Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 354, 2008 г.

В. М. Бабич, Н. В. Мокеева

О РАССЕЯНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ПРОЗРАЧНЫМ КЛИНОМ

Рассматривается двумерная скалярная задача рассеяния плоской волны прозрачным клином. Зависимость от времени гармоническая. Скорости внути клина и в окружающей среде, вообще говоря, разные, условия сопряжения на границе клина – классические.

В монографии [1] рассматривается задача, близкая к той, которой посвящена настоящая работа. Методы монографии [1] позволяют доказать корректность задачи рассеяния плоской волны прозрачным клином (см. [2]), правда в весьма нестандартной постановке. Естественно попытаться распространить на рассматриваемую задачу классические подходы: и принцип излучения Зоммерфельда, и принцип предельного поглощения. Последнее сделано в работе [3]. Подход, основанный на принципе излучения – предмет настоящей работы. Доказывается (в невырожденной ситуации) существование и единственность решения задачи в следующей постановке: решение, как внутри, так и вне клина удовлетворяет соответствующим волновым уравнениям, в окрестности вершины клина – условию Мейкснера. Если из решения “удалить” падающую, а также все отраженные и преломленные волны (их конечное число), то остаток будет удовлетворять условиям излучения в интегральной форме.

Для получения этих результатов мы часто пользуемся приемами, аналогичными приемам монографии [1] и работы [4]. В последней рассматривается задача об упругом клине. Наши обозначения нередко близки к обозначениям монографии [1]. Хотя цели и методы работы [4] и настоящей работы имеют много общего, формулировка окончательного результата в нашем случае проще, что связано с тем, что в скалярной задаче о прозрачном клине не возникают поверхностные волны.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 08-01-00511 и NATOs Public Diplomatic Division in the framework of “Science of Peace” under grant CBP.MD.SFPP 982376 .

1. Постановка задачи

Пусть r, θ – классическая полярная система координат и x, y соответствующая декартова система. Обозначим через Ω_1 угловую область $0 < \theta < \varphi$, $r > 0$ и $0 < \varphi < 2\pi$, где $\varphi = \mathrm{const}$ и через Ω_2 – внешнюю по отношению к Ω_1 угловую область $\varphi < \theta < 2\pi - \varphi$, $r > 0$. Мы предполагаем, что в областях Ω_j волновой процесс описывается своим уравнением Гельмгольца:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_j^2\Big)u(x,y) = (\Delta + k_j^2)u = 0, \tag{1.1}$$
$$(x,y) \in \Omega_j, \quad u(x,y) \in C^2_{\mathrm{loc}}(\Omega_j), \quad k_j = \mathrm{const} > 0, j = 1, 2.$$

Здесь $k_j = \frac{\omega}{c_j}$, где ω – частота, c_j – скорость, зависимость волново гополя от времени описывается множителем $e^{-i\omega t}$. Мы предполагаем, что на угол Ω_j падает плоская волна (см. рис. 1)

$$h_{\mathrm{inc}} = \frac{1}{2}e^{ik_2(-x\cos\Theta_{\mathrm{in}} + y\sin\Theta_{\mathrm{in}})} \tag{1.2}$$

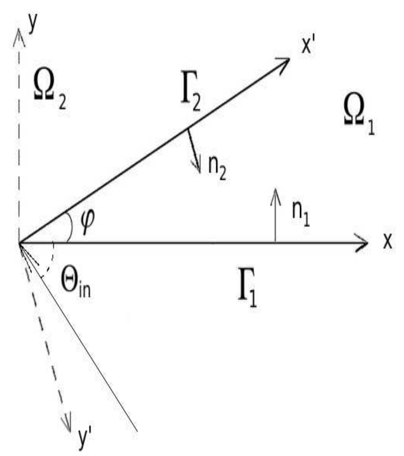

Рис. 1.

Волновое поле в области Ω_1 мы будем обозначать как $v(x,y)$, а в области Ω_2 – как $h(x,y) + h_{\mathrm{inc}}(x,y)$.

Мы предполагаем, что в замыканиях $\overline{\Omega_j}$ областей Ω_j за вычетом вершины $x = y = 0$, $v(x,y)$ и h имеют непрерывные производные первого порядка и удовлетворяются условия сопряжения на $\partial\Omega_1 \ \setminus \ (x = y = 0)$.

$$\begin{aligned} &A_1 v - A_2 h = A_2 h_{\text{inc}} \\ &B_1 \frac{\partial}{\partial n} v - B_2 \frac{\partial}{\partial n} h = B_2 \frac{\partial}{\partial n} h_{\text{inc}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь A_j, B_j, $j = 1, 2$ – положительные константы, $\frac{\partial}{\partial n}$ производная по нормали, внешней по отношению к Ω_2.

Кроме того, сингулярность в точке $x = y = 0$ ограничена тем, что выполняется условие Мейкснера:

$$\int\limits_{r<r_0} \Big(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\overline{\partial u}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\overline{\partial u}}{\partial y} \Big) dxdy < \infty, \quad 0 < r_0 < \text{const} < \infty. \tag{1.4}$$

Здесь $u = h + h_{\text{inc}}$ в Ω_1 и $u = v$ в Ω_2.

Перейдем к условиям на бесконечности.

Обозначим u_{geom} сумму падающей, отраженных и преломленных волн. Здесь следует сделать уточнения (ср. [4]): каждая из волн, из которых слагается u_{geom}, отлична от нуля лишь в некоторой области. Например, падающая волна при $0 < \Theta_{\text{in}} \le \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 1) существует в угле $\pi - \Theta_{\text{in}} \le \theta \le 2\pi$, $r \ge 0$. В остальной части плоскости (т.е. в Ω_1 и при $\varphi \le \theta \le \pi - \Theta_{\text{in}}$) мы полагаем падающую волну равной нулю. Пусть теперь при преломлении возникает “неоднородная”, – т.е. экспоненциально убывающая при удалении от преломляющей границы волна. Пусть x_1, y_1 система координат, причем начало координат $x_1 = y_1 = 0$ и $x = y = 0$ совпадают, ось x_1 идет вдоль преломляющей границы, ось y_1 направлена внутрь той области Ω_j, где существует преломленная неоднородная волна. Областью существования преломленной волны мы считаем пересечение Ω_j с квадрантом $x_1 \ge 0, y_1 \ge 0$. Из последующих актов преломления и отражения мы неоднородную волну исключаем. Подобным образом поступают авторы работы [4]. Указанное выше условие невырожденности заключается в том, что мы, следуя работам [1–4], требуем, чтобы ни падающая волна и ни одна из преломленных или отраженных волн не имела бы волнового фронта, ортогонального какой-либо стороне клина Ω_j.

Мы требуем от решения выполнения условий излучения в следующей интегральной форме: Пусть $u - u_{\mathrm{geom}} = u_{\mathrm{diff}}$, тогда

$$\int\limits_{\Sigma_R} \left| \frac{\partial u_{\mathrm{diff}}}{\partial R} - iku_{\mathrm{diff}} \right|^2 d\Sigma_R \underset{R\to\infty}{\to} 0, \tag{1.5}$$

где Σ_R - окружность радиуса R с центром в начале координат, $k = k_j$ в Ω_j, $u = v$ в Ω_1 и $h + h_{\mathrm{inc}}$ в Ω_2. В описанной постановке доказывается единственность и существование решения.

Кроме работ [1–4] авторам известна лишь одна работа [5], посвященная проблеме корректности задач для угловых областей. Подход там отличен от подхода нашей работы и результаты не покрывают наших результатов.

План доказательства сформулированных выше теорем единственности и существования такой: сначала методами монографии [1] доказывается теорема существования в постановке, которую можно условно назвать “постановкой Лебо”. Фактически это сделано в [2]. Там, правда, рассмотрен случай $A_j = B_j = 1$, но обобщение построений работы [2] на случай произвольных A_j и B_j не требует новых идей. Оказывается, получающееся на таком пути решение удовлетворяет всем указанным выше требованиям.

Доказательство теоремы единственности основано на том известном факте, что существование решения задачи о точечном источнике колебаний (в другой терминологии – функции Грина) имеет следствием теорему единственности. Такой путь доказательства теоремы единственности в другой ситуации использовани авторами работы [4]. Существование решения задачи о точечном источнике в нашем случае удается доказать методами монографии [1].

2. Сведение задачи к системе интегральных уравнений

Мы будем искать $v(x, y)$ и $h(x, y)$ в виде “уходящих” (outgoing (ср. [1])) решений, т.е. потенциалов простого слоя, плотности которых – это обобщенные функции из так называемого класса $\mathcal{A}$.

Определение 2.1. *Класс $\mathcal{A}$ – это класс обобщенных функций $f(x) \in S'(-\infty < x < +\infty)$, равных нулю при $x < 0$ и удовлетворяющих ещё дополнительным требованиям.*

Пусть $\widehat{f}$ преобразование Фурье обобщенной функции f. Символически

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx. \tag{2.1}$$

Известно, что обобщенная функция $\widehat{f}(\xi)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im}\xi < 0$. Потребуем кроме того, чтобы $\widehat{f}$ была бы регулярной в окрестности точек $-k_j$, $j = 1, 2$.

Пусть кроме того существует константа C_0 такая, что

$$\sup_{-\pi<\Theta<0} \int\limits_{C_0}^{\infty} \left| \widehat{f}(\rho e^{i\Theta}) \right|^2 d\rho < +\infty. \tag{2.2}$$

Кроме уже введенной системы координат x, y введем еще систему x', y'

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi. \end{cases} \tag{2.3}$$

(См. рис. 1)
и потенциалы

$$\begin{cases} v_1^\varepsilon = -(\Delta + k_1^2 e^{2i\varepsilon})^{-1} \alpha_1(x)\delta_1(y), \\ v_2^\varepsilon = -(\Delta + k_1^2 e^{2i\varepsilon})^{-1} \alpha_2(x')\delta_2(y'), \\ h_1^\varepsilon = -(\Delta + k_2^2 e^{2i\varepsilon})^{-1} \beta_1(x)\delta_1(y), \\ h_2^\varepsilon = -(\Delta + k_2^2 e^{2i\varepsilon})^{-1} \beta_2(x')\delta_2(y'). \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2$. Уходящие решения v, h – это пределы $v^\varepsilon = v_1^\varepsilon + v_2^\varepsilon$, $h^\varepsilon = h_1^\varepsilon + h_2^\varepsilon$ в смысле $S'(\mathbf{R}^2)$ при $\varepsilon \to +0$.

Если подставить $v^\varepsilon = v_1^\varepsilon + v_2^\varepsilon$, $h^\varepsilon = h_1^\varepsilon + h_2^\varepsilon$ в краевые условия (1.3), то после преобразований, близких к тем, что проделаны в [1, глава 3] и в работе [2], и последующего перехода к пределу при $\varepsilon \to +0$, мы придем к системе интегральных уравнений:

$$\begin{cases} DM\Sigma_1 + TM\Sigma_2 = \dfrac{W_1}{\xi + k_2\cos\Theta_{\text{in}}}, \\ TM\Sigma_1 + DM\Sigma_2 = \dfrac{W_2}{\xi + k_2\cos(\varphi + \Theta_{\text{in}})}, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $\Sigma_j \equiv (\widehat{\alpha}_j, \widehat{\beta}_j)^T$, $j = 1, 2$ – неизвестные спектральные функции,

$$W_1 = \begin{pmatrix} -iA_2 \\ B_2 k_2 \sin\Theta_{\rm in} \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} -iA_2 \\ B_2 k_2 \sin(\varphi + \Theta_{\rm in}) \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Интегральные операторы $DM = DM^{\varepsilon=0}$, $TM = TM^{\varepsilon=0}$, где

$$DM^{\varepsilon}(g)(\xi) = \int\limits_{\Gamma_0} DM^{\varepsilon}(\xi,\zeta) g(\zeta) d\zeta, TM^{\varepsilon}(g)(\xi) = \int\limits_{\Gamma_0} TM^{\varepsilon}(\xi,\zeta) g(\zeta) d\zeta. \tag{2.7}$$

Обозначим через $\zeta^{\varepsilon,*}$ функцию, являющуюся корнем с положительной мнимой частью уравнения

$$\xi^2 + \zeta^{\varepsilon,j}(\xi)^2 = k_j^2 e^{2i\varepsilon}, \quad j = 1, 2. \tag{2.8}$$

Интегральные операторы DM^{ε}, TM^{ε}, определённые на функциях из $\widehat{\mathcal{A}}^2$, имеют ядра вида

$$DM^{\varepsilon}(\xi,\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\xi - \zeta} dm(\zeta e^{i\varepsilon}), \tag{2.9}$$

где матрица

$$dm(\zeta e^{i\varepsilon}) = \begin{pmatrix} A_1 \frac{i}{\zeta^{\varepsilon,1}(\zeta e^{i\varepsilon})} & -A_2 \frac{i}{\zeta^{\varepsilon,2}(\zeta e^{i\varepsilon})} \\ -B_1 & -B_2 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

и

$$TM^{\varepsilon}(\xi,\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \Big[D^1(\xi,\zeta) \cdot tm_1 + D^1(\xi,\zeta) \cdot tm_2 \Big], \tag{2.11}$$

где матрицы

$$tm_1(\zeta e^{i\varepsilon}) = \begin{pmatrix} A_1 \frac{i}{\zeta^{\varepsilon,1}(\zeta e^{i\varepsilon})} & 0 \\ B_1 \left(\cos\varphi - \sin\varphi \frac{\zeta}{\zeta^{\varepsilon,1}(\zeta e^{i\varepsilon})}\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

$$tm_2(\zeta e^{i\varepsilon}) = \begin{pmatrix} 0 & -A_2 \frac{i}{\zeta^{\varepsilon,2}(\zeta e^{i\varepsilon})} \\ 0 & B_2 \left(\cos\varphi - \sin\varphi \frac{\zeta}{\zeta^{\varepsilon,2}(\zeta e^{i\varepsilon})}\right) \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Здесь

$$D^1(\xi,\zeta) = \frac{1}{(\xi - (\zeta\cos\varphi + \zeta^{\varepsilon,1}(\zeta)\sin\varphi))},$$
$$D^2(\xi,\zeta) = \frac{1}{(\xi - (\zeta\cos\varphi + \zeta^{\varepsilon,2}(\zeta)\sin\varphi))}. \tag{2.14}$$

Доказательство разрешимости системы (2.5) вполне аналогично доказательству разрешимости системы интегральных уравнений при $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 1$ (см. [2]).

3. О выполнении условий Мейкснера

Выполнении условий Мейкснера вытекает из представления v и h в виде потенциалов простого слоя с плотностями из класса $\mathcal{A}$. Этот результат можно "извлечь" из доказательств леммы 2.2 (см. [1]). Наметим коротко соответствующие построения для v_1.

Пользуясь аналитичностью $\widehat{\alpha}$ в нижней полуплоскости и в окрестности точек $-k_1, -k_2$ и тем, что при $|\xi| > M$, $\operatorname{Im}\xi = 0$, где M достаточно большое число $\widehat{\alpha}(\xi) \in L_2\left(|\xi| > M\right)$, v_1 можно представить интегралом:

$$v_1(x,y) = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_0} \widehat{\alpha}_1(\xi)\frac{e^{ix\xi + i|y|\zeta^1(\xi)}}{\zeta^1(\xi)}d\xi, \tag{3.1}$$

где Γ_0 контур, обходящий точки $-k_1$, $-k_2$ (см. рис. 2).

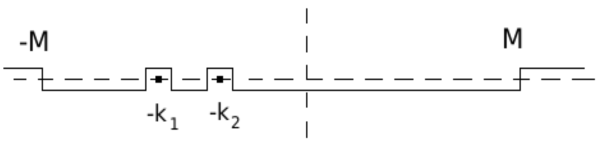

Рис. 2.

Функция $\zeta^1(\xi) = \zeta^{\varepsilon=0,1}(\xi)$.

Интеграл по любой конечной части контура при $y \neq 0$ бесконечно дифференцируемая функция x, y. Условие Мейкснера надо проверить для интегралов по полупрямым $(M, +\infty)$, $(-\infty, -M)$. Рассмотрим только

$$v_1^{(1)} = \frac{i}{4\pi} \int\limits_M^{+\infty} \widehat{\alpha}_1(\xi) \frac{e^{ix\xi + i|y|\zeta^1(\xi)}}{\zeta^1(\xi)} d\xi. \tag{3.2}$$

При $y \neq 0$

$$\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial x} = \frac{i}{4\pi} \int\limits_M^{+\infty} \widehat{\alpha}_1(\xi) \frac{i\xi e^{ix\xi + i|y|\zeta^1(\xi)}}{\zeta^1(\xi)} d\xi. \tag{3.3}$$

Равенство Парсеваля дает:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial x} \right|^2 dx = \frac{2\pi}{4\pi} \int\limits_M^{+\infty} \left| e^{i|y|\zeta^1(\xi)} \right|^2 |\widehat{\alpha}_1(\xi)|^2 \left| \frac{\xi}{\zeta^1(\xi)} \right|^2 d\xi$$
$$\leq \mathrm{const} \int\limits_M^{+\infty} |\widehat{\alpha}_1(\xi)|^2 d\xi. \tag{3.4}$$

Интегрируя неравенство (3.4) по y от $-b$ до b, где $0 < b = \mathrm{const} < +\infty$, получим

$$\int\limits_{-b}^{b} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial x} \right|^2 dxdy \leq 2b \cdot \mathrm{const} \int\limits_M^{+\infty} |\widehat{\alpha}_1(\xi)|^2 d\xi < +\infty. \tag{3.5}$$

Аналогично оцениваются интегралы от $\left| v_1^{(1)} \right|^2$ и $\left| \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial y} \right|^2$. Мы показали, что $v_1(x,y) \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$. Искомое решение это сумма потенциалов того же типа, что и v_1, поэтому условие Мейкснера будет иметь место как для v, так и для h.

Заметим далее, что при выполнении уравнений (1.1), краевых условий (1.3) и условия Мейкснера (1.4) главные члены, характеризующие поведение v и h в окрестности вершины клина можно искать,[1] формально подставляя в уравнения (1.1) и условия сопряжения (1.3) разложение (более подробно см. [6]).

$$u(x,y) \cong C_j + f(\theta) r^{\alpha}, \tag{3.6}$$

[1]Авторы благодарны С. А. Назарову, который указал, что такая возможность следует из доказательства теоремы (4.2.3) (см. [7, гл. 4]).

где $C_j = \mathrm{const}$ в Ω_j, $u = v$ в Ω_1 и $h + h_{\mathrm{inc}}$ в Ω_2, r, θ – полярные координаты. При нахождении $f(\theta)$ (с точностью до множителя) мы придем к задаче на собственные функции

$$Lf \equiv -\frac{d^2 f}{d\theta^2} = \alpha^2 f \tag{3.7}$$

для оператора L, заданного на функциях, определенных на отрезке $[0, 2\pi]$ и удовлетворяющих условиям сопряжения, вытекающим из (1.3) в точках φ и $(0, 2\pi)$.

Введем в множестве функций, квадратично интегрируемых на $[0, 2\pi]$, скалярное произведение формулой:

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\chi(\theta)d\theta, \tag{3.8}$$

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\chi(\theta)d\theta, \tag{3.9}$$

где

$$\chi(\theta) = \begin{cases} A_1 B_1, & 0 \le \theta < \varphi, \\ A_2 B_2, & \varphi \le \theta < 2\pi. \end{cases} \tag{3.10}$$

При должном понимании производной $\frac{d^2}{d\theta^2}$ оператор L (см. (3.7)) относительного введенного скалярного произведения – самосопряженный с дискретным спектром.

Из равенства Релея для собственных чисел следует, что одно из них равно нулю (ему соответствует собственная функция, постоянная на интервалах $(0, \varphi)$ и $(\varphi, 2\pi)$), остальные собственные числа α_n^2 – положительны.

4. Об интегральных соотношениях в случае точечного источника колебаний

Поскольку функция Грина свободного пространства удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k_2^2 e^{2i\varepsilon})G^0(x, y, x_0, y_0) = -\delta(x - x_0, y - y_0), \tag{4.1}$$

то ее можно представить интегралом:

$$G^0(x,y,x_0,y_0)=\frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(x-x_0)\xi+i|y-y_0|\zeta^{\varepsilon,2}(\xi)}}{\zeta^{\varepsilon,2}(\xi)}d\xi. \tag{4.2}$$

Волновое поле в области Ω_1 мы будем обозначать как $G^1(x,y)$, а в области Ω_2 – как $G^2(x,y)+G^0(x,y)$. Покажем, что существует функция Грина для прозрачного клина. Для этого будем искать уходящее решени задачи для уравнения (1.1) и граничных условий

$$\begin{aligned}&A_1G^1-A_2G^2=A_2G^0(x,y,x_0,y_0),\\&B_1\frac{\partial}{\partial n}G^1-B_2\frac{\partial}{\partial n}G^2=B_2\frac{\partial}{\partial n}G^0(x,y,x_0,y_0).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Соответствующая система интегральных уравнений, после перехода к пределу при $\varepsilon\to+0$, имеет вид сходный с (2.5), а именно:

$$\begin{cases}DM\Sigma_1+TM\Sigma_2=\widetilde{W_1},\\TM\Sigma_1+DM\Sigma_2=\widetilde{W_2}.\end{cases} \tag{4.4}$$

Здесь

$$\widetilde{W_1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i(x_0\zeta+y_0\zeta^2(\zeta))}}{(\xi-\zeta)}\cdot R_1(\zeta)d\zeta, \tag{4.5}$$

$$\widetilde{W_2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}D^2(\xi,\zeta)e^{-i(x_0\zeta+y_0\zeta^2(\zeta))}\cdot R_2(\zeta)d\zeta, \tag{4.6}$$

где

$$R_1(\zeta)=\begin{pmatrix}A_2\frac{i}{\zeta^2(\zeta)}\\-B_2\end{pmatrix} \tag{4.7}$$

и

$$R_2(\zeta)=\begin{pmatrix}A_2\frac{i}{\zeta^2(\zeta)}\\B_2\left(\cos\varphi-\sin\varphi\frac{\zeta}{\zeta^2(\zeta)}\right)\end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Регулярность правой части системы (4.4) достаточна для выполнения условий теоремы об изоморфизме (см. [2]). Таким образом, получаем существование решения задачи о точечном источнике.

5. Теорема единственности для прозрачного клина

Теорема 1. *Пусть* $u(x,y) \in C^2(\overline{\Omega_j} \setminus \{0\})$ *удовлетворяет уравнению Гельмгольца* (1.1) *и однородным краевым условиям (см.* (1.3)*) и удовлетворяет условию излучения*

$$\int\limits_{\sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial R} - ik_1 u\right|^2 A_1 B_1 d\sigma_1 + \int\limits_{\sigma_2} \left|\frac{\partial u}{\partial R} - ik_2 u\right|^2 A_2 B_2 d\sigma_2 \underset{R\to\infty}{\to} 0, \qquad (5.1)$$

где σ_1 *– дуга окружности радиуса* R *с центром в начале координат расположенная в области* Ω_1*, а* σ_2 *– дуга той же окружности, расположенная в* Ω_2*. Тогда* $u = 0$*.*

Доказательство теоремы 1. Для доказательства тривиальности решения однородной задачи будем использовать формулу Грина с весовой функцией $\chi(\theta)$ (см. (3.10)). Обозначим через G решение задачи о точечном источнике, которое равно G^1 в области Ω_1 и $G^2 + G^0$ в области Ω_2. Область B_R – это шар радиуса R с центром в начале координат, а область B_r – это шар радиуса r, $r \ll R$. Применим к $u(x,y)$ и $G(x,y)$ форумулу Грина в области $\Omega_{R,r} = B_R \setminus B_r$:

$$\int\int\limits_{\Omega_{R,r}} \big(G(\Delta + k^2)u - u(\Delta + k^2)G\big)\, \chi(x,y) dx dy = u(x_0, y_0). \qquad (5.2)$$

Здесь $k = k_j$, если $(x,y) \in \Omega_j$ и $\chi(x,y) = A_j B_j$ если $(x,y) \in \Omega_j$, $j = 1,2$. Обозначим Σ_j, $j = 1,2$ подобласть $\Omega_{R,r}$, которая находится в Ω_j(область Σ_j состоит из дуг окружностей S_R и S_r и частей боковых поверхностей клина). Имеем следующее тождество:

$$\begin{aligned} u(x_0,y_0) = &\int\limits_{\Sigma_1} \Big(\frac{\partial u}{\partial n} G - u\frac{\partial G}{\partial n}\Big) A_1 B_1 d\Sigma_1 \\ &- \int\limits_{\Sigma_2} \Big(\frac{\partial u}{\partial n} G - u\frac{\partial G}{\partial n}\Big) A_2 B_2 d\Sigma_2. \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Функция G удовлетворяет тем же однородным краевым условиям, что и функция u, поэтому в формуле (5.3) интегралы по боковым поверхностям клина сократятся. Интеграл по окружности радиуса r

будет стремится к нулю при $r \to 0$ (условие Мейкснера). Осталось доказать, что

$$\int\limits_{\Sigma_R} \left(\frac{\partial u}{\partial R} G - u\frac{\partial G}{\partial R}\right)\chi(x,y)d\Sigma_R \underset{R\to\infty}{\to} 0. \tag{5.4}$$

Применим формулу Коши–Буняковского к интегралу в формуле (5.4):

$$\left|\int\limits_{\Sigma_R} \left(\frac{\partial u}{\partial R} G - u\frac{\partial G}{\partial R}\right)\chi(x,y)d\Sigma_R\right| \tag{5.5}$$

$$\leq \sqrt{\int\limits_{\Sigma_R} \left|\frac{\partial u}{\partial R} - iku\right|^2 \chi(x,y)d\Sigma_R + \int\limits_{\Sigma_R} \left|\frac{\partial G}{\partial R} - ikG\right|^2 \chi(x,y)d\Sigma_R}$$

$$\cdot \sqrt{\int\limits_{\Sigma_R} |G|^2\chi(x,y)d\Sigma_R + \int\limits_{\Sigma_R} |u|^2\chi(x,y)d\Sigma_R}.$$

Здесь

$$\int\limits_{\Sigma_R} \left|\frac{\partial u}{\partial R} - iku\right|^2 \chi(x,y)d\Sigma_R \tag{5.6}$$

$$= \sqrt{\int\limits_{\sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial R} - ik_1u\right|^2 A_1B_1d\sigma_1 + \int\limits_{\sigma_2} \left|\frac{\partial u}{\partial R} - ik_2u\right|^2 A_2B_2d\sigma_2},$$

$$\int\limits_{\Sigma_R} |u|^2\chi(x,y)d\Sigma_R = \int\limits_{\sigma_1} |u|^2 A_1B_1d\sigma_1 + \int\limits_{\sigma_2} |u|^2 A_2B_2d\sigma_2. \tag{5.7}$$

Интегралы, содержащие функцию G преобразуются аналогично. Рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_{\sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial R} - ik_1u\right|^2 A_1B_1d\sigma_1 + \int\limits_{\sigma_2} \left|\frac{\partial u}{\partial R} - ik_2u\right|^2 A_2B_2d\sigma_2$$

$$= \int\limits_{\sigma_1} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial R}\right|^2 + k_1^2|u|^2 - 2k_1 \operatorname{Im}\frac{\partial u}{\partial R}\overline{u}\right) A_1B_1d\sigma_1$$

$$+ \int\limits_{\sigma_2} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial R}\right|^2 + k_2^2|u|^2 - 2k_2 \operatorname{Im}\frac{\partial u}{\partial R}\overline{u}\right) A_2B_2d\sigma_2. \tag{5.8}$$

Функция $\overline{u}$ также удовлетворяет уравнению Гельмгольца и однородным краевым условиям, следовательно сумма интегралов[2]

$$\int\limits_{\sigma_1} \Big(k_1 \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial R}\overline{u}\Big) A_1 B_1 d\sigma_1 + \int\limits_{\sigma_2} \Big(k_2 \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial R}\overline{u}\Big) A_2 B_2 d\sigma_2 \qquad (5.9)$$

не зависит от R. Поскольку имеет место условие излучения (см. (5.1)), то следующий интеграл ограничен

$$\int\limits_{\Sigma_R} \Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial R}\Big|^2 + k^2|u|^2\Big)\chi(x,y)d\Sigma_R. \qquad (5.10)$$

Применим полученные нами оценки к формуле (5.3). Получим, что в точке (x_0, y_0) решение однородной задачи равно нулю. В силу аналитичности $u = 0$ везде, а значит доказана единственность решения задачи о прозрачном клине. □

Литература

1. J.-P. Croisille, G. Lebeau, *Diffraction by an immersed elastic wedge.* Lect. Notes Math. **1723**, Springer (1999).
2. Н. В. Мокеева, *Исследование вопроса о корректности задач дифракции в случае угловых областей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **324** (2005), 131–147.
3. Н. В. Мокеева, *Принцип предельного поглощения в задаче о прозрачном клине.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **332** (2006), 138–148.
4. V. Kamotski, G. Lebeau, *Diffraction by an elastic wedge with stress-free boundary: existence and uniqueness.* — in Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Lond. **462,** No. 2065 (2006), pp. 289-317.
5. S. Berntsen, C. Bergljun, *Diffraction by a dielectric wedge at skew incndence.* — Oxford University Press, Q.Jl. Mech. Appl. Math. **54(4)** (2001), 549-583.
6. V. M. Babich, M. A. Lyalinov, V. E. Grikurov, *The Sommerfeld–Malyuzhinets Technique.* — Alpha Science (2008).
7. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* “Наука”, М., 1973.
8. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* “Наука”, М., 1991.

Babich V. M, Mokeeva N. V. On the scattering of the plane wave by transparent wedge.

[2]Авторы благодарны А. С. Старкову за ценную консультацию.

It is proved in the paper, that the problem of scattering of the plane wave by transparent wedge, if the radiation conditions it should be mean in the form: it necessary to subtract from the solution the incident wave, all reflected and refracted waves. The remainder is to satisfy the radiation condition in integral form. The problem is scalar, the velocity of wave inside and outside of the wedge are not equal, the wave process is described by the classical Helmholtz equations, conjugation boundary condition take place on the sides of the wedge.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: babich@pdmi.ras.ru.

Поступило 25 января 2008 г.

С.-Петербургский государственный
университет

E-mail: natasha.mokeeva@gmail.com