Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 353, 2008 г.

Е. Н. Глушак

ЛИНЕЙНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТЫХ ГРАФОВ В $\mathbb{R}^3$

§1. Цель работы

Пусть n – натуральное число. Рассмотрим евклидово n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ и обозначим через $x_1, \dots, x_n$ точки этого пространства, задаваемые формулой $x_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ (для $i \leqslant n$). В этой заметке под *графами* мы будем понимать *стандартные простые графы в* $\mathbb{R}^n$, т.е. топологические подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, являющиеся объединением отрезков, соединяющих точки x_i и x_j для некоторых натуральных чисел $i < j \leqslant n$. Точки $x_1, \dots, x_n$ называются *вершинами* графа; отрезки, соединяющие его вершины, называются *ребрами*. Граф, гомеоморфный окружности, называется *циклом*. Граф, содержащий все отрезки, соединяющие точки x_i и x_j (для $1 \leqslant i < j \leqslant n$), называется *полным*.

Пусть G – граф. Топологическое вложение графа G в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ называется *линейным*, если оно линейно на каждом ребре графа. Рассмотрим множество всех линейных вложений графа G в $\mathbb{R}^3$, снабдим его компактно-открытой топологией и обозначим полученное топологическое пространство через $\mathfrak{M}(G)$. (Это пространство непусто, поскольку, как хорошо известно, любой граф можно линейно вложить в $\mathbb{R}^3$.) Линейные вложения $f, g : G \to \mathbb{R}^3$ называются *жестко изотопными*, если в пространстве $\mathfrak{M}(G)$ существует путь, соединяющий f и g. Главная цель этой заметки – перечислить все известные автору результаты, относящиеся к классификации линейных вложений графов в $\mathbb{R}^3$ с точностью до жесткой изотопии.

§2. Теорема о полных классификациях

Пусть G – граф и H – его подграф. Говорят, что граф G *элементарно стягиваем* к графу H, если в G существует вершина степени один такая, что граф H получается из G удалением этой вершины и инцидентного ей ребра. Говорят, что G *стягиваем* к H, если существует последовательность элементарных стягиваний, переводящая G в H. Говорят, что граф G *нестягиваем*, если он не стягивается ни к какой своей вершине.

Теорема 1. *Пусть G – граф и H – его подграф такой, что граф G стягиваем к подграфу H. Обозначим через n число вершин в H.*

1. *Если $n \leqslant 4$, то любые два линейных вложения графа G в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ жестко изотопны.*
2. *Если $n = 5$ и H – граф, не являющийся полным, то любые два линейных вложения графа G в $\mathbb{R}^3$ жестко изотопны. Если $n = 5$ и H – полный граф, то существует ровно два класса жесткой изотопии линейных вложений графа G в $\mathbb{R}^3$. Образы подграфа H при некоторых вложениях, представляющих эти классы, изображены на рис. 1.*
3. *Если $n = 6$ или $n = 7$ и граф H является циклом, то существует ровно пять классов жесткой изотопии линейных вложений графа G в $\mathbb{R}^3$. Образы подграфа H при некоторых вложениях, представляющих эти классы, изображены на рис. 2 и 3, соответственно.*

Часть 3 теоремы доказана в [1, 2]. Части 1 и 2, насколько известно автору, являются новыми; доказательство первой и второй частей теоремы предполагается включить в статью, посвященную подробному изложению анонсируемых здесь результатов.

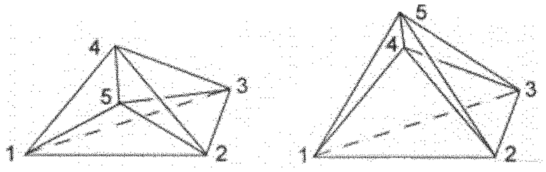

Рис 1. Линейные вложения полного графа с пятью вершинами.

§3. Подготовительный материал. Число $\nu(G)$

Пусть G – граф. Через $\nu(G)$ мы будем обозначать число классов жесткой изотопии линейных вложений графа G в $\mathbb{R}^3$.

Лемма.

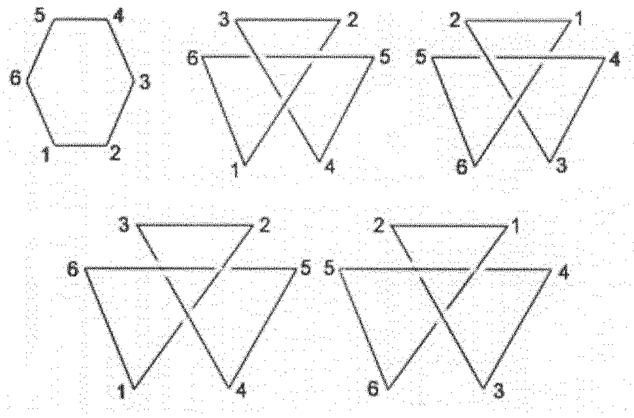

Рис 2. Шестиугольные узлы.

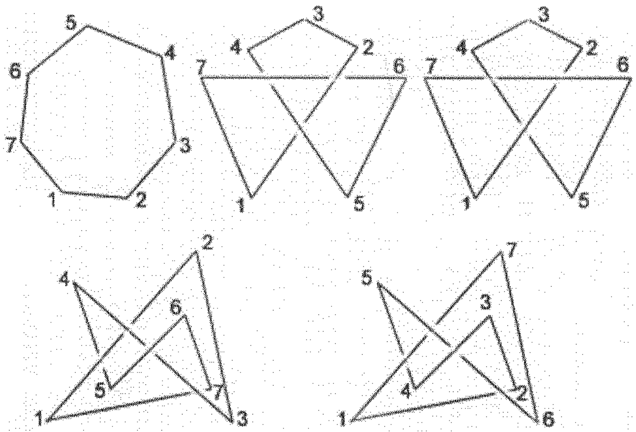

Рис 3. Семиугольные узлы.

1. *Если граф H является подграфом графа G, то $\nu(H) \leqslant \nu(G)$.*
2. *Если граф G стягиваем к графу H, то $\nu(G) = \nu(H)$.*
3. *Если G и J – нестягиваемые графы, то $\nu(G \sqcup J) \geqslant 3\nu(G)\nu(J)$.*
4. *Пусть G и J – графы. Обозначим через $G \vee J$ какой-нибудь букет графов G и J. Тогда $\nu(G \vee J) \geqslant \nu(G)\nu(J)$.*
5. *Пусть G и J – графы. Пусть, далее, в графе G выбрано ребро e_1, в графе J – ребро e_2. Обозначим через $G + J$ граф, полученный из несвязного объединения графов G и J отождествлением ребер e_1*

и e_2. Тогда $\nu(G+J) \geqslant \nu(G)\nu(J)$.

Первая и вторая части леммы очевидны, остальное, по-видимому, является новым. Части 3–5 леммы предполагается доказать в следующей статье автора.

§4. Теоремы об оценках числа $\nu(G)$

Для любого натурального числа m положим

$$\lambda(m) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 3 \leqslant m \leqslant 5, \\ \frac{1}{3}(2^{m-4} + 2^{\frac{m-2}{2}}) & \text{при} \quad m \equiv 0 \pmod 4 \quad \text{и} \quad m \geqslant 8, \\ \frac{1}{3}(2^{m-4} + 2^{\frac{m-3}{2}} - 1) & \text{при} \quad m \equiv 1 \pmod 4 \quad \text{и} \quad m \geqslant 9, \\ \frac{1}{3}(2^{m-4} + 2^{\frac{m-2}{2}} + 1) & \text{при} \quad m \equiv 2 \pmod 4 \quad \text{и} \quad m \geqslant 6, \\ \frac{1}{3}(2^{m-4} + 2^{\frac{m-3}{2}}) & \text{при} \quad m \equiv 3 \pmod 4 \quad \text{и} \quad m \geqslant 7. \end{cases}$$

Теорема 2А. *Пусть G – граф и H – его подграф такой, что граф G стягиваем к графу H. Обозначим через n число вершин графа H.*

1. *Если $n = 6$ и H – полный граф, то $\nu(G) \geqslant 260$.*
2. *Если $n = 8$ и H – цикл, то существует не менее 20 классов жесткой изотопии линейных вложений графа G в $\mathbb{R}^3$.*
3. *Если G содержит k непересекающихся циклов длинами $n_1, n_2, ..., n_k$, соответственно, то*

$$\nu(G) \geqslant (k^2 - k + 1)\prod_{i=1}^{k}\lambda(n_i) + 2\sum_{i=1}^{k-1}(k-i)\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant k \\ j\neq i}}\lambda(n_j)\sum_{p=1}^{\left[\frac{n_i-4}{2}\right]}\lambda(n_i - 2p - 1).$$

4. *Если G содержит подграф, гомеоморфный букету k циклов длинами $n_1, n_2, \ldots, n_k$, соответственно, то*

$$\nu(G) \geqslant \prod_{i=1}^{k}\lambda(n_i).$$

5. *Пусть граф G содержит подграф, который может быть получен из последовательности k циклов отождествлением для каждого натурального числа $i < k$ циклов с номерами i и $i+1$ вдоль простых путей. Обозначим через l_i длины путей, по которым отождествляются циклы с номерами i и $i+1$, и через m_i длину i-ого цикла. Положим*

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1 - l_1, \\ n_2 &= m_2 - l_1 - l_2, \dots , \\ n_i &= m_i - l_{i-1} - l_i, \dots , \\ n_{k-1} &= m_{k-1} - l_{k-2} - l_{k-1}, \\ n_k &= m_k - l_{k-1}. \end{aligned}$$

(См. рис. 4.) Тогда

$$\nu(G) \geqslant \lambda\biggl(\sum_{i=1}^{k} n_i\biggr) + \sum_{p=2}^{k}\prod_{i=1}^{p}\bigl(\lambda(n_{[(i-1)k/p]+1} + \ldots + n_{[ik/p]} + 1) - 1\bigr)$$

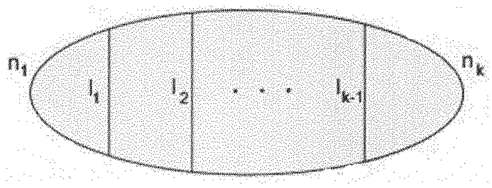

Рис 4.

Часть 2 этой теоремы является переформулировкой п. 4 теоремы 1 статьи [2]. Остальное предполагается доказать в статье автора, посвященной подробному изложению анонсируемых здесь результатов.

Комментарий к части 1 теоремы. На рис. 5 приведены образы 21 линейного вложения полного графа с шестью вершинами в $\mathbb{R}^3$, попарно не являющихся жестко изотопными. В первых двадцати примерах вложения всех циклов являются тривиальными узлами. В последнем примере вложение цикла (123456) является трилистником, вложения остальных циклов этого графа являются тривиальными узлами. Меняя тип трилистника и нумерацию вершин графа, из последнего примера можно получить 239 линейных вложений, попарно не являющихся жестко изотопными.

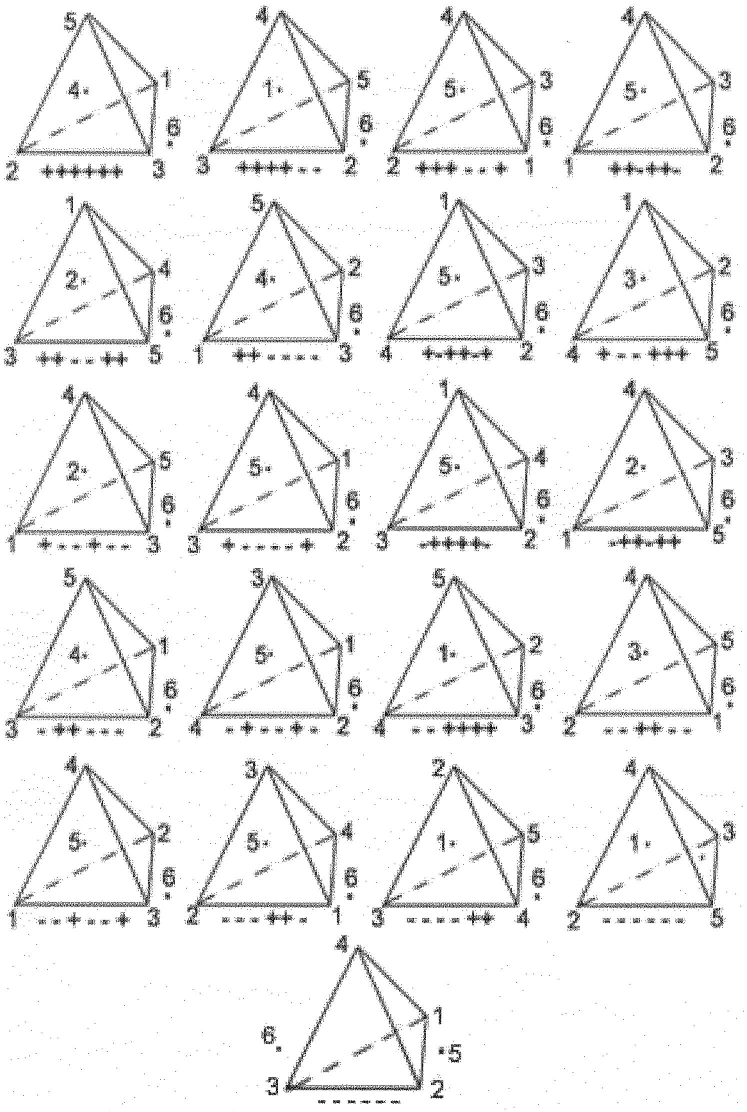

Рис 5. Примеры линейных вложений полного графа с шестью вершинами, попарно не являющихся жестко изотопными.

Заметим, что оценка части 5 теоремы является наиболее точной, если выполняется условие $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k$.

Заметим также, что для получения оценки на число жестко изотопных линейных вложений произвольного графа необходимо выбрать такой подграф из условий теоремы 2А, для которого получается наибольшее значение оценки. Например, для полного графа с n вершинами следует выбрать подграф, приведенный в пункте 5 теоремы, для которого $k = [n/2]$, длины путей $l_1, l_2, \ldots, l_{k-1}$ равны 1, а длины $n_1, n_2, \ldots, n_k$ равны 2.

Теорема 2Б. *Пусть n – натуральное число и G – простой граф с n вершинами. Пусть, далее, $C_{m,k}$ – число сочетаний C_m^k, если $m \geqslant k$, и 0, если $m < k$. Тогда*

$$\nu(G) \leqslant 2 \cdot 6^{3n} \sum_{k=0}^{3n} 2^k \cdot C_{C_n^4,k}.$$

Эту теорему также предполагается доказать в следующей статье автора, посвященной подробному изложению анонсируемых здесь результатов. Простые примеры показывают, что, как правило, оценки на число $\nu(G)$, содержащиеся в теоремах 2А и 2Б, точными не являются.

Результаты настоящей работы были частично анонсированы в статье [3].

Благодарности. Автор благодарит В. М. Нежинского за постановку задачи и полезные обсуждения.

Литература

1. J. A. Calvo, *The embedding space of hexagonal knots.* — Topology and its Applications **112** (2001), 137–174.
2. J. A. Calvo, *Geometric knot spaces and polygonal isotopy.* — J. Knot Theory Ramif. **10** (2001), 245–267.
3. Е. Н. Глушак, *Линейные вложения полных графов с пятью вершинами.* — В кн.: Материалы Всерос. науч.-метод. конф., Великий Новгород, 2004, с. 31–34.

Glushak E. N. Linear embeddings of simple graphs in $\mathbb{R}^3$.

Our problem is to classify for any simple graph all linear embeddings of the graph in $\mathbb{R}^3$ up to rigid isotopy. We solve the problem for graphs with at most five vertices. For graphs with more than five vertices, we give lower and upper bounds for the number of rigid isotopy classes of linear embeddings in $\mathbb{R}^3$.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: elena_n_gl@rambler.ru

Поступило 16 февраля 2007 г.