Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 353, 2008 г.

В. В. Макеев

О ПИРАМИДАХ В ТРЕХМЕРНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Из известной теоремы Дворецкого [2] легко вывести, что множество вершин любого евклидова симплекса Δ можно изометрически вложить в любое вещественное нормированное пространство достаточно большой размерности. (Для правильного Δ это сделано в [1].)

Зависит ли эта размерность только от размерности симплекса Δ? В [5] доказано, что в трехмерном, а в [6] – что в четырехмерном нормированном пространстве существуют, соответственно, четыре и пять равноотстоящих друг от друга точек. Кажется, ничто не противоречит тому предположению, что множество вершин любого евклидова тетраэдра изометрически вкладывается во всякое трехмерное нормированное пространство. Ниже мы докажем это утверждение в некоторых специальных случаях.

§1. Двумерный случай

Нижеследующая полезная для дальнейшего лемма описывает возможность реализации евклидова треугольника со сторонами длины a, b и c на двумерной нормированной плоскости со строго выпуклым кругом.

Лемма 1. *Пусть E – двумерная нормированная плоскость со строго выпуклым кругом и точки $A, B \in E$ таковы, что $AB = c$. Тогда в E найдутся ровно две такие точки C, что $AC = b$ и $BC = a$.*

Доказательство. Существование вышеуказанных точек следует из простых соображений непрерывности. Расположив точку C на прямой AB на расстоянии b от точки A и повернув отрезок CA на угол π вокруг точки A, мы убеждаемся в том, что BC принимает все значения от $b - c$ до $b + c$. Таким образом, в каждой полуплоскости в E относительно прямой AB имеется искомая точка C.

Докажем от противного единственность искомой точки C в каждой из полуплоскостей с границей AB. Пусть точки C и C_1 из одной относительно прямой AB полуплоскости обладают требуемым свойством. Отложим от точки B отрезки BC' и BC_1' равные по длине и сонаправленные с отрезками AC и AC_1, соответственно. Тогда CC_1 и $C'C_1'$ – параллельные и равные по длине хорды двух концентрических кругов в E, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой AB, видные из центров кругов под непересекающимися углами, чего не может быть. □

Заметим, что на нормированной плоскости с параллелограммом P в качестве круга имеется континуум равносторонних треугольников, одна из общих сторон которых параллельна стороне P.

§2. Треугольные пирамиды в нормированном пространстве

Теорема 1. *Пусть E – трехмерное нормированное пространство. Пусть Δ – евклидов тетраэдр, четыре ребра которого в двух парах скрещивающихся ребер имеют длину $a > 0$, одно из оставшихся ребер имеет длину $b < a$, последнее ребро имеет произвольную длину из $(0; 2a - b)$. Тогда в E можно изометрически вложить множество вершин тетраэдра Δ так, чтобы одна из его граней с ребрами длины a и b лежала в наперед заданной плоскости в E, в которой ребро длины b имело бы наперед заданное направление.*

Доказательство. Докажем теорему для пространства E со строго выпуклым шаром B. В остальных случаях теорема доказывается предельным переходом.

Пусть отрезок AB длины b в заданной плоскости P в E имеет заданное направление. В силу строгой выпуклости шара B по лемме 1 в плоскости P существует единственный положительно ориентированный треугольник ABC с $AC = BC = a$. Будем поворачивать плоскость P вокруг прямой AB и рассматривать соответствующие треугольники ABC. После поворота P на 180° вершина C треугольника снова займет положение C_1 в плоскости P, причем вместе с исходным треугольником ABC она образует ромб $ACBC_1$ со стороной длины a, диагональ AB которого имеет длину b, следовательно по неравенству треугольника диагональ CC_1 по длине не меньше $2a - b$. Теперь существование искомого изометрического вложения следует из простых соображений непрерывности. □

Теорема 2. *Во всякое трехмерное нормированное пространство E можно изометрически вложить множество вершин евклидова тетраэдра, четыре ребра которого в двух парах скрещивающихся ребер* *имеют длину $a > 0$, одно из оставшихся ребер имеет длину $\sqrt{2}a$, последнее ребро принимает любое из значений из $(0; \sqrt{2}a)$, и, наконец, одна из граней с ребрами длины a и $\sqrt{2}a$ лежит в наперед заданной плоскости в E.*

Доказательство. Как видно из доказательства предыдущей теоремы, достаточно в заданной плоскости P найти ромб со сторонами длины a и диагоналями равной длины $\sqrt{2}a$. Существование такого ромба вытекает из существования аффинно-правильного восьмиугольника, вписанного в круг на плоскости P (см. [3]), взятые через одну четыре вершины которого и дают пример подобного ромба. $\square$

Теорема 3. *Во всякое трехмерное нормированное пространство можно изометрически вложить множество вершин всякой правильной евклидовой треугольной пирамиды.*

Доказательство. Как и выше, мы предполагаем, что шар $B \subset E$ – строго выпуклый.

Для доказательства нам понадобится

Лемма 2. *В трехмерном нормированном пространстве имеются равносторонние треугольники с медианами равной длины.*

Доказательство. Обозначим через M пространство положительно ориентированных равносторонних треугольников со сторонами единичной длины и центром тяжести в заданной точке пространства. Из леммы 1 следует, что M гомеоморфно группе вращений $SO(3)$. В многообразии M и пространстве $\mathbb{R}^3$ действует циклическая группа $\mathbb{Z}_3$ циклическими перестановками вершин треугольников и координат точек, соответственно.

Рассмотрим непрерывное отображение

$$F : M \to \mathbb{R}^3 : \triangle A_1A_2A_3 \mapsto (AM_1, AM_2, AM_3),$$

где AM_1, AM_2, AM_3 – медианы треугольника $A_1A_2A_3$. Отображение F по построению $\mathbb{Z}_3$-эквивариантно. Как следует из [4, 7], в таком случае его образ содержит точку с равными координатами, что и доказывает лемму 2. $\square$

Заметим, что на двумерной плоскости равносторонних треугольников с медианами равной длины, вообще говоря, не существует.

Из леммы 2 легко получается

Следствие. *В трехмерном нормированном пространстве имеются равносторонние треугольники со стороной заданной длины $a > 0$ и медианами равной длины $\geqslant \sqrt{3}a/2$ (или, по выбору, $\leqslant \sqrt{3}a/2$).*

Доказательство. Действительно, как известно, для всякого треугольника T из отрезков, сонаправленных и равных по длине его медианам, можно составить треугольник T', медианы которого сонаправлены со сторонами исходного треугольника и составляют $3/4$ их длины. Если исходный треугольник T был равносторонним и имел медианы равной длины, то таковым же будет и треугольник T', и отношение длин медиан к длинам сторон для одного из треугольников $\leqslant \sqrt{3}/2$, а для другого $\geqslant \sqrt{3}/2$. □

Окончание доказательства теоремы 3. Пусть T – равносторонний треугольник с медианами равной длины $\leqslant \sqrt{3}/2$ длины его стороны, расположенный в некоторой плоскости $P \subset E$.

Рассмотрим центральное сечение шара $B \subset E$ плоскостью $P_1 \| P$ и впишем в $P_1 \cap B$ треугольник T', положительно гомотетичный T. В силу строгой выпуклости сечения такой треугольник – единственный, и его центр тяжести находится в центре O шара B.

Пусть P_2 – параллельная P_1 опорная трехмерная плоскость шара B.

Рассмотрим всевозможные положительно гомотетичные копии треугольника T, вписанные в сечения $B \cap P_3$, где P_3 – параллельная P_1 и P_2 и расположенная между ними плоскость. Заметим, что в силу строгой выпуклости сечений рассматриваемые копии треугольника единственны и непрерывно зависят от плоскости P_3. Для указанных гомотетичных копий T рассмотрим отношение $\|OA_1\|/\|A_1A_2\|$, где O – центр шара B. Если T вписан в центральное сечение $B \cap P_1$, то

$$\frac{\|OA_1\|}{\|A_1A_2\|} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Если секущая плоскость P_3 достаточно близка к P_2, то для вписанных в $P_3 \cap B$ гомотетичных копий T отношение $\|OA_1\|/\|A_1A_2\| > x$ для заданного $x > 0$. Таким образом, по соображениям непрерывности рассматриваемое отношение принимает всевозможные значения $> 1/\sqrt{3}$. Итак, для строго выпуклого шара B теорема 3 доказана, а в остальных случаях она доказывается предельным переходом. □

Заметим, что вопрос о возможности изометрически вложить множество вершин всякой четырехмерной евклидовой правильной пирамиды с тетраэдром в качестве основания в произвольное четырехмерное нормированное пространство решен не до конца. В [6] доказано, что это возможно для правильных пирамид с отношением бокового ребра к ребру основания $\leqslant 3/4$, в то время как для правильной евклидовой пирамиды это отношение может быть любым $> \sqrt{3/8}$.

Теорема 4. *Во всякое трехмерное нормированное пространство можно изометрически вложить множество вершин евклидова тетраэдра, пять ребер которого имеют длину $a > 0$, а последнее ребро имеет произвольную длину в интервале $(0, \sqrt{3}a)$.*

Доказательство. Как и в теореме 1, достаточно построить параллелограмм $ACBC'$, все стороны которого и диагональ AB имеют длину a, а диагональ CC' – длину $\geqslant \sqrt{3}a$. Такой параллелограмм получается из треугольника ABC со сторонами длины a и медианой CM длины $\geqslant \sqrt{3}a/2$, который существует по лемме 2. □

Теорема 5. *Во всякое трехмерное нормированное пространство можно изометрически вложить множество вершин евклидова тетраэдра, у которого четыре ребра в двух парах скрещивающихся ребер имеют длину $a > 0$, одно из оставшихся ребер имеет длину $2a\sin 36^\circ$, а последнее ребро принимает любое из значений в интервале $(0, 2a\cos 36^\circ)$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, достаточно построить параллелограмм $ACBC'$, все стороны которого имеют длину a, диагональ AB имеет длину $2a\sin 36^\circ$, а диагональ CC' – длину $2a\cos 36^\circ$. В [9] доказано, что в некоторое плоское центральное сечение шара в трехмерном нормированном пространстве вписан аффинно-правильный десятиугольник. Искомый параллелограмм, очевидно, имеет своей половиной треугольник, две вершины которого – взятые через одну вершины вышеназванного десятиугольника, третья – совпадает с его центром. □

§3. Четырехугольные пирамиды в нормированном пространстве

Автору не известно, можно ли множество вершин всякой правильной евклидовой четырехугольной пирамиды изометрически вложить во всякое трехмерное нормированное пространство. Ниже мы приводим некоторые результаты в этом направлении.

Ниже будем называть “квадратом” в нормированном пространстве параллелограмм с равными сторонами и равными диагоналями.

Теорема 6. *Во всяком трехмерном нормированном пространстве E существует четырехугольная пирамида с "квадратным" основанием, расположенным в заранее заданной плоскости $P \subset E$, боковыми ребрами равной длины и заранее заданным отношением > 1 бокового ребра к ребру основания, и вершина которой расположена в заранее заданном полупространстве относительно плоскости P.*

Доказательство. Теорему достаточно доказать для случая, когда единичный шар B с центром в нуле $0 \in E$ является гладким строго выпуклым телом, что мы и предполагаем в дальнейшем. В остальных случаях теорема получается предельным переходом.

Шнирельман [10] доказал, что во всякую регулярную плоскую жорданову кривую вписан квадрат. В [8] этот результат перенесен автором на "квадраты" в нормированной плоскости. Из [10] и [8] также следует, что таких "квадратов" для типичной кривой имеется нечетное число, чем мы и воспользуемся ниже.

Рассмотрим центральное сечение шара $B \subset E$ плоскостью $P_1 \| P$ и параллельную P_1 опорную плоскость P_2 шара B, расположенную в требуемом полупространстве относительно плоскости P_1. Рассмотрим всевозможные пирамиды с вершинами в центре шара B, основания которых – "квадраты", вписанные в сечения $B \cap P_3$, где P_3 – параллельная P_1 и P_2 и расположенная между ними плоскость. Очевидно, что отношение длины бокового ребра к длине ребра основания для таких пирамид стремится к 0, если плоскость их основания приближается к P_2 и становится меньше заданного $x > 1$ при приближении их плоскости основания к P_1, поскольку в последнем случае пирамида вырождается в "квадрат", а ее вершина переходит в его центр. В ситуации общего положения множество M оснований рассматриваемых пирамид в параллельных P_1 и расположенных между P_1 и P_3 сечениях плоскостями P_4 шара B является одномерным гладким подмногообразием многообразия "квадратов", лежащих в параллельных P плоскостях, края которого – "квадраты", вписанные в $P_3 \cap B$ и $P_1 \cap B$. Так как в типичное сечение $B \cap P_4$ вписано нечетное число указанных квадратов, то M содержит связную компоненту M_1 – отрезок, один из концов которого – "квадрат", вписанный в $P_1 \cap B$, а другой конец – "квадрат", вписанный в $P_3 \cap B$. Поэтому по соображениям непрерывности для некоторой из рассматриваемых пирамид с основанием из M_1 отношение длины бокового ребра к длине ребра основания равно x, что и завершает доказательство теоремы в ситуации общего положения. В остальных случаях теорема доказывается предельным переходом. □

С помощью некоторых дополнительных соображений доказывается

Теорема 7. *Во всяком трехмерном нормированном пространстве существует четырехугольная пирамида с “квадратным” основанием, боковыми ребрами равной длины и заранее заданным отношением > 1 длины бокового ребра к длине ребра основания, расстояние от вершины которой до плоскости основания равно расстоянию от вершины до центра основания.*

Литература

1. P. Brass, *On equilateral simplices in normed spaces.* — Beiträge Algebra Geom. **40** (1999), 303–307.
2. A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces.* — Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem 1960), Pergamon, Oxford (1961), 123–160.
3. B. Grünbaum, *Affineregular polygons inscribed in plane convex sets.* — Riveon Lematematika **13** (1959), 20–24.
4. S. A. Kakutani, *A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed set in* $\mathbb{R}^3$. — Ann. of Math. **43** (1942), 739–741.
5. C. Petty, *Equilateral sets in Minkowski spaces.* — Proc. Amer. Math. Soc. **27** (1971), 369–374.
6. В. В. Макеев, *О равнобедренных пирамидах в четырехмерном нормированном пространстве.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **329** (2005).
7. В. В. Макеев, *Пространственные обобщения некоторых теорем о выпуклых фигурах.* — Мат. заметки. **36** (1984), 405–415.
8. В. В. Макеев, *Трехмерные многогранники, вписанные и описанные вокруг выпуклых компактов.* 2. — Алгебра и анализ **13**, No. 5 (2001), 110–134.
9. В. В. Макеев, *О некоторых геометрических свойствах выпуклых тел.* 2. — Алгебра и анализ **15**, No. 6 (2003), 74–85.
10. Л. Г. Шнирельман, *О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых.* — Успехи мат. наук **10** (1944), 34–44.

Makeev V. V. On pyramids in a three-dimensional normed space.

For Euclidean tetrahedra of special type it is proved that their vertex set can be isometrically embedded in an arbitrary three-dimensional normed space. In particular, this is true for every regular triangular pyramid.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: mvv57@mbox.ru

Поступило 1 июня 2006 г.