Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 352, 2008 г.

А. А. Иванов

СЛАБО МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие слабо метрического пространство было введено в моей статье “Неподвижные точки отображений метрических пространств” в кн.: “Исследования по топологии II”. Зап. научн. семин. ЛОМИ, т. 66 (1976) стр. 5–102. Ему было посвящено там всего две неполных страницы (27–28), содержащие формулировку самого понятия и доказательство аналога теоремы Банаха о неподвижных точках сжимающих отображений. Этот результат не был использован другими исследователями, во всяком случае мне неизвестны ссылки на него. Возможно это связано с определенными трудностями применения слабых метрик, не допускающих прямых оценок расстояний. Я неоднократно кратко упоминал о слабо метрических пространствах на различных конференциях, последний раз на Международной конференции по топологии и ее приложениям (Aegion, Greece, 2006). Настоящая статья посвящена изложению некоторых сведений относящихся к теории слабо метрических пространств.

1. Слабо метрические пространства отличаются от метрических пространств тем, что аксиома треугольника заменена следующей более слабой аксиомой:
для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что для любых точек x, y и z справедлива импликация

$$d(y, z) \leq \delta \Longrightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + \varepsilon.$$

Это действительно ослабление аксиомы треугольника, так как при выполнении аксиомы треугольника $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ в качестве δ можно взять само ε.

Простым примером слабо метрического пространства является единичный отрезок $[0; 1]$, в котором расстояние определено формулой $d(x, y) = (x - y)^2$ для любых точек x, y этого отрезка. Это действительно слабо метрическое пространство, так как для точек x, y и z этого отрезка достаточно рассмотреть случай, когда $x \le y \le z$, а в этом случае

$$d(x,z) = (z-x)^2 = (z-y+y-x)^2 = (z-y)^2 + 2(z-y)(y-x) + \\ +(y-x)^2 \le (y-x)^2 + (z-y)^2 + 2(z-y) \le d(x,y) + 3(z-y).$$

Для $\delta = \frac{\varepsilon^2}{9}$ и $d(y,z) \le \delta$ получаем требуемое неравенство слабой метрики.

При переносе формулировок различных метрических теорем на слабо метрические пространства обычно каких-либо трудностей не возникает, однако метрические доказательства их обычно не проходят, в связи с чем приходится искать другие доказательства. В качестве примера приведем доказательство теоремы Банаха о неподвижных точках сжимающих отображений. Теорема формулируется одинаково как в метрическом, так и в слабо метрическом варианте, а именно:

Пусть (X,d) – полное (слабо) метрическое пространство и $T : X \longrightarrow X$ – сжимающее отображение, то есть $d(Tx,Ty) \le a\,d(x,y)$ для некоторого неотрицательного числа $a < 1$ и любых $x, y \in X$. Тогда существует единственная неподвижная точка отображения T, причем к ней сходится итеративная последовательность $\{T^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ любой точки $x \in X$.

Как в метрическом, так и в слабо метрическом случае, основным является доказательство того, что для любой точки $x \in X$ последовательность $\{T^n x\}$ является фундаментальной, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $p \in \mathbb{N}$, что $d(T^m x, T^n x) \le \varepsilon$ для любых $m > p$ и $n > p$. В метрическом случае дело сводится к непосредственной оценке расстояния $d(T^m x, T^n x)$. Применив достаточное количество раз аксиому треугольника мы можем получить для $m < n$ неравенство

$$d(T^m x, T^n x) \le d(T^m x, T^{m+1} x) + \ldots + d(T^{n-1} x, T^n x)$$

откуда, применяя нужное количество раз условие сжатия, получаем

$$d(T^m x, T^n x) \le (a^m + \ldots + a^{n-1}) d(x, Tx) = \\ = a^m \frac{1 - a^{n-m}}{1-a} d(x,Tx) \le a^m \frac{1}{1-a} d(x,Tx)$$

Оценка $a^m \frac{1}{1-a} d(x,Tx)$ зависит только от m, так как числа a и $d(x,Tx)$ фиксированы. Сомножитель a^m сколь угодно мал для достаточно большого m, поэтому для произвольно фиксированного ε и достаточно большого p эта оценка меньше ε, если $n > m > p$.

Тем самым доказано, что для любой точки $x \in X$ последовательность $\{T^n x\}$ фундаментальна. Так как (X, d) полное метрическое пространство, то эта последовательность сходится к некоторой точке x_0, Из условия сжатия следует непрерывность отображения T, переводящего итеративную последовательность в свою часть, поэтому

$$Tx_0 = T(\lim T^n x) = \lim T^{n+1} x = x_0.$$

Единственность неподвижной точки также следует из условия сжатия.

Для слабо метрических пространств это доказательство не проходит, так как в нем существенно используется аксиома треугольника, поэтому приходится искать другое доказательство, не использующее аксиому треугольника. Такое доказательство и было приведено в указанной выше статье.

Для произвольной точки $x \in X$ рассмотрим двойной предел $\lim d(T^m x, T^n x)$ по m и n стремящимся к бесконечности. Так как $\lim d(T^m x, T^{m+1} x) = 0$, то этот предел либо не существует либо равен нулю. Докажем, что первый случай невозможен. Действительно, в этом случае должно существовать число $r > 0$ и сколь угодно большие числа m и $n > m$, для которых

$$d(T^m x, T^n x) > r$$

Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $1 - \frac{2\varepsilon}{r} > a$. Тогда в силу ослабленной аксиомы треугольника найдется такое δ, что

$$d(y, z) < \delta \Longrightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + \varepsilon$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$ таково, что

$$m > p \Longrightarrow d(T^m x, T^{m+1} x) < \delta.$$

Тогда

$$ad(T^m x, T^n x) \geq d(T^{m+1} x, T^{n+1} x) \geq d(T^m x, T^n x) - 2\varepsilon,$$

откуда для упомянутых выше $n > m > p$ имеем

$$a \geq 1 - \frac{2\varepsilon}{d(T^m x, T^n x)} \geq 1 - \frac{2\varepsilon}{r},$$

что противоречит выбору числа ε. Тем самым доказано, что $\{T^n x\}$ является фундаментальной последовательностью для любой точки $x \in X$. Дальнейшие рассуждения такие же, как в метрическом случае.

2. Рассмотренный пример показывает, что замену аксиомы треугольника более слабым условием можно компенсировать усложнением доказательства. Однако в принципе возможен и другой подход. В некоторых случаях можно без нарушения общности заменить исходную слабую метрику на метрику с аксиомой треугольника. Более того можно начинать просто с неотрицательной вещественной функции d на $X \times X$, обращающейся в ноль на диагонали $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Для каждой пары x, y точек из X можно рассматривать *цепи* $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ в X, *соединяющие* x с y. *Длиной* такой цепи назовем сумму $l(x_0, \ldots, x_n) = \Sigma d(x_i, x_{i+1})$. Введем новую функцию d_{ch} равную точной нижней границе длин всех цепей, соединяющих точки x и y. Так как цепи, соединяющие x с y и y с z, образуют вместе цепь, соединяющую x с z, то $d_{ch}(x, z) \leq d_{ch}(x, y) + d_{ch}(y, z)$, то есть для d_{ch} аксиома треугольника выполняется. Более того, если отображение $T : X \longrightarrow X$ является сжимающим отображением относительно метрики d, то оно будет сжимающим относительно метрики d_{ch} с тем же коэффициентом сжатия a. Это следует из того, что

$$\Sigma d(Tx_i, T_{i+1}) \leq a \Sigma d(x_i, x_{i+1})$$

Однако может случиться так, что $d_{ch} \equiv 0$. Пусть например $X = [0; 1]$, $d(x, y) = (x - y)^2$, d – функция на единичном квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$. Рассмотрим цепь $0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$, соединяющую 0 с 1. Ее длина равна $\frac{1}{n}$ и следовательно $d_{ch}(0, 1) = 0$. Тем более $d_{ch}(x, y) = 0$ для остальных точек x и y.

Таким образом переход от слабой метрики d к метрике d_{ch} не всегда приводит к цели, так как в общем случае топологические структуры на X, определяемые этими метриками, не совпадают. С другой стороны, переход от слабой метрики d на X к функции $d' = \frac{d}{1+d}$ на $X \times X$ дает нам снова слабую метрику на X, причем d и $\frac{d}{1+d}$ определяют одну и ту же топологическую структуру на X. Действительно, переход от d к d' является строго возрастающей функцией для $d \geq 0$. Полагая $\delta' = \frac{\delta}{1+\delta}$ и $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ мы получаем эквивалентности

$$d(y,z) \le \delta \Longleftrightarrow d'(x,y) \le \delta'$$
$$d(x,y) + \varepsilon \ge d(x,z) \Longleftrightarrow d'(x,y) + \varepsilon' \ge d'(x,z)$$
$$d(x,y) \le \varepsilon \Longleftrightarrow d'(x,y) \le \varepsilon'$$

Из двух первых эквивалентностей следует одновременное выполнение слабой аксиомы треугольника для d и d', последняя эквивалентность обеспечивает совпадение топологических структур определенных расстояниями d и d'.

3. Слабые метрики d и $d' = \frac{d}{1+d}$ определяют одну и ту же топологическую структуру. С другой стороны слабая метрика d и метрика d_{ch} определяют в общем случае различные топологические структуры. Естественно возникает проблема о возможности перехода от слабой метрики к метрике, определяющей ту же топологическую структуру. Эту проблему можно сформулировать следующим образом.

Пусть (X,τ) – пространство, топологическая структура которого определена некоторой слабой метрикой. Будет ли это топологическое пространство метризуемо? Заметим, что применение известных мне критериев метризуемости существенно использует аксиому треугольника! Эта аксиома использется даже при доказательстве паракомпактности метрических пространств. Если слабо метрическое пространство оказывается метризуемым, то это не означает, что исходная слабая метрика бесполезна. Надо еще найти эту самую метрику, а связь ее с исходной слабой метрикой может оказаться слишком сложной. Кроме того надо найти “достаточно хорошую” метрику. Например, если мы пользуемся принципом сжимающих отображений, то рассматриваемое отображение должно быть сжимающим относительно метрики (это условие выполняется при переходе от слабой метрики d к метрике d_{ch}).

4. В теории слабо метрических пространств, как и в теории метрических пространств, можно рассматривать различные операции над слабыми метриками. При этом совокупность операций над слабыми метриками шире, чем совокупность операций над метриками. Так для ограниченной метрики d функция d^2, как показывает пример пункта 2, уже не является метрикой. Легко доказывается, что для любых слабых метрик d_1 и d_2 на произвольном множестве их сумма также является слабой метрикой, что произведение слабой метрики на положительное число является слабой метрикой (это верно и для метрик). Иначе обстоит дело с произведениями слабых метрик. Во-первых, необходимо условие ограниченности перемножаемых слабых метрик и, во-вторых, приходится рассматривать так называемые *сравнимые слабые метрики*. Две метрики d_1 и d_2 на некотором множестве X называются сравнимыми, если найдутся такие числа C_1, C_2 что для любых несовпадающих точек $x, y \in X$ имеют место соотношения

$$0 < d_1(x,y) \leq C_2 d_2(x,y) \quad \text{и} \quad 0 < d_2(x,y) \leq C_1 d_1(x,y)$$

Нетрудно заметить, что сравнимые слабые метрики определяют одну и ту же топологическую структуру.

Можно доказать, что произведение двух ограниченных, сравнимых слабых метрик на произвольном множестве является слабой метрикой (это неверно для метрик!). Действительно, пусть d_1 и d_2 – слабые метрики с расстояниями, ограниченными числами D_1, D_2, соответственно. Без нарушения общности можно считать, что $D_1 = D_2 = D$. Заметим прежде всего, что если $d_1(y,z)d_2(y,z) \leq \delta$, то, как легко вычислить,

$$d_1(y,z) \leq \sqrt{C_2\delta} = \delta_1 \quad \text{и} \quad d_2(y,z) \leq \sqrt{C_1\delta} = \delta_2.$$

Пусть ε – произвольное положительное число. Так как d_1 и d_2 – слабые метрики, найдется такое δ, что для любых точек x, y, z из X имеют место импликации

$$d_1(y,z) \leq \delta_1 \Longrightarrow d_1(x,z) \leq d_1(x,y) + \frac{\varepsilon}{2D+1}$$
$$d_2(y,z) \leq \delta_2 \Longrightarrow d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + \frac{\varepsilon}{2D+1}$$

Тогда

$$\begin{aligned} d_1(y,z), d_2(y,z) \leq \delta \Longrightarrow d_1(x,z)d_2(x,z) \leq \\ \leq (d_1(x,y) + \frac{\varepsilon}{2D+1})(d_2(x,y) + \frac{\varepsilon}{2D+1}) \leq \\ \leq d_1(x,y)d_2(x,y) + (d_1(x,y) + d_2(x,y))\frac{\varepsilon}{2D+1} + \frac{\varepsilon^2}{(2D+1)^2} \leq \\ \leq d_1(x,y)d_2(x,y) + 2D\frac{\varepsilon}{2D+1} + \frac{\varepsilon}{2D+1} \end{aligned}$$

и поэтому
$$d_1(x,z)d_2(x,z) \le d_1(x,y)d_2(x,y) + \varepsilon$$

5. Любая метрика d на некотором множестве X определяет на нем соответствующую топологическую структуру τ. Пусть PX – множество всех d-ограниченных τ-замкнутых множеств. Известно, что на PX определена так называемая *метрика Хаусдорфа* Hd, для которой $Hd(A,C) = \max\{\sup d(x,C), \sup d(A,y) \mid x \in A, y \in C\}$. Эту конструкцию можно перенести на слабо метрические пространства. Покажем, что в этой ситуации Hd является слабой метрикой, то есть выполняется слабая аксиома треугольника. Пусть A, B и C – произвольные d-ограниченные τ-замкнутые множества. Так как в отличие от аксиомы треугольника слабая аксиома треугольника не симметрична относительно крайних точек, мы рассмотрим два случая $Hd(A,C) = \sup\{d(x,C) \mid x \in A\}$ и $Hd(A,C) = \sup\{d(A,z) \mid z \in C\}$. В обоих случаях для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $x \in A$ и такая точка $z \in C$, что $Hd(A,C) - d(x,z) < \frac{\varepsilon}{2}$, С другой стороны, так как d – слабая метрика, найдется такое $\delta > 0$, что $d(y,z) < \delta \Longrightarrow d(x,z) \le d(x,y) + \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть теперь $Hd(B,C) < \delta$. Тогда в δ-окрестности точки z найдется точка $y \in B$ и поэтому $d(x,z) \le d(x,y) + \frac{\varepsilon}{2}$. Докажем теперь, что в обоих отмеченных выше случаях $d(x,y) \le Hd(A,B)$ для достаточно малых δ. Действительно, в первом случае $x \notin C$ и $x \notin B$ для достаточно малого δ, поэтому $d(x,y) \le Hd(A,B)$. Во втором случае $z \notin A$ и $y \notin A$ для достаточно малого δ, поэтому опять $d(x,y) \le Hd(A,B)$.

Таким образом
$$Hd((A,C) - \frac{\varepsilon}{2} \le d(x,z) \le d(x,y) + \frac{\varepsilon}{2} \le Hd(A,B) + \frac{\varepsilon}{2},$$
откуда следует, что
$$Hd(A,C) \le Hd(A,B) + \varepsilon.$$

6. Метрическое пространство называется полным, если любая его фундаментальная последовательность сходится. Известно, что любое метрическое пространство можно пополнить, расширить, если оно не полно, до полного метрического пространства. Для слабо метрических пространств имеет место такая же ситуация. При доказательстве этого мы будем пользоваться не фундаментальными последовательностями, как обычно, а более подходящими для этого замкнутыми кофильтрами. Напомним, что

замкнутым кофильтром в пространств X называют такую систему γ замкнутых множеств, что
1. $X \in \gamma$,
2. $F \bigcup F' \in \gamma \Longleftrightarrow F \in \gamma$ или $F' \in \gamma$.

Нам понадобятся кофильтры, являющиеся максимальными системами смежности, определенными слабой метрикой d на X (системами d-смежности). Систему $F_1, \ldots, F_n$ замкнутых множеств назовем системой d-смежности, если для любого $\delta > 0$ найдется пересекающееся с ними множество диаметра меньше, чем δ. Произвольную, не обязательно конечную, систему γ назовем системой d-смежности, если любая ее конечная подсистема является системой d-смежности. Особый интерес представляют максимальные системы d-смежности. Для таких систем справедливо следующее утверждение.

Система d-смежности γ максимальна тогда и только тогда, когда из того, что для некоторого $F \subset X$ и любых $F_1, \ldots, F_n$ из γ система $F_1, \ldots, F_n, F$ является системой d-смежности, следует, что само $F \in \gamma$. Действительно, пусть γ – максимальная система d-смежности и замкнутое множество F таково, что для любых $F_1, \ldots, F_n$, из γ система $F_1, \ldots, F_n, F$ является системой d-смежности. Тогда и система $\gamma \bigcup \{F\}$ является системой d-смежности и, в силу максимальности γ, множество $F \in \gamma$.

Пусть теперь для некоторой системы d-смежности γ выполняется указанное выше условие. Предположим, что $\gamma \subset \gamma'$, где γ' – некоторая система d-смежности, отличная от γ. Тогда для любого $F \in \gamma' \backslash \gamma$ и любых $F_1, \ldots, F_n$ система $F_1, \ldots, F_n, F$ является системой d-смежности и следовательно $F \in \gamma$. Полученное противоречие доказывает максимальность γ.

В качестве примера максимальной системы d-смежности можно привести любую систему $\gamma(x)$, состоящую из всех замкнутых множеств, содержащих какую-нибудь точку $x \in X$. Это действително система d-смежности, так как $\mathrm{diam}\{x\} = 0$. С доказательством максимальности $\gamma(x)$ дело обстоит сложнее, здесь проявляется специфика слабых метрик. Допустим, что $\gamma(x)$ не максимальна, то есть существует замкнутое множество $F \notin \gamma(x)$ и $\gamma \bigcup \{F\}$ – система d-смежности. В этом случае для любого $\delta > 0$ найдется точка $y \in X$, такая, что δ-окрестность точки y пересекается с x и F, то есть $d(x, y) < \delta$, и в F существует такая точка z, что $d(y, z) < \delta$. В силу основного свойства слабых метрик

$d(x,z) < d(x,y) + \varepsilon < \delta + \varepsilon$ – сколь угодно малое число и потому $x \in F$. Полученное противоречие доказывает максимальность $\gamma(x)$.

Среди всех систем d-смежности выделим теперь так называемые системы с произвольно малыми – это системы, содержащие сколь угодно малые по диаметру элементы. Для нас представляют интерес максимальные системы d-смежности с произвольно малыми. Мы докажем, что слабо метрическое пространство (X,d) является полным пространством, если в нем нет исчезающих (с пустым пересечением элементов) максимальных систем d-смежности с произвольно малыми. Для этого рассмотрим в нем произвольную фундаментальную систему $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и множества F_n, являющиеся замыканиями “хвостов” этой последоваельности, множеств $\{x_k \mid k \geq n\}$. Система $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ является очевидно системой d-смежности с произвольно малыми. Она содержится в некоторой максимальной системе d-смежности с произвольно малыми. По предположению это не исчезающая система, поэтому не пусто и пересечение всех F_n. Пусть $x \in \bigcap\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Докажем, что $x_n \longrightarrow x$, то есть рассматриваемая фундаментальная система сходится к точке x. Выберем любое из множеств F_n, например F_1. Так как $x \in F_1$, то $d(x, \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = 0$ и поэтому в $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ найдется подпоследовательность, сходящаяся к x. Но $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ – фундаментальная последовательность, поэтому и она сама сходится к x.

Опишем теперь процедуру пополнения слабо метрических пространств. Пусть (X,d) не полно, то есть по доказаному выше в нем есть максимальная исчезающая система d-смежности с произвольно малыми. Множество таких систем обозначим через Γ_d. Положим $X' = X \bigcup \Gamma_d$ и продолжим d с X на X'. Придется рассмотреть два случая, а именно $x \in X$, $\Gamma \in \Gamma_d$ и $\gamma_1 \in \Gamma_d, \gamma_2 \in \Gamma_d$, В первом случае положим

$$d'(x,\gamma) = \lim\{d(x,F) \mid F \in \gamma, \operatorname{diam} F \longrightarrow 0\},$$

во втором случае положим

$$d'(\gamma_1,\gamma_2) = \lim\{d(F_1,F_2) \mid F_1 \in \gamma_1, F_2 \in \gamma_2, \\ \operatorname{diam} F_1 \longrightarrow 0, \operatorname{diam} F_2 \longrightarrow 0\}.$$

Нам придется доказать теперь, что это продолжение корректно, то есть, что указанные пределы существуют и определены однозначно, что указанное продолжение является слабой метрикой, что слабо метрическое пространство (X', d') полно.

Доказательство корректности продолжения d на X'.

В соответствии с определением d' надо рассмотреть два случая. В первом случае мы можем считать, что $\operatorname{diam} F < \delta$, где $\delta > 0$ – произвольно малое число. Тогда $|d(x,z) - d(x,y)| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и любых y, z из F. С другой стороны, если F_1, F_2 принадлежат γ, то в силу их d-смежности найдутся сколь угодно близкие точки $z_1 \in F_1$ и $z_2 \in F_2$ и опять $|d(x,z_1) - d(x,y_2)| < \varepsilon$, а для произвольных $z_1 \in F_1$, $z_2 \in F_2$ будем иметь $|d(x,z_1) - d(x,y_2)| < 3\varepsilon$, где ε – произвольно малое число

Доказательство слабой метричности d'.

Надо доказать, что в пространстве $(X\prime, d')$ справедлива импликация

$$d(y', z') \leq \delta' \Longrightarrow d(x', z') \leq d(x', y') + \varepsilon'.$$

Рассматриваемые здесь точки принадлежат или не принадлежат исходному пространству (X, d) – возможны восемь случаев, В каждом из этих случаев мы можем заменить точки x', y', z', не принадлежащие множеству X, сколь угодно d'-близкими к ним точками x, y, z из X. Тем самым мы можем получить последовательность импликаций, доказывающую слабую метричность d', а именно

$$d(y', z') \leq \delta' \Longrightarrow d(y, z) \leq \delta \Longrightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + \varepsilon \leq d(x', y') + \varepsilon'.$$

Доказательство полноты пространства (X', d').

Надо доказать, что любая максимальная система d'-смежности с произвольно малыми имеет непустое пересечение. Пусть γ' такая система и γ – система всех замкнутых в (X, d) множеств, замыкания которых в (X', d') принадлежат γ'. Заметим прежде всего, что γ является системой d-смежности. Это следует из того, что любая система $F_1, \ldots, F_n$ замкнутых в (X, d) множеств является системой d-смежности, если система их замыканий в (X', d') является системой d'-смежности. Затем, применив критерий максимальности систем d-смежности, мы сможем доказать максимальность γ. Действительно, если множество $F \subset X$ образует с каждой конечной системой из γ систему d-смежности, то ее d'-замыкание образует с каждой конечной системой из γ' систему d'-смежности и потому принадлежит γ', откуда следует, что F принадлежит γ. Из того, что γ' – система с произвольно малыми непосредственно следует, что и γ – система с произвольно малыми. Наконец, γ – исчезающая система, так как γ' – исчезающая система, а ее элементы являются пересечениями замыканий некоторых элементов системы γ. Но тогда $\gamma \in \Gamma_d$ будет принадлежать всем $F' \in \gamma'$, что противоречит исходному предположению.

7. В первой части книги “Пространственные структуры, их теория и применение” для любого метрического пространства были введены такие понятия как отрезок, треугольник и вообще симплекс любой размерности. Эти понятия могут быть перенесены в тех же формулировках и на слабо метрические пространства. Например вводится сначала следующее понятие “между двумя точками”.

Говорят, что точка C *лежит между* точками A и B, если для любой точки C', не совпадающей с C, или $d(A, C) < d(A, C')$ или $d(B, C) < d(B, C')$, В этом случае говорят также, что точки A, B, C образуют линейное множество.

После этого вводится понятие отрезка $[A, B]$ с концами A и B, как множества точек, лежащих между точками A и B. В соответствии с определением сами концы принадлежат отрезку. Число $d(A, B)$ называется длиной $|AB|$ отрезка $[AB]$. Заметим, что в отличие от метрического случая, из того, что $C \in [AB]$, не обязательно следует, что $|AC| + |CB| = |AB|$.

Аналогично вводится понятие “между тремя точками”.

Говорят, что точка D *лежит между точками A, B и C*, не образующими линейное множество, если для любой точки D', не совпадающей с D, или $d(A, D) < d(A, D')$ или $d(B, D) < d(B, D')$ или $d(C, D) < d(C, D')$,

Затем вводится понятие треугольника $[ABC]$ с вершинами A, B и C как множества точек, лежащих между точками A, B и C, площадь треугольника, как функция длин его сторон и так далее. Все эти определения можно продолжить на объекты большей размерности, рассматривать окружности, сферы и так далее. Короче говоря можно построить геометрию слабой метрики, но это будет странная геометрия. Так, например, диаметр круга может быть не вдвое больше радиуса, их отношение может быть сколь угодно большим, метод исчерпывания здесь не работает. как и приближение к кривым ломаными при вычислении их длины.

Ivanov A. A. Weakly metric spaces.

The paper contains some initial results on the theory of weakly metric spaces. The weak triangle axiom: for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for any points x, y, and z with $d(y, z) \leq \delta$ the inequality $d(x, z) \leq d(x, y) + \varepsilon$ holds.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 12 июня 2007 г.