Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 354, 2008 г.

М. И. Белишев

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ: ОДНОМЕРНЫЙ ВАРИАНТ ВС-МЕТОДА

**К 70-летию моего учителя
А. С. Благовещенского, одного из пионеров
динамических обратных задач**

0. Введение

О работе

Эта статья – первая из планируемой серии работ под общим названием "Метод граничного управления в обратных задачах". Назначение серии – систематическое изложение подхода к обратным задачам, основанного на их связях с теорией управления. Первоначально метод граничного управления (boundary control method или BC-метод; ниже коротко "BCм") был предложен для решения некоторой многомерной задачи (см. [2]). В силу этого, такой метод не может быть простым: это подход комплексного характера, использующий результаты теории управления и теории систем, асимптотические методы для уравнений в частных производных (геометрическую оптику), функциональный анализ и др. Данная работа – по возможности элементарное введение в BCм: мы представляем его одномерный вариант. В тоже время, работа подготавливает читателя к общему случаю: главную роль играют именно те инструменты и конструкции, которые пригодны для обобщения на многомерные задачи.

0.2. Обратные задачи

Мы представляем BCм на примере классической обратной задачи (ОЗ) о восстановлении плотности неоднородной струны, причем рассматриваются обе ее постановки – динамическая и спектральная.

Работа поддержана грантами РФФИ No. 08-01-00511 и НШ-8336.2006.1 .

Ключевую роль играет динамическая ОЗ. Соответствующая прямая задача есть начально-краевая задача вида

$$
\begin{aligned}
&\rho u_{tt} - u_{xx} = 0, && x > 0, \quad 0 < t < T\\
&u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, && x \geq 0\\
&u|_{x=0} = f, && t \in [0, T],
\end{aligned}
$$

где $\rho = \rho(x)$ есть гладкая положительная функция (плотность), $t = T < \infty$ – финальный момент времени, $f = f(t)$ – граничное управление (Дирихле), $u = u^f(x,t)$ – решение. Отображение R, переводящее упрвление f в функцию $u^f_x(0,t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, называется оператором реакции. *Динамическая* ОЗ состоит в восстановлении плотности ρ по заданному оператору R.[1]

Впервые эта задача была решена Б. Гопинатом и М. Сондхи (см. [22, 23]) и, независимо, А. С. Благовещенским [17, 33]. Обе работы в качестве главного инструмента решения ОЗ используют уравнение М. Г. Крейна; в обеих это уравнение выводится в рамках чисто динамических рассмотрений, без привлечения преобразования Фурье по времени и спектральной техники. Заметим, что подход Б. Гопината и М. Сондхи по существу является прямым предшественником одной из версий ВСм, основанной на многомерном аналоге классических уравнений Гельфанда–Левитана–Крейна–Марченко. Эта версия появилась в [3]; ее параллели с подходом Гопината–Сондхи были осознаны позже (см. [5]).

В настоящей работе мы описываем два подхода к решению динамической ОЗ. Первый является незначительной модификацией подхода Б. Гопината и М. Сондхи: уравнение Крейна выводится как линейное интегральное уравнение для решения *специальной задачи граничного управления*. Это проясняет тесные и глубокие связи между обратными задачами и теорией граничного управления.

Второй подход – метод граничного управления. Мы вводим основные понятия и инструменты ВС-метода: амплитудную формулу, визуализирующий функционал, волновой базис и др. Форма изложения выбрана так, чтобы облегчить читателю дальнейшее освоение этих понятий в многомерном случае, что и составляет главную цель нашей работы.

[1] Ниже эта постановка будет уточнена.

Постановка спектральной ОЗ восходит к классическим работам М. Г. Крейна[27–29]. Соответствующая прямая задача есть граничная спектральная задача Дирихле вида

$$\varphi'' + \lambda\rho\,\varphi = 0, \quad x \in (0, h)$$
$$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=h} = 0.$$

Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть ее спектр, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – соответствующие собственные функции, нормированные условиями

$$\int_0^h \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,\rho dx = \delta_{kl}, \quad \varphi_k'(0) > 0.$$

Множество пар $\{\lambda_k; \varphi_k'(0)\}_{k=1}^{\infty}$ называется спектральными данными струны. *Спектральная* ОЗ состоит в восстановлении ρ на промежутке $[0, h]$ по известным спектральным данным. Эту задачу мы решаем спектральным вариантом BC-метода [12, 5].

0.3. Комментарии

Если читатель интересуется лишь рецептом решения поставленных выше задач, то для понимания того, как восстанавливается плотность, ему достаточно ознакомится с разделами 1.1, 1,2; 2.1–2.3; 3.1; 4.1; 5.1–5.5; 7.1–7.3 (часть 2). Остальное содержание подготавливает к восприятию многомерного BCм.

1. Кинематика

1.1. Эйконал

Струна отождествляется с полуосью $x \geq 0$ и заданной на ней функцией (*плотностью*) $\rho \in C^2_{\rm loc}[0, \infty)$, удовлетворяющей условиям $0 < \rho_* \leq \rho(x)$, $x \geq 0$. Функция $c = \rho^{-\frac{1}{2}}$ называется *скоростью*.

Функция

$$\tau(x) := \int_0^x \rho^{\frac{1}{2}}(s)\,ds = \int_0^x \frac{ds}{c(s)}, \quad x \geq 0$$

называется *эйконалом*;[2] это монотонная (строго возрастающая) положительная функция, $\tau(0) = 0$. С физической точки зрения, ее зна-

[2]В физической литературе также используются термины *время пробега* и *оптическая длина*.

чение $\tau(x_0)$ совпадает со временем, за которое волна, инициированная на конце $x = 0$ и движущаяся вдоль струны с переменной скоростью c, заполняет отрезок $[0, x_0]$. Заметим, что в силу $\rho \geq \rho_* > 0$, время заполнения всей струны есть $\tau(\infty) = \infty$. Эйконал полезно рассматривать как естественную координату на струне. Обратную к нему функцию обозначаем через $x(\cdot)$; таким образом, $\tau\left(x(\xi)\right) = \xi$ и $x\left(\tau(s)\right) = s$ для всех ξ, $s \geq 0$. Обратную функцию можно представить в виде

$$x(\tau) = \int\limits_0^\tau \rho^{-\frac{1}{2}}\left(x(\xi)\right)\, d\xi \; = \; \int\limits_0^\tau c\left(x(\xi)\right)\, d\xi, \quad \tau \geq 0.$$

В силу определений выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &\tau'(x) = \rho^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{c(x)}, \;\; x \geq 0; \\ &x'(\tau) = \rho^{-\frac{1}{2}}\left(x(\tau)\right) = c\left(x(\tau)\right), \;\; \tau \geq 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Множество

$$\Omega^\xi := \{x > 0 \,|\, \tau(x) < \xi\} = (0, x(\xi))$$

есть интервал струны, заполняемый волнами к моменту $t = \xi$.

1.2. Степенные моменты

Определим функции (моменты)

$$m_j(\tau) \; := \int\limits_0^{x(\tau)} x^j \rho(x)\, dx, \quad \tau > 0, \quad j = 0, 1$$

и отметим, что величина $m_0(\xi)$ совпадает с массой интервала Ω^ξ. Соотношения

$$x(\tau) \; = \int\limits_0^\tau \frac{d\eta}{m_0'(\eta)} = \frac{m_1'(\tau)}{m_0'(\tau)}, \quad \tau > 0 \tag{1.2}$$

следуют из определений и (1.1). В самом деле, дифференцируя, имеем

$$m_0'(\tau) = \rho\left(x(\tau)\right)\, x'(\tau) = \langle \text{см. } (1.1) \rangle = \frac{1}{c\left(x(\tau)\right)},$$

что ведет к первому равенству; второе равенство очевидно. Тем самым, моменты определяют функцию $x(\,\cdot\,)$, обратную к ней $\tau(\,\cdot\,)$ и, вслед за ними, плотность $\rho(\,\cdot\,) = \langle \text{см. } (1.1) \rangle = \left[\tau'(\,\cdot\,)\right]^2$. Это соображение будет позже использовано в ОЗ.

1.3. Изображения

Пусть $y = y(x)$ есть функция на струне. Функция

$$\widetilde{y}(\tau) := \rho^{\frac{1}{4}}(x(\tau))\, y(x(\tau)), \quad \tau \geq 0$$

называется *изображением* y. Линейное соответствие $I : y \to \widetilde{y}$ называем *отображением изображения*; приведем некоторые из его свойств, проверка которых не сложна:

- включение $\operatorname{supp} y \subset \overline{\Omega}^{\xi}$ равносильно включению $\operatorname{supp} \widetilde{y} \subset [0, \xi]$, $\xi > 0$,
- отображение I обратимо,

$$\left(I^{-1} f\right)(x) = \rho^{-\frac{1}{4}}(x) f(\tau(x)), \quad x \geq 0$$

- пусть L и $\widetilde{L}$ суть операторы, определенные соответственно на классах $C^2_{\rm loc}(\{x \geq 0\})$ и $C^2_{\rm loc}(\{\tau \geq 0\})$ правилами

$$(Ly)(x) := \rho^{-1}(x) y''(x); \quad (\widetilde{L} f)(\tau) := f''(\tau) - q(\tau) f(\tau),$$

где

$$q(\tau) := \frac{1}{4}\frac{\rho''(x(\tau))}{\rho^2(x(\tau))} - \frac{5}{16}\frac{[\rho'(x(\tau))]^2}{\rho^3(x(\tau))}$$

есть непрерывная функция от $\tau \geq 0$. Справедливо соотношение

$$\widetilde{L} I = I L, \tag{1.3}$$

соответствующее замене переменных $x \mapsto \tau = \tau(x)$.

В ОЗ используется не само отображение I, а его редукция, описываемая ниже. Для фиксированного $T > 0$ введем два (вещественных) гильбертовых пространства: $\mathcal{H}^T := L_{2,\rho}(\Omega^T)$,

$$(y, w)_{\mathcal{H}^T} = \int\limits_0^{x(T)} y(x) w(x)\, \rho(x) dx,$$

и $\widetilde{\mathcal{H}}^T := L_2(0, T)$,

$$(f, g)_{\widetilde{\mathcal{H}}^T} = \int\limits_0^T f(\tau) g(\tau)\, d\tau.$$

Отображение $I^T : \mathcal{H}^T \to \widetilde{\mathcal{H}}^T$,

$$\left(I^T y\right)(\tau) = \rho^{\frac{1}{4}}\left(x(\tau)\right) y\left(x(\tau)\right), \quad 0 \le \tau \le T,$$

называется *оператором изображения.* Это унитарный оператор из $\mathcal{H}^T$ на $\widetilde{\mathcal{H}}^T$. В самом деле, для $y, w \in \mathcal{H}^T$ и $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^T$ имеем

$$(y,w)_{\mathcal{H}^T} = \int\limits_0^{x(T)} y(x)w(x)\,\rho(x)dx =$$

$$\int\limits_0^T y\left(x(\tau)\right) w\left(x(\tau)\right) \rho\left(x(\tau)\right) \frac{d\tau}{\rho^{\frac{1}{2}}\left(x(\tau)\right)} = (\widetilde{y},\widetilde{w})_{\widetilde{\mathcal{H}}^T} = \left(I^T y, I^T w\right)_{\widetilde{\mathcal{H}}^T};$$

$$\left(\left(I^T\right)^{-1} f\right)(x) = \left(\left(I^T\right)^{*} f\right)(x) = \rho^{-\frac{1}{4}}(x) f\left(\tau(x)\right), \quad x \in \Omega^T \qquad (1.4.)$$

2. Динамика

2.1. Начально-краевая задача

Фиксируем положительное T и рассмотрим задачу

$$\rho u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad x > 0, \quad 0 < t < T, \qquad (2.1)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \qquad x \ge 0, \qquad (2.2)$$

$$u|_{x=0} = f, \qquad t \in [0,T]. \qquad (2.3)$$

Ее решение (*волна*) $u = u^f(x,t)$ описывает вертикальное смещение струны, вызываемое действием граничного источника (*управления*) $f = f(t)$. Существенные свойства u^f можно вывести из приводимого ниже представления. Ему предпошлем

Соглашение 1. *Все зависящие от времени t функции предполагаются продолженными нулем на $t < 0$.*

Лемма 1. *При любом $f \in C^2[0,T]$, удовлетворяющем условиям $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, задача (2.1)–(2.3) имеет единственное классическое решение u^f, представимое в виде*

$$u^f(x,t) = \left[\frac{\rho(x)}{\rho(0)}\right]^{-\frac{1}{4}} f\left(t - \tau(x)\right) + \int\limits_x^{x(t)} w(x,s) f\left(t - \tau(s)\right) ds \qquad (2.4)$$

($x \geq 0$, $0 \leq t \leq T$), где ядро w есть дважды непрерывно дифференцируемая в области $\{(x,s)|\ 0 \leq \tau(x) \leq s \leq T\}$ функция такая, что $w(0,s) = 0$, $0 \leq s \leq T$.

Доказательство (набросок).

(i) Используя (1.3), можно показать, что функция

$$\widetilde{u}^f(\tau,t) := \rho^{-\frac{1}{4}}(0)\left(Iu^f(\cdot,t)\right)(\tau) = \left[\frac{\rho\left(x(\tau)\right)}{\rho(0)}\right]^{\frac{1}{4}} u^f\left(x(\tau),t\right)$$

удовлетворяет системе

$$\widetilde{u}_{tt} - \widetilde{u}_{\tau\tau} + q(\tau)\widetilde{u} = 0, \qquad \tau > 0,\quad 0 < t < T, \tag{2.5}$$

$$\widetilde{u}\big|_{t=0} = \widetilde{u}_t\big|_{t=0} = 0, \qquad \tau \geq 0, \tag{2.6}$$

$$\widetilde{u}\big|_{\tau=0} = f, \qquad t \in [0,T]. \tag{2.7}$$

Отыскивая решение в виде

$$\widetilde{u}^f(\tau,t) = f(t-\tau) + \int_\tau^t \widetilde{w}(\tau,s)f(t-s)\,ds \tag{2.8}$$

с неизвестным ядром $\widetilde{w}$, можно свести систему к задаче Гурса для ядра:[3]

$$\widetilde{w}_{ss} - \widetilde{w}_{\tau\tau} + q(\tau)\widetilde{w} = 0 \quad \text{in} \quad \Theta^T, \tag{2.9}$$

$$\widetilde{w}\big|_{\tau=0} = 0, \quad \widetilde{w}\big|_{\tau=s} = -\frac{1}{2}\int_0^s q(\eta)\,d\eta, \tag{2.10}$$

где $\Theta^T := \{(\tau,s)|\ 0 < \tau < s < T\}$.

(ii) Задача (2.9), (2.10) сводится к уравнению типа Вольтерра с помощью следующего приема. Как нетрудно проверить, функция

$$y(\tau,s) := \widetilde{w}(\tau,s) + \frac{1}{2}\int_{\frac{s-\tau}{2}}^{\frac{s+\tau}{2}} q(\eta)\,d\eta \tag{2.11}$$

[3] Выполняя такое сведение, мы подставляем правую часть (2.8) в уравнение (2.5). Условия $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ нужны для оправдания этой подстановки: в их силу $f(t-\tau)$ оказывается C^2-функцией от τ, t.

решает задачу

$$y_{ss} - y_{\tau\tau} = G \quad \text{в} \quad \Theta^T \tag{2.12}$$

$$y|_{\tau=0} = 0, \quad y|_{\tau=s} = 0, \tag{2.13}$$

в которой $G = G(\tau, s) := -q(\tau)y(\tau, s) + q(\tau)F(\tau, s)$, а $F(\tau, s)$ обозначает интегральный член в (2.11).

Задача (2.12), (2.13) решается формулой Даламбера:

$$y(\tau, s) = (MG)(\tau, s) := \iint\limits_{M^{(\tau,s)}} G(\tau', s')\, d\tau'\, ds', \quad (\tau, s) \in \Theta^T, \tag{2.14}$$

где $M^{(\tau,s)}$ есть прямоугольник с вершинами (τ, s), $(0, s-\tau)$, $(\frac{s-\tau}{2}, \frac{s-\tau}{2})$, $(\frac{s+\tau}{2}, \frac{s+\tau}{2})$. Применяя (2.14) к задаче (2.12), (2.13) мы сводим ее к интегральному уравнению типа Вольтерра

$$y + M(qy) = M(qF) \quad \text{в} \quad \Theta^T, \tag{2.15}$$

которое исследуется в пространстве $C^2\left(\overline{\Theta}^T\right)$ известными стандартными методами.

(iii) Разрешимость уравнения (2.15) ведет к разрешимости задачи (2.9), (2.10), что и оправдывает представление (2.8). Возвращаясь на струну с помощью отображения $\rho^{\frac{1}{4}}(0)I^{-1}\colon \widetilde{u}^f \to u^f$, мы приходим к (2.4). Равенство $w(0, t) = 0$ следует из условия $\widetilde{w}(0, t) = 0$ в (2.10). $\square$

Замечание 1. Правая часть в (2.4) очевидным образом корректно определена при любом $f \in L_2(0, T)$ и в последующем мы рассматриваем ее как (обобщенное) решение u^f задачи (2.1)–(2.3) для управлений этого класса. Как легко показать, такое решение удовлетворяет уравнению струны в смысле обобщенных функций, причем $u^f \in C\left([0, T]; L_2(\Omega^T)\right)$.

Представление (2.4) – удобный инструмент исследования как прямой, так и обратной задач.

2.2. Свойства волн

(i) Согласно (2.4), имеем $u^f(x, t) \equiv 0$ для $x > x(t)$, что ведет к включению

$$\operatorname{supp} u^f(\,\cdot\,, t) \subset \overline{\Omega}^{\,t} = [0, x(t)], \quad t \geq 0. \tag{2.16}$$

Оно показывает, что волна $u^f(\,\cdot\,, t)$ распространяется вдоль струны, заполняя расширяющийся интервал Ω^t. Ее *передний фронт* $x = x(t)$

движется с переменной скоростью $x'(t) = \rho^{-\frac{1}{2}}(x(t))$, что и мотивирует "кинематическую" терминологию раздела 1. Отметим, что пространственно-временная траектория переднего фронта есть линия $\{(x,t)|\ t = \tau(x),\ x \geq 0\}$, которая является характеристической кривой (гиперболического) уравнения струны (2.1).

Для любого классического (дважды дифференцируемого) решения u^f, (2.16) означает, что это решение аннулируется вблизи характеристики $t = \tau(x)$ вместе с первыми и вторыми производными. Поэтому, в дополнение к (2.16), равенства

$$u^f(x(\xi),\xi) = u^f_x(x(\xi),\xi) = u^f_t(x(\xi),\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq T \tag{2.17}$$

выполняются на переднем фронте гладкой волны.

(ii) Еще одно важное свойство волн описывается *принципом локальности* (см., например, [17, 9]). Пусть $\Delta^{2T} := \big\{(x,t)|\ x \in \Omega^T,\ 0 < t < 2T - \tau(x)\big\}$ есть пространственно-временная область показанная на рис. 1 (затенена):

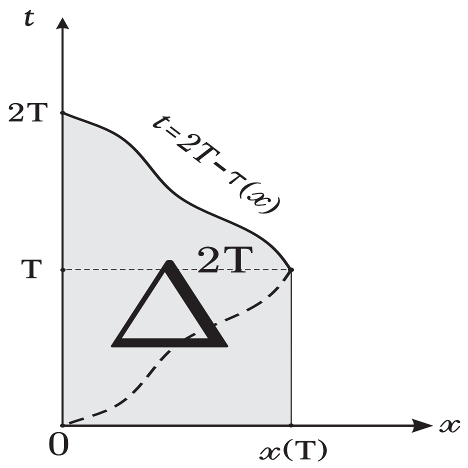

Рис. 1. Область Δ^{2T}.

Как известно, в силу гиперболичности уравнения струны, задача

$$\rho u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad \text{в}\ \ \Delta^{2T}, \tag{2.18}$$

$$u = 0, \qquad t < \tau(x), \tag{2.19}$$

$$u|_{x=0} = f, \qquad t \in [0, 2T] \tag{2.20}$$

является корректной. Поэтому, при заданном управлнии f, решение u^f в Δ^{2T} однозначно определяется значениями $\rho|_{\Omega^T}$ и не зависит от поведения плотности вне отрезка $[0, x(T)]$. Этот факт составляет содержание принципа локальности; он также интерпретируется как конечность области влияния, что является свойством, присущим гиперболическим уравнениям типа (2.1).

Замечание 2. Задача (2.18)–(2.20) является естественным расширением задачи (2.1)–(2.3) по гиперболичности: их решения совпадают при $0 \le t \le T$ при условии совпадения управлений при этих временах.

(iii) Независимость плотности ρ от времени t приводит к свойству *стационарности*. Для произвольного f определим запаздывающее управление f_ξ соотношением

$$f_\xi(t) := f\left(t - (T - \xi)\right), \quad 0 \le t \le T$$

($T - \xi$ есть величина задержки, $\xi \in [0, T]$ – продолжительность действия f_ξ), причем определение понимается в соответствии с соглашением 1. Как легко видеть, соотношение

$$u^{f_\xi}(\,\cdot\,, T) = u^f(\,\cdot\,, \xi) \tag{2.21}$$

справедливо для любого f. Оно означает, что задержка управления приводит к такой же задержке волны.

2.3. Струна как динамическая система

Здесь задача (2.1)–(2.3) рассматривается в терминах теории управления: она снабжается стандартными аттрибутами динамической системы. Система обозначается символом α^T.

Пространства. Пространство управлений (входов) $\mathcal{F}^T := L_2(0, T)$ называется *внешним пространством* системы α^T.

Волна $u^f(\,\cdot\,, t)$ рассматривается как *состояние* системы (в момент времени t). В силу (2.16), каждое состояние локализовано на отрезке $\overline{\Omega}^T$ и принадлежит пространству $\mathcal{H}^T := L_{2,\rho}(\Omega^T)$ (см. замечание 1), которое называется *внутренним пространством* системы.

Оператор управления. Соответствие “вход $\mapsto$ состояние” в системе α^T реализуется *оператором управления* $W^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}^T$,

$$W^T f := u^f(\,\cdot\,, T),$$

который разрешает задачу (2.1)–(2.3). Для описания полезного представления W^T нам понадобятся вспомогательные операторы:

вольтерровский интегральный оператор $K^T : \mathcal{H}^T \to \mathcal{H}^T$,

$$\left(K^T a\right)(x) := \int\limits_x^{x(T)} k(x,s)\, a(s)\, ds, \quad x \in \Omega^T$$

с ядром

$$k(x,s) = \left[\frac{\rho(s)}{\rho(0)}\right]^{\frac{1}{4}} w(x,s),$$

где w взято из (2.4);

оператор обращения времени $Y^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$,

$$\left(Y^T f\right)(t) := f(T-t), \quad 0 < t < T,$$

для которого выполнено $\left(Y^T\right)^{-1} = \left(Y^T\right)^* = Y^T$.

Напомним, что оператор изображения введен в разделе 1.3. Здесь мы отождествляем $\widetilde{\mathcal{H}}^T = L_2(0,T)$ с $\mathcal{F}^T$ и рассматриваем этот оператор как отображение из $\mathcal{H}^T$ в $\mathcal{F}^T$, действующее по правилу

$$\left(I^T a\right)(t) = \rho^{\frac{1}{4}}\left(x(t)\right) a\left(x(t)\right), \quad 0 < t < T.$$

Сопряженный к нему описан в (1.4).

В последующем мы обозначаем единичные операторы единым символом $\mathbb{I}$.

Лемма 2. *Оператор управления W^T действует непрерывно из $\mathcal{F}^T$ в $\mathcal{H}^T$, причем справедливо представление*

$$W^T = \rho^{\frac{1}{4}}(0)\left[\mathbb{I} + K^T\right]\left(I^T\right)^* Y^T. \tag{2.22}$$

Доказательство. В силу (2.4), имеем

$$\left(W^T f\right)(x) = \left[\frac{\rho(x)}{\rho(0)}\right]^{-\frac{1}{4}} f\left(T - \tau(x)\right) + \int\limits_x^{x(T)} w(x,s) f\left(T - \tau(s)\right) ds$$

$$= \rho^{\frac{1}{4}}(0)\left[\rho^{-\frac{1}{4}}(x) f\left(T-\tau(x)\right) + \int\limits_{x}^{x(T)} k(x,s)\rho^{-\frac{1}{4}}(s) f\left(T-\tau(s)\right)\, ds\right],$$

что равносильно (2.22). □

В свою очередь, (2.22) влечет следующее представление сопряженного оператора $\left(W^T\right)^* : \mathcal{H}^T \to \mathcal{F}^T$:

$$\left(W^T\right)^* = \rho^{\frac{1}{4}}(0)\, Y^T I^T \left[\mathbb{I} + \left(K^T\right)^*\right] \tag{2.23}$$

и

$$\left((W^T)^* a\right)(t) = \left[\rho\left(x(T-t)\right)\rho(0)\right]^{\frac{1}{4}} a\left(x(T-t)\right) + \int\limits_{t}^{T} w^*(\eta,t) a\left(x(T-\eta)\right)\, d\eta, \quad 0 < t < T \tag{2.24}$$

с гладким ядром

$$w^*(\eta,t) := w\left(x(T-\eta), x(T-t)\right)\left[\frac{\rho\left(x(T-t)\right)}{\rho\left(x(T-\eta)\right)}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Свойство стационарности системы α^T (см. раздел 2.2, (iii)) можно сформулировать следующим образом. Пусть $D^{T,\xi} : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ есть а *оператор запаздывания*,

$$\left(D^{T,\xi} f\right)(t) = f_\xi(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < T-\xi \\ f\left(t-(T-\xi)\right), & T-\xi \le t < T \end{cases}$$

($\xi \in (0,T)$ – параметр). Тогда (2.21) можно записать в виде

$$W^T D^{T,\xi} f = u^f(\,\cdot\,,\xi), \quad 0 < \xi < T. \tag{2.25}$$

Оператор реакции. Соответствие “вход $\mapsto$ выход” в системе α^T реализуется *оператором реакции* $R^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, определенным на плотном линеале $\operatorname{Dom} R^T = \left\{f \in C^2[0,T] \,\middle|\, f(0) = f'(0) = f''(0) = 0\right\}$ правилом

$$\left(R^T f\right)(t) := u^f_x(0,t), \quad 0 < t < T.$$

В механике $u^f_x(0,t)$ интерпретируется как значение (в момент t) силы, порожденной на конце струны $x = 0$ волновым процесом, инициированным управлением f.

Лемма 3. *Справедливо представление*

$$\left(R^T f\right)(t) = -\rho^{\frac{1}{2}}(0) f'(t) - \frac{1}{4}\left[\frac{\rho'(0)}{\rho(0)}\right] f(t) + \int\limits_0^t r(t-\eta) f(\eta)\, d\eta, \quad 0 < t < T \tag{2.26}$$

с ядром $r \in C^1[0,T]$.

Доказательство. При $f \in \operatorname{Dom} R^T$ решение u^f является классическим, что позволяет оправдать нижеследующие выкладки.

Дифференцируя по x в (2.4), имеем:

$$\begin{aligned} u^f_x(x,t) = &-\left[\frac{\rho(x)}{\rho(0)}\right]^{-\frac{1}{4}} f'\left(t-\tau(x)\right)\tau'(x) \\ &-\frac{1}{4}\left[\frac{\rho(x)}{\rho(0)}\right]^{-\frac{5}{4}} \frac{\rho'(x)}{\rho(0)} f\left(t-\tau(x)\right) - w(x,x) f\left(t-\tau(x)\right) \\ &+\int\limits_x^{x(t)} w_x(x,s) f\left(t-\tau(s)\right)\, ds. \end{aligned}$$

Полагая здесь $x=0$ и учитывая соотношения $\tau'(0) = \rho^{\frac{1}{2}}(0)$, $w(0,0) = 0$ (см. лемму 1), получаем

$$\left(R^T f\right)(t) = u^f_x(0,t) = -\rho^{\frac{1}{2}}(0) f'(t) - \frac{1}{4}\left[\frac{\rho'(0)}{\rho(0)}\right] f(t) + \int\limits_0^{x(t)} w_x(0,s) f\left(t-\tau(s)\right)\, ds, \quad 0 < t < T.$$

Заменяя переменные $\eta = t - \tau(s)$, $s = x(t-\eta)$, приходим к (2.26) с ядром

$$r(t) = \rho^{-\frac{1}{2}}\left(x(t)\right) w_x\left(0, x(t)\right), \quad 0 \le t \le T. \qquad \square$$

Как легко видеть из (2.26), оператор R^T действует непрерывно из соболевского класса $\left\{f \in H^1[0,T] \,\middle|\, f(0) = 0\right\}$ (с H^1-нормой) в пространство $\mathcal{F}^T$. Поэтому, он может быть расширен на этот класс по непрерывности. В последующем мы считаем, что это расширение выполнено и полагаем $\operatorname{Dom} R^T = \{f \in H^1[0,T] \,|\; f(0)=0\}$. Мы опускаем простую проверку следующих свойств оператора реакции.

(i) Сопряженный оператор $\left(R^T\right)^* : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ определен на $\operatorname{Dom}\left(R^T\right)^* = \{f \in H^1[0,T] \mid f(T)=0\}$ и представяется в виде

$$\left(\left(R^T\right)^* f\right)(t) = \rho^{\frac{1}{2}}(0) f'(t) - \frac{1}{4}\left[\frac{\rho'(0)}{\rho(0)}\right] f(t) + \int\limits_t^T r(\eta - t) f(\eta)\, d\eta, \quad 0 < t < T. \tag{2.27}$$

(ii) Напомним, что $D^{T,\xi}$ есть оператор запаздывания и обозначим через J^T интегрирование в $\mathcal{F}^T$, $\left(J^T f\right)(t) := \int\limits_0^t f(\eta)\, d\eta$. Справедливы соотношения

$$D^{T,\xi} R^T = R^T D^{T,\xi}, \quad J^T R^T = R^T J^T, \tag{2.28}$$

легко следующие из (2.21), (2.25).

(iii) Согласно (2.26), оператор $R^T J^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ можно представить в виде

$$\left(R^T J^T f\right)(t) = -\rho^{\frac{1}{2}}(0) f(t) + \int\limits_0^t r_1(t-\eta) f(\eta)\, d\eta, \quad 0 < t < T \tag{2.29}$$

с ядром $r_1(t) = -\frac{1}{4}\left[\frac{\rho'(0)}{\rho(0)}\right] + \int\limits_0^t r(\eta)\, d\eta$, $t \geq 0$. Этот оператор ограничен и расширяется с $\operatorname{Dom} R^T$ на $\mathcal{F}^T$ по непрерывности.

(iv) Вернемся к задаче (2.18)–(2.20) и свяжем с ней оператор реакции $R^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}$, $\operatorname{Dom} R^{2T} = \{f \in H^1[0,2T] \,|\; f(0)=0\}$,

$$\left(R^{2T} f\right)(t) := u_x^f(0,t), \quad 0 < t < 2T.$$

В силу принципа локальности, решение u^f (и, в частности, значения производной $u_x^f(0,t)$, $0 \leq t \leq 2T$) определяется поведением плотности ρ в Ω^T. Как следствие, оператор R^{2T} определяется значениями $\rho|_{\Omega^T}$ и не зависит от поведения плотности при $x > x(T)$.

Заметим, что тот же локальный характер зависимости оператора реакции от плотности имеет место и в многомерном случае, а представление (2.26) имеет определенный аналог (см. [6]). Однако, оператор реакции многомерной системы – существенно более сложный объект.

Связывающий оператор. Оператор $C^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$,

$$C^T := \left(W^T\right)^* W^T$$

называется *связывающим оператором* системы α^T. По непрерывности W^T, оператор C^T также непрерывен. В силу определения, имеем

$$\left(C^T f, g\right)_{\mathcal{F}^T} = \left(W^T f, W^T g\right)_{\mathcal{H}^T} = \left(u^f(\cdot, T), u^g(\cdot, T)\right)_{\mathcal{H}^T}, \qquad (2.30)$$

т.е. C^T связывает метрики внешнего и внутреннего пространств.

Связывающий оператор играет ключевую роль в BC-методе благодаря следующему замечательному факту: он допускает явное и простое представление через оператор рекции. Для формулировки результата нам понадобятся вспомогательные операторы:

оператор $S^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^{2T}$,

$$\left(S^T f\right)(t) := \begin{cases} f(t), & 0 < t < T \\ -f(2T - t), & T \le t < 2T, \end{cases}$$

продолжающий управления с $[0, T]$ на $[0, 2T]$ по нечетности относительно $t = T$;

оператор $P_-^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}$,

$$\left(P_-^{2T} f\right)(t) := \frac{1}{2}\left[f(t) - f(2T - t)\right], \quad 0 < t < 2T,$$

выделяющий нечетную часть управлений;

оператор $N^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^T$,

$$N^{2T} f := f\big|_{(0,T)},$$

редуцирующий управления на интервал $(0, T)$;

оператор интегрирования $J^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}$,

$$\left(J^{2T} f\right)(t) = \int_0^t f(\eta)\, d\eta, \quad 0 < t < 2T.$$

Как легко проверить, сопряженный оператор $\left(S^T\right)^* : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^T$ может быть записан в виде

$$\left(S^T\right)^* = 2\, N^{2T} P_-^{2T}. \qquad (2.31)$$

Теорема 1. *Справедливы представления*

$$C^T = -\frac{1}{2}\left(S^T\right)^* R^{2T} J^{2T} S^T \tag{2.32}$$

и

$$\left(C^T f\right)(t) = \rho^{\frac{1}{2}}(0) f(t) + \int\limits_0^T C^T(t,\eta) f(\eta)\, d\eta, \quad 0 \le t \le T \tag{2.33}$$

с ядром

$$C^T(t,\eta) = \frac{1}{2} \int\limits_{|t-\eta|}^{2T-t-\eta} r(s)\, ds.$$

Доказательство. Выберем управления $f, g \in C_0^\infty(0,T)$ и обозначим $f_- := S^T f \in C_0^\infty(0,2T) \subset \mathcal{F}^{2T}$; пусть u^g есть решение (2.1)–(2.3) и u^{f_-} – решение (2.18)–(2.20) такое, что $u|_{x=0} = f_-$. Отметим, что оба решения суть классические. Введем функцию Благовещенского

$$b(s,t) := \int\limits_0^\infty u^{f_-}(x,s)\, u^g(x,t)\, \rho(x) dx, \quad (s,t) \in B^{2T}$$

в треугольнике $B^{2T} := \left\{(s,t) \,\middle|\, 0 \le t \le T,\, t \le s \le 2T - t\right\}$. Вспоминая замечание 2, нетрудно убедиться, что эта функция корректно определена: для любой допустимой пары (s,t) имеем

$$\operatorname{supp} u^g(\,\cdot\,,t) \subset [0, x(t))\,,$$

в то время как $u^{f_-}(\,\cdot\,,s)$ определено на $\operatorname{supp} u^g(\,\cdot\,,t)$.

Для функции b выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
&b_{tt}(s,t) - b_{ss}(s,t)\\
&= \int\limits_0^\infty \left[u^{f_-}(x,s)\, u^g_{tt}(x,t) - u^{f_-}_{ss}(x,s)\, u^g(x,t)\right] \rho(x)\, dx\\
&= \langle\text{см. (2.1)}\rangle = \int\limits_0^\infty \left[u^{f_-}(x,s)\, u^g_{xx}(x,t) - u^{f_-}_{xx}(x,s)\, u^g(x,t)\right]\, dx\\
&= \langle\text{см. (2.7) для } \ u^g\rangle = -\left[u^{f_-}(0,s)\, u^g_x(0,t) - u^{f_-}_x(x,s)\, u^g(0,t)\right]\\
&= -\, f_-(s)\, \left(R^T g\right)(t) + \left(R^{2T} f_-\right)(s)\, g(t) =: F(s,t).
\end{aligned}$$

Следовательно, с учетом нулевых данных Коши (2.2) для u^g, мы приходим к задаче

$$\begin{gathered} b_{tt} - b_{ss} = F \quad \text{в} \quad \operatorname{int} B^{2T} \\ b\big|_{t=0} = b_t\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le s \le 2T. \end{gathered}$$

Применяя формулу Даламбера, имеем

$$b(s,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\eta \int\limits_{s-t+\eta}^{s+t-\eta} F(\xi,\eta)\, d\xi, \quad (s,t) \in B^{2T}.$$

Полагая здесь $s = t = T$, получаем

$$\begin{aligned} b(T,T) =& \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\eta \int\limits_{\eta}^{2T-\eta} \left[-f_-(\xi)\left(R^T g\right)(\eta) + \left(R^{2T} f_-\right)(\xi)\, g(\eta)\right] \, d\eta \\ =& -\frac{1}{2}\int\limits_0^T d\eta\, \left(R^T g\right)(\eta) \int\limits_{\eta}^{2T-\eta} f_-(\xi)\, d\xi \\ &+ \int\limits_0^T d\eta\; g(\eta)\, \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{2T-\eta} \left(R^{2T} f_-\right)(\xi)\, d\xi - \int\limits_0^{\eta} \left(R^{2T} f_-\right)(\xi)\, d\xi\right]. \end{aligned}$$

По нечетности f_-, имеем

$$\int\limits_{\eta}^{2T-\eta} f_-(\xi)\, d\xi \equiv 0, \quad 0 \le \eta \le T.$$

Продолжая выкладку и учитывая представление

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{2T-\eta} \left(R^{2T} f_-\right)(\xi)\, d\xi - \int\limits_0^{\eta} \left(R^{2T} f_-\right)(\xi)\, d\xi\right] \\ = -\left(N^{2T} P_-^{2T} J^{2T} R^{2T} S_-^T f\right)(\eta), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} b(T,T) &= -\left(g,\, N^{2T} P_-^{2T} J^{2T} R^{2T} S_-^T f\right)_{\mathcal{F}^T} \\ &= \langle (\text{см. } (2.31),\ (2.28)) \rangle = \left(-\frac{1}{2}\left(S^T\right)^* R^{2T} J^{2T} S^T f,\, g\right)_{\mathcal{F}^T}. \end{aligned}$$

С другой стороны, из определения b следует:

$$b(T,T) = \int\limits_0^\infty u^{f_-}(x,T)\, u^g(x,T)\, \rho(x)dx = \langle\text{см. Замечание 2}\rangle$$

$$= \big(u^f(\cdot,T), u^g(\cdot,T)\big)_{\mathcal{H}^T} = \langle\text{см. (2.26)}\rangle = \big(C^T f, g\big)_{\mathcal{F}^T}\,.$$

Сопоставляя два полученных выражения для $b(T,T)$ и учитывая плотность C_0^∞-управлений в $\mathcal{F}^T$, мы оправдываем представление (2.32). Подставляя в него (2.29), легко выводим (2.33). $\square$

Важная возможность выразить скалярное произведение волн через оператор реакции была обнаружена А. С. Благовещенским. Операторное представление (2.32) остается в силе и в многомерном случае [5]. Его обобщение для несамосопряженной матричной задачи найдено С. А. Авдониным в [32].

3. Управляемость

3.1. Волновой шейпинг

В наиболее общем виде, изучаемый вопрос может быть поставлен следующим образом: можно ли управлять формой волны на струне? Более точно: можно ли перевести систему α^T из нулевого начального состояния (см. (2.2)) в заданное финальное состояние $u^f(\,\cdot\,,T) = a$ за счет подбора граничного управления f? Задачи подобного типа составляют предмет теории граничного управления, являющейся далеко продвинутой областью математической физики (см., например, [30, 31]). Здесь мы даем утвердительный ответ на поставленный вопрос.

Начнем с того, что отметим простое необходимое условие разрешимости поставленной выше задачи. В силу свойства (2.16), функция a должна иметь носитель на отрезке $\overline{\Omega}^T = [0, x(T)]$, заполняемом волнами к финальному моменту. Поэтому, естественной является следующая постановка задачи: *по заданной функции $a \in \mathcal{H}^T$, найти управление $f \in \mathcal{F}^T$ такое, что выполнено*

$$u^f(\,\cdot\,,T) = a. \tag{3.1}$$

Задача (3.1) очевидным образом эквивалентна уравнению

$$W^T f = a. \tag{3.2}$$

Его разрешимость обеспечивается следующим результатом.

Лемма 4. *Оператор управления W^T является изоморфизмом из $\mathcal{F}^T$ на $\mathcal{H}^T$, причем справедливо представление*

$$\left(W^T\right)^{-1} = Y^T I^T \left[\mathbb{I} + K^T\right]^{-1} = Y^T I^T \left[\mathbb{I} + L^T\right],$$

в котором L^T есть вольтерров оператор в $\mathcal{H}^T$:

$$\left(L^T y\right)(x) = \int\limits_x^{x(t)} l(x,s)\, y(s)\, ds, \quad x \in \Omega^T$$

с ядром, непрерывно зависящим от своих переменных. Помимо этого, W^T изоморфно отображает $C[0,T]$ на $C(\overline{\Omega}^T)$.

Доказательство. Оператор $\mathbb{I} + K^T$, входящий в (2.22), есть оператор Вольтерра второго рода и, как таковой, он является ограниченно обратимым в $\mathcal{H}^T$. Операторы $\left(I^T\right)^* = \left(I^T\right)^{-1} : \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}^T$ и $Y^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ суть изоморфизмы. Поэтому и оператор W^T оказывается изоморфизмом, причем справедливо представление $\left(W^T\right)^{-1} = Y^T I^T \left[\mathbb{I} + L^T\right]$, в котором L^T есть оператор Вольтерра первого рода того же вида, что и K^T. Последнее представление следует из общей теории вольтерровых интегральных уравнений. Поскольку K^T – интегральный оператор с непрерывным ядром, из той же теории следует, что W^T отображает $C[0,T]$ на $C(\overline{\Omega}^T)$ изоморфно (относительно C-норм). □

Следствие 1. *При любом $a \in \mathcal{H}^T$ задача* (3.1) *имеет единственное решение $f = (W^T)^{-1} a \in \mathcal{F}^T$, непрерывно зависящее от правой части a. При $a \in C(\overline{\Omega}^T)$ решение принадлежит классу $C[0,T]$.*

В теории управления множество состояний

$$\mathcal{U}^T := \operatorname{Ran} W^T = \left\{ u^f(\,\cdot\,,T) \,\middle|\, f \in \mathcal{F}^T \right\}$$

называется *достижимым* (к моменту $t = T$). Лемма 4 устанавливает равенство

$$\mathcal{U}^T = \mathcal{H}^T. \tag{3.3}$$

В теории управления оно интерпретируется как *точная граничная управляемость* системы α^T.

Итак, задача управления формой волны (волнового шейпинга) на струне оказывается корректной. В многомерном случае ситуация усложняется: оператор управления, отвечающий аналогу задачи (3.1), не является изоморфизмом и равенство (3.3) заменяется на $\operatorname{clos} \mathcal{U}^T = \mathcal{H}^T$. Многомерная задача граничного управления сильно некорректна и существенно более трудна для исследования (см. [5]).

Завершим этот раздел еще одним полезным следствием леммы 4.

Следствие 2. *Связывающий оператор $C^T = (W^T)^* W^T$ есть положительно определенный изоморфизм пространства $\mathcal{F}^T$. Корме того, C^T изоморфно отображает $C[0,T]$ на $C[0,T]$.*

3.2. Достижимые множества и проекторы

Здесь мы выводим дальнейшие следствия из свойства управляемости (3.3). Напомним, что $D^{T,\xi}$ есть оператор запаздывания.

Во внешнем пространстве $\mathcal{F}^T$ содержится расширяющееся семейство подпространств

$$\mathcal{F}^{T,\xi} := D^{T,\xi}\mathcal{F}^T = \left\{f \in \mathcal{F}^T \,\middle|\, \operatorname{supp} f \subseteq [T-\xi, T]\right\}, \quad 0 \le \xi \le T,$$

которые состоят из запаздывающих управлений (параметр ξ есть время действия управлений, а $T-\xi$ – величина задержкии).

Внутреннее пространство $\mathcal{H}^T$ содержит соответствующее семейство достижимых множеств

$$\mathcal{U}^\xi := W^T\mathcal{F}^{T,\xi} = \langle\text{см. } (2.21)\rangle = \left\{u^f(\,\cdot\,,\xi) \,\middle|\, f \in \mathcal{F}^T\right\}, \quad 0 \le \xi \le T,$$

образованных запаздывающими волнами. Отметим, что каждое $\mathcal{U}^\xi$ является замкнутым подпространством, поскольку W^T есть изоморфизм. Пусть P^ξ есть ортогональный (в метрике $\mathcal{H}^T$) проектор в $\mathcal{U}^T$ на $\mathcal{U}^\xi$. Мы называем P^ξ ***волновым проектором*** и обозначаем через $P^\xi_\perp := P^T - P^\xi$ дополнительный проектор в $\mathcal{U}^T$ на $\mathcal{U}^T \ominus \mathcal{U}^\xi$.

Еще одно выделенное семейство подпространств в $\mathcal{H}^T$ есть

$$\mathcal{H}^\xi := \left\{y \in \mathcal{H}^T \,\middle|\, \operatorname{supp} y \subseteq \overline{\Omega}^\xi\right\}, \quad 0 \le \xi \le T.$$

Соответствующие проекторы G^ξ в $\mathcal{H}^T$ на $\mathcal{H}^\xi$ и дополнительные проекторы $G^\xi_\perp := \mathbb{I} - G^\xi$ действуют по правилу

$$\left(G^\xi y\right)(x) = \begin{cases} y(x), & x \in \Omega^\xi \\ 0, & x \in \Omega^T \backslash \Omega^\xi \end{cases};$$
$$\left(G^\xi_\perp y\right)(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega^\xi \\ y(x), & x \in \Omega^T \backslash \Omega^\xi, \end{cases}$$

т.е. срезают функции на промежутки $\Omega^\xi = (0, x(\xi))$ и $(x(\xi), x(T))$ струны.

Так как свойство (3.3) установлено для произвольного $T > 0$, из соотношения стационарности (2.25) очевидным образом следует, что

$$\mathcal{U}^\xi = \mathcal{H}^\xi, \quad P^\xi = G^\xi, \quad P^\xi_\perp = G^\xi_\perp$$

для любого $\xi \in [0, T]$. Более того, оператор управления W^T отображает $\mathcal{F}^{T,\xi}$ на $\mathcal{U}^\xi = \mathcal{H}^\xi$ изоморфно.

Здесь уместен следующий комментарий "философского" плана. Достижимые множества $\mathcal{U}^\xi$ и волновые проекторы P^ξ суть некоторые внутренние объекты динамической системы α^T, в то время как $\mathcal{H}^\xi$ и G^ξ – объекты, по отношению к ней внешние. Они совпадают в силу управляемости струны. В более сложных системах возможно нарушение управляемости: такого совпадения может не быть и, как следствие, осложняется решение соответствующих обратных задач.[4]

Строение достижимых множеств и свойства волновых проекторов суть ключевые вопросы, ответы на которые необходимы для применения BC-метода.

3.3. Наблюдаемость

В теории управления всякий резултат об управляемости может быть истолкован в терминах двойственности "управляемость–наблюдаемость" (см., например, [30, 31]). Здесь мы приводим такую интерпретацию результатов предыдущего раздела.

Динамическая система α^T_*, ассоциированная с начально-краевой задачей

$$\rho v_{tt} - v_{xx} = 0 \quad \text{в} \quad \{(x,t) \mid x \in \Omega^T, \quad \tau(x) < t < T\} \tag{3.5}$$

$$v|_{t=T} = 0, \;\; v_t|_{t=T} = y \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}^T \tag{3.6}$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad t \in [0, T] \tag{3.7}$$

называется двойственной по отношению к системе α^T (задаче (2.1)–(2.3)). Как известно, (3.5)–(3.7) есть корректная гиперболическая задача: при любом $y \in C^2(\overline{\Omega}^T) \subset \mathcal{H}^T$, удовлетворяющем условиям $y(0) = y'(0) = 0$, она имеет единственное классическое решение $v = v^y(x,t)$.

[4]Как пример, упомянем одномерную двухскоростную (векторную) систему: см. [10, 11, 8].

Отображение $\mathcal{O}^T : \mathcal{H}^T \to \mathcal{F}^T$, $\operatorname{Dom}\mathcal{O}^T = \{y \in C^2(\overline{\Omega}^T) \mid y(0)=y'(0)=0\}$,

$$\left(\mathcal{O}^T y\right)(t) := v_x^y(0,t), \quad 0<t<T$$

называется *оператором наблюдения.* В механике $v_x^y(0,t)$ есть сила, возникающая на закрепленном конце струны $x=0$ как следствие волнового процесса. Сам процесс инициирован возмущением скорости y и наблюдается в обращенном времени. Следующий результат проясняет характер двойственности систем α^T и α_*^T.

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{O}^T = \left(W^T\right)^*. \tag{3.8}$$

Доказательство. Выберем $f \in \mathcal{F}^T$ и $y \in \mathcal{H}^T$ такими, чтобы решения u^f и v^y были классическими. Оба этих решения одновременно определены в области

$$\left\{(x,t) \mid x \in \overline{\Omega}^T,\, \tau(x) \le t \le T\right\} = \{(x,t) \mid t \in [0,T],\ 0 \le x \le x(t)\},$$

в то время как (2.17) влечет

$$u^f\,(x(t),t) = u_x^f\,(x(t),t) = u_t^f\,(x(t),t) = 0 \tag{3.9}$$

для всех t. Интегрируя по упомянутой области, имеем:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle\text{см. (2.1)}\rangle = \int\limits_0^T dt \int\limits_0^{x(t)} \left[\rho(x)u_{tt}^f(x,t) - u_{xx}^f(x,t)\right] v^y(x,t)\,dx \\
&= \int\limits_0^{x(T)} dx\,\rho(x) \int\limits_{\tau(x)}^T u_{tt}^f(x,t)v^y(x,t)\,dt - \int\limits_0^T dt \int\limits_0^{x(t)} u_{xx}^f(x,t)v^y(x,t)\,dx \\
&= \langle\text{см. (2.2), (2.3), (3.6), (3.7), (3.9)}\rangle \\
&= -\int\limits_0^{x(T)} \rho(x)u^f(x,T)y(x)\,dx + \int\limits_0^T f(t)\,v_x^y(0,t)\,dt
\end{aligned}$$

$$+\int\limits_0^{x(T)} dx\,\rho(x)\int\limits_{\tau(x)}^{T} u^f(x,t)v^y_{tt}(x,t)\,dt-\int\limits_0^T dt\int\limits_0^{x(t)} u^f(x,t)v^y_{xx}(x,t)\,dx$$
$$=-\int\limits_0^{x(T)} \rho(x)u^f(x,T)y(x)\,dx+\int\limits_0^T f(t)\,v^y_x(0,t)\,dt$$
$$+\int\limits_0^T dt\int\limits_0^{x(t)} u^f(x,t)\left[\rho(x)v^y_{tt}(x,t)-v^y_{xx}(x,t)\right]\,dx$$
$$=\langle\text{см. (3.5)}\rangle=-\left(W^Tf,y\right)_{\mathcal{H}^T}+\left(f,\mathcal{O}^Ty\right)_{\mathcal{F}^T}.$$

Принимая во внимание плотность используемых f и y в $\mathcal{F}^T$ и $\mathcal{H}^T$ соответственно, приходим к (3.8). □

Следствие 3. *Оператор $\mathcal{O}^T$ может быть расширен с* $\mathrm{Dom}\,\mathcal{O}^T$ *на* $\mathcal{H}^T$ *по непрерывности, причем расширение представимо в виде*

$$\left(\mathcal{O}^Ty\right)(t)=\left[\rho\left(x(T-t)\right)\rho(0)\right]^{\frac14}y\left(x(T-t)\right)$$
$$+\int\limits_t^T w^*(\eta,t)y\left(x(T-\eta)\right)\,d\eta,\quad 0<t<T. \quad (3.10)$$

Для вывода (3.10) достаточно сопоставить (3.8) с (2.24).

Следующий результат легко следует из (3.10) и соответствует конечности скорости распространения волн в системе α^T_*.

Следствие 4. *Фиксируем* $\xi\in(0,T)$. *Если* $\mathrm{supp}\,y\subset\overline{\Omega}^T\setminus\overline{\Omega}^\xi=(x(\xi),x(T)]$, *то выполнено* $\mathrm{supp}\,\mathcal{O}^Ty\subset[0,T-\xi)$.

Свойство системы α^T_*, дуальное управляемости системы α^T, дается следующим предложением.

Лемма 6. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{O}^T=\{0\}. \quad (3.11)$$

Доказательство. По известному операторному равенству имеем:

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{O}^T=\mathrm{Ker}(W^T)^*=\mathcal{H}^T\ominus\mathrm{clos}\,\mathrm{Ran}\,W^T$$
$$=\mathcal{H}^T\ominus\mathrm{clos}\,\mathcal{U}^T=\langle\text{см. (3.3)}\rangle=\{0\}. \qquad □$$

Свойство (3.11) называется *наблюдаемостью* системы α^T и допускает следующую интерпретацию. Если возмущение скорости y локализовано в Ω^T, то порожденная им волна v^y успевает дойти до конца струны и должна проявить себя (наблюдаться) в $x=0$ в интервале времени $[0,T]$. Если же никаких сил не регистрируется (т.е. $v^y_x(0,t)=\left(\mathcal{O}^T y\right)(t)\equiv 0,\ 0<t<T$), то такое возможно лишь в случае, если $y|_{\Omega^T}=0$ и, значит, возмущение y локализовано достаточно далеко от конца: находится вне Ω^T.

Двойственность "управляемость-наблюдаемость" есть очень общая черта динамических систем (см. [30, 31]). Наблюдаемость очевидным образом важна при решении обратных задач. Поэтому для последних, управляемость – позитивный факт: возможность управлять системой ведет к возможности извлекать информацию о ее внутренних свойствах из "наружных" наблюдений.

4. Геометрическая оптика

4.1. Распространение разрывов в системе α^T

Здесь мы обсуждаем хорошо известный физический эффект: в волнопроводящей среде, сигналы с резким вступлением распространяются вдоль пространственно-временных лучей, причем скорость распространения и амплитуда сигнала определяются локальными свойствами среды вблизи его траектории.

Вернемся к системе α^T. Фиксируем $\xi\in(0,T)$ и предположим, что управление $f\in\mathcal{F}^T$ разрывно: имеет скачок в момент $t=T-\xi$,

$$f(T-\xi+0)-f(T-\xi-0)\neq 0.$$

Тогда, в силу непрерывности интегрального члена в (2.4), получаем соотношение

$$\begin{aligned} u^f\left(x(\xi)-0\,,T\right)&-u^f\left(x(\xi)+0\,,T\right)\\ &=\left[\frac{\rho\left(x(\xi)\right)}{\rho(0)}\right]^{-\frac{1}{4}}\left[f(T-\xi+0)-f(T-\xi-0)\right]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Следовательно, разрыв управления приводит к разрыву волны, причем последний распространяется вдоль характеристической кривой $\{(x,t)\mid t=\tau(x)+T-\xi\}$ (см. рис. 2а, кривая I; $\operatorname{supp}u^f$ затенен), в то время как амплитуды этих разрывов связаны через (4.1).

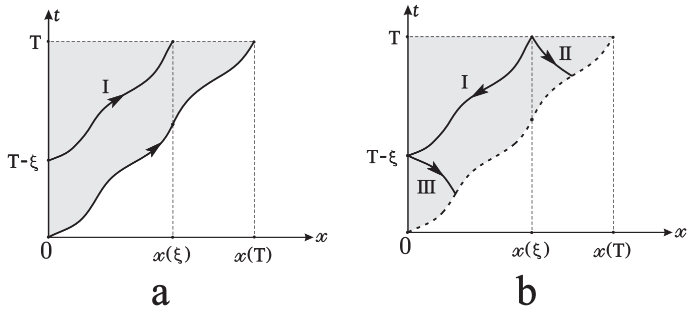

Рис. 2. Распространение разрывов.

Те же рассмотрения остаются в силе и в случае $\xi = T$, т.е. для управления со скачком в $t = 0$: в этом случае имеем $f(-0) = 0$ (см. Соглашение 1) и $u^f\,(x(T)+0,T) = 0$ (см. (2.16)), тогда как (4.1) ведет к равенству

$$u^f\,(x(T)-0\,,T) = \left[\frac{\rho\,(x(T))}{\rho(0)}\right]^{-\frac{1}{4}} f(+0). \tag{4.2}$$

Таким образом, в финальный момент $t = T$ разрыв волны находится на ее переднем фронте $x = x(T)$.

4.2. Разрывы в системе α_*^T

Вполне аналогичный эффект имеет место в двойственной системе.

Предположим, что функция y (возмущение скорости), входящая в данные Коши (3.6), терпит разрыв при $x = x(\xi) \in \Omega^T$. Вспоминая определение $\mathcal{O}^T y := v_x^y(0,\,\cdot\,)$ и используя непрерывность интегрального члена в (3.10), легко вывести соотношение

$$\begin{aligned} v_x^y(0\,,T-\xi-0) &- v_x^y(0\,,T-\xi+0) \\ &= \left[\rho\,(x(\xi))\,\rho(0)\right]^{\frac{1}{4}} \left[y\,(x(\xi)+0) - y\,(x(\xi)-0)\right]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Оно показывает, что разрыв возмущения скорости распространяется вдоль струны (см. кривую I на рис. 2b; область определения решения v^y затенена), достигает конца $x = 0$ в момент $t = T - \xi$ и производит некоторый скачок силы.[5] Амплитуда этого скачка дается соотношением (4.3).

Соотношения вида (4.2), (4.3) обычно называют *формулами геометрической оптики.* Они имеют прямые аналоги в многомерном случае (см. [5, 7]).

4.3. Амплитудное представление изображений

Здесь мы выводим соотношение, которое представляет изображение функции в виде совокупности разрывов волн, распространяющихся в системе α_*^T. Напомним, что изображения определены в разделе 1.3; семейство срезающих проекторов G^ξ, $G_\perp^\xi$ введено в 3.2.

Лемма 7. *Фиксируем* $\xi \in (0,T)$. *Для* $y \in C(\overline{\Omega}^T) \subset \mathcal{H}^T$ *сраведливо соотношение*

$$\lim_{t\to T-\xi-0}\left(\mathcal{O}^T G_\perp^\xi y\right)(t) = \left[\rho\left(x(\xi)\right)\rho(0)\right]^{\frac14} y\left(x(\xi)\right). \tag{4.4}$$

Доказательство. В силу определений имеем:

$$\operatorname{supp} G_\perp^\xi y \subset \left[x(\xi)\,, x(T)\right], \quad \left(G_\perp^\xi y\right)\left(x(\xi)+0\right) = y\left(x(\xi)\right). \tag{4.5}$$

По следствию 4, это влечет

$$\operatorname{supp} \mathcal{O}^T G_\perp^\xi y \subset [0\,, T-\xi], \quad \left(\mathcal{O}^T G_\perp^\xi y\right)(T-\xi+0) = 0. \tag{4.6}$$

Применяя (4.3), получаем:

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{O}^T G_\perp^\xi y\right)\Big|_{t=T-\xi+0}^{t=T-\xi-0} &= \langle \text{см. } (4.6)\rangle = \left(\mathcal{O}^T G_\perp^\xi y\right)(T-\xi-0)\\ &= \left[\rho\left(x(\xi)\right)\rho(0)\right]^{\frac14}\left(G_\perp^\xi y\right)\Big|_{x=x(\xi)-0}^{x=x(\xi)+0} = \langle \text{см. } (4.5)\rangle\\ &= \left[\rho\left(x(\xi)\right)\rho(0)\right]^{\frac14} y\left(x(\xi)\right)\end{aligned}$$

и приходим к (4.4). □

---

[5]Имеется и второй разрыв волны v^y, распространяющийся в противоположном направлении (см. кривую II на рис. 2b), но он не играет роли в дальнейших рассмотрениях. Еще один разрыв (кривая III) появляется при отражении от конца $x = 0$.

Вспоминая определение изображений, можно переписать (4.4) в виде

$$\lim_{t\to T-\xi-0}\left(\mathcal{O}^T G_\perp^\xi y\right)(t)=\rho^{\frac{1}{4}}(0)\,\widetilde{y}(\xi)=\rho^{\frac{1}{4}}(0)\left(I^T y\right)(\xi),\quad 0<\xi<T. \tag{4.7}$$

При фиксированном ξ, левая часть (4.7) есть *амплитуда разрыва*, прошедшего через участок струны Ω^ξ и зарегестрированного на ее конце в момент $t=T-\xi$. Формула (4.7) представляет изображение функции в виде совокупности таких амплитуд.

5. Обратная задача

5.1. Постановка

Рассматриваемая ниже постановка динамической ОЗ мотивирована принципом локальности или, точнее, локальным характером зависимости оператора реакции от плотности (см. раздел 2.2, (ii)). Напомним, что оператор R^{2T}, связанный с задачей (2.18)–(2.20), определяется значениями $\rho|_{\Omega^T}$ (см. 2.4, (iv)). Это свойство имеет прозрачный физический смысл. Именно, отклик системы α^T (т.е. сила $u_x^f(0,t)$, измеряемая на конце струны) на действие управления f формируется волнами, которые отражаются от неоднородностей плотности и возвращаются к концу $x=0$ (см. идущие влево стрелки на рис. 3):

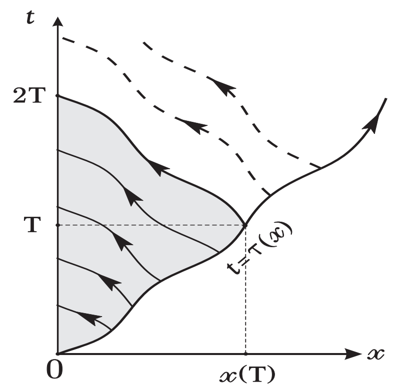

Рис. 3. Локальная зависимость R^{2T} от плотности.

Волны, отраженные от глубин $x>x(T)$, возвращаются к концу *позже* момента $t=2T$; они не регистрируются внешним наблюдателем, измеряющим значения $u_x^f(0,t)$ при временах $0\le t\le 2T$. Поэтому оператор R^{2T}, отвечающий этим измерениям, содержит определенную информацию о $\rho\big|_{\Omega^T}$, но “ничего не знает” о $\rho\big|_{x>x(T)}$. С учетом этого факта, естественно поставить обратную задачу следующим образом.

Динамическая ОЗ: *по заданному оператору R^{2T} восстановить плотность $\rho\big|_{\Omega^T}$.*

Добавим к этому, что величина $x(T)$, т.е. длина участка $\Omega^T = (0, x(T))$, заполненного волнами, не предполагается известной и будет найдена в ходе решения ОЗ.

В такой ясной и естественной форме динамическая ОЗ была впервые поставлена А. С. Благовещенским: в ставшей классической работе [17] им был предложен так называемый *локальный подход*, решающий задачу и дающий характеристические условия ее разрешимости. Независимо и почти одновременно, в физической литературе Б. Гопинатом и М. М. Сондхи был предложен другой подход [22, 23], также решающий ОЗ в вышеприведенной постановке, т.е. соблюдающий локальность восстановления плотности. В обоих подходах выводится уравнение М. Г. Крейна и применяется для решения ОЗ, причем вывод использует чисто локальную (гиперболическую) технику, что позволяет обойтись без неадекватных спектральных средств (типа преобразования Фурье по времени и т.п.). Особенностью подхода Гопината–Сондхи является его прямая связь с задачей управления.

Тема нашей работы – метод граничного управления (ВСм). Впервые он был предложен в [2] для решения *многомерной* обратной задачи о восстановлении плотности. Затем в [3] появилась версия ВСм, использующая многомерные аналоги уравнений Гельфанда–Левитана–Крейна. Эти аналоги выводились из связи со специальной задачей граничного управления. Позже, в 1995–1996, стало ясно, что в одномерном случае эта версия фактически совпадает со схемой Гопината–Сондхи.[6] ВСм вбирает определенные черты обоих подходов [17] и [22]: он соблюдает принцип локальности и использует граничную управляемость соответствующей динамической системы. Однако, принципиальное преимущество ВСм состоит в том, что он переносится на многомерный случай.

Представляя одномерный вариант ВС-метода, мы придерживаемся следующего плана:

- в разделе 5 описывается (с незначительными изменениями) одномерная версия подхода [3]. Она фактически совпадает со схе-

[6]На это автору было указано Р.Ракешем.

мой Гопината–Сондхи: уравнение Крейна появляется при рассмотрении специальной задачи граничного управления. Затем, оно же используется для решения динамической ОЗ. Отметим, что уравнение Крейна является наиболее адекватным и удобным средством решения одномерных обратных задач;

- в разделе 6, для решения той же ОЗ мы вводим главные инструменты BC-метода: амплитудную формулу, визуализирующие функционалы и волновые базисы. Именно эти инструменты имеют прямые многомерные аналоги;[7] именно они реализуют наиболее эффектную процедуру BCм – делают волны на струне видимыми внешнему наблюдателю;
- в разделе 7 решается спектральная ОЗ для конечной струны.

5.2. Специальная задача управления и ОЗ

Чтобы представить эвристическую идею подхода Гопината–Сондхи, обратимся к системе α^T и рассмотрим две следующих ситуации.

1. Предположим, что к системе прикладывается “стандартное” управление f, имеющее форму единичной ступеньки: $f(t) \equiv 1$, $t \in [0,T]$ и пусть $u^1(\,\cdot\,,T)$ есть соответствующая волна (состояние), показанная на рис. 4.

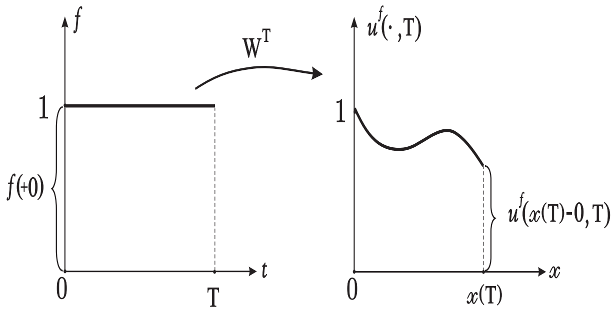

Рис. 4. Стандартное управление.

Ясно, что форма произведенной волны $u^1(\,\cdot\,,T)$ определяется плотностью $\rho|_{\Omega^T}$. Таким образом, в случае стандартного управления, информация о плотности содержится в соответствующем состоянии.

[7]Точнее говоря, здесь мы описываем одномерные версии тех конструкций, которые первоначально были предложены для решения многомерных задач.

2. Теперь предположим, что удалось найти управление f, порождающее волну $u^f(\,\cdot\,,T)\equiv 1$ в Ω^T (см. рис. 5). Заметим, что такое f решает задачу управления (3.1) со специальной правой частью $a\equiv 1$.

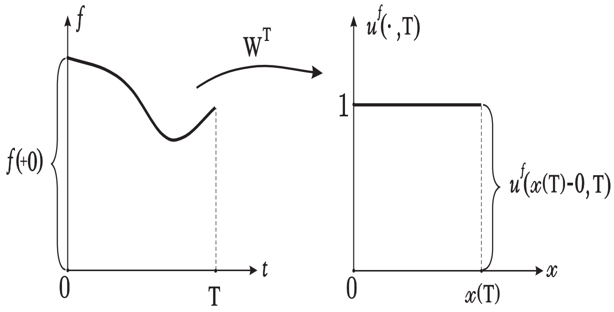

Рис. 5. Стандартное состояние.

Итак, мы имеем управление, порождающее некоторое стандартное состояние. Ясно, что в отличие от предыдущего случая, именно управление содержит теперь информацию о плотности.

Суть подхода [22] (и одну из возможных интерпретаций BC-метода) можно описать так. Способность управлять системой и создавать *стандартные состояния* открывает возможность переводить информацию о внутренних свойствах системы (ее структуре, параметрах и т.п.) из внутреннего пространства во внешнее. Получая такую информацию, внешний наблюдатель может использовать ее для восстановления этих свойств.

При решении поставленной выше ОЗ эта философия реализуется по следующему плану:

- показать, что специальная задача управления разрешима, т.е. управления $f\in\mathcal{F}^T$, производящие "стандартные волны" $u^f(\,\cdot\,,T)\in\mathcal{H}^T$ действительно существуют;
- найти такие управления эффективно по данным ОЗ (т.е. через оператор реакции R^{2T});
- извлечь из из них информацию о плотности – восстановить $\rho\big|_{\Omega^T}$.

5.3. Уравнения Гельфанда–Левитана–Крейна

Следуя намеченному плану, мы будем рассматривать стандартные состояния, имеющие форму линейных функций $l^T\in\mathcal{H}^T$,

$$l^T(x)=\beta x+\gamma,\quad x\in\overline{\Omega}^T$$

с постоянными β, γ. Специальная задача управления (3.1) ставится так: *найти управление f из условия*

$$u^f(\,\cdot\,,T) = l^T. \tag{5.1}$$

В силу леммы 4, эта задача разрешима единственным образом; ее решение есть

$$f = \langle \text{см. } (3.2)\rangle = \left(W^T\right)^{-1} l^T \in \mathcal{F}^T.$$

Следующий результат характеризует это решение в терминах данных ОЗ. Напомним, что $C^T = (W^T)^* W^T$ есть связывающий оператор системы α^T и введем управление $\varkappa^T \in \mathcal{F}^T$, $\varkappa^T(t) := T - t$.

Теорема 2. *Управление $f = \left(W^T\right)^{-1} l^T$ является единственным решением уравнения*

$$C^T f = \beta\varkappa^T - \gamma\left(R^T\right)^* \varkappa^T \quad \text{в} \quad \mathcal{F}^T. \tag{5.2}$$

Решение f принадлежит классу $C[0,T]$.

Доказательство. Поскольку $\varkappa^T \in \operatorname{Dom}\left(R^T\right)^*$ (см. раздел 2.4 (i)), то правая часть (5.2) корректно определена.

Выберем произвольно управление $g \in C_0^\infty(0,T) \subset \mathcal{F}^T$; напомним, что решение u^g является классическим и, согласно (2.16), выполнено $\operatorname{supp} u^g(\,\cdot\,,T) \subset [0, x(T)]$. Далее имеем соотношения:

$$\begin{aligned}
\left(C^T f, g\right)_{\mathcal{F}^T} &= \langle \text{см. } (2.26)\rangle = \left(u^f(\,\cdot\,,T), u^g(\,\cdot\,,T)\right)_{\mathcal{H}^T} \\
&= \langle \text{см. } (5.1)\rangle = \left(l^T, u^g(\,\cdot\,,T)\right)_{\mathcal{H}^T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_0^{x(T)} l^T(x) u^g(x,T)\,\rho(x)dx = \langle \text{см. } (2.2)\rangle \\
&= \int\limits_0^{x(T)} dx\, l^T(x)\,\rho(x) \int\limits_0^T (T-t)\, u^g_{tt}(x,t)\,dt = \langle \text{см. } (2.1)\rangle \\
&= \int\limits_0^T dt\,(T-t) \int\limits_0^{x(T)} l^T(x)\, u^g_{xx}(x,t)\,dx = \langle \text{см. } (3.9) \text{ для } \ t = T\rangle \\
&= -\int\limits_0^T (T-t)\left[l^T(0) u^g_x(0,t) - l^T_x(0) u^g(0,t)\right]\,dt \\
&= -\left(\varkappa^T, \gamma R^T g\right)_{\mathcal{F}^T} + \left(\varkappa^T, \beta g\right)_{\mathcal{F}^T} = \left(\beta\varkappa^T - \gamma (R^T)^* \varkappa^T, g\right)_{\mathcal{F}^T}.
\end{aligned}$$

Сопоставляя начало и конец выкладки и принимая во внимание плотность используемых g, приходим к уравнению (5.2). Отметим также, что его правая часть попадает в класс $C[0,T]$, что легко усматривается из (2.27).

Разрешимость уравнения (5.2), единственность и непрерывность решения вытекают из следствий 1, 2 леммы 4. □

Рассмотрим два частных случая уравнения (5.2):

- $\beta = 0$, $\gamma = 1$; линейная функция есть $l^T = 1^T(\,\cdot\,) := 1$ в $\overline{\Omega}^T$. Обозначая $q^T := \left(W^T\right)^{-1} 1^T$, заключаем, что управление $f = q^T$, решающее задачу (5.1) с правой частью 1^T, является единственным решением уравнения
$$C^T f = -\left(R^T\right)^* \varkappa^T \quad \text{в} \quad \mathcal{F}^T. \tag{5.3}$$
- $\beta = 1$, $\gamma = 0$; в этом случае линейная функция совпадает с координатной функцией на струне и мы обозначаем ее через $\pi^T(x) := x$ в $\overline{\Omega}^T$. Пусть $p^T := \left(W^T\right)^{-1} \pi^T$ есть решение задачи (5.1) с правой частью π^T. Применяя теорему 2, мы видим, что управление $f = p^T$ является единственным решением уравнения
$$C^T f = \varkappa^T \quad \text{в} \quad \mathcal{F}^T. \tag{5.4}$$

Значение уравнений (5.3), (5.4) для ОЗ состоит в следующем: внешний наблюдатель, располагающий оператором реакции R^{2T}, может использовать эти уравнения для нахождения управлений q^T и p^T в $\mathcal{F}^T$. В самом деле, ограничивая измерения временами $0 \le t \le T$, можно очевидным образом определить оператор $R^T : f \mapsto u^f_x(0,\,\cdot\,)\big|_{[0,T]}$ и его сопряженный $\left(R^T\right)^*$, а связывающий оператор C^T найти из (2.32). Таким образом, наблюдатель имеет возможность составить уравнения и, решив их, получить
$$q^T = -\left(C^T\right)^{-1} \left(R^T\right)^* \varkappa^T, \quad p^T = \left(C^T\right)^{-1} \varkappa^T. \tag{5.5}$$

Итак, два первых пункта плана, намеченного в конце раздела 5.2, реализованы.

Мы называем (5.3), (5.4) уравнениями Гельфанда–Левитана–Крейна (ГЛК) по следующей причине. Классическое уравнение Гельфанда–Левитана, впервые выведенное при решении спектральной ОЗ для оператора Штурма–Лиувилля (см. [20]), может быть также выведено по предложенной выше схеме, т.е. из связи с адекватной специальной задачей граничного управления. Для этого надо применить эту схему к волновому уравнению с потенциалом $u_{tt} - u_{xx} + V(x)u = 0$ вместо (2.1): см. [1]. В то же время, классическое уравнение Крейна, предложенное при решении спектральной ОЗ для неоднородной струны (см. [28, 17]), можно получить из (5.4) дифференцированием и тривиальной линейной заменой переменных. Таким образом, наш подход дает единую "BC-интерпретацию" основных уравнений теории обратных задач. Главное преимущество такой интерпретации состоит в том, что именно она приводит к естественным многомерным аналогам уравнений ГЛК [3, 6].

Для завершения намеченной программы остается установить связь решений q^T, p^T с параметрами струны. Одна из возможностей – использовать соотношение, связывающее амплитуды разрывов управлений и волн: согласно (4.2) имеем:

$$1 = 1^T\left(x(T)-0\right) = u^{q^T}\left(x(T)-0, T\right) = \left[\frac{\rho\left(x(T)\right)}{\rho(0)}\right]^{-\frac{1}{4}} q^T(+0),$$

$$x(T) = \pi^T\left(x(T)-0\right) = u^{p^T}\left(x(T)-0, T\right) = \left[\frac{\rho\left(x(T)\right)}{\rho(0)}\right]^{-\frac{1}{4}} p^T(+0),$$

что ведет к равенству

$$x(T) = \frac{p^T(+0)}{q^T(+0)}. \tag{5.6}$$

Другой способ – использовать степенные моменты (см. раздел 1.2): представляя

$$m_0(T) = \int\limits_0^{x(T)} \rho(x)\,dx = \left(1^T, 1^T\right)_{\mathcal{H}^T} = \left(W^T q^T, W^T q^T\right)_{\mathcal{H}^T}$$

$$= \langle\text{см. } (2.26)\rangle = \left(C^T q^T, q^T\right)_{\mathcal{F}^T} = \langle\text{см. } (5.3)\rangle = -\left((R^T)^* \varkappa^T, q^T\right)_{\mathcal{F}^T}$$

и

$$m_1(T) = \int\limits_0^{x(T)} x\rho(x)\,dx = \left(\pi^T, 1^T\right)_{\mathcal{H}^T} = \left(W^T p^T, W^T q^T\right)_{\mathcal{H}^T}$$

$$= \langle \text{см. } (2.26)\rangle = \left(C^T p^T, q^T\right)_{\mathcal{F}^T} = \langle \text{см. } (5.4)\rangle = \left(\varkappa^T, q^T\right)_{\mathcal{F}^T},$$

мы приходим к

$$x(T) = \langle \text{см. } (1.2)\rangle = \left[\frac{dm_0(T)}{dT}\right]^{-1} \frac{dm_1(T)}{dT} \qquad (5.7)$$

Таким образом, по заданному оператору R^{2T} можно определить положение точки $x = x(T)$ – переднего фронта волны, распространяющейся вдоль струны. Соотношения (5.6), (5.7) будут использованы для восстановления плотности.

5.4. Семейство уравнений ГЛК

Как и в классической теории обратных задач, в BC-методе используется не одно уравнение ГЛК, а семейство таковых. Для вывода этого семейства мы просто повторим рассмотрения предыдущего раздела, заменяя T на промежуточное $\xi \in (0, T)$.

Именно, рассмотрим семейство “укороченных” динамических систем α^ξ вида

$$\begin{array}{ll} \rho u_{tt} - u_{xx} = 0, & x > 0, \quad 0 < t < \xi \\ u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, & x \geq 0 \\ u\big|_{x=0} = f, & t \in [0, \xi] \end{array}$$

индексированных параметром $\xi \in (0, T]$. Каждой из них сопоставляются соответствующие пространства $\mathcal{F}^\xi = L_2(0, \xi)$, $\mathcal{H}^\xi = L_{2,\rho}(\Omega^\xi)$ и операторы W^ξ, R^ξ, $C^\xi = (W^\xi)^* W^\xi$ и т.д.. Очевидно, системы α^ξ наследуют все свойства системы α^T; в частности, каждая α^ξ управляема.

Оператор R^{2T} отвечающий системе α^T (см. задачу (2.18)–(2.20)), определяет операторы R^ξ, $(R^\xi)^*$ и $R^{2\xi}$ для любого $\xi < T$. В самом деле, вводя оператор $\mathcal{T}^{2T,\xi} : \mathcal{F}^\xi \to \mathcal{F}^{2T}$:

$$\left(\mathcal{T}^{2T,\xi} f\right)(t) := f\left(t - (2T - \xi)\right), \quad 0 \leq t \leq 2T$$

(см. Соглашение 1!) нетрудно проверить, что

$$R^\xi = \left(\mathcal{T}^{2T,\xi}\right)^* R^{2T} \mathcal{T}^{2T,\xi}, \quad \xi \in (0, 2T].$$

По (2.32), связывающий оператор укороченной системы представляется в виде

$$C^\xi = -\frac{1}{2}\,(S^\xi)^* R^{2\xi} J^{2\xi} S^\xi; \tag{5.8}$$

следовательно, все такие операторы определяются одним оператором R^{2T}. Поэтому внешний наблюдатель, располагающий R^{2T}, может составить семейство уравнений ГЛК

$$C^\xi f = -(R^\xi)^* \varkappa^\xi, \quad C^\xi f = \varkappa^\xi \tag{5.9}$$

(здесь $\varkappa^\xi := \xi - t$) и решить их в соответствующих внешних пространствах $\mathcal{F}^\xi$ для $0 < \xi \le T$. Пусть

$$q^\xi = -(C^\xi)^{-1}(R^\xi)^* \varkappa^\xi, \quad p^\xi = (C^\xi)^{-1} \varkappa^\xi \tag{5.10}$$

суть решения, удовлетворяющие уравнениям $W^\xi q^\xi = 1^\xi$ и $W^\xi p^\xi = \pi^\xi$ соответственно. Заменяя T на ξ в (5.5)–(5.7), имеем

$$m_0(\xi) = -\big((R^\xi)^* \varkappa^\xi, q^\xi\big)_{\mathcal{F}^\xi}, \quad m_1(\xi) = \big(\varkappa^\xi, q^\xi\big)_{\mathcal{F}^\xi}$$

и затем получаем

$$x(\xi) = \frac{p^\xi(+0)}{q^\xi(+0)} = \\ -\left[\frac{d}{d\xi}\big((R^\xi)^*\varkappa^\xi, q^\xi\big)_{\mathcal{F}^\xi}\right]^{-1} \frac{d}{d\xi}(\varkappa^\xi, q^\xi)_{\mathcal{F}^\xi}, \quad 0 < \xi \le T. \tag{5.11}$$

Эти соотношения и дают возможность решить ОЗ.

5.5. Решение ОЗ

Нам остается лишь подытожить проведенные выше рассмотрения. Плотность ρ на участке струны Ω^T восстанавливается по заданному оператору реакции R^{2T} с помощью следующей процедуры:

- определим операторы R^ξ, $\big(R^\xi\big)^*$ и C^ξ (см. (5.8)) для каждого $\xi \in (0, T]$,
- решая уравнения ГЛК (5.9), найдем управления q^ξ и p^ξ (см. (5.10)), $0 < \xi \le T$,
- найдем функцию $x(\xi)$, $0 < \xi \le T$ согласно (5.11),
- обращая функцию $x(\,\cdot\,)$, найдем эйконал $\tau = \tau(x)$, $x \in [0, x(T)]$,

• восстановим плотность $\rho(x) = \langle$см. (1.1)$\rangle = (\tau'(x))^2$, $x \in [0, x(T)]$.[8]

Динамическая ОЗ решена.

Добавим, что восстановить $\rho|_{\Omega^T}$ можно было бы только по решениям $\{q^\xi\}_{0\le\xi\le T}$ (не привлекая решений p^ξ), что и сделано в пионерской работе [22]. Причина, по которой мы пошли на усложнение, в том, что координатные функции работают в многомерной задаче: см. [5, 7].

Еще одна сторона проблемы – найти характеристическое описание данных обратной задачи, обеспечивающее ее разрешимость. Точнее, вопрос состоит в нахождении необходимых и достаточных условий, гарантирующих, что заданный оператор R, действующий в пространстве $\mathcal{F}^{2T}$ является оператором реакции некоторой системы α^T вида (2.1)–(2.3). Для струны с *неймановским* граничным управлением $u_x(0,\,\cdot\,) = f$ такие условия найдены А. С. Благовещенским в [17]. Аналогичный результат может быть получен и средствами BC-метода:

Теорема 3. *Оператор*

$$R : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}, \quad \operatorname{Dom} R = \big\{ f \in H^1[0, 2T] \mid f(0) = 0 \big\}$$

является оператором реакции некоторой системы (2.1)–(2.3) *с плотностью* $\rho \in C^\infty(\overline{\Omega}^T)$, *если и только если*

(1) *справедливо представление*

$$(Rf)(t) = -\,\beta\,\frac{df}{dt}(t) + \gamma\,f(t) + \int\limits_0^t r(t-s)\,f(s)\,ds, \quad 0 < t < 2T$$

с постоянными $\beta > 0$ *и* γ *и функцией* $r \in C^\infty[0, 2T]$;

(2) *оператор*

$$C := -\frac{1}{2}\,(S^T)^* R J^{2T} S^T$$

положительно определен в $\mathcal{F}^T$, т.е. $C \ge \lambda\,\mathbb{I}$ *с постоянной* $\lambda > 0$.

Опуская доказательство (см. более общий случай в [11]), прокомментируем сам результат. Анализируя схему, по которой восстанавливалась плотность, мы видим, что решить ОЗ означает решить

[8] Заметим, что это соотношение есть одномерный вариант известного *уравнения эйконала* $|\nabla\tau|^2 = \rho$.

уравнения ГЛК (5.9). Поэтому, так как условие (2) обеспечивает разрешимость этих уравнений, то и сама ОЗ оказывается разрешимой.

К сожалению, в многомерном случае столь простая и законченная характеризация до сих пор не найдена и не ясно, существует ли она вообще.[9]

6. Визуализация волн

6.1. Амплитудная формула

В разделе 6 демонстрируются дополнительные возможности ВС-метода: выводится соотношение, которое делает волны на струне видимыми для внешнего наблюдателя. Именно это мы и называем *визуализацией*. Примечательно, что предлагаемая техника, основанная на формулах геометрической оптики, применима и успешно срабатывает в многомерном случае (см. [2, 5, 7, 8]).

Напомним, что семейства подпространств $\mathcal{H}^\xi \subset \mathcal{H}^T$ и соответствующих проекторов G^ξ, $G^\xi_\perp$ были введены в разделе 3.2; там же определены проекторы P^ξ на достижимые множества $\mathcal{U}^\xi$ и дополнительные к ним проекторы $P^\xi_\perp$. Оператор изображения I^T рассматривается как отображение из $\mathcal{H}^T$ в $\mathcal{F}^T$ (см. раздел 1.3). Соответственно, для $f \in \mathcal{F}^T$ изображение волны $u^f(\,\cdot\,,T) \in \mathcal{H}^T$ есть функция $\widetilde{u}^f(t,T) = \big(I^T u^f(\,\cdot\,,T)\big)(t)$, $t \in [0,T]$, рассматриваемая как элемент *внешнего* пространства $\mathcal{F}^T$.

Лемма 8. *Пусть f есть управление класса $C[0,T]$. Справедливо представление*

$$\widetilde{u}^f(\xi,T) = \rho^{-\frac{1}{4}}(0) \lim_{t\to T-\xi-0} \left[(W^T)^* P^\xi_\perp W^T f\right](t), \quad 0<\xi<T. \tag{6.1}$$

Доказательство. Напомним, что

$$\widetilde{u}^f(\xi,T) := \rho^{\frac{1}{4}}\left(x(\xi)\right) u^f\left(x(\xi),T\right), \quad 0 \le \xi \le T,$$

(см. раздел 1.3). По лемме 4, волна $u^f(\,\cdot\,,T)$ непрерывна на $\overline{\Omega}^T$. Подставляя $y = u^f(\,\cdot\,,T) = W^T f$ в (4.7), получаем

$$\widetilde{u}^f(\xi,T) = \rho^{-\frac{1}{4}}(0) \lim_{t\to T-\xi-0} \left(\mathcal{O}^T G^\xi_\perp W^T f\right)(t)$$

[9] Тем не менее, некоторая условная характеризация известна: см. [6].

$$= \langle \text{см. } (3.4), (3.8) \rangle = \rho^{-\frac{1}{4}}(0) \lim_{t \to T-\xi-0} \left[(W^T)^* P_\perp^\xi W^T f \right](t). \qquad \square$$

Как и (4.7), соотношение (6.1) представляет изображение волны в виде совокупности амплитуд разрывов. Имея это ввиду, мы называем (6.1) *амплитудной формулой* (АФ).

6.2. Визуализация

Следующее обстоятельство играет ключевую роль и дает возможность применить АФ для решения ОЗ: произведение операторов $(W^T)^* P_\perp^\xi W^T$, фигурирующее в (6.1), определяется данными ОЗ (оператором реакции R^{2T}). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим полярное разложение[10] оператора управления:

$$W^T = \Phi^T \, |W^T|,$$

где $|W^T| := \left((W^T)^* W^T\right)^{\frac{1}{2}} = (C^T)^{\frac{1}{2}}$ – модуль оператора W^T, а Φ^T – унитарный оператор из $\mathcal{F}^T$ на $\operatorname{Ran} W^T = \langle \text{см. } (3.3) \rangle = \mathcal{H}^T$. Обозначим через $\check{P}^\xi$ проектор в $\mathcal{F}^T$ на подпространство $\check{\mathcal{U}}^\xi := |W|^T \mathcal{F}^{T,\xi}$, пусть $\check{P}_\perp^\xi := \mathbb{I} - \check{P}^\xi$. Введенные объекты показаны на приводимой ниже диаграмме.

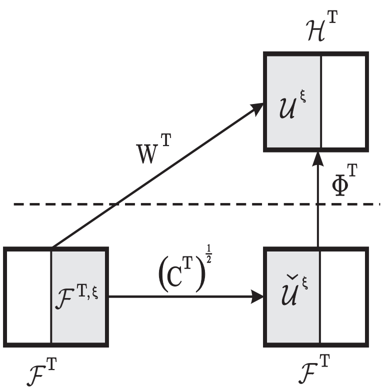

Рис. 6. Динамическая модель.

[10] См., например, [16].

По изометричности Φ^T, операторы P^ξ и $\check{P}^\xi$, проектирующие на подпространства $\mathcal{U}^\xi$ и $\check{\mathcal{U}}^\xi = (\Phi^T)^*\mathcal{U}^\xi$ соответственно, связанны соотношением

$$P^\xi = \Phi^T\,\check{P}^\xi(\Phi^T)^*,$$

из которого следует:

$$\begin{aligned}(W^T)^*P^\xi\,W^T &= |W^T|\,(\Phi^T)^*\left[\Phi^T\,\check{P}^\xi\,(\Phi^T)^*\right]\Phi^T\,|W^T|\\ =&|W^T|\,\check{P}^\xi\,|W^T| = (C^T)^{\frac{1}{2}}\check{P}^\xi\,(C^T)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

и, вполне аналогично,

$$\begin{aligned}(W^T)^*P^\xi_\perp\,W^T &= (W^T)^*\left[\mathbb{I} - P^\xi\right]W^T = C^T - (W^T)^*P^\xi\,W^T\\ =&C^T - (C^T)^{\frac{1}{2}}\check{P}^\xi\,(C^T)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

В силу этого, АФ (6.1) можно записать в виде

$$\widetilde{u}^f(\xi, T) = \rho^{-\frac{1}{4}}(0)\lim_{t\to T-\xi-0}\left[\left(C^T - \Pi^{T,\xi}\right)f\right](t), \quad 0 < \xi < T, \tag{6.2}$$

где

$$\Pi^{T,\xi} := (W^T)^*P^\xi\,W^T = (C^T)^{\frac{1}{2}}\check{P}^\xi\,(C^T)^{\frac{1}{2}}.$$

Внешний наблюдатель, располагающий оператором реакции, может использовать формулу (6.2) для визуализации изображений волн. Действительно, оператор R^{2T} определяет операторы C^T (см. (2.32)) и $\left(C^T\right)^{\frac{1}{2}}$, а последний определяет подпространство $\check{\mathcal{U}}^\xi = \left(C^T\right)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}^{T,\xi}$, соответствующий проектор $\check{P}^\xi$ и, наконец, оператор $\Pi^{T,\xi}$, входящий в (6.2). Неизвестная постоянная $\rho(0)$ в (6.2) также определяется оператором R^{2T}: согласно (2.26), имеем

$$\rho(0) = \left[\lim_{t\to+0}\left(R^{2T}\chi\right)(t)\right]^2,$$

где $\chi(t) := t$, $0 \le t \le 2T$.

Привлекая оператор запаздывания (см. (2.25)), можно сделать формулу (6.2) еще более выразительной:

$$\widetilde{u}^f(\tau, t) = \rho^{-\frac{1}{4}}(0)\lim_{\eta\to T-\tau-0}\left[\left(C^T - \Pi^{T,\tau}\right)D^{T,t}f\right](\eta),$$
$$(\tau, t) \in [0, T] \times [0, T].$$

Изображения волн u^f суть волны в системе (2.5)–(2.7). Таким образом, наблюдатель в состоянии видеть весь волновой процесс в системе (2.5)–(2.7).

В то же время, АФ дает возможность восстановить и саму плотность. С этой целью, мы можем представить

$$\begin{aligned}\rho^{\frac14}\left(x(\xi)\right) = \widetilde{1}^T(\xi) = \widetilde{u}^{q^T}(\xi,T) = \langle \text{см. } (6.2)\rangle \\ = \rho^{-\frac14}(0) \lim_{t\to T-\xi-0}\left[\left(C^T - \Pi^{T,\xi}\right) q^T\right](t),\end{aligned} \tag{6.3}$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned}\rho^{\frac14}\left(x(\xi)\right) x(\xi) = \widetilde{\pi}^T(\xi) = \widetilde{u}^{p^T}(\xi,T) \\ = \rho^{-\frac14}(0) \lim_{t\to T-\xi-0}\left[\left(C^T - \Pi^{T,\xi}\right) p^T\right](t),\end{aligned} \tag{6.4}$$

где q^T, p^T суть решения уравнений ГЛК (см. (5.3)–(5.5)). Вслед за тем, представляя

$$x(\xi) = \frac{\widetilde{\pi}^T(\xi)}{\widetilde{1}^T(\xi)} = \frac{\lim\limits_{t\to T-\xi-0}\left[\left(C^T - \Pi^{T,\xi}\right) p^T\right](t)}{\lim\limits_{t\to T-\xi-0}\left[\left(C^T - \Pi^{T,\xi}\right) q^T\right](t)}, \quad 0<\xi<T, \tag{6.5}$$

мы восстанавливаем функцию $x(\,\cdot\,)$, которая определяет плотность $\rho|_{\Omega^T}$.

Завершая этот раздел, вернемся к диаграмме на рис. 6 и отметим следующую ее особенность. Внешний наблюдатель, располагающий данными ОЗ, оперирует во внешнем пространстве $\mathcal{F}^T$ системы α^T и верхняя часть диаграммы для него невидима. В то же время, нижняя часть вполне доступна: наблюдатель может определить оператор $|W^T| = \left(C^T\right)^{\frac12}$ и получить $\left(\Phi^T\right)^*$-образы волн:

$$\check{u}^f(\,\cdot\,,T) := \left(\Phi^T\right)^* u^f(\,\cdot\,,T) = \left(C^T\right)^{\frac12} f.$$

По изометричности Φ^T имеем $\|\check{u}^f(\,\cdot\,,T)\|_{\mathcal{F}^T} = \|u^f(\,\cdot\,,T)\|_{\mathcal{H}^T}$; следовательно, знание C^T дает возможность, не решая ОЗ, наблюдать некоторые изометрические копии финальных состояний $u^f(\,\cdot\,,T)$. Более того, так как

$$\check{u}^f(\,\cdot\,,\xi) = \left(\Phi^T\right)^* u^f(\,\cdot\,,\xi) = \langle\text{см. } (2.21)\rangle = \left(C^T\right)^{\frac12} D^{T,\xi} f, \quad 0\le\xi\le T,$$

то во внешнем пространстве можно получить $\left(\Phi^T\right)^*$-представление всей траектории системы α^T. Другими словами, в то время как исходная система эволюционирует во внутреннем пространстве $\mathcal{H}^T$, недоступном в ситуации ОЗ, наблюдатель может построить (во внутреннем пространстве $\mathcal{F}^T$!) ее изометрическую копию. Мы рассматриваем такую копию как *динамическую модель* системы α^T. Построение модели – промежуточный, но важный шаг в ходе решения обратных задач ВС-методом [5, 8].

6.3. Операторы $\Pi^{T,\xi}$

Применяя АФ (6.2) для визуализации, приходится строить операторы $\Pi^{T,\xi}$ по оператору R^{2T}. Здесь мы показываем, что такое построение равносильно обращению операторов C^ξ, составляющих семейство (5.8).

Для $\xi \in (0,T]$ введем оператор $X^{T,\xi} : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$,

$$\left(X^{T,\xi} f\right)(t) := \begin{cases} 0, & 0 < t < T-\xi \\ f(t), & T-\xi \le t < T, \end{cases}$$

проектирующий в $\mathcal{F}^T$ на подпространство $\mathcal{F}^{T,\xi}$. Через $X_\#^{T,\xi}$ мы обозначаем тот же оператор $X^{T,\xi}$, рассматриваемый как отображение из пространства $\mathcal{F}^T$ в пространство $\mathcal{F}^{T,\xi}$. Как таковое, это отображение имеет сопряженное $(X_\#^{T,\xi})^* : \mathcal{F}^{T,\xi} \to \mathcal{F}^T$, продолжающее управления нулем с $[T-\xi, T]$ на $[0, T-\xi)$.

Оператор $C^{T,\xi} : \mathcal{F}^{T,\xi} \to \mathcal{F}^{T,\xi}$,

$$C^{T,\xi} := X_\#^{T,\xi}\, C^T\, (X_\#^{T,\xi})^*$$

называется блоком оператора C^T в подпространстве $\mathcal{F}^{T,\xi}$. Вместе с C^T, каждый блок оказывается положительно определенным изоморфизмом (в соответствующем $\mathcal{F}^{T,\xi}$). То же очевидным образом верно и для обратгого к нему оператора $(C^{T,\xi})^{-1}$.

Лемма 9. *Справедливо представление*

$$\Pi^{T,\xi} = \left[X_\#^{T,\xi} C^T\right]^* (C^{T,\xi})^{-1} \left[X_\#^{T,\xi} C^T\right], \quad 0 < \xi < 0. \tag{6.6}$$

Доказательство. Определим оператор $Q^{T,\xi} : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$

$$Q^{T,\xi} := (C^T)^{\frac{1}{2}}\, (X_\#^{T,\xi})^*\, (C^{T,\xi})^{-1} X_\#^{T,\xi}\, (C^T)^{\frac{1}{2}}.$$

Легко проверяются его свойства:

$$(Q^{T,\xi})^2 = Q^{T,\xi}, \quad (Q^{T,\xi})^* = Q^{T,\xi}, \quad \operatorname{Ran} Q^{T,\xi} = (C^T)^{\frac{1}{2}}\, \mathcal{F}^{T,\xi}.$$

В то же время, те же свойства характеризуют проектор $\check{P}^\xi$ в $\mathcal{F}^T$ на $(C^T)^{\frac{1}{2}}\, \mathcal{F}^{T,\xi}$; следовательно, имеем $Q^{T,\xi} = \check{P}^\xi$. Поэтому

$$\Pi^{T,\xi} = (C^T)^{\frac{1}{2}} Q^{T,\xi} (C^T)^{\frac{1}{2}}$$

и мы приходим к (6.6). □

Возвращаясь к восстановлению плотности по (6.5), мы можем следующим образом найти выражения под знаком предела:

$$\left(C^T - \Pi^{T,\xi}\right) q^T = \langle \text{см. } (5.5)\rangle = \left(C^T - \Pi^{T,\xi}\right) (C^T)^{-1} \left[-(R^T)^* \varkappa^T\right]$$

$$= \langle \text{см. } (6.6)\rangle = \left[\mathbb{I} - C^T (X_\#^{T,\xi})^* \,(C^{T,\xi})^{-1} X_\#^{T,\xi}\right] \left[-(R^T)^* \varkappa^T\right] \qquad (6.7)$$

и, вполне аналогично,

$$\left(C^T - \Pi^{T,\xi}\right) p^T = \left[\mathbb{I} - C^T (X_\#^{T,\xi})^* \,(C^{T,\xi})^{-1} X_\#^{T,\xi}\right] \varkappa^T. \qquad (6.8)$$

Блок $C^{T,\xi}$ просто связан со связывающим оператором C^ξ укороченной системы α^ξ (см. (5.8)). Именно, вводя оператор $\mathcal{T}^{T,\,\xi} : \mathcal{F}^\xi \to \mathcal{F}^T$,

$$\left(\mathcal{T}^{T,\,\xi} f\right)(t) \;:=\; f\left(t - (T - \xi)\right), \quad t \in [0, T]$$

(см. Соглашение 1!), легко проверить, что $C^\xi = (\mathcal{T}^{T,\xi} f)^* C^{T,\xi} \mathcal{T}^{T,\xi}$.

Комментируя эти результаты, можно сказать, что решение ОЗ равносильно обращению операторов C^ξ. То же верно и в многомерном случае, но, к сожалению, многомерный C^ξ не является изоморфизмом. Именно этот факт делает многомерную ОЗ некорректной, причем источником этих осложнений является некорректность задачи граничного управления (3.1) в размерностях $n \geq 2$.

6.4. Амплитудный интеграл

Здесь описывается изящная операторная конструкция, которая осуществляет визуализацию.

Пусть $\Xi^N = \left\{\xi_k\right\}_{k=0}^N : 0 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n = T$ есть конечное разбиение промежутка $[0, T]$, $r(\Xi^N) := \max_k (\xi_k - \xi_{k-1})$ – его ранг.

Оно индуцирует разбиение $\Theta^N := \{x(\xi_k)\}_{k=0}^N$: $0 = x(\xi_0) < x(\xi_1) < \cdots < x(\xi_N) = x(T)$ промежутка струны $\overline{\Omega}^T$, имеющее ранг $r(\Theta^N) = \max_k [x(\xi_k) - x(\xi_{k-1})]$. Для рангов выполнена оценка

$$\min_{\overline{\Omega}^T} \rho^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{r(\Theta^N)}{r(\Xi^N)} \leq \max_{\overline{\Omega}^T} \rho^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.9}$$

легко следующая из (1.1).

Составим операторную интегральную сумму Римана вида

$$S_{\Xi^N} := \sum_{k=1}^{N} \Delta_k G^\xi W^T \Delta_k X^{T,\xi}, \tag{6.10}$$

где $\Delta_k X^{T,\xi} := X^{T,\xi_k} - X^{T,\xi_{k-1}}$ и $\Delta_k G^\xi := G^{\xi_k} - G^{\xi_{k-1}}$ суть срезающие проекторы:

$$\left(\Delta_k X^{T,\xi} f\right)(t) = \begin{cases} f(t), & t \in (T - \xi_k\,, T - \xi_{k-1}), \\ 0 & \text{для других} \quad t \in (0,T) \end{cases} \tag{6.11}$$

и

$$\left(\Delta_k G^\xi a\right)(x) = \begin{cases} a(x), & x \in \left(x(\xi_{k-1})\,, x(\xi_k)\right), \\ 0 & \text{для других} \quad x \in \Omega^T. \end{cases} \tag{6.12}$$

Сумма S_{Ξ^N} это оператор, действующий из $\mathcal{F}^T$ в $\mathcal{H}^T$.

Мы собираемся показать, что измельчение разбиения ведет к сходимости сумм (6.10). Чтобы описать их предел, напомним, что оператор изображения I^T понимается как отображение из $\mathcal{H}^T$ в $\mathcal{F}^T$, а сопряженный к нему $(I^T)^* : \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}^T$ действует по правилу

$$\left((I^T)^* f\right)(x) = \rho^{-\frac{1}{4}}(x) f\left(\tau(x)\right), \quad x \in \Omega^T,$$

откуда

$$\left(\rho^{\frac{1}{4}}(0)(I^T)^* Y^T f\right)(x) = \left[\frac{\rho(x)}{\rho(0)}\right]^{-\frac{1}{4}} f\left(T - \tau(x)\right), \quad x \in \Omega^T, \tag{6.13}$$

где $(Y^T f)(t) = f(T-t)$, $t \in [0,T]$. Отметим также, что оператор $\rho^{\frac{1}{4}}(0)(I^T)^* Y^T$ входит в представление (2.22).

Лемма 10. *Справедлива оценка*

$$\|S_{\Xi^N} - \rho^{\frac{1}{4}}(0)(I^T)^* Y^T\| \le c\, r(\Xi^N) \tag{6.14}$$

с постоянной c, не зависящей от разбиения.

Доказательство. Из представления (6.11), (6.12) вытекает

$$\mathbb{I}_{\mathcal{F}^T} = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k X^{T,\xi}, \quad \mathbb{I}_{\mathcal{H}^T} = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k G^{\xi}. \tag{6.15}$$

Соотношение

$$\left[(I^T)^* Y^T\right] \Delta_k X^{T,\xi} = \Delta_k G^{\xi} \left[(I^T)^* Y^T\right] \tag{6.16}$$

легко следует из (6.13). Поэтому имеем

$$\Delta_k G^{\xi} W^T \Delta_k X^{T,\xi} = \langle \text{см. } (2.18),\, (6.16) \rangle$$

$$= \rho^{\frac{1}{4}}(0) \Delta_k G^{\xi} (I^T)^* Y^T + \rho^{\frac{1}{4}}(0) \Delta_k G^{\xi} K^T \Delta_k G^{\xi} (I^T)^* Y^T. \tag{6.17}$$

Суммируя в обеих частях (6.17) с учетом (6.15), получаем:

$$S_{\Xi^N} = \rho^{\frac{1}{4}}(0)(I^T)^* Y^T + \rho^{\frac{1}{4}}(0) \left[\sum_{k=1}^{N} \Delta_k G^{\xi} K^T \Delta_k G^{\xi}\right] (I^T)^* Y^T.$$

По унитарности операторов $(I^T)^*$ и Y^T (см. (1.4)) имеем:

$$\left\| S_{\Xi^N} - \rho^{\frac{1}{4}}(0)(I^T)^* Y^T \right\| = \rho^{\frac{1}{4}}(0) \left\| \sum_{k=1}^{N} \Delta_k G^{\xi} K^T \Delta_k G^{\xi} \right\|. \tag{6.18}$$

Последнюю норму можно оценить так:

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \Delta_k G^{\xi} K^T \Delta_k G^{\xi} a \right\|^2_{\mathcal{H}^T} = \sum_{k=1}^{N} \left\| \Delta_k G^{\xi} K^T \Delta_k G^{\xi} a \right\|^2_{\mathcal{H}^T}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{x(\xi_{k-1})}^{x(\xi_k)} dx\, \rho(x) \left[\int\limits_{x}^{x(\xi_k)} K(x,y) a(y)\, dy \right]^2$$

$$\le \max_{(x,y)\in\Omega^T\times\Omega^T} \left[\frac{\rho(x)}{\rho(y)} K^2(x,y)\right] \sum_{k=1}^{N} [x(\xi_k) - x(\xi_{k-1})]^2 \int\limits_{x(\xi_{k-1})}^{x(\xi_k)} a^2(y)\rho(y)\, dy$$

$$\le \operatorname{const} r^2(\Theta^N) \|a\|^2_{\mathcal{H}^T} \le \langle \text{см. } (6.9) \rangle \le \operatorname{const} r^2(\Xi^N) \|a\|^2_{\mathcal{H}^T},$$

что ведет к неравенству

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \Delta_k G^\xi K^T \Delta_k G^\xi \right\| \le \operatorname{const} r(\Xi^N).$$

Используя его в (6.18), получаем (6.14). □

Итак, для любой последовательности разбиений Ξ^N, такой что $r(\Xi^N) \to 0$, суммы (6.5) стремятся к пределу

$$\rho^{\frac{1}{4}}(0)(I^T)^* Y^T = \lim S_{\Xi^N} =: \int\limits_0^T dG^\xi\, W^T dX^{T,\xi}, \tag{6.19}$$

который мы называем *амплитудным интегралом*. Этот термин мотивирован приближенным равенством

$$\left(\Delta_k G^\xi W^T \Delta_k X^{T,\xi} f\right)(x) \underset{x\sim x(\xi_k)}{\approx} \left[\frac{\rho\left(x(\xi_k)\right)}{\rho(0)}\right]^{-\frac{1}{4}} f(T-\xi_k),$$

легко следующим из (2.4). Его правая часть совпадает с амплитудой разрыва волны $W^T \Delta_k X^{T,\xi} f$ на ее переднем фронте $x = x(\xi_k)$. Таким образом, сумма (6.5) образована амплитудами разрывов.

На эвристическом уровне конструкция амплитудного интеграла была предложена в [4] (см. также [13, 15]).

6.5. Визуализация через амплитудный интеграл

Переходя к сопряженным операторам в (6.19), имеем

$$I^T = \rho^{-\frac{1}{4}}(0)\, Y^T \int\limits_0^T dX^{T,\xi}\, (W^T)^*\, dG^\xi.$$

Значит, оператор $I^T W^T : f \mapsto \widetilde{u}^f(\,\cdot\,, T)$, визуализирующий волны, может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} I^T W^T &= \rho^{-\frac{1}{4}}(0)\, Y^T \int\limits_0^T dX^{T,\xi}\, (W^T)^*\, dG^\xi W^T \\ &= \rho^{-\frac{1}{4}}(0) Y^T \int\limits_0^T dX^{T,\xi}\, d\left[(W^T)^* G^\xi W^T\right]. \end{aligned}$$

Заменяя G^ξ на P^ξ согласно (3.4) (управляемость!), мы приходим к представлению

$$I^T W^T = \rho^{-\frac{1}{4}}(0)\, Y^T \int\limits_0^T dX^{T,\xi}\, d\Pi^{T,\xi}. \tag{6.20}$$

Поскольку его правая часть определяется данными ОЗ (см. (6.6)), представление (6.20) оказывается инструментом изуализации:

$$\widetilde{u}^f(\xi,T) = (I^T W^T f)(\xi) = \rho^{-\frac{1}{4}}(0)\left[Y^T \int\limits_0^T dX^{T,\xi}\, d\Pi^{T,\xi} f\right](\xi), \quad 0<\xi<T,$$

а, значит, и средством решения обратных задач.

Закончим этот раздел следующим замечанием. Появление операторного интеграла в наших рассмотрениях не является неожиданным в свете хорошо известных глубоких связей между обратными задачами и классической задачей *треугольной факторизации операторов* в функциональном анализе: последняя решается именно с помощью операторного интеграла (см. [21, 19]). Дело в том, что визуализацию волн можно интерпретировать как треугольную факторизацию связывающего оператора. Действительно, с одной стороны, легко видеть, что оператор $V^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$,

$$V^T := Y^T I^T W^T \tag{6.21}$$

треуголен относительно семейства подпространств $\mathcal{F}^{T,\xi} \subset \mathcal{F}^T$, т.е. эти подпространства для него суть инвариантные:

$$V^T \mathcal{F}^{T,\xi} \subset \mathcal{F}^{T,\xi}, \quad 0 \le \xi \le T.$$

С другой стороны, так как I^T и Y^T унитарны, связывающий оператор можно представить в форме

$$C^T := (W^T)^* W^T = (Y^T I^T W^T)^* Y^T I^T W^T = (V^T)^* V^T,$$

показывающей, что оператор

$$V^T = \langle \text{см. } (6.20),\, (6.21) \rangle = \rho^{-\frac{1}{4}}(0) \int\limits_0^T dX^{T,\xi}\, d\Pi^{T,\xi} \tag{6.22}$$

доставляет треугольную факторизацию C^T (см. [13, 14]). Стоит также отметить, что конструкция амплитудного интеграла (6.22) отличается от операторного интеграла М. С. Бродского, который является классическим средством факторизации фредгольмовых операторов (см. [21, 18]). Преимущество нашей конструкции – ее естественное динамическое происхождение (связь с геометрической оптикой), благодаря которому амплитудный интеграл имеет прямой аналог в многомерном случае. Кстати, впервые эта конструкция была предложена в [4] именно для решения многомерной ОЗ.

Еще один возможный взгляд на (6.22) состоит в том, что этим соотношением треугольный оператор V^T восстанавливается по его модулю $|V^T| = \left(C^T\right)^{\frac{1}{2}}$. Это наводит на определенные параллели с голографией в оптике.

Наконец, V^T можно рассматривать как преобразование, диагонализующее спектральную меру. Пусть $\mathcal{F}^T_*$ есть пространство $\mathcal{F}^T$ с новым скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle := (C^T\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathcal{F}^T}$, $P^{T,\xi}_*$ – ортопроектор в $\mathcal{F}^T_*$ на подпространство $\mathcal{F}^{T,\xi}$. Как нетрудно проверить, оператор V^T, рассматриваемый как отображение из $\mathcal{F}^T_*$ на $\mathcal{F}^T$, унитарен и выполнено $X^{T,\xi}\,V^T = V^T\,P^{T,\xi}_*$. Следовательно, V^T *диагонализует* семейство $\left\{P^{T,\xi}_*\right\}_{0\leqslant\xi\leqslant T}$ в смысле спектральной теории [17]. Это верно и в многомерном случае [5, 6].

6.6. Визуализирующий функционал

Здесь мы описываем еще одну версию визуализации, пригодную для многомерного обобщения.

Напомним, что функция $1^\xi \in \mathcal{H}^\xi \subset \mathcal{H}^T$ и решение $q^\xi = (W^\xi)^{-1}1^\xi \in \mathcal{F}^\xi$ соответствующей задачи управления вводились в разделе 5.4. Переводя решения в общее внешнее пространство с помощью оператора $\mathcal{T}^{T,\,\xi}$ (см. раздел 6.3), определим управления

$$q^{T,\xi}(t) := \left(\mathcal{T}^{T,\,\xi}q^\xi\right)(t) = q^\xi\left(t-(T-\xi)\right), \quad t\in[0,T],$$

так что $q^{T,\xi}\in\mathcal{F}^T$. Соотношение запаздывания (2.25) влечет

$$W^T q^{T,\xi} = 1^\xi \quad \text{в} \quad \Omega^T. \tag{6.23}$$

Фиксируем $\xi\in(0,T)$; на управлениях $f\in C[0,T]\subset\mathcal{F}^T$ определим *визуализирующий функционал* $\delta^{T,\xi}$ правилом

$$\langle\delta^{T,\xi}, f\rangle \,:=\, \rho^{\frac{1}{2}}\left(x(\xi)\right)\,u^f\left(x(\xi),T\right). \tag{6.24}$$

Как нетрудно видеть из (2.4), включение $f \in C[0,T]$ ведет к $u^f(\,\cdot\,,T) \in C(\overline{\Omega}^T)$ и, более того, W^T действует непрерывно из $C[0,T]$ в $C(\overline{\Omega}^T)$. В силу этого, $\delta^{T,\xi}$ определен корректно.

Ключевой для ОЗ факт состоит в том, что функционал $\delta^{T,\xi}$ определяется данными ОЗ. Чтобы показать это, мы начнем со следующего замечания. Управление $q^{T,\xi}$ есть функция от t, равная нулю на промежутке $[0, T-\xi]$ и гладкая на $(T-\xi, T]$. При $t = T-\xi$ она терпит ненулевой разрыв (скачок) (см. раздел 5.4), причем, нетрудно показать, что амплитуда разрыва $q^{T,\xi}(T-\xi+0)$ непрерывна по ξ.

С учетом сказанного, дифференцируя $q^{T,\xi}(\,\cdot\,)$ по параметру ξ в смысле обобщенных функций, легко получим

$$\frac{d}{d\xi}\, q^{T,\xi} = \left[q^{T,\xi}(T-\xi+0)\right]\, \delta_{T-\xi} + w^{T,\xi},$$

где $\delta_{T-\xi}$ есть стандартная дельта-функция Дирака с носителем в $t = T-\xi$, а $w^{T,\xi}(\,\cdot\,)$ – регулярная (классическая) функция с носителем в $[T-\xi, T]$. Вместе с этим, обобщенная функция

$$C^T \frac{d}{d\xi}\, q^{T,\xi} = \langle \text{см. } (2.28)\rangle = \omega(\xi,T)\, \delta_{T-\xi} + \widetilde{w}^{T,\xi}$$

($\omega(\xi,T)$ – множитель, непрерывно зависящий от ξ; $\widetilde{w}^{T,\xi}$ – регулярное слагаемое) также корректно определена на $C[0,T]$ в очевидном смысле.

Лемма 11. *Справедливо представление*

$$\langle \delta^{T,\xi}, f\rangle = \frac{d}{d\xi}\, \left(f, C^T q^{T,\xi}\right)_{\mathcal{F}^T},$$

или, в символической форме, $\delta^{T,\xi} = C^T \frac{d}{d\xi}\, q^{T,\xi}$.

Доказательство. Для $f \in C[0,T]$ имеем равенства

$$\langle \delta^{T,\xi},\, f\rangle = \rho^{\frac{1}{2}}\,(x(\xi))\; u^f\,(x(\xi),T) = \langle \text{см. } (1.1)\rangle = \frac{d}{d\xi} \int\limits_0^{x(\xi)} u^f(x,T)\, \rho(x) dx$$

$$= \frac{d}{d\xi}\, \left(u^f(\,\cdot\,,T), 1^\xi\right)_{\mathcal{H}^T} = \langle \text{см. } (6.23)\rangle = \frac{d}{d\xi}\, \left(W^T f, W^T q^{T,\xi}\right)_{\mathcal{H}^T}$$

$$= \langle \text{см. } (2.26)\rangle = \frac{d}{d\xi}\, \left(f, C^T q^{T,\xi}\right)_{\mathcal{F}^T},$$

из которых и следует утверждение леммы. □

Поскольку все составляющие правой части представления определяются данными ОЗ, внешний наблюдатель может построить функционал $\delta^{T,\xi}$ и определить правую часть (6.24) – "увидеть волну".

Полезна и следующая точка зрения на визуализирующий функционал. Приводимая ниже выкладка формальна, но для $f \in C[0,T]$ ей нетрудно придать точный смысл:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x(T)} \left[\rho^{-\frac{1}{2}}(x)\,\delta_{x(\xi)}(x)\right] u^f(x,T)\,\rho(x)\,dx \\
=&\rho^{\frac{1}{2}}\left(x(\xi)\right)\, u^f\left(x(\xi),T\right) = \langle\text{см. (6.24)}\rangle = \langle \delta^{T,\xi}, f\rangle \\
=&\langle\text{см. Лемму 11}\rangle = \left(C^T\frac{d}{d\xi}\,q^{T,\xi}, f\right)_{\mathcal{F}^T} = \langle\text{см. (2.30)}\rangle \\
=&\left(W^T\frac{d}{d\xi}\,q^{T,\xi}, W^T f\right)_{\mathcal{H}^T} = \int_0^{x(T)}\left[W^T\frac{d}{d\xi}\,q^{T,\xi}\right](x)\,u^f(x,T)\,\rho(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Сопоставляя первую и последнюю строки, этот результат можно записать в форме

$$W^T\,\frac{d}{d\xi}\,q^{T,\xi} = \rho^{-\frac{1}{2}}\left(x(\xi)\right)\,\delta_{x(\xi)}$$

и прокомментитровать следующим образом: $\frac{d}{d\xi}\,q^{T,\xi}$ есть (обобщенное) управление, которое создает на струне волну, сосредоточенную в точке $x = x(\xi)$. Собственно говоря, именно идея производить такие "сфокусированные" волны и привела к появлению ВС-метода: см. [2].

Еще одна возможная интерпретация состоит в следующем: разлагая управление f по континуальному базису из стандартных дельта-функций $\{\delta_\xi\}$, мы имеем

$$\int_0^T \delta_\xi(t)\,f(t)\,dt \;=\; f(\xi),$$

т.е. воспроизводим управление и не получаем ничего нового, а разлагая по построенному выше базису $\{\delta^{T,\xi}\}$, мы имеем

$$\int_0^T \delta^{T,\xi}(t)\,f(t)\,dt = \rho^{\frac{1}{2}}\left(x(\xi)\right)\,u^f\left(x(\xi),T\right),$$

т.е. видим волну! В этом свете, решить обратную задачу значит выбрать надлежащий базис во внешнем пространстве. Подобная интерпретация сохраняет смысл и в многомерном случае, но конструкция многомерных аналогов $\delta^{T,\xi}$ существенно сложее [8].

6.7. Волновой базис. Алгоритмы

Волновые базисы являются основной для разработки численных алгоритмов ВС-метода.

Фиксируем $\xi \in (0,T)$. В запаздывающем подпростанстве $\mathcal{F}^{T,\xi} \subset \mathcal{F}^T$ выберем какой-либо базис управлений $\{f_k^\xi\}_{k=1}^\infty$; пусть $\{u_k^\xi\}_{k=1}^\infty$, $u_k^\xi := u^{f_k^\xi}(\,\cdot\,,T) = W^T f_k^\xi$ есть семейство волн, произведенных этими управлениями. Поскольку W^T является изоморфизмом, волны u_k^ξ составляют базис в достижимом подпространстве $\mathcal{U}^\xi$, а в силу управляемости (3.4), система $\{u_k^\xi\}_{k=1}^\infty$ оказывается базисом в $\mathcal{H}^\xi$, который мы и называем *волновым.*[11] При решении ОЗ он используется следующим образом.

Через $\mathcal{U}_N^\xi$ обозначим подпространство в $\mathcal{U}^\xi$, натянутое на конечную подсистему $\{u_k^\xi\}_{k=1}^N$; пусть P_N^ξ есть проектор в $\mathcal{H}^T$ на $\mathcal{U}_N^\xi$. Поскольку волновой базис полон в $\mathcal{U}^\xi$, для проектора P^ξ на $\mathcal{U}^\xi$ имеем

$$P^\xi = \lim_{N\to\infty} P_N^\xi \tag{6.25}$$

в сысле сильной операторной сходимости. Для $y \in \mathcal{H}^T$, можно представить

$$P_N^\xi y = \sum_{k=1}^N a_k^N\, u_k^\xi \tag{6.26}$$

и найти коэффициенты из системы Грама

$$\sum_{k=1}^N \Gamma_{ik}\, a_k^N = b_i, \quad i = 1,\dots,N \tag{6.27}$$

с матрицей Грама и правыми частями

$$\Gamma_{ik} = (u_i^\xi, u_k^\xi)_{\mathcal{H}} = \langle\text{см. (2.26)}\rangle = (C^T f_i^\xi, f_k^\xi)_{\mathcal{F}^T}, \quad b_i = (y, u_i^\xi)_{\mathcal{H}}. \tag{6.28}$$

[11] В многомерном случае $\{u_k^\xi\}_{k=1}^\infty$ оказывается не базисом, а лишь полной системой в соответствующем $\mathcal{H}^\xi$: см. [5].

В частных случаях, имеем:

- если $y = 1^T$, то

$$\begin{aligned} b_i &= (1^T, u_i^\xi)_{\mathcal{H}} = (W^T q^T, W^T f_i^\xi)_{\mathcal{H}} = (C^T q^T, f_i^\xi)_{\mathcal{F}^T} \\ &= \langle \text{см. } (5.3) \rangle = -\left(\left(R^T\right)^* \varkappa^T, f_i^\xi \right)_{\mathcal{F}^T} \end{aligned}$$

 и тогда

$$\begin{aligned} P^\xi 1^T &= \langle \text{см. } (6.25)\text{–}(6.28) \rangle \\ &= -\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{N} \left[\Gamma^N\right]^{-1}_{ki} \left(\left(R^T\right)^* \varkappa^T, f_i^\xi \right)_{\mathcal{F}^T} \right) u_k^\xi, \end{aligned} \tag{6.29}$$

 где $[\Gamma^N]^{-1}$ есть матрица, обратная к $\Gamma^N := \{\Gamma_{ik}\}_{i,k=1}^N$;

- если $y = \pi^T$, то

$$\begin{aligned} b_i &= (\pi^T, u_i^\xi)_{\mathcal{H}} = (W^T p^T, W^T f_i^\xi)_{\mathcal{H}} = (C^T p^T, f_i^\xi)_{\mathcal{F}^T} \\ &= \langle \text{см. } (5.4) \rangle = \left(\varkappa^T, f_i^\xi \right)_{\mathcal{F}^T} \end{aligned}$$

 и тогда

$$P^\xi \pi^T = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{N} \left[\Gamma^N\right]^{-1}_{ki} \left(\varkappa^T, f_i^\xi \right)_{\mathcal{F}^T} \right) u_k^\xi, \tag{6.30}$$

- если $y = u^f(\,\cdot\,, T)$, то

$$b_i = \left(u^f(\,\cdot\,, T), u_i^\xi \right)_{\mathcal{H}} = \left(W^T f, W^T f_i^\xi \right)_{\mathcal{H}} = \left(C^T f, f_i^\xi \right)_{\mathcal{F}^T}$$

 и тогда

$$P^\xi u^f(\,\cdot\,, T) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{N} \left[\Gamma^N\right]^{-1}_{ki} (C^T f, f_i^\xi)_{\mathcal{F}^T} \right) u_k^\xi. \tag{6.31}$$

Теперь, возвращаясь к (6.3) и (6.4) и принимая во внимание, что $(W^T)^* u_k^\xi = (W^T)^* W^T f_k^\xi = C^T f_k^\xi$, мы получаем

$$\begin{aligned} &\left[C^T - \Pi^{T,\xi}\right] q^T = \langle \text{см. } (5.3) \rangle = -(R^T)^* \varkappa^T - (W^T)^* P^\xi W^T q^T \\ &= -(R^T)^* \varkappa^T - (W^T)^* P^\xi 1^T = \langle \text{см. } (6.29) \rangle = -(R^T)^* \varkappa^T \\ &+ \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{N} \left[\Gamma^N\right]^{-1}_{ki} \left(\left(R^T\right)^* \varkappa^T, f_i^\xi \right)_{\mathcal{F}^T} \right) C^T f_k^\xi. \end{aligned} \tag{6.32}$$

и, вполне аналогично,

$$
\begin{aligned}
&\left[C^T - \Pi^{T,\xi}\right] p^T = \langle\text{см. } (5.4)\rangle = \varkappa^T - (W^T)^* P^\xi W^T p^T \\
=&\varkappa^T - (W^T)^* P^\xi 1^T = \langle\text{см. } (6.30)\rangle \\
=&\varkappa^T - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \left[\Gamma^N\right]^{-1}_{ki} \left(\varkappa^T, f^\xi_i\right)_{\mathcal{F}^T} \right) C^T f^\xi_k
\end{aligned}
\tag{6.33}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\left[C^T - \Pi^{T,\xi}\right] f = C^T f - (W^T)^* P^\xi W^T f \\
&= C^T f - (W^T)^* P^\xi u^f(\,\cdot\,, T) = \langle\text{см. } (6.31)\rangle \\
&= C^T f - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \left[\Gamma^N\right]^{-1}_{ki} (C^T f, f^\xi_i)_{\mathcal{F}^T} \right) C^T f^\xi_k.
\end{aligned}
\tag{6.34}
$$

Далее, подставляя (6.32) и (6.33) в (6.5), мы можем найти функцию $x(\,\cdot\,)$ и, тем самым, решить ОЗ. Используя (6.34) для нахождения правой части (6.2), можно визуализировать волны. Этот способ пригоден для реальных вычислений и приближенное решение ОЗ по этой схеме фактически равносильно обращению матрицы Грама Γ^N при достаточно больших N (см. [15, 12]). Это не составляет проблемы, так как C^T является изоморфизмом и нижние грани Γ^N отделены от нуля равномерно по N. Последнее не имеет места в многомерном случае: нижняя грань быстро стремится к нулю, что создает серьезные вычислительные трудности: см. [8], раздел Numerical Testing. Впрочем, они неизбежны ввиду сильной некорректности многомерной обратной задачи.

7. Спектральная обратная задача

7.1. Спектральные данные и постановка ОЗ

В этой части работы мы имеем дело со струной конечной длины, занимающей промежуток $[0, h]$; ее оптическая длина есть

$$T_* = \tau(h) = \int_0^h \rho^{\frac{1}{2}}(s)\, ds < \infty.$$

Рассмотрим (прямую) граничную спектральную задачу Дирихле

$$\varphi'' + \lambda\rho\,\varphi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{7.1}$$

$$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=h} = 0, \tag{7.2}$$

в которой $\Omega := \Omega^{T_*} = (0, h)$. Как известно, данная задача имеет простой дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ с асимптотикой

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{T_*}\right)^2 [1 + o(1)], \quad k \to \infty. \tag{7.3}$$

Соответствующие собственные функции $\{\varphi_k(\,\cdot\,)\}_{k=1}^{\infty}$ образуют базис пространства $\mathcal{H} := \mathcal{H}^{T_*} = L_{2,\rho}(\Omega)$ и мы предполагаем их нормированными условиями

$$(\varphi_k, \varphi_l)_{\mathcal{H}} = \delta_{kl}, \quad \varphi_k'(0) > 0.$$

Множество пар $\{\lambda_k; \varphi_k'(0)\}_{k=1}^{\infty}$ называется *спектральными данными* струны.

Соответствующая обратная задача ставится так.

Спектральная ОЗ: *по заданным $h > 0$ и $\{\lambda_k; \varphi_k'(0)\}_{k=1}^{\infty}$, восстановить плотность ρ в Ω.*

Такая постановка восходит к классическим работам М. Г. Крейна [27–29]. Задача будет решаться с помощью техники, развитой выше для динамической ОЗ. Точнее, мы убедимся, что все объекты, используемые при восстановлении плотности в динамической ОЗ, определяются и спектральными данными.

7.2. Спектральное представление

Пусть $U : \mathcal{H} \to \widehat{\mathcal{H}} := l_2$ есть преобразование Фурье, отвечающее задаче (7.1), (7.2),

$$Uy = \widehat{y} = \{y^k\}_{k=1}^{\infty}, \quad y^k := (y, \varphi_k)_{\mathcal{H}},$$

для $y = \sum_{k=1}^{\infty} y^k \varphi_k \in \mathcal{H}$. Пространство $\widehat{\mathcal{H}}$ называется *пространством спектрального представления.* Ниже мы описываем некоторые объекты в $\widehat{\mathcal{H}}$, определяемые спектральными данными.

Динамическая система α^T, ассоциированная с конечной струной, имеет вид

$$\rho u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega \times (0, T), \tag{7.4}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \qquad \text{в} \quad \overline{\Omega}, \tag{7.5}$$

$$u|_{x=0} = f, \quad u|_{x=h} = 0, \qquad t \in [0, T]. \tag{7.6}$$

Для управления $f \in C^2[0,T]$, удовлетворяющего условиям $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, решение $u = u^f(x,t)$ является класическим и может быть найдено методом Фурье, т.е. в виде разложения

$$u^f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^f(t)\,\varphi_k(x).$$

Для коэффициентов имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,c_k^f(t) = \frac{d^2}{dt^2}\,\big(u^f(\,\cdot\,,t),\varphi_k\big)_{\mathcal{H}} = \int_0^h u_{tt}^f(x,t)\,\varphi_k(x)\,\rho(x)dx$$

$$= \langle\text{см. (7.4)}\rangle = \int_0^h u_{xx}^f(x,t)\,\varphi_k(x)\,dx = \langle\text{см. (7.2), (7.6)}\rangle$$

$$= u^f(0,t)\,\varphi_k'(0) + \int_0^h u^f(x,t)\,\varphi_k''(x)\,dx = f(t)\,\varphi_k'(0) - \lambda_k c_k^f(t).$$

С учетом (7.5), получаем задачу

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_k\right] c_k^f(t) = \varphi'(0)\,f(t), \quad t > 0,$$
$$c_k^f(0) = \frac{d}{dt}\,c_k^f(0) = 0,$$

которая решается явно:

$$c_k^f(t) = \int_0^t \varphi_k'(0)\,\frac{\sin\left(\lambda_k^{\frac{1}{2}}(t-s)\right)}{\lambda_k^{\frac{1}{2}}}\,f(s)\,ds. \tag{7.7}$$

В финальный момент выполнено

$$c_k^f(T) = \big(u^f(\,\cdot\,,T),\varphi_k\big)_{\mathcal{H}} = \big(s_k^T, f\big)_{\mathcal{F}^T}\,, \tag{7.8}$$

где

$$s_k^T := \varphi_k'(0)\,\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\,\sin\left(\lambda_k^{\frac{1}{2}}(T-t)\right).$$

Поскольку использованные выше f плотны в пространстве управлений, формулы (7.7) и (7.8) справедливы при любом $f \in \mathcal{F}^T$ и дают коэффициенты Фурье (обобщенных) L_2-решений $u^f(\,\cdot\,,t)$.

Таким образом, Фурье-коэффициенты волн определяются спектральными данными. Этот факт оказывается ключевым для решения ОЗ. Вместе с коэффициентами, спектральные данные определяют:

- оператор $\widehat{W}^T : \mathcal{F}^T \to \widehat{\mathcal{H}}$, $\widehat{W}^T := UW^T$, переводящий управления в спектральные образы соответствующих волн:

$$\widehat{W}^T f = \widehat{u}^f(\,\cdot\,,T) = \{c_k^f(T)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(s_k^T, f\right)_{\mathcal{F}^T}\right\}_{k=1}^{\infty}; \tag{7.9}$$

- его сопряженный $(\widehat{W}^T)^* = (W^T)^* U^* : \widehat{\mathcal{H}} \to \mathcal{F}^T$,

$$(\widehat{W}^T)^* y = \sum_{k=1}^{\infty} y^k\, s_k^T, \tag{7.10}$$

  где $y = \{y^k\}_{k=1}^{\infty} \in \widehat{\mathcal{H}}$;
- связывающий оператор

$$\begin{aligned} C^T &= (W^T)^* W^T = (U^*\widehat{W}^T)^*(U^*\widehat{W}^T) = (\widehat{W}^T)^*\widehat{W}^T \\ &= \langle \text{см. (7.9), (7.10)} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\,\cdot\,, s_k^T\right)_{\mathcal{F}^T}\, s_k^T. \end{aligned} \tag{7.11}$$

  Ряды в (7.10) и (7.11) сходятся в $\mathcal{F}^T$.

В свою очередь, оператор $\widehat{W}^T$ определяет семейство “достижимых множеств”

$$\widehat{\mathcal{U}}^{\xi} := U\mathcal{U}^{\xi} = UW^T\mathcal{F}^{T,\xi} = \widehat{W}^T\mathcal{F}^{T,\xi}, \quad 0 \le \xi \le T$$

и соответствующих проекторов $\widehat{P}^{\xi}$ в $\widehat{\mathcal{H}}$ на $\widehat{\mathcal{U}}^{\xi}$, которые связаны с волновыми проекторами через $\widehat{P}^{\xi} = UP^{\xi}U^*$. Для эффективного построения $\widehat{P}^{\xi}$ можно использовать следующую процедуру:

1. Выберем какую-либо полную систему упралений в $\mathcal{F}^{T,\xi}$, ортогонализуем ее процессом Шмидта относительно билинейной формы $(C^T\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathcal{F}^T}$ и получим полную систему $\{f_k^{\xi}\}_{k=1}^{\infty}$, для которой

$$(C^T f_k^{\xi}, f_l^{\xi})_{\mathcal{F}^T} = \delta_{kl}.$$

- Найдем соответствующие спектральные образы $\{\widehat{u}_k^\xi\}_{k=1}^\infty$, $\widehat{u}_k^\xi := \widehat{W}^T f_k^\xi$ такие, что

$$(\widehat{u}_k^\xi, \widehat{u}_l^\xi)_{\widehat{\mathcal{H}}} = (\widehat{W}^T f_k^\xi, \widehat{W}^T f_l^\xi)_{\widehat{\mathcal{H}}} = \langle \text{см. } (7.10)\rangle = (C^T f_k^\xi, f_l^\xi)_{\mathcal{F}^T} = \delta_{kl}$$

и составляющие ортонормированный базис в $\widehat{\mathcal{U}}^\xi$.

- Построим

$$\widehat{P}^\xi = \sum_{k=1}^\infty (\,\cdot\,, \widehat{u}_k^\xi)_{\widehat{\mathcal{H}}}\, \widehat{u}_k^\xi. \tag{7.12}$$

Стоит также отметить, что по изометрии преобразования Фурье U, “настоящие” волны $u_k^\xi = W^T f_k^\xi = U^* \widehat{u}_k^\xi$ образуют *ортонормированный* базис в $\mathcal{H}^\xi$.

7.3. Модель

С точки зрения теории систем,[12] проведенные выше рассмотрения можно прокомментировать так: спектральные данные определяют *спектральную модель* системы α^T (рис. 7).

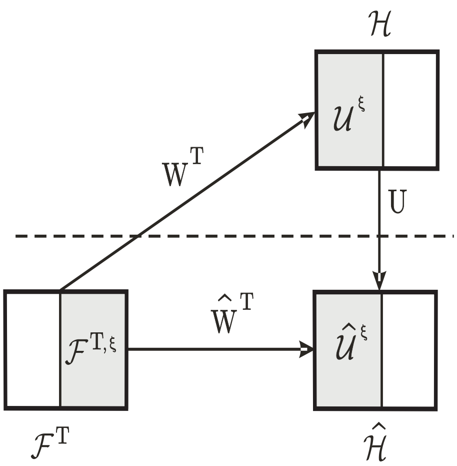

Рис. 7. Спектральная модель.

[12] См. [26, глава 10.6].

В самом деле, ее главный фрагмент, – *модельный оператор управления* $\widehat{W}^T$, – может быть найден по (7.9). Следовательно, внешний наблюдатель, располагающий данными $\{\lambda_k; \varphi'_k(0)\}_{k=1}^{\infty}$, может, не решая обратной задачи, видеть спектральные образы волн, т.е. получить некоторую изометрическую копию оригинала α^T.

С точки зрения BC-метода, принципиальна сама возможность построения модели по данным ОЗ. Как динамические, так и спектральные данные такую возможность предоставляют, а отличие между ними в том, что динамические данные по своей природе *локальны* (отвечают части струны Ω^T), в то время как спектральные данные *глобальны*, т.е. содержат информацию о всей струне.

Построив модель, внешний наблюдатель уже способен делать содержательные заключения о состояниях системы: например, он может, не видя самих состояний, находить их нормы и скалярные произведения. Далее, используя специфические свойства системы (конечность скорости волн, характер распространения разрывов и др.), наблюдатель может восстановить саму систему. Именно это и происходит при реализации BC-метода.

7.4. Решение ОЗ

1. Один способ решить спектральную обратную задачу состоит в применении следующего приема. Заметим, что длина струны h предполагается заданной, а ее оптическая длина T_* определяется спектральными данными: асимптотика (7.3) влечет

$$T_* = \lim_{k\to\infty} \frac{\pi k}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Введем линейную функцию $l \in \mathcal{H}$, $l(x) := h - x$ в Ω. Ее спектральный образ находится явно:

$$\widehat{l} = Ul = \left\{ h\,\frac{\varphi'_k(0)}{\lambda_k} \right\}_{k=1}^{\infty}. \tag{7.13}$$

Действительно, интегрируя по частям, имеем:

$$l^k = (l, \varphi_k)_{\mathcal{H}} = \int_0^h (h-x)\varphi_k(x)\,\rho(x)dx$$

$$= -\frac{1}{\lambda_k}\int_0^h (h-x)\,\varphi''_k(x)\,dx = h\,\frac{\varphi'_k(0)}{\lambda_k}.$$

Построив проекторы $\widehat{P}^\xi$ по процедуре 1–3, описанной в предыдущем разделе, можно найти элементы $\widehat{P}^\xi\,\widehat{l} \in \widehat{\mathcal{H}}$ и подсчитать их нормы $\|\widehat{P}^\xi\,\widehat{l}\|_{\widehat{\mathcal{H}}}$. Тем самым, спектральные данные определяют функцию

$$\nu(\xi) := \int\limits_0^{x(\xi)} (h-x)^2\,\rho(x)dx = \|G^\xi\,l\|^2_{\mathcal{H}} = \langle\text{см. } (3.4)\rangle = \|P^\xi\,l\|^2_{\mathcal{H}}$$
$$= \|\widehat{P}^\xi\,\widehat{l}\|^2_{\widehat{\mathcal{H}}}, \quad 0 \le \xi \le T_*. \tag{7.14}$$

В то же время, для функции ν имеем

$$\nu'(\xi) = (h - x(\xi))^2\,\rho\,(x(\xi))\;x'(\xi) = \langle\text{см. } (1.1)\rangle = (h - x(\xi))^2\;\frac{1}{x'(\xi)},$$

откуда заключаем, что x' удовлетворяет уравнению

$$\frac{x'(\xi)}{(h - x(\xi))^2} = \frac{1}{\nu'(\xi)}.$$

Интегрируя, мы приходим к

$$x(\tau) = h - \left[\int\limits_0^\tau \frac{d\xi}{\nu'(\xi)} + \frac{1}{h}\right]^{-1}, \quad \tau \in [0, T_*]. \tag{7.15}$$

Вышесказанное можно подытожить в виде следующей процедуры:

- определим T_* и найдем элемент $\widehat{l} \in \widehat{\mathcal{H}} = l_2$ по (7.13)
- построим проекторы $\widehat{P}^\xi$, $0 < \xi < T_*$ по (7.15)
- найдем функцию ν по (7.14)
- найдем функцию $x(\tau)$, $0 \le \tau \le T_*$ по (7.15) и обратную к ней (эйконал) $\tau = \tau(x)$, $x \in [\,0\,,\, x(T_*)\,] = \overline{\Omega}$
- восстановим плотность $\rho(x) = (\tau'(x))^2$, $x \in \Omega$.

Спектральная ОЗ решена.

2. Другой способ состоит в непосредственном сведении спектральной ОЗ к динамической. Предположим для простоты, что величина $\rho'(0)$ известна.[13] Для фиксированного положительного $T < T_*$,

[13] В этом случае не надо задавать длину h: она определится в ходе решения ОЗ.

- найдем функции $\{s_k^T\}_{k=1}^{\infty}$ и построим связывающий оператор согласно (7.11)
- определим постоянную $\rho(0)$ и ядро $C^T(t,\eta)$ из представления (2.33)
- найдем функцию

$$r(t) = 2\,\frac{d}{dt}\left[C^T\left(T-\frac{t}{2}\,,T-\frac{t}{2}\right)\right], \quad 0 \le t \le 2T$$

и восстановим оператор реакции R^{2T} по представлению (2.26).

Этот оператор определяет плотность в Ω^T. Увеличивая T, исчерпаем всю струну и определим ρ в Ω.

В дополнение к процедурам, восстанавливающим плотность, спектральные данные позволяют визуализировать волны на струне. В самом деле, оператор $\Pi^{T,\xi}$, являющийся главным фрагментом соотношения (6.2), может быть представлен в виде

$$\Pi^{T,\xi} = (W^T)^*\,P^\xi\,W^T = (UW^T)^*U\,P^\xi\,U^{-1}(UW^T) = (\widehat{W}^T)^*\,\widehat{P}^\xi\,\widehat{W}^T,$$

т.е. через операторы, определяемые спектральными данными согласно (7.9), (7.10), (7.12). То же самое представление позволяет привлечь амплитудный интеграл (см. (6.24)); такая возможность используется в многомерной спектральной ОЗ [13].

7.5. Численная реализация

Описанные в разделах 5.5 и 7.4 процедуры пригодны для численной реализации. Тестирование ВС-алгоритма в спектральной ОЗ впервые выполнено А. П. Качаловым в [12]. Т. Л. Шеронова использовала аналог соотношений (5.11) в численном эксперименте в динамической ОЗ с данными Неймана (см. [15]).

Для функций $r(t)$ специального вида (полиномы, тригонометрические полиномы и др.) ядро $C^T(t,\eta)$ в (2.33) имеет простой вид и уравнения ГЛК (5.3), (5.4) решаются в явном виде. С. Хи исползовал эту возможность для приготовления численных примеров (см. [24]).

Эти результаты демонстрируют эффективность алгоритмов, основанных на ВС-методе. О численном тестировании в многомерных задачах можно прочесть в [8].

Автор признателен Ю. Исо и Н. Вада за стимулирующие обсуждения. Приношу благодарность И. В. Кубышкину за помощь в компьютерной графике.

Литература

1. С. А. Авдонин, М. И. Белишев, С. А. Иванов, *раничное управление и матричная обратная задача для уравнения $u_{tt} - u_{xx} + V(x)u = 0$.* — Матем. Сборник **182** (1991), 303–331.
2. М. И. Белишев, *Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения.* — ДАН СССР **29**7 (1987), no. 3, 524–527.
3. М. И. Белишев, *Уравнения типа Гельфанда–Левитана в многомерной обратной задаче для волновогл уравнения.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **165** (1987), 15–20.
4. М. И. Белишев, *Граничное управление и продолжение волновых полей.* — Препринт ЛОМИ Р-1-90, 1990.
5. М. И. Белишев, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method).* — Inverse Problems, **13** (1997), no. 5, R1–R45.
6. M. I. Belishev, *Dynamical systems with boundary control: models and characterization of inverse data.* — Inverse Problems **17** (2001), 659–682.
7. M. I. Belishev, *How to see waves under the Earth surface (the BC-method for geophysicists).* — Ill-Posed and Inverse Problems, S. I. Kabanikhin and V. G. Romanov (Eds.) VSP (2002), 55–72.
8. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method.* — Inverse Problems. **23** (2007), no. 5, R1–R67.
9. М. И. Белишев, А. С. Благовещенский, *Динамические обратные задачи теории волн.* — С.-Пб Государственный Университет, СПб, 1999.
10. M. I. Belishev, A. S. Blagovestchenskii, S. A. Ivanov, *Erratum to "The two-velocity dynamical system: boundary control of waves and inverse problems,* [Wave Motion **25** (1997), 83–107]." — Wave Motion **26** (1997), 99.
11. М. И. Белишев, С. А. Иванов. *Характеризация данных в динамической обратной задаче для двухскоростной системы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **259** (1999), 19–45.
12. М. И. Белишев, А. П. Качалов, *Метод граничного управления в спектральной обратной задаче для неоднородной струны.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **179** (1989), 14–22.
13. М. И. Белишев, А. П. Качалов, *Операторный интеграл в многомерной спектральной обратной задаче.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **215** (1994), 3–37.
14. М. И. Белишев, А. Б. Пушницкий, *К треугольной факторизации положительных операторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 45–60.
15. М. И. Белишев, Т. Л. Шеронова, *Метод граничного управления в динамической обратной задаче для неоднородной струны.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **186** (1990), 37-49.
16. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* — Изд-во Ленинградского Университета, Ленинград, 1980.
17. А. С. Благовещенский, *О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны.* — Труды МИАН им. В. А. Стеклова 115 (1971), 28–38.
18. М. С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов.* Москва, Наука, 1969.

19. K. R. Davidson, *Nest Algebras.* — Pitman Res. Notes Math. Ser. **191**, Longman, London and New York, 1988.
20. И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, *Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции.* — Известия АН СССР **15** (1951), 309–360.
21. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.* Москва, Наука , 1967.
22. B. Gopinath, M. M. Sondhi. *Determination of the shape of the human vocal tract from acoustical measurements.* — Bell Syst. Tech. J., July 1970, 1195–1214.
23. B. Gopinath, M. M. Sondhi, *Inversion of the Telegraph Equation and the Synthesis of Nonuniform Lines.* Proceedings of the IEEE, vol 59, no 3, March 1971, 383–392.
24. S. He, *An explicit time-domain solution for the reflection from a stratified acoustic half-space obtained by the boundary control method.* — Dept. of Electromagnetic Theory, Royal Institute of Technology, Stockholm, TRITA-TET 95-5, December 1, 1995.
25. I. S. Kac, M. G. Krein, *On the spectral functions of the string.* —- Amer. Math. Soc. Transl. **103** (1974), no 2, 19–102.
26. Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб, *Очерки по математической теории систем.* Мир, Москва, 1971.
27. М. Г. Крейн, *Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля.* — ДАН СССР **76** (1951), no. 1, 21–24.
28. М. Г. Крейн, *Об обратной задаче для неоднородной струны.* — ДАН СССР **82** (1952), no. 5, 669–672.
29. М. Г. Крейн, *Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи.* — ДАН СССР **95** (1954), no. 6, 767–770.
30. Ж.-Л. Лионс, *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* Москва, Мир, 1972.
31. D. L. Russell. *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations.* — SIAM Review **20** (1978), no. 4, 639–739.
32. A. S. Avdonin, M. I. Belishev, *Inverse problem for nonselfadjoint Sturm–Liouvlle operator (BC-method).* — Control and Cybernetics **25** (1996), No. 3, 429–440.
33. A. S. Blagovestchenskii, *Inverse problems of wave precesses.* — VSP, Netherlands (2001).

Belishev M. I. Boundary control and inverse problems: one-dimensional variant of the BC-method.

This is the first paper of the planned series under the common title “Boundary control method in inverse problems.” The aim of the series is systematic exhibition of an approach to inverse problems based upon their relations with control theory. The 1d-variant of the method is exhibited on the example of the classical problem of recovering the inhomogeneous string density, both dynamical and spectral setups of the problem being considered. The paper is written so that to serve as an introduction to

the multidimansional BC-method: basic tools and constructions in use are available for the further generalization to multidimensional problems.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 апреля 2008 г.