0)$.

3. Функция Грина и вспомогательные утверждения

Введём функцию Грина $G(t,\eta,y,\xi)$,[1] определив её как решение задачи:

$$G_{tt} - G_{yy} + q_1 G = \delta(t)\delta(y-\eta), \tag{34}$$

$$G|_{y=0} = 0, \quad G|_{t<0} = 0, \tag{35}$$

где η – положительный параметр. Тогда для $\widetilde{v}_1$ имеем представление через G

$$\widetilde{v}_1 = \iint d\tau d\eta G(t-\tau,\eta,y)\widetilde{\Omega}(\tau,\eta,\xi), \tag{36}$$

откуда

$$\widetilde{v}_{1y}|_{y=0} = \widetilde{R}_1(t,\xi) - \frac{1}{2}\beta(0)\widetilde{R}_0(t,\xi) = \iint d\tau d\eta G_y(t-\tau,\eta,0)\widetilde{\Omega}(\tau,\eta,\xi) \\ = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5, \tag{37}$$

где

$$U_1 \equiv \iint d\tau d\eta G_y(t-\tau,\eta,0)\alpha(\eta)\widetilde{v}_{0tt\xi}(\tau,\eta,\xi), \tag{38}$$

[1] G зависит от четырёх аргументов: t, η, y, ξ, однако, в дальнейшем зависимость функции Грина от ξ специально указывать не будем.

$$U_2 = \xi \iint d\tau d\eta G_y(t-\tau,\eta,0)(2D_1(\eta) - D_3(\eta))\widetilde{v}_0(\tau,\eta,\xi), \tag{39}$$

$$U_3 = \xi^2 \iint d\eta d\tau G_y(t-\tau,\eta,0)D_1(\eta)\widetilde{v}_{0\xi}(\tau,\eta,\xi), \tag{40}$$

$$U_4 = -\iint d\tau d\eta G_y(t-\tau,\eta,0)D_2(\eta)\widetilde{v}_{0\xi\eta}(\tau,\eta,\xi), \tag{41}$$

$$U_5 = \iint d\tau d\eta G_y(t-\tau,\eta,0)D_2(\eta)\left(\frac{\sigma'}{2\sigma}\right)(\eta)\widetilde{v}_{0\xi}(\tau,\eta,\xi). \tag{42}$$

Формула (37) – это соотношение, в которое линейным образом входят неизвестные функции α и β. В дальнейшем мы сведём его к интегро-дифференциальным уравнениям для α и β. Однако, предварительно мы сформулируем несколько утверждений, несложные доказательства которых мы позволим себе опустить.

(a) G представима в виде $G = G_0 + g$, где G_0 – свободная функция Грина, отвечающая задаче:

$$G_{0tt} - G_{0yy} = \delta(t)\delta(y-\eta), \tag{43}$$

$$G_0|_{y=0} = 0, \quad G_0|_{t<0} = 0. \tag{44}$$

g – всюду непрерывная функция, обращающаяся в ноль на характеристиках $t = \pm(y-\eta)$, и удовлетворяющая интегральному уравнению:

$$g(t,\eta,y,\xi) = -\iint G_0(t-\tau,\eta_1,y)q_1(\eta_1)G_0(\tau,\eta,\eta_1)d\tau d\eta$$

$$-\iint g(\tau,\eta_1,y,\xi)q_1(\eta_1,\xi)G_0(t-\tau,\eta,\eta_1)d\tau d\eta_1. \tag{45}$$

(b) $G_y(t,\eta,0) = \widetilde{v}_0(t,\eta,\xi)$.

$\widetilde{v}_0$ имеет следующее представление по сингулярностям:

$$\widetilde{v}_0(t,y,\xi) = \delta(t-y) + w_1(t,y,\xi), \tag{46}$$

где

$$w_1(t,y,\xi) = \nu(y,\xi)\theta(t-y) + \mu(y,\xi)(t-y)_+ + w(t,y,\xi), \tag{47}$$

$$\nu(y,\xi) = -\frac{1}{2}\int_0^y d\eta q_1(\eta,\xi), \tag{48}$$

$$\mu(y,\xi) = -\frac{1}{4}(q_1(y,\xi) - q_1(0,\xi)) - \frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta q_1(\eta,\xi)\nu(\eta,\xi), \tag{49}$$

$w(t,y,\xi)$ – непрерывная функция, имеющая две кусочно-непрерывные производные, равная нулю при $t \le y$; для $w(t,y,\xi)$ справедливо интегральное представление:

$$w(t,y,\xi) = \iint d\tau d\eta G_0(t-\tau,\eta,y)q_2(\eta,\xi)(\tau-\eta)_+$$

$$+ \iint d\tau d\eta g(t-\tau,\eta,y,\xi)q_2(\eta,\xi)(\tau-\eta)_+, \tag{50}$$

$$q_2(y,\xi) = \mu''(y,\xi) - q_1(y,\xi)\mu(y,\xi). \tag{51}$$

Здесь $\mu''(y,\xi) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\mu(y,\xi)$.[2]

Из (51) следует, что

$$w(t,y,\xi) \cong \frac{1}{4}q_2(0,\xi)(t-y)_+^2 y + O(t^4) \quad t \sim 0. \tag{52}$$

4. Интегро-дифференциальные уравнения. Частный случай

В этом параграфе мы рассмотрим частный случай задачи, предполагая, что $C = 1$ и $\sigma = 1$. В этом случае изложение, связанное с выводом интегро-дифференциальных уравнений для α и β существенно упрощается в техническом смысле, однако все основные аналитические моменты вычислений остаются такими же, как и в случае переменных C и σ. Разумеется, все рассуждения предыдущих параграфов справедливы и тогда, когда $C = 1$ и $\sigma = 1$.

Итак, подставляя представления для $G_y|_{y=0}$ и $\widetilde{v}_0$ из предыдущего параграфа в соотношения (38)–(42) и используя представление (47) имеем

$$U_1 = \iint d\tau d\eta \widetilde{v}_0(t-\tau,\eta,\xi)\alpha(\eta)\widetilde{v}_{0\tau\tau\xi}(\tau,\eta,\xi)$$

[2]В дальнейшем, для удобства, введём следующие обозначения: если некоторая функция f зависит от двух аргументов, последним из которых является ξ, то f' – это производная по первому аргументу, например, $f'(y,\xi) := \frac{\partial}{\partial y}f(y,\xi)$, если же f зависит не от двух, а от трёх аргументов, последним из которых является ξ, то под f' будем понимать производную по второму аргументу, например, $f'(t-\eta,\eta,\xi) := \left(\frac{\partial}{\partial \eta}f(\tau,\eta,\xi)\right)|_{\tau=t-\eta}$, если же функция f зависит только от одного аргумента, тогда f' – это просто производная по этому аргументу.

$$= \iint \Big(\delta(t-\tau-\eta) + w_1(t-\tau,\eta,\xi)\Big)\alpha(\eta),$$

$$\Big(\nu_\xi(\eta,\xi)\delta'(\tau-\eta) + \mu_\xi(\eta,\xi)\delta(\tau-\eta) + w_{\tau\tau\xi}(\tau,\eta,\xi)\Big)d\tau d\eta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\alpha\Big(\frac{t}{2}\Big)\nu_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big)\Big) + \frac{1}{2}\mu_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big)\alpha\Big(\frac{t}{2}\Big) + \int\limits_0^{t/2} d\eta w_{tt\xi}(t-\eta,\eta,\xi)\alpha(\eta)$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int\limits_0^{t/2} d\eta\alpha(\eta)\nu_\xi(\eta,\xi)w_1(t-\eta,\eta,\xi)\Big)$$

$$+\int\limits_0^{t/2} d\eta\alpha(\eta)[w_1(t-\eta,\eta,\xi)\mu_\xi(\eta,\xi) + \int\limits_\eta^{t-\eta} d\tau w_1(t-\tau,\eta,\xi)w_{\tau\tau\xi}(\tau,\eta,\xi)]$$

$$= \frac{1}{4}\alpha'\Big(\frac{t}{2}\Big)\nu_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big) + E_1\Big(\frac{t}{2},\xi\Big)\alpha\Big(\frac{t}{2}\Big) + \int\limits_0^{\frac{t}{2}} d\eta\alpha(\eta)H_1(t,\eta,\xi), \qquad (53)$$

где

$$E_1\Big(\frac{t}{2},\xi\Big) := \frac{1}{4}\nu'_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big) + \frac{1}{2}\mu_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big) + \frac{1}{2}\nu_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big)\nu\Big(\frac{t}{2},\xi\Big),$$

$$H_1(t,\eta,\xi) := w_{tt\xi}(t-\eta,\eta,\xi) + \nu_\xi(\eta,\xi)w_{1t}(t-\eta,\eta,\xi)$$

$$+w_1(t-\eta,\eta,\xi)\mu_\xi(\eta,\xi) + \int\limits_\eta^{t-\eta} d\tau w_1(t-\tau,\eta,\xi)w_{\tau\tau\xi}(\tau,\eta,\xi). \qquad (54)$$

$$U_2 = \iint d\tau d\eta \widetilde{v}_0(t-\tau,\eta,\xi)\beta(\eta)\widetilde{v}_0(\tau,\eta,\xi)$$

$$= \frac{\xi}{2}\iint \beta(\eta)\big(\delta(t-\tau-\eta) + w_1(t-\tau,\eta,\xi)\big)\big(\delta(\tau-\eta) + w_1(\tau,\eta,\xi)\big)d\tau d\eta$$

$$= \frac{\xi}{4}\beta(t/2) + \xi\int\limits_0^{\frac{t}{2}} d\eta\beta(\eta)H_2(t,\eta,\xi), \qquad (55)$$

где

$$H_2(t,\eta,\xi) := w_1(t-\eta,\eta,\xi) + \frac{1}{2}\int\limits_{\eta}^{t-\eta} d\tau w_1(t-\tau,\eta,\xi)w(\tau,\eta,\xi). \tag{56}$$

$$U_3 = \xi^2 \iint d\eta d\tau \beta(\eta)\widetilde{v}_0(t-\tau,\eta,\xi)\widetilde{v}_{0\xi}(\tau,\eta,\xi)$$

$$= \xi^2 \iint d\eta d\tau \beta(\eta)\left(\delta(t-\tau-\eta) + w_1(t-\tau,\eta,\xi)\right) w_{1\xi}(\tau,\eta,\xi)$$

$$= \xi^2 \int\limits_0^{t/2} d\eta \beta(\eta) H_3(t,\eta,\xi). \tag{57}$$

Здесь

$$H_3(t,\eta,\xi) := w_{1\xi}(t-\eta,\eta,\xi) + \int\limits_{\eta}^{t-\eta} d\tau w_1(t-\tau,\eta,\xi)w_{1\xi}(\tau,\eta,\xi), \tag{58}$$

$$U_4 = -\frac{1}{2}\iint d\eta d\tau \beta'(\eta)\widetilde{v}_0(t-\tau,\eta,\xi)\widetilde{v}_{0\xi\eta}(\tau,\eta,\xi)$$

$$= -\frac{1}{2}\iint \beta'(\eta)\left(\delta(t-\tau-\eta) + w_1(t-\tau,\eta,\xi)\right) w'_{1\xi}(\tau,\eta,\xi))d\eta d\tau$$

$$= \frac{1}{4}\beta'\Big(\frac{t}{2}\Big) w_{1\xi}\Big(\frac{t}{2},\frac{t}{2},\xi\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{t}{2}} d\eta \beta'(\eta)(w_1(t-\eta,\eta,\xi)w_{1\xi}(\eta,\eta,\xi) - w'_{1\xi}(t-\eta,\eta,\xi))$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{t}{2}} d\eta \beta'(\eta)\int\limits_{\eta}^{t-\eta} d\tau w_1(t-\tau,\eta,\xi)w'_{1\xi}(\tau,\eta,\xi) = \frac{1}{4}\beta'\Big(\frac{t}{2}\Big)\nu_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\beta\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big(\nu\Big(\frac{t}{2},\xi\Big)\nu_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big) - nu'_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big)\Big) + \frac{1}{2}\beta(0)w'_{1\xi}(t,0,\xi)$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{t}{2}} d\eta\beta(\eta)\big[(w_1(t-\eta,\eta,\xi)\nu_\xi(\eta,\xi))_\eta - w'_{1\xi\eta}(t-\eta,\eta,\xi)\big]\\
&\quad+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{t}{2}} d\eta\beta(\eta)\Bigg(\int\limits_\eta^{t-\eta} d\tau w_1(t-\tau,\eta,\xi)w'_{1\xi}(\tau,\eta,\xi)\Bigg)_\eta\\
&= \frac{1}{4}\beta'\Big(\frac{t}{2}\Big)\nu_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big) + \beta\Big(\frac{t}{2}\Big)E_2\Big(\frac{t}{2},\xi\Big) + \frac{1}{2}\beta(0)R_{0\xi}(t,\xi)\\
&\qquad+\int\limits_0^{t/2} d\eta\beta(\eta)H_4(t,\eta,\xi),
\end{aligned}
\tag{59}
$$

где

$$
\begin{aligned}
E_2\Big(\frac{t}{2},\xi\Big) &:= \frac{1}{2}\Big(\nu\Big(\frac{t}{2},\xi\Big)\nu_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big) - \nu'_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big)\Big),\\
H_4(t,\eta,\xi) &:= \frac{1}{2}\Bigg[(w'_{1\xi\eta}(t-\eta,\eta,\xi) - (w_1(t-\eta,\eta,\xi)\nu_\xi(\eta,\xi))_\eta\\
&\qquad -\Bigg(\int\limits_\eta^{t-\eta} d\tau w_1(t-\tau,\eta,\xi)w'_{1\xi}(\tau,\eta,\xi)\Bigg)_\eta\Bigg].
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Слагаемое U_5 в случае постоянных C и σ равно нулю. В итоге получаем:

$$
\begin{aligned}
&\xi P_1(t)(\alpha'(t)+\beta'(t)) + \xi^3 P_2(t)(\alpha(t)+\beta(t)) + \xi P_3\alpha(t) + \xi P_4\beta(t)\\
&\quad+\int\limits_0^t K(2t,\eta,\xi)\alpha(\eta)d\eta + \int\limits_0^t L(2t,\eta,\xi)\beta(\eta)d\eta\\
&\quad= \widetilde{R}_1(2t,\xi) - \beta(0)\widetilde{R}_0(2t,\xi) \equiv r(t,\xi),
\end{aligned}
\tag{61}
$$

где

$$
P_1(t) = -\frac{1}{4}t,\quad P_2(t) = \frac{1}{2}t^2,\quad P_3 = -\frac{1}{4},\quad P_4 = \frac{3}{4}. \tag{62}
$$

K и L – непрерывные ядра следующего вида

$$
K(t,\eta,\xi) = H_1(t,\eta,\xi), \tag{63}
$$

$$
L(t,\eta,\xi) = H_2(t,\eta,\xi) + H_3(t,\eta,\xi) + H_4(t,\eta,\xi). \tag{64}
$$

5. Интегро-дифференциальные уравнения. Общий случай

В этом параграфе мы будем рассматривать формулы (38)–(42) в случае общего положения, когда C и σ уже не являются константами. Оказывается, вывод интегро-дифференциальных уравнений в общем случае довольно легко сводится к результатам вычислений предыдущего параграфа. А именно, легко видеть, что вычисления для U_1, (53), (54) полностью переносятся на общий случай. Далее, используя (55), (56), и учитывая, что

$$2D_1(\eta) - D_3(\eta) = \frac{1}{2}\left(C(\eta)\beta(\eta) + \sigma(\eta)\left(\frac{C}{\sigma}\right)'(\eta)\int\limits_0^\eta \beta(s)ds\right),$$

имеем

$$U_2 = \frac{\xi}{4}\left(C(\frac{t}{2})\beta\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma(\frac{t}{2})\left(\frac{C}{\sigma}\right)'\left(\frac{t}{2}\right)\int\limits_0^{\frac{t}{2}} \beta(s)ds\right)$$

$$+\xi\int\limits_0^{\frac{t}{2}} d\eta H_2(t,\eta,\xi)\left(C(\eta)\beta(\eta) + \sigma(\eta)\Big(\frac{C}{\sigma}\Big)'(\eta)\int\limits_0^\eta \beta(s)ds\right)$$

$$= \frac{\xi}{4}C\Big(\frac{t}{2}\Big)\beta\Big(\frac{t}{2}\Big) + \xi\int\limits_0^{\frac{t}{2}} d\eta\beta(\eta)H_{21}(t,\eta,\xi), \tag{65}$$

где

$$H_{21}(t,\eta,\xi) := \frac{1}{4}\sigma(\frac{t}{2})\Big(\frac{C}{\sigma}\Big)'\Big(\frac{t}{2}\Big) + C(\eta)H_2(t,\eta,\xi)$$

$$+\int\limits_\eta^{\frac{t}{2}} ds\sigma(s)\Big(\frac{C}{\sigma}\Big)'(s)H_2(t,s,\xi). \tag{66}$$

Аналогично, для U_3 получаем:

$$U_3 = \xi^2\int\limits_0^{t/2} d\eta\left(C(\eta)\beta(\eta) + \frac{1}{2}C'(\eta)\int\limits_0^\eta \beta(s)ds\right)H_3(t,\eta,\xi)$$

$$= \xi^2 \int\limits_0^{t/2} d\eta \beta(\eta) H_{31}(t,\eta,\xi), \tag{67}$$

где

$$H_{31}(t,\eta,\xi) := C(\eta) H_3(t,\eta,\xi) + \frac{1}{2} \int\limits_{\eta}^{\frac{t}{2}} ds C'(s) H_3(t,s,\xi). \tag{68}$$

Теперь, если принять во внимание, что

$$D_2(\eta) = \frac{1}{2} \Big(\beta(\eta) + \frac{\sigma'}{\sigma}(\eta) \int\limits_0^{\eta} \beta(s) ds \Big)',$$

то, используя вычисления (59), (60), получаем:

$$U_4 = \frac{1}{4} \Big(\beta(\eta) + \frac{\sigma'}{\sigma}(\eta) \int\limits_0^{\eta} \beta(s) ds \Big)' |_{\eta=\frac{t}{2}} \nu_\xi \Big(\frac{t}{2}, \xi\Big)$$

$$+ \Big(\beta\Big(\frac{t}{2}\Big) + \frac{\sigma'}{\sigma}\Big(\frac{t}{2}\Big) \int\limits_0^{\frac{t}{2}} \beta(s) ds \Big) E_2\Big(\frac{t}{2}, \xi\Big) + \frac{1}{2} \beta(0) R_{0\xi}(t,\xi)$$

$$+ \int\limits_0^{t/2} d\eta \Big(\beta(\eta) + \frac{\sigma'}{\sigma}(\eta) \int\limits_0^{\eta} \beta(s) ds \Big) H_4(t,\eta,\xi)$$

$$= \frac{1}{4} \beta'\Big(\frac{t}{2}\Big) \nu_\xi \Big(\frac{t}{2}, \xi\Big)$$

$$+ \beta\Big(\frac{t}{2}\Big) E_{21}\Big(\frac{t}{2}, \xi\Big) + \int\limits_0^{t/2} d\eta \beta(\eta) H_{41}(t,\eta,\xi), \tag{69}$$

где

$$E_{21}\Big(\frac{t}{2}, \xi\Big) := \frac{1}{4} \frac{\sigma'}{\sigma}\Big(\frac{t}{2}\Big) \nu_\xi \Big(\frac{t}{2}, \xi\Big) + E_2\Big(\frac{t}{2}, \xi\Big),$$

$$H_{41}(t,\eta,\xi) := \frac{1}{4} \Big(\frac{\sigma'}{\sigma}\Big)' \Big(\frac{t}{2}\Big) \nu_\xi \Big(\frac{t}{2}, \xi\Big) + E_2\Big(\frac{t}{2}, \xi\Big) \frac{\sigma'}{\sigma}\Big(\frac{t}{2}\Big)$$

$$+H_4(t,\eta,\xi)+\int\limits_{\eta}^{\frac{t}{2}} ds\frac{\sigma'}{\sigma}(s)H_4(t,s,\xi). \tag{70}$$

Теперь нам осталось вычислить последний член U_5. Для этого сначала рассмотрим вспомогательное выражение:

$$\frac{1}{2}\iint d\tau d\eta \widetilde{v}_0(t-\tau,\eta,\xi)\beta'(\eta)\Big(\frac{\sigma'}{2\sigma}\Big)(\eta)\widetilde{v}_{0\xi}(\tau,\eta,\xi)$$

$$=\frac{1}{4}\iint d\tau d\eta\beta'(\eta)\left(\delta(t-\tau-\eta)+w_1(t-\tau,\eta,\xi)\right)\frac{\sigma'}{\sigma}(\eta)w_{1\xi}(\tau,\eta,\xi)$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{t}{2}} d\eta\beta'(\eta)\frac{\sigma'}{\sigma}(\eta)w_{1\xi}(t-\tau,\eta,\xi)$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^{t/2} d\eta\beta'(\eta)\frac{\sigma'}{\sigma}(\eta)\int\limits_{\eta}^{t-\eta} d\tau w_1(t-\tau,\eta,\xi)w_{1\xi}(\tau,\eta,\xi)$$

$$=\frac{1}{4}\beta\Big(\frac{t}{2}\Big)\frac{\sigma'}{\sigma}\Big(\frac{t}{2}\Big)\nu_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big)+\int\limits_0^{t/2} d\eta\beta(\eta)H_5(t,\eta,\xi), \tag{71}$$

где

$$H_5(t,\eta,\xi):=-\frac{1}{4}\frac{\sigma'}{\sigma}(\eta)w_{1\xi}(t-\tau,\eta,\xi)$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_0^{t/2} d\eta\beta(\eta)\bigg(\frac{\sigma'}{\sigma}(\eta)\int\limits_{\eta}^{t-\eta} d\tau w_1(t-\tau,\eta,\xi)w_{1\xi}(\tau,\eta,\xi)\bigg)_{\eta}. \tag{72}$$

Тогда, используя выражения (71) и (72) и, принимая во внимание, что $D_2(\eta)=\frac{1}{2}\Big(\beta(\eta)+\frac{\sigma'}{\sigma}(\eta)\int\limits_0^{\eta}\beta(s)ds\Big)'$, можно легко преобразовать член U_5. А именно

$$U_5=\frac{1}{4}\frac{\sigma'}{\sigma}\Big(\frac{t}{2}\Big)\nu_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big)\bigg(\beta\Big(\frac{t}{2}\Big)+\frac{\sigma'}{\sigma}\Big(\frac{t}{2}\Big)\int\limits_0^{\frac{t}{2}}\beta(s)ds\bigg)$$

$$+\int\limits_0^{t/2} d\eta H_5(t,\eta,\xi)\Big(\beta(\eta)+\frac{\sigma'}{\sigma}(\eta)\int\limits_0^{\eta}\beta(s)ds\Big)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\sigma'}{\sigma}\Big(\frac{t}{2}\Big)\nu_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big)\beta\Big(\frac{t}{2}\Big)+\int\limits_0^{t/2} d\eta\beta(\eta)H_{51}(t,\eta,\xi), \tag{73}$$

где

$$H_{51}(t,\eta,\xi):=\frac{1}{4}\Big(\frac{\sigma'}{\sigma}\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)^2\nu_\xi\Big(\frac{t}{2},\xi\Big)+H_5(t,\eta,\xi)$$
$$+\int\limits_\eta^{t/2} ds\frac{\sigma'}{\sigma}(s)H_5(t,s,\xi). \tag{74}$$

В итоге получаем

$$\xi P_1(t)(\alpha'(t)+\beta'(t))+\xi^3P_2(t)(\alpha(t)+\beta(t))+\xi P_3(t)\alpha(t)+\xi P_4(t)\beta(t)$$
$$+\int\limits_0^t K(2t,\eta,\xi)\alpha(\eta)d\eta+\int\limits_0^t L(2t,\eta,\xi)\beta(\eta)d\eta$$
$$=\widetilde{R}_1(2t,\xi)-\beta(0)\widetilde{R}_0(2t,\xi)\equiv r(t,\xi). \tag{75}$$

Здесь

$$P_1(t)=-\frac{1}{4}C_1(t),\quad P_2(t)=-\frac{1}{4}\Big(2\int\limits_0^t d\eta C(\eta)C_1(\eta)+C_1^2(t)\Big),$$

$$P_3(t)=\frac{1}{4}\Big(Q(t)C_1(t)+\int\limits_0^t d\eta(C(\eta)Q(\eta)+q(\eta)C_1(\eta))-2C(t)+C(0)\Big),$$

$$P_4(t)=P_3(t)+C(t)+C(0)-\frac{\sigma'}{2\sigma}(t)C_1(t),$$

$$Q(t)=\int\limits_0^t q(\eta)d\eta,\quad C_1(t)=\int\limits_0^t C(\eta)d\eta, \tag{76}$$

K и L – непрерывные ядра следующего вида:

$$K(t,\eta,\xi) = H_1(t,\eta,\xi), \tag{77}$$

$$L(t,\eta,\xi) = \xi H_{21}(t,\eta,\xi) + \xi^2 H_{31}(t,\eta,\xi) + H_{41}(t,\eta,\xi) + H_{51}(t,\eta,\xi). \tag{78}$$

Причём нетрудно показать, что ядра K и L при $t \sim 0$ ведут себя следующим образом:

$$K(t,\eta,\xi) \simeq \frac{1}{2}\xi(q(0) - \frac{1}{2}C''(0))\eta + \frac{1}{2}\xi^3\eta + O(t^2), \quad t \sim 0, \tag{79}$$

$$L(t,\eta,\xi) \simeq \xi\ell_1 + \xi\ell_2 t/2 + \xi\ell_3\eta + \xi^3\ell_4\eta + O(t^2), \quad t \sim 0, \tag{80}$$

где

$$\ell_1 = \frac{1}{2}(C'(0) - \sigma'(0)), \quad \ell_2 = \frac{1}{2}(C''(0) + C'(0)\sigma'(0)),$$

$$\ell_3 = -\frac{1}{4}(C''(0) + 2C'(0)\sigma'(0) + 3\sigma''(0) + \frac{1}{2}(\sigma'(0))^2), \quad \ell_4 = -\frac{7}{2}. \tag{81}$$

6. Сведение интегро-дифференциальных уравнений к сингулярным интегральным уравнениям

Введём вместо α новую неизвестную функцию $\gamma = \alpha + \beta$. Тогда для β, после несложных преобразований, получается

$$\beta(t) = \int_0^t \widehat{L}(t,\eta,\xi)\beta(\eta)d\eta + f(t,\xi), \tag{82}$$

$$f(t,\xi) = \widehat{r}_1(t,\xi) + \widehat{P}_1(t)\gamma'(t) + \xi^2\widehat{P}_2(t)\gamma(t)$$
$$+\widehat{P}_3(t)\gamma(t) + \int_0^t \widehat{K}(t,\eta,\xi)\gamma(\eta)d\eta, \tag{83}$$

$$\widehat{P}_1(t) = \frac{P_1(t)}{P_3(t) - P_4(t)}, \quad \widehat{P}_2(t) = \frac{\xi^2 P_2(t)}{P_3(t) - P_4(t)}, \quad \widehat{P}_3(t) = \frac{P_3(t)}{P_3(t) - P_4(t)},$$

$$\widehat{K}(t,\eta,\xi) = \frac{K(t,\eta,\xi)}{\xi(P_4(t) - P_3(t))}, \quad \widehat{L}(t,\eta,\xi) = \frac{L(t,\eta,\xi) - K(t,\eta,\xi)}{\xi(P_4(t) - P_3(t))},$$

$$\widehat{r}_1(t,\xi) = \frac{r(t,\xi)}{\xi(P_4(t) - P_3(t))}, \tag{84}$$

Заметим, что, очевидно, существует такой замкнутый интервал $[0, t_0]$, $t_0 > 0$, что если $t \in [0, t_0]$, то $P_4(t) - P_3(t) \neq 0$.

Обращая оператор $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{L}}$, где $\mathbf{I}$ – единичный оператор, $\widehat{\mathbf{L}}(\cdot) = \int\limits_0^t \widehat{L}(t, \eta, \xi) \cdot d\eta$, найдем:

$$\beta(t) = f(t, \xi) + (\mathbf{N}f)(t, \xi), \tag{85}$$

где

$$\mathbf{N}(\cdot) := \int\limits_0^t N(t, \eta, \xi) \cdot d\eta = \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{\mathbf{L}}^{\mathbf{k}} \cdot)(t, \xi)$$

– резольвента оператора $\widehat{\mathbf{L}}$. Это соотношение выполняется для любого ξ. Рассмотрим его для двух разных ξ_1, ξ_2, и вычтем одно из другого. В результате придем к уравнению относительно γ:

$$S(t, \xi_1, \xi_2)\gamma(t) = \int\limits_0^t M(t, \eta, \xi_1, \xi_2)\gamma(\eta) d\eta + r_2(t, \xi_1, \xi_2), \tag{86}$$

где

$$S(t, \xi_1, \xi_2) = (\xi_2^2 - \xi_1^2)\widehat{P}_2(t) + (\widehat{L}(t, t, \xi_2) - \widehat{L}(t, t, \xi_1))\widehat{P}_1(t), \tag{87}$$

$$r_2(t, \xi_1, \xi 2) = r_1(t, \xi_1) - r_1(t, \xi_2) + \mathbf{N}(r_1)(\eta, \xi_1) - \mathbf{N}(r_1)(\eta, \xi_2),$$

$$M(t, \eta, \xi_1, \xi_2) = \widehat{K}(t, \eta, \xi_1) - \widehat{K}(t, \eta, \xi_2)$$

$$+ \int\limits_\eta^t ds \left(\widehat{K}(s, \eta, \xi_1) N(t, s, \xi_1) - \widehat{K}(s, \eta, \xi_2) N(t, s, \xi_2) \right)$$

$$-(\widehat{P}_1'(t) - \widehat{P}_3(t))(N(t, \eta, \xi_1) - N(t, \eta, \xi_2) - \widehat{P}_1(t)(N_\eta(t, \eta, \xi_1) - N_\eta(t, \eta, \xi_2))$$

$$+\widehat{P}_2(t)(\xi_1^2 N(t, \eta, \xi_1) - \xi_2^2 N(t, \eta, \xi_2)). \tag{88}$$

Из (76), (79), (80) нетрудно видеть, что

$$S(t, \xi_1, \xi_2) \cong s_1 t^2 + O(t^3), \quad t \sim 0, \tag{89}$$

где

$$s_1 = \frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2), \tag{90}$$

в то время как

$$M(t, \eta, \xi_1, \xi_2) \cong m_1 \eta + O(t^2), \quad t \sim 0, \tag{91}$$

$$m_1 = \frac{3}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2). \tag{92}$$

Уравнение (86) – это сингулярное вольтеррово уравнение.

7. Вывод интегральных уравнений Вольтерра второго рода

Введём новую неизвестную функцию $\gamma_1(t) := \gamma(t)/t$ и перепишем уравнение (86) в виде:

$$t^3\gamma_1(t) - 3\int\limits_0^t \eta^2\gamma_1(\eta)d\eta = F(t,\xi_1,\xi_2), \tag{93}$$

где

$$F(t,\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{s_1}\int\limits_0^t (M(t,\eta,\xi_1,\xi_2) - m_1\eta)\eta\gamma_1(\eta)d\eta$$

$$-t\gamma_1(t)\left(\frac{S(t,\xi_1,\xi_2)}{s_1} - t^2\right) + \frac{r_2(t,\xi_1,\xi_2)}{s_1}. \tag{94}$$

Теперь обратим левую часть уравнения (93) относительно $\gamma_1(t)$:

$$\gamma_1(t) = \int\limits_0^t ds\eta\frac{F_\eta(\eta,\xi_1,\xi_2)}{\eta^3} + \gamma_1^0, \tag{95}$$

где γ_1^0 – произвольная постоянная.

Из последнего равенства получаем:

$$\gamma_1(t) = \int\limits_0^t M_1(t,\eta,\xi_1,\xi_2)\gamma_1(\eta)d\eta + r_3(t,\eta,\xi_1,\xi_2), \tag{96}$$

где

$$M_1(t,\eta,\xi_1,\xi_2)$$

$$= \frac{t^2}{S(t,\xi_1,\xi_2)}\left(\eta\int\limits_\eta^t d\eta_1\frac{M_{\eta_1}(\eta_1,\eta,\xi_1,\xi_2)}{\eta_1^3} + \frac{1}{\eta^2}(M(t,\eta,\xi_1,\xi_2) - m_1\eta)\right)$$

$$+\frac{t^2}{S(t,\xi_1,\xi_2)}\left(\left(\frac{S(\eta,\xi_1,\xi_2)}{\eta^2}\right)_\eta - \frac{1}{\eta^3}((\eta S(\eta,\xi_1,\xi_2))_\eta - 3\eta^2 s_1)\right), \tag{97}$$

$$r_3(t,\eta,\xi_1,\xi_2) = \frac{t^2}{S(t,\xi_1,\xi_2)}\int\limits_0^t d\eta\frac{r_{2\eta}(\eta,\xi_1,\xi_2)}{\eta^3} + \frac{s_1\gamma_1^0 t^2}{S(t,\xi_1,\xi_2)}. \tag{98}$$

Заметим, что ввиду (89), очевидно, существует такой открытый интервал $(0, t_0)$, $t_0 > 0$, что если $t \in (0, t_0)$, то $S(t, \xi_1, \xi_2) \neq 0$.

Таким образом, если данные обратной задачи таковы, что

$$\frac{\partial}{\partial\eta} r_2(\eta, \xi_1, \xi_2)\Big|_{\eta=0} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} r_2(\eta, \xi_1, \xi_2)\Big|_{\eta=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\eta^3} r_2(\eta, \xi_1, \xi_2)\Big|_{\eta=0} = 0, \tag{99}$$

то равенство (96) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $\gamma_1(t)$.

Заметим, что в это уравнение входит произвольная константа $\gamma_1^0(t)$. Ввиду этого, для однозначного определения $\gamma(t)$, нужно дополнительно предположить, что известно $\gamma'(0)$.

Авторы благодарны В. В. Залипаеву и Я. В. Курылеву за полезное обсуждение.

Литература

1. А. С. Благовещенский, *О квазидвумерной обратной задаче для волнового уравнения.* — Труды Математического института им. В. А. Стеклова, Л., 1971.
2. A. S. Blagovestchenskii, Y. V. Kurylev, V. V. Zalipaev, *Inverse problem in a weakly horizontally inhomogeneous layered medium.* — Loughborough University preprint, 2005.
3. М. И. Белишев, А. С. Благовещенский, *Динамические обратные задачи теории волн.* – СПб., 1999.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика сплошных сред.* М., 1952.
5. A. S. Blagovestchenskii, Ya. V. Kurylev, V. V. Zalipaev, *Inverse problem of velocity reconstruction in a weakly lateral heterogeneous half-space.* — In: Proceedings of the 5th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Cambridge, UK, 11–15 July (2005).

Blagovestchenskii A. S., Fedorenko D. A. The inverse problem for the acoustic equation in a weakly horizontally inhomogeneous medium.

The inverse problem of reconstruction of coefficients A ш B for equation

$$AU_{tt} = \operatorname{div}(B \operatorname{grad} U)$$

in the half-plane $z > 0$ is considered. It is assumed that instantaneous point source at $z = 0$ generate wave field $U(t, z, x)$ that is known on the

boundary. It is also known that coefficients A and B can be represented in the form

$$A = A(z, \varepsilon x) = A_0(z) + \varepsilon x A_1(z) + O(\varepsilon^2),$$

$$B = B(z, \varepsilon x) = B_0(z) + \varepsilon x B_1(z) + O(\varepsilon^2).$$

Here ε is a small parameter.

The algorithm for the determination of coefficients A_0, B_0, A_1, B_1 with accuracy $O(\varepsilon^2)$ is constructed.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: danief@ yandex.ru
ablagoveshhenskij@ yandex.ru

Поступило 24 сентября 2008 г.