Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 352, 2008 г.

О. А. Иванов

ТЕОРЕМА ТИХОНОВА—ШАУДЕРА И СУЩЕСТВОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим линейную однородную гиперболическую систему

$$\dot{x} = A(t)x, \ \ x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

с непрерывной матрицей $A(t)$. Для удобства будем сразу предполагать, что

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_+(t) & 0 \\ 0 & A_-(t) \end{pmatrix}$$

Таким образом, фундаментальная матрица данной системы также имеет блочный вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_+(t) & 0 \\ 0 & \Phi_-(t) \end{pmatrix}$$

Условие гиперболичности системы (1) означает (см. [2]), что существуют такие положительные числа a и λ, что

$$\begin{gathered} \left|\Phi_+(t)\Phi_+^{-1}(\tau)\right| \leqslant ae^{-\lambda(t-\tau)} \ \ \text{при} \ \ t \geqslant \tau, \\ \left|\Phi_-(t)\Phi_-^{-1}(\tau)\right| \leqslant ae^{\lambda(t-\tau)} \ \ \text{при} \ \ t \leqslant \tau. \end{gathered} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь возмущенную систему

$$\dot{x} = A(t)x + X(x,t), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

где $X \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Основным результатом этой работы является доказательство следующего утверждения, аннонсированного в [1].

Теорема. *Если система* (1) *гиперболична, то для любого положительного числа ε найдется такое число $\delta > 0$, что для любой непрерывной функции X, удовлетворяющей неравенству $|X(x,t)| \leqslant \delta$ при всех $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:*

а) *система* (3) *имеет решение* $x(t)$, *такое, что* $|x(t)| \leqslant \varepsilon$, *и, более того,*

б) *для всякого ограниченного на всей прямой решения* $x(t)$ *справедлива оценка* $|x(t)| \leqslant \varepsilon$.

Замечание. Стандартным условием, накладываемым на функцию $X(x,t)$, является предположение о том, чтобы она удовлетворяла условию Липшица (см., к примеру, [2]). В данной теореме требуется лишь ее ограниченность.

Систему (3) нам будет удобно записать в виде

$$\begin{cases} \dot y = A_+(t)y + Y(x,t), \\ \dot z = A_-(t)z + Z(x,t). \end{cases} \tag{4}$$

Запишем систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} y(t) = \int_{-\infty}^{t} \Phi_+(t)\Phi_+^{-1}(\tau)Y(x,\tau)\,d\tau, \\ z(t) = -\int_{t}^{+\infty} \Phi_-(t)\Phi_-^{-1}(\tau)Z(x,\tau)\,d\tau. \end{cases} \tag{5}$$

Лемма 1. *Функция* $x(t) = \big(y(t), z(t)\big)$ *является ограниченным решением системы* (3) *дифференциальных уравнений тогда и только тогда, когда она является решением системы* (5) *интегральных уравнений.*

Пусть $|X(x,t)| \leqslant \sigma$ и $x(t)$ – решение системы (5), тогда

$$|y(t)| \leqslant a\sigma \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-\tau)}\,d\tau = \frac{a\sigma}{\lambda},$$

аналогичным образом и $|z(t)| \leqslant \frac{a\sigma}{\lambda}$, откуда

$$|x(t)| \leqslant \frac{2a\sigma}{\lambda}. \tag{6}$$

Теперь предположим, что $x(t) = \big(y(t), z(t)\big)$ является ограниченным решением системы (3), положим для удобства $\varphi(t) = Y\big(x(t),t\big)$ и $\psi(t) = Z\big(x(t),t\big)$. Таким образом, $\big(y(t), z(t)\big)$ – решение линейной неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot y = A_+(t)y + \varphi(t), \\ \dot z = A_-(t)z + \psi(t), \end{cases}$$

которое, как известно, можно записать в виде

$$\begin{cases} y(t) = \Phi_+(t)\Phi_+^{-1}(t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi_+(t)\Phi_+^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \\ z(t) = \Phi_-(t)\Phi_-^{-1}(t_0)z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi_-(t)\Phi_-^{-1}(\tau)\psi(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

Поскольку функция $y(t)$ по предположению является ограниченной, то из первой оценки (2) следует, что $\Phi_+(t)\Phi_+^{-1}(t_0)y(t_0) \to 0$ при $t_0 \to -\infty$. Поэтому, перейдя к пределу при $t_0 \to -\infty$ в первом из равенств, мы и получим, что функция $y(t)$ удовлетворяет первому из уравнений (5). Перейдя к пределу при $t_0 \to +\infty$ во втором из равенств, мы получим, что функция $z(t)$ удовлетворяет второму из уравнений (5).

Введем оператор $\mathcal{U}$, положив

$$(\mathcal{U}x)(t) = \begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{t} \Phi_+(t)\Phi_+^{-1}(\tau)Y(x,\tau)\,d\tau \\ -\int\limits_{t}^{+\infty} \Phi_-(t)\Phi_-^{-1}(\tau)Z(x,\tau)\,d\tau \end{pmatrix} \tag{7}$$

Таким образом, система интегральных уравнений (5) может быть записана в виде

$$\mathcal{U}x = x, \tag{8}$$

что означает, что функция $x(t)$ является неподвижной точкой оператора $\mathcal{U}$.

Доказательство основного результата опирается на следующий классический результат Тихонова–Шаудера (см., к примеру, [3]). *Пусть E – хаусдорфово полное локально выпуклое пространство, B – его замкнутое выпуклое подмножество. Рассмотрим непрерывное отображение $\mathcal{U} : B \to B$, замыкание $\overline{\mathcal{U}(B)}$ образа которого является компактным. Тогда оператор $\mathcal{U}$ имеет в B неподвижную точку.*

Мы будем использовать эту теорему в следующей ситуации.

(i) $E = C(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$ с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах прямой;

(ii) $B = \{x \in E \mid |x(t)| \leqslant r \text{ при всех } t \in \mathbb{R}\}$;

(iii) $\mathcal{U}$ – оператор, определенный формулой (7).

Подлежат проверке только свойства определенного выше оператора $\mathcal{U}$.

Лемма 2. *Предположим, что* $|X(x,t)| \leqslant \sigma$ *при всех* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *и положим* $r = \frac{2a\sigma}{\lambda}$. *Тогда*
(1) $\mathcal{U} : B \to B$;
(2) $\mathcal{U}$ *непрерывен;*
(3) $\overline{\mathcal{U}(B)}$ – *компактное множество.*

Пусть $x(t)$ – непрерывная функция. Тогда функция $\varphi(t) = Y\big(x(t),t\big)$ также непрерывна и $|\varphi(t)| \leqslant \sigma$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Сходимость интеграла $y(t) = \int_{-\infty}^{t} \Phi_+(t)\Phi_+^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$ следует из оценки (2), при этом, как было отмечено выше, $|y(t)| \leqslant \frac{a\sigma}{\lambda}$. Убедимся, что функция $y(t)$ непрерывна.

Пусть n – некоторое натуральное число, $t_1, t_2 \in [-n; n]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. В следующих оценках участвует число $T \leqslant -n$, которое будет выбрано далее. Имеем,

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leqslant \left| \int_{-\infty}^{T} \Phi_+(t_1)\Phi_+^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \right| + \left| \int_{-\infty}^{T} \Phi_+(t_2)\Phi_+^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau \right| + \\ + \left| \int_{T}^{t_1} \big(\Phi_+(t_2) - \Phi_+(t_1)\big)\Phi_+^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \right| + \left| \int_{t_1}^{t_2} \Phi_+(t_2)\Phi_+^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau \right|. \tag{9}$$

Оценим первое слагаемое. Имеем,

$$\left| \int_{-\infty}^{T} \Phi_+(t_1)\Phi_+^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \right| \leqslant \\ \leqslant \int_{-\infty}^{T} ae^{-\lambda(t_1-\tau)}\sigma\,d\tau = \frac{a\sigma}{\lambda}e^{\lambda(-t_1+T)} \leqslant \frac{a\sigma}{\lambda}e^{\lambda(n+T)}.$$

Выберем T так, чтобы $\frac{a\sigma}{\lambda}e^{\lambda(n+T)} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Далее, положим

$$c_1 = \max\left\{ \|\Phi_+^{-1}(t)\| \mid t \in [T; n] \right\}, \\ c_2 = \max\left\{ \|\Phi_+(t)\| \mid t \in [-n; n] \right\}.$$

Выберем число α_1 так, чтобы

$$\|\Phi_+(t_2) - \Phi_+(t_1)\| < \frac{\varepsilon}{4c_1\sigma(n-T)} \quad \text{при} \quad |t_1 - t_2| < \alpha_1,$$

что возможно в силу равномерной непрерывности $\Phi_+(t)$ на отрезке $[-n;n]$. Выберем α_2 так, чтобы $\alpha_2 < \frac{\varepsilon}{4\sigma c_1 c_2}$ и положим $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Пусть $|t_1 - t_2| < \alpha$. Третье слагаемое в правой части неравенства (9) не превосходит

$$\int\limits_T^{t_1} \left\|\Phi_+(t_2) - \Phi_+(t_1)\right\| \left\|\Phi_+^{-1}(\tau)\right\| |\varphi(\tau)|\, d\tau < \int\limits_T^{t_1} \frac{\varepsilon}{4\sigma c_1(n-T)} \cdot c_1 \cdot \sigma\, d\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Наконец, последнее слагаемое не превосходит

$$|t_1 - t_2| c_1 c_2 \sigma \leqslant \alpha_2 c_1 c_2 \sigma < \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Таким образом доказано, что $|y(t_1) - y(t_2)| < \varepsilon$ при всех $t_1, t_2 \in [-n;n]$, таких, что $|t_1 - t_2| < \alpha$, что и означает непрерывность $y(t)$ на отрезке $[-n;n]$. Непрерывность второй компоненты $z(t) = -\int_t^{+\infty} \Phi_-(t)\Phi_-^{-1}(\tau) Z(x,\tau)\, d\tau$ в определении оператора $\mathcal{U}$ доказывается аналогичным образом. Следовательно $\mathcal{U} : B \to B$.

В действительности, мы доказали больше. Из проведенных оценок следует, что множество функций, входящих в $\mathcal{U}(B)$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным на каждом из отрезков $[-n;n]$, следовательно, в силу стандартной леммы Арцела–Асколи, множество $\mathcal{U}(B)$ относительно компактно в пространстве E, т. е. $\overline{\mathcal{U}(B)}$ – компактное множество.

Для завершения доказательства леммы осталось убедиться, что $\mathcal{U}$ – непрерывный оператор. Пусть $x_1, x_2 \in B$. Оценим первую компоненту разности $(\mathcal{U}x_1)(t) - (\mathcal{U}x_2)(t)$, предполагая, что $t \in [-n;n]$. Ясно, что она не превосходит

$$\left|\int\limits_T^{t} \Phi_+(t)\Phi_+^{-1}(\tau)\left(Y\big(x_1(\tau),\tau\big) - Y\big(x_2(\tau),\tau\big)\right)\, d\tau\right| +$$
$$+\left|\int\limits_{-\infty}^{T} \Phi_+(t)\Phi_+^{-1}(\tau) Y\big(x_1(\tau),\tau\big)\, d\tau\right| + \left|\int\limits_{-\infty}^{T} \Phi_+(t)\Phi_+^{-1}(\tau) Y\big(x_2(\tau),\tau\big)\, d\tau\right|.$$

Выберем T так, чтобы

$$\frac{a\sigma}{\lambda}\, e^{\lambda(T+n)} < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

тогда каждое из двух последних слагаемых в полученной оценке будет меньше $\frac{\varepsilon}{3}$. Потребуем теперь, чтобы разность $x_1(\tau) - x_2(\tau)$ была бы настолько мала при всех $\tau \in [T; n]$, чтобы

$$\left|Y\big(x_1(\tau), \tau\big) - Y\big(x_2(\tau), \tau\big)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3(T+n)c_1c_2},$$

(здесь числа c_1 и c_2 такие же, как и выше). Тогда первое слагаемое также меньше $\frac{\varepsilon}{3}$. Таким образом доказано, что оператор $\mathcal{U}$ является непрерывным.

Литература

1. О. А. Иванов, *Ограниченные решения квазилинейных систем.* — Вестник ЛГУ **22** (1985), с. 99-100.
2. В. А. Плисс, *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.* Наука, М. (1977). 304 с.
3. Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Мир, М. (1970), 720 с.

Ivanov O. A. Tychonoff–Schauder Theorem and the existence of bounded solutions of quasi-linear hyperbolic systems of differential equations.

Tychonoff–Schauder fixed-point theorem is applied to prove the existence of bounded solutions of systems of ordinary differential equations which are C^0-close to linear hyperbolic systems.

С.-Петербургский государственный университет
E-mail: oleg_ivanov2002@mail.ru

Поступило 18 декабря 2007 г.