Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 352, 2008 г.

О. А. Иванов

ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА–КРАСОВСКОГО

1. Интегралы по траекториям

Пусть $f : M \times \mathbb{R} \to M$ – динамическая система на компактном метрическом пространстве M, $G : M \to \mathbb{R}$ – некоторая непрерывная функция. Положим $l(p,\tau) = \int_0^\tau G(f(p,t))\,dt$, где $p \in M$ и $\tau \in \mathbb{R}$. Ясно, что $l \in C(M \times \mathbb{R})$ и справедливо равенство $l(p,\tau+\tau_1) = l(p,\tau) + l\big(f(p,\tau),\tau_1\big)$.

Все дальнейшие рассуждения проводятся при следующем основном предположении:
для любой точки $p \in M$ функция $l(p, .)$ не является ограниченной сверху на $\mathbb{R}$.

Сформулируем и докажем несколько несложных лемм.

Лемма 1. *Предположим, что последовательность точек $p_n \in M$ стремится к точке $p \in M$, а последовательность чисел τ_n стремится к бесконечности. Если $l(p_n,\tau) \leqslant c$ при всех $\tau \in [0;\tau_n]$, то $l(p,\tau) \leqslant c$ при всех $\tau \geqslant 0$.*

Фиксируем произвольные числа $\varepsilon > 0$ и $\tau_0 > 0$. Выберем натуральное число k так, чтобы $\tau_n > \tau_0$ при всех $n \geqslant k$. Поскольку $p_n \to p$ и функция l непрерывна, то найдется натуральное число $m > k$, такое, что $l(p,\tau) - l(p_m,\tau) < \varepsilon$ при всех $\tau \in [0;\tau_0]$. Таким образом, $l(p,\tau) < \varepsilon + l(p_m,\tau) \leqslant c + \varepsilon$ при всех $\tau \in [0;\tau_0]$. В силу произвольности ε получаем, что $l(p,\tau) \leqslant c$ при всех $\tau \in [0;\tau_0]$, откуда, в силу произвольности τ_0, и вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. *Предположим, что для некоторой точки $p \in M$ значения $l(p,\tau)$ ограничены сверху при всех $\tau \geqslant 0$. Тогда $l(p,\tau) \to -\infty$ при $\tau \to +\infty$.*

Пусть $l(p,\tau) \leqslant c_1$ при всех $\tau \geqslant 0$. Предположим, что найдется последовательность чисел $\tau_n \to +\infty$, такая, что $l(p,\tau_n) \geqslant -c_2$.

В силу компактности пространства M мы вправе предполагать, что $p_n = f(p, \tau_n) \to p_*$. Тогда $l(p_n, \tau) = l(p, \tau_n + \tau) - l(p, \tau_n) \leqslant c_1 + c_2$ при всех $\tau \geqslant -\tau_n$. Из аналога леммы 1 для последовательностей, стремящихся к $-\infty$, следует, что $l(p_*, \tau) \leqslant c_1 + c_2$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$, что противоречит основному предположению.

Следующее утверждение является усилением предыдущей леммы.

Лемма 3. *Предположим, что для некоторой точки $p \in M$ значения $l(p, \tau_n) \leqslant c$ для некоторой последовательности $\tau_n \to +\infty$. Тогда $l(p, \tau) \to -\infty$ при $\tau \to +\infty$.*

В силу леммы 2 достаточно доказать, что функция $l(p, \,.\,)$ ограничена сверху на $\mathbb{R}_+$. Предположим противное и положим

$$l(p, \nu_n) = \max\{l(p, \tau) \mid \tau \in [0; \tau_n]\}.$$

Таким образом, $l(p, \tau) \leqslant l(p, \nu_n)$ при всех $\tau \in [0; \tau_n]$. При этом последовательность $l(p, \nu_n)$ монотонно стремится к $+\infty$, в частности, $\nu_n \to \infty$. Положим $p_n = f(p, \nu_n)$. Будем считать, что $p_n \to p_*$. Имеем, $l(p_n, \tau_n - \nu_n) = l(p, \tau_n) - l(p, \nu_n) \to -\infty$, откуда, в силу непрерывности функции l, следует, что $\tau_n - \nu_n \to +\infty$. Если $\tau \in [-\nu_n; \tau_n - \nu_n]$, то в силу выбора числа ν_n справедливо неравенство $l(p_n, \tau) = l(p, \nu_n + \tau) - l(p, \nu_n) \leqslant 0$, так как $\nu_n + \tau \in [0; \tau]$. Тогда, в силу леммы 1, $l(p_*, \tau) \leqslant 0$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$, что противоречит основному предположению.

Следствие 1. *Пусть K – некоторое замкнутое подмножество пространства M. Предположим, что существует число c, такое, что для каждой точки $p \in K$ найдется такое число $\tau(p)$, что $l\big(p, \tau(p)\big) \leqslant c$. Тогда существует число C, такое, что $l(p, \tau) \leqslant C$ для каждой точки $p \in K$ и любого $\tau \in [0; \tau(p)]$.*

Положим $l(p, \nu(p)) = \max\{l(p, \tau) \mid \tau \in [0; \tau(p)]\}$. Если утверждение неверно, то найдется последовательность q_n, такая, что $l\big(q_n, \nu(q_n)\big) \to +\infty$. Положим $p_n = f\big(q_n, \nu(q_n)\big)$. Дальнейшее рассуждение проходит так же, как в доказательстве леммы 3.

Следствие 2. *Если для точки $p \in M$ найдется последовательность $\tau_n \to +\infty$ ($\tau_n \to -\infty$), такая, что $l(p, \tau_n) \to +\infty$, то $l(p, \tau) \to +\infty$ при $\tau \to +\infty$ (соответственно, при $\tau \to -\infty$).*

2. Разбиение фазового пространства

Рассмотрим множества

$$M_+ = \{p \in M \mid l(p,\tau) \to +\infty \quad \text{при} \quad \tau \to +\infty \\ \text{и} \quad l(p,\tau) \to -\infty \quad \text{при} \quad \tau \to -\infty\},$$

$$M_- = \{p \in M \mid l(p,\tau) \to -\infty \quad \text{при} \quad \tau \to +\infty \\ \text{и} \quad l(p,\tau) \to +\infty \quad \text{при} \quad \tau \to -\infty\}$$

и

$$M_0 = \{p \in M \mid l(p,\tau) \to +\infty \quad \text{при} \quad \tau \to \pm\infty\}.$$

Лемма 4. *Множества M_+, M_- и M_0 образуют разбиение пространства M и инвариантны относительно динамической системы, при этом множества M_+ и M_- являются замкнутыми.*

То, что $M = M_+ \cup M_- \cup M_0$, является следствием леммы 3. Инвариантность этих множеств очевидна. Докажем замкнутость множества M_-. Пусть $p_n \in M_-$ и $p_n \to p$. Достаточно показать, что $l(p,\tau) \to -\infty$ при $\tau \to +\infty$, а в силу леммы 2 достаточно показать, что найдется число c, такое, что $l(p,\tau) \leqslant c$ при всех $\tau \geqslant 0$. Так как $p_n \in M_-$, то найдется последовательность $\tau_n \to +\infty$, такая, что $l(p_n,\tau_n) \leqslant 1$. В силу следствия леммы 3, найдется число c, такое, что $l(p_n,\tau) \leqslant c$ при всех $\tau \in [0;\tau_n]$. Значит, в силу леммы 1, $l(p,\tau) \leqslant c$ при всех $\tau \geqslant 0$.

Лемма 5. *Пусть $p \in M_0$. Тогда $\rho\big(f(p,\tau), M_+\big) \to 0$ при $\tau \to +\infty$ и $\rho\big(f(p,\tau), M_-\big) \to 0$ при $\tau \to -\infty$.*

Пусть $p \in M_0$ и предположим, что существует последовательность $\tau_n \to +\infty$, такая, что $p_n = f(p,\tau_n) \to p_* \in M_0 \cup M_-$. Однако $l(p_n,-\tau_n) = -l(p_n,\tau_n) \to -\infty$, в частности, $l(p_n,-\tau_n) \leqslant c$ для некоторой константы c. В силу следствия леммы 3, $l(p_n,\tau) \leqslant c$ при всех $\tau \in [-\tau_n;0]$. Значит, в силу леммы 2, $l(p_*,\tau) \to -\infty$ при $\tau \to -\infty$ – противоречие.

Лемма 6. *Для всякой окрестности U множества M_- найдется такое число τ_U, что $l(p,\tau_U) \geqslant 1$ при всех $p \in M \setminus U$.*

Если предположить противное, то найдутся последовательности $\tau_n \to +\infty$ и $p_n \in M \setminus U$, такие, что $l(p_n,\tau_n) < 1$. Считая, что $p_n \to p_*$, и повторяя рассуждение из доказательства предыдущей леммы, получим, что $l(p_*,\tau) \leqslant c$ при всех $\tau \geqslant 0$, что невозможно, так как $p_* \notin M_-$.

Следствие. *Для всякой точки $p \notin M_-$ найдутся такие числа $k > 0$ и b, что $l(p,\tau) \geqslant k\tau + b$ при всех $\tau \geqslant 0$.*

Выберем окрестность U множества M_- так, чтобы она не пересекалась с положительной полутраекторией точки p, $f(p,\tau) \notin U$ при всех $\tau \geqslant 0$. Положим $\tau_0 = \tau_U$. Представим произвольное число $\tau \geqslant 0$ в виде $\tau = a\tau_0 + r$, где $a \in \mathbb{Z}$ и $r \in [0;\tau_0)$. Пусть $g = \max\{\,|G(p)| \mid p \in M\}$. Тогда

$$l(p,\tau) \geqslant a + l\big(f(p,a\tau_0),r\big) = \frac{\tau - r}{\tau_0} + l\big(f(p,a\tau_0),r\big) \geqslant \frac{\tau}{\tau_0} - (1 + g\tau_0).$$

Таким образом, мы можем взять $k = \frac{1}{\tau_0}$ и $b = -(1 + g\tau_0)$.

Как обычно, через Ω будем обозначать неблуждающее множество рассматриваемой динамической системы на пространстве M.

Лемма 7. *$\Omega \subset M_+ \cup M_-$.*

Предположим, что точка $p \notin M_+ \cup M_-$ и является неблуждающей. Выберем окрестность U множества M_+ так, чтобы ее замыкание не пересекалось с множеством M_- и отрицательной полутраекторией точки p. Поскольку $p \in \Omega$, то найдутся последовательность $\tau_n \to +\infty$ и последовательность точек $p_n \to p$, такие, что $f(p_n,\tau_n) \to p$. Обозначим через q_n последнюю точку выхода отрезка траектории $f(p_n,\tau)$ при $\tau \in [0;\tau_n]$ из окрестности U и будем считать, что $q_n \to q$. Введем числа ν_n посредством равенства $f(q_n,\nu_n) = f(p_n,\tau_n)$. По построению $f(q_n,\tau) \notin U$ при всех $\tau \in [0;\nu_n]$, поэтому, если $\nu_n \to +\infty$, то $f(q,\tau) \notin U$ при всех $\tau \geqslant 0$. Однако $q \notin M_-$, что противоречит лемме 4. Если же последовательность $\{\nu_n\}$ является ограниченной, то, выбрав из нее сходящуюся подпоследовательность, мы получим, что $p = f(q,\nu_0)$, что противоречит выбору окрестности U.

Следствие 1. *Множество M_+ является асимптотически устойчивым с областью притяжения $M \setminus M_-$ и, более того, равномерно асимптотически устойчивым на любом компакте $K \subset M \setminus M_-$. При $\tau \to -\infty$ аналогичное утверждение верно для множества M_-.*

Следствие 2. *Для любой окрестности U множества M_- найдутся числа $k > 0$ и b, такие, что*

$$l(p,\tau) \geqslant k\tau + b \quad \text{при всех} \quad \tau \geqslant 0 \quad \text{и} \quad p \notin U. \tag{1}$$

Как обычно, через $\dfrac{dh}{d\tau}$ будем обозначать производную функции $h : M \to \mathbb{R}$ в силу данной динамической системы, т. е.

$$\frac{dh}{d\tau}(p) = \frac{d}{d\tau}\big(h(f(p,\tau))\big)|_{\tau=0}.$$

Следствие 3. *Существует функция $h \in C(M)$, постоянная на множествах M_+ и M_-, такая, что $\frac{dh}{d\tau}(p) > 0$ при всех $p \notin M_+ \cup M_-$.*

Утверждение этого следствия следует из Предложения 2 работы [3].

3. Линейное уравнение первого порядка "в силу" динамической системы и существование однородной функции Ляпунова–Красовского

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dv}{d\tau} + \alpha G\, v = \eta, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$, $\eta : M \to \mathbb{R}$ – некоторая непрерывная функция, а G – та самая функция, об интегралах от которой шла речь в предыдущих разделах.

Теорема 1. *Для всякого числа $\alpha > 0$ и функции $\eta \in C(M)$ существует функция v, являющаяся решением уравнения (2), причем значения функции v на множествах M_+ и M_- определены однозначно.*

Фиксируем функцию h, производная которой в силу данной системы положительна на дополнении объединения $M_+ \cup M_-$, при этом

$$h(p) = \begin{cases} 1, & \text{при всех } p \in M_+, \\ -1, & \text{при всех } p \in M_-. \end{cases}$$

Рассмотрим точку $p \notin M_+ \cup M_-$ и обозначим через $\tau(p)$ решение уравнения $h\big(f(p,\tau)\big) = 0$ (ясно, что оно существует и единственно). Положим формально

$$\tau(p) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } p \in M_+, \\ +\infty, & \text{если } p \in M_-. \end{cases}$$

и определим функцию v по формуле

$$v(p) = \int\limits_{\tau(p)}^{0} \exp\left(-\alpha \int\limits_{\tau}^{0} G\big(f(p,\nu)\big)\,d\nu\right) \eta\big(f(p,\tau)\big)\,d\tau \tag{3}$$

Сходимость интеграла в случае, когда $p \in M_+$ или $p \in M_-$ вытекает из оценки (1). Непрерывность следует из стандартных теорем анализа о предельном переходе при наличии мажоранты подинтегральных функций. То, что v – искомое решение, проверяется непосредственно.

Рассмотрим теперь "гладкий случай".

Теорема 2. *Пусть M – гладкое замкнутое многообразие, а динамическая система на M задана C^1-гладким векторным полем F. Тогда, если число α достаточно велико, то функция v, определенная формулой (3), является C^1-гладкой.*

Из естественного усиления Предложения 5 работы [3] следует, что функция $p \mapsto \tau(p)$ – гладкая. Продифференцировав равенство (3) формально по p, мы получим, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\partial \tau(p)}{\partial p} \cdot \exp\left(-\alpha \int\limits_{\tau(p)}^{0} G\big(f(p,\nu)\big)\,d\nu\right) \cdot \eta\big(f(p,\tau(p))\big) - \\
- \alpha \int\limits_{\tau(p)}^{0} \exp\left(-\alpha \int\limits_{\tau(p)}^{0} G\big(f(p,\nu)\big)\,d\nu\right) \cdot \\
\cdot \left(\int\limits_{\tau}^{0} \frac{\partial G}{\partial p}\big(f(p,\nu)\big)\,\frac{\partial f}{\partial p}(p,\nu)\,d\nu \cdot \eta\big(f(p,\tau)\big) + \right. \\
\left. + \int\limits_{\tau}^{0} G\big(f(p,\nu)\big)\frac{\partial \eta}{\partial p}\big(f(p,\nu)\big)\frac{\partial f}{\partial p}(p,\nu)\,d\nu\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

Основным для дальнейшего является неравенство

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial p}(p,\tau) \right\| \leqslant a \cdot \exp(l\tau) \tag{5}$$

для некоторых положительных констант a и l, справедливость которого следует из того, что матрица $\frac{\partial f}{\partial p}$ является фундаментальным решением соответствующего уравнения в вариациях. Осталось выбрать число α настолько большим, чтобы $\alpha k_{\pm} > l$, где k_+ – определено как в следствии к лемме 7 для окрестности $h^{-1}(-\infty; 0)$ множества M_-, k_- определено аналогичным образом для окрестности $h^{-1}(0; +\infty)$ множества M_+.

В качестве простого применения этой теоремы получаем существование гладкой однородной функции Ляпунова–Красовского для однородной системы (со степенью однородности $m > 1$)

$$\frac{dx}{dt} = P(x)$$

в $\mathbb{R}^n$, не имеющей нетривиальных ограниченных решений. Как обычно, перейдем к системе в координатах $(r, p) \in \mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = rG(p), \\ \frac{dp}{d\tau} = F(p), \end{cases}$$

в которой переменная τ связана с t посредством дифференциального уравнения $\frac{d\tau}{dt} = r^{m-1}$. Функцию Ляпунова–Красовского будем искать в виде

$$V(x) = r^{\alpha} v(p).$$

Имеем,

$$\frac{dV}{dt} = r^{\alpha+m-1}\left(\frac{dv}{d\tau} + \alpha G v\right),$$

здесь $\frac{dv}{d\tau}$ – производная в силу системы на S^{n-1}, задаваемой векторным полем $F(p)$. Заметим, что условие отсутствия ненулевых ограниченных решений исходной однородной системы как раз и означает, что интегралы $\int\limits_0^{\tau} G\bigl(f(p,\nu)\bigr)\,d\nu$ не ограничены сверху. Осталось применить теорему 2, взяв в качестве η произвольную положительную на S^{n-1} функцию. Заметим в заключение, что в работе [2] взято $\eta \equiv 1$.

Литература

1. О. А. Иванов, *Линейные уравнения "в силу" динамической системы. Современные методы в теории краевых задач.* — Понтрягинские чтения XII (тезисы докладов). Воронеж, ВГУ (2001). 79–80.

2. А. Я. Каневский, Л. Э. Рейзинь, *Построение однородных функций Ляпунова–Красовского.* — Дифф. уравн. (1973), вып. 2, 251–259.
3. Н. Н. Ладис, *Энергетические функции для некоторых динамических систем.* — Дифф. уравн. (1972), вып. 5, 790–795.

Ivanov O. A. Integrals along trajectories of a dynamic system and the existence of homogeneous Lyapunoff–Krasovskij functions.

Linear equations with respect to a dynamic system on a metric space are considered. A new proof of the existence of homogeneous Lyapunoff–Krasovskij functions for a homogeneous system in the Euclid space is given.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: oleg_ivanov2002@mail.ru

Поступило 29 января 2008 г.