Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 352, 2007 г.

А. А. Иванов

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ, ИХ ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ. 3

Введение

Эта статья является третьей и последней частью книги "Пространственные структуры, их теория и применение". Первая часть этой книги была опубликована в Записках научных семинаров ПОМИ в 2002 году (том 287), вторая часть была опубликована также в Записках научных семинаров ПОМИ в 2004 году (том 313). В этих частях рассматривались различные структуры. Первая часть была посвящена некоторым проблемам теории метрических пространств, структурам непрерывности, структурам расширений и битопологическим структурам, как классическим, в смысле Келли, т.е. парам топологических структур на X, так и общим, в смысле Иванова, т.е. топологическим структурам на $X \times X$. В частности здесь было введено понятие слабо метрического пространства, для которого аксиома треугольника заменялась условием существования для каждого $\varepsilon > 0$ такого $\delta > 0$, что $d(x, z) < d(x, y) + \varepsilon$, если $d(y, z) < \delta$, и для таких пространств был доказан принцип Банаха сжимающих отображений. Была также построена метрическая аксиоматика евклидовых пространств, в которой единственным исходным понятием являлось расстояние между точками. Тем самым теория евклидовых пространств и их обобщений становилась специальной частью теории метрических пространств. Здесь же была построена общая теория битопологических пространств (в смысле Иванова), тематика которой состоит не в простом переносе теории топологических пространств на битопологические в смысле Келли пространства, но содержит понятия и утверждения, не имеющие аналогов в классической теории. Вторая часть была посвящена так называемым *структурам топологического типа*. Под этим понимались топологические структуры (или их обобщения) на некоторых множествах, получаемых из каких-то исходных множеств операциями умножения и перехода к множеству подмножеств (*на множествах шкалы множеств по Бурбаки)*, рассматриваемые как структуры на самих исходных множествах. Там были введены и частично изучены топологические структуры на множествах PX подмножеств произвольного множества X, *названные P-топологическими структурами на X*, топологические структуры на произведениях $X \times Y$ множеств и связь их с топологическими структурами на множестве $C(Y,Z)$ – пространстве отображений, топологические структуры на множестве P^2X, названные *P^2-топологическими структурами на X*. Там же были рассмотрены битопологические и P-топологические многообразия, битопологические и P-топологические группы. В частности, была установлена связь битопологических структур с кусочно линейными структурами и связь P-топологических структур со структурами близости и смежности, равномерными структурами покрытий, кусочно линейными и дифференцируемыми структурами.

В настоящей, третьей части, будут рассмотрены некоторые общие проблемы теории пространстенных структур, в частности, проблема глобализации их локальных заданий, и некоторые вопросы, относящиеся к конкретным структурам: битопологическим, парно топологическим, P-топологическим, P^2-топологическим, P-битопологическим, P-парно топологическим, P^2-битопологическим, P^2-парно топологическим, P^3-топологическим.

Г Л А В А I. P^2-топологические пространства

§1. Пространства систем подмножеств

1.1. Пространства систем подмножеств и пространства отображений множеств отображений

Пространством систем подмножеств множества X называют множество P^2X или какое-нибудь его подмножество, рассматриваемое с некоторой заданной на нем топологической структурой. *Пространством отображений множеств отображений* называют множество $C(C(X,Y),Z)$ или какое-нибудь его подмножество, рассматриваемое с некоторой заданной на нем топологической структурой. Естественно возникает проблема топологизации этих множеств. В первом случае мы имеем двукратный переход от некоторого множества к множеству всех его подмножеств или к какой-нибудь его части, во втором случае мы имеем двукратный переход от пары множеств к множеству отображений этих множеств или к какой-нибудь его части. На первый взгляд отсюда следует, что и проблемы топологизаций множества P^2X и множества $C(C(X,Y),Z)$ сводятся к рассмотренным во второй части книги проблемам топологизаций произвольного множества подмножеств и произвольного множества отображений, соответственно. Однако, если это верно для P^2X, то для множества $C(C(X,Y),Z)$ это не так. Дело в том, что в первом случае можно рассматривать включения

$$X \subset PX \subset P^2X.$$

Любая топологическая структура ϑ на P^2X индуцирует топологические структуры ζ и τ подпространств на PX и на X, причем ζ опять же индуцирует на X структуру τ, как структуру подпространства. Таким образом, мы действительно имеем в этом случае двукратный переход от некоторого пространства к пространству его подмножеств. Во втором случае ситуация более сложная. Задание топологической структуры на множестве $C(C(X,Y),Z)$ не определяет естественную топологическую структуру на множестве $C(X,Y)$, как впрочем и на множестве Z. Однако ситуация упрощается при переходе от отображений к их графикам. Множество $C(X,Y)$ всех отображений X в Y, включая частичные и многозначные, можно заменить на множество $P(X\times Y)$ всех графиков этих отображений. Аналогично, множество $C(P(X\times Y),Z)$ можно заменить на множество $P(P(X\times Y)\times Z)$. С другой стороны, имеют место естественные включения

$$P(P(X\times Y)\times Z)\subset P(P(X\times Y)\times PZ)\subset P^2(X\times Y\times Z).$$

Это позволяет нам свести проблему топологизации множества $C(C(X,Y),Z)$ к топологизации множества $P^2(X\times Y\times Z)$ и, тем самым, к *двукратной топологизации множества подмножеств соответствующих множеств.* Этот факт не опровергает предыдущее утверждение о том, что топологическая структура на $C(C(X,Y),Z)$ не определяет топологическую структуру на $C(X,Y)$, так как, хотя топологическая структура на $P^2(X\times Y\times Z)$ и определяет топологическую структуру на $P(X\times Y\times Z)$, но последняя определяет топологическую структуру на множестве $P(X\times Y)$, представляющем $C(X,Y)$, неоднозначно. Более того, топологическая структура на $C(C(X,Y),Z)$ определяет топологическую структуру не на $P^2(X\times Y\times Z)$, а на существенно меньшем множестве $P(P(X\times Y)\times Z)$.

С другой стороны, любое подмножество $A\subset X$ однозначно определяется его характеристической функцией $\chi_A\in C(X,D)$, $\chi_A(x)=1 \iff x\in A$, поэтому множество PX можно заменить на множество $C(X,D)$, а множество $P(C(X,D))$, где на $C(X,D)$ уже определена некоторая топология, на множество $C(C(X,D),D)$. Тем самым проблема топологизации множества P^2X сводится к двукратной топологизации множеств отображений соответствующих пространств в D. Заметим, кстати, что для топологизации множества $C(C(X,D),D)$ можно воспользоваться включениями

$$P(P(X\times D)\times D)\subset P(P(X\times D)\times PD)\subset P^2(X\times D^2).$$

Последнее из этих множеств состоит из классов отображений $\chi_{A,\alpha}:X\longrightarrow D^2$, определяемых для $A\in PX$ и $\alpha\in P^2X$ следующим образом: множеству $A\subset X$ и системе α подмножеств множества X сопоставляется отображение $\chi_{A,\alpha}:X\longrightarrow D^2$, где

$$\begin{aligned}
x\notin A,\ A\notin\alpha &\implies \chi_{A,\alpha}(x)=(0,0),\\
x\notin A,\ A\in\alpha &\implies \chi_{A,\alpha}(x)=(0,1),\\
x\in A,\ A\notin\alpha &\implies \chi_{A,\alpha}(x)=(1,0),\\
x\in A,\ A\in\alpha &\implies \chi_{A,\alpha}(x)=(1,1).
\end{aligned}$$

Отображение $\chi_{A,\alpha} : X \longrightarrow D^2$ мы будем называть *характеристической функцией* пары A, α. Мы можем также пользоваться эквивалентностями

$$A \longleftrightarrow \chi_A \ , \alpha \longleftrightarrow \chi_\alpha,$$

при которых

$$x \in A \iff \chi_A = 1,$$

$$A \in \alpha \iff \chi_\alpha(A) = 1,$$

и поэтому

$$A \in \alpha \iff \chi_\alpha(\chi_A) = 1.$$

1.2. Классические топологизации

Так как проблемы топологизации множества P^2X и частично множества $C(C(X,Y),Z)$ можно свести к топологизациям систем подмножеств и множества отображений, то следует, прежде всего, привести классические варианты таких топологизаций.

Интересное продолжение топологической структуры τ с множества X на некоторую часть множества PX можно получить в том случае, когда эта структура определена метрикой.

Пусть (X, d) – некоторое метрическое пространство. Тогда на множестве PX ограниченных в этой метрике непустых замкнутых множеств можно ввести так называемую метрику Хаусдорфа Hd. В этой метрике для любой пары A, B таких множеств

$$Hd(A,B) = \max(\sup(\inf(d(x,y) \mid y \in B) \mid x \in A),$$
$$\sup(\inf(d(x,y) \mid x \in A) \mid y \in B)).$$

Таким образом, мы получаем метрическое пространство (PX, Hd). Повторив эту процедуру для метрического пространства (PX, Hd), мы получим метрическое пространство (P^2X, H^2d), точками которого являются ограниченные системы ограниченных замкнутых множеств. Если теперь (X, τ) – метризуемое топологическое пространство и d – некоторая согласованная с τ метрика, то, без нарушения общности, можно считать, что d – ограниченная метрика, перейдя в случае необходимости к метрике $\frac{d}{1+d}$, определяющей ту же топологическую структуру τ на X. Тогда каждое замкнутое множество будет ограниченным и, следовательно, PX будет множеством *всех* замкнутых в (X, τ) множеств. Метрика Hd также будет ограниченной, следовательно в качестве P^2X можно взять множество *всех* замкнутых в (PX, Hd) совокупностей замкнутых в (X,τ) множеств.

Другой способ введения топологической структуры на множестве P^2X состоит в двукратном введении топологии Вьеториса сначала на множестве PX всех замкнутых подмножеств топологического пространства (X,τ), а затем на множестве P^2X всех замкнутых подмножеств топологического пространства $(PX, V\tau)$, где $V\tau$ – топологическая структура Виеториса. Предбазой этой структуры являются множества PG и QG, состоящие из всех τ-замкнутых подмножеств, содержащихся в G, и, соответственно, пересекающихся с G, образованные для всех $G \in \tau$. В результате мы получим топологическое пространство $(P^2X, V^2\tau)$.

Топологическое пространство $(P^2X, H^2\tau)$, построенное по хаусдорфовой метрике, метризуемо и потому обладает хорошими свойствами, но оно требует метризуемости исходного топологического пространства (X,τ). Наоборот, построение топологии Виеториса возможно для любого топологического пространства, но уже на первом этапе – переходе от (X,τ) к $(PX, V\tau)$ – топологические свойства ухудшаются. Например, (X,τ) может быть нормальным топологическим пространством, а $(PX, V\tau)$ может оказаться не нормальным. Дальнейшее ухудшение топологических свойств может произойти при переходе от $(PX, V\tau)$ к $(P^2X, V^2\tau)$.

Рассмотрим теперь две топологизации множества $C(X,Y)$ непрерывных отображений топологических пространств, а именно топологию *поточечной сходимости* и *компактно открытую* топологию. Напомним соответствующие определения.

Топология поточечной сходимости, как показывает само название, определяется сходимостями направленных систем отображений. Считаем, что

$$(f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \longrightarrow f \iff (f_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda) \longrightarrow f(x)$$

для всех $x \in X$.

Компактно открытая топология определяется предбазой, состоящей из множеств

$$P(K,G) = \{f \mid f(K) \subset G\},$$

рассматриваемых для всех компактных подмножеств K множества X и всех открытых в Y множеств G.

Используя эти топологизации в любом порядке мы получаем различные (*не все!*) топологизации множества $C(C(X,Y),Z)$, в частности, топологизации множества $C(C(X,D),D)$ и, следовательно, топологизации множества P^2X.

1.3. Пространство отображений

Так как рассматриваемые нами здесь проблемы частично сводятся к проблеме топологизации произвольного множества отображений, то могут оказаться полезными некоторые новые варианты топологизации множеств отображений.

Рассмотрим сначала своего рода обобщения компактно открытой топологии. Во-первых, рассматриваются *произвольные* замкнутые в X множества K, а, во-вторых, в качестве элементов предбазы в различных вариантах могут браться как множества $P(K,G)$ отображений, так и множества $Q(K,G) = \{f \mid f(K) \cap G \neq \emptyset\}$, $P(K,G) \cup P(K, X \setminus G)$, $Q(K,G) \cap Q(K, X \setminus G)$. В частности, можно взять все $P(K,G)$ и все $Q(K,G)$ для всех замкнутых в X множеств K и всех открытых в Y множеств G – такую топологию на множестве $C(X,Y)$ отображений будем называть *топологией Виеториса отображений*.

С другой стороны, можно рассматривать различные топологические структуры на множестве $P(X \times Y)$ графиков отображений $f : X \longrightarrow Y$, возможно, частичных и многозначных. Отождествляя f и Γ_f, мы, тем самым, получаем различные топологизации множества $C(X,Y)$. Можно, например, ввести на $P(X \times Y)$ топологию Виеториса. Такую топологическую структуру будем называть *топологией Виеториса графиков*.

§2. Аддитивность и разложимость структур сходимости

Рассматривая в первой и, соответственно, во второй части книги битопологические и P-топологические многообразия, мы были вынуждены ограничиться локальными, а для битопологических многообразий и транзитивными структурами. Это было связано с тем, что в общем случае для произвольного покрытия $\{U_\lambda\}$ пространства X ни система $U_\lambda \times U_\lambda$ (в битопологическом случае), ни система PU_λ (в P-топологическом случае) не образуют покрытия множества $X \times X$ и множества PX, соответственно. Такая же ситуация имеет место, конечно, для P^2-топологических многообразий и для многообразий с более сложной структурой.

Проблема построения той или иной структуры на всем многообразии (глобальной структуры) по структурам того же типа, заданным на его частях (частичным структурам), в общем случае не имеет решения. Для P-топологических и P^2-топологических многообразий можно, конечно, ограничиться локальными структурами, в классе которых глобализация возможна, но имеется и другой подход, основанный на введении новых понятий, а именно различных понятий типа аддитивной структуры сходимости и разложимой структуры сходимости. При этом понятие структуры сходимости, сформулированное в первой части, мы несколько расширим. В первой части книги рассматривались в качестве основных три аксиомы сходимости.

1. *Аксиома стационарности.* Любая стационарная направленность $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, то есть направленность, у которой $A_\lambda = A$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$ и некоторого $A \in PX$, сходится к A.

2. *Аксиома конфинальности по носителям.* Если направленность $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ конфинальна по носителям некоторому множеству сходящихся к A направленностей, то она сама сходится к A.

3. *Аксиома композиции.* Из сходимости направленности $(A_\xi \mid \xi \in \Xi) \longrightarrow A$ и сходимости направленности $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow A_\xi$, определеных для всех $\xi \in \Xi$, следует сходимость к A их композиции $(A_\mu \mid \mu \in M)$.

Структуры сходимости, удовлетворяющие первым двум аксиомам, соответствуют слабо топологическим структурам, структуры сходимости, удовлетворяющие всем трем аксиомам, соответствуют топологическим структурам. Рассматривалась также еще слабая аксиома конфинальности по носителям (аксиома $2'$), соответствующая так называемым квазитопологическим структурам, но мы здесь ее касаться не будем. Вместо этого мы приведем здесь следующую, самую слабую аксиому этого типа.

2_0. *Аксиома конфинальности.* Если направленность $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda')$ конфинальна направленности $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, сходящейся к $A \in PX$, то она также сходится к A.

В дальнейшем мы будем считать, что структуры сходимости удовлетворяют аксиомам стационарности и конфинальности. Заметим только, что аксиома слабой конфинальности по носителям слабее аксиомы конфинальности по носителям, но сильнее аксиомы конфинальности.

2.1. Аддитивность структур сходимости множеств. Мы рассмотрим здесь два понятия типа аддитивности.

Определение. *Будем говорить, что структура сходимости подмножеств некоторого множестве X равномерно аддитивна, если для любых сходимостей $A^{\xi}_{\lambda} \longrightarrow A_{\xi}$ по $\lambda \in \Lambda$ для каждого $\xi \in \Xi$, где Ξ – конечное множество, их сумма $A_{\lambda} = \bigcup_{\xi \in \Xi} A^{\xi}_{\lambda}$ сходится к $\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} A_{\xi}$ по λ.*

Замечание. Условие конечности множества Ξ здесь существенно. Нетрудно показать, что структуры сходимости, удовлетворяющие условию равномерной сходимости с бесконечными Ξ, довольно специфичны. Например, для таких структур любая направленность $(A_{\xi} \mid \xi \in \Xi)$ множеств, содержащих некоторое множество A достаточно большой мощности (не меньше чем мощность Ξ), к этому множеству и сходится.

Действительно, рассмотрим для каждой точки $x \in A$ стационарную направленность $(B_{\xi} \mid \xi \in \Xi)$, где $B_{\xi} = \{x\}$. Сопоставим каждой точке $x \in A$ какой-нибудь элемент $\xi(x) \in \Xi$ так, чтобы это сопоставление исчерпывало Ξ. Построим теперь новые направленности $(A^{\xi(x)}_{\xi} \mid \xi \in \Xi)$, где $A^{\xi(x)}_{\xi} = x$ для $\xi \neq \xi(x)$ и $A^{\xi(x)}_{\xi(x)} = A_{\xi(x)}$. Каждая из этих направленностей стационарна и поэтому сходится к соответствующей точке множества A, поэтому их сумма $(A_{\xi} \mid \xi \in \Xi)$ сходится к A, в силу предположения равномерной аддитивности.

Равномерно аддитивные структуры сходимости подмножеств топологического пространства обладают следующим интересным свойством.

(∗) *Конечные суммы сходимостей множеств, являющихся сходимостями в топологии Виеториса, также являются сходимостями в топологии Виеториса.*

Проверку сходимости достаточно провести для совокупности всех множеств вида $PG \cap QG_1 \ldots \cap QG_k$, где $PG = \{A \mid A \subset G\}$ и $QG_i = \{A \mid A \cap G_i \neq \emptyset\}$, образованных по всем открытым множествам $G, G_1, \ldots, G_k$. Пусть $A^{\xi}_{\lambda} \longrightarrow A_{\xi}$ – сходимость по всем $\lambda \in \Lambda$ для каждого $\xi \in \Xi$, где Ξ – конечное множество. Пусть, далее, $A_{\lambda} = \bigcup_{\xi \in \Xi} A^{\xi}_{\lambda}$, для каждого $\lambda \in \Lambda$ и $A = \bigcup A_{\xi}$. Пусть $A \in PG \cap QG_1 \cap \ldots \cap QG_k$. Тогда каждое A_{ξ} содержится в G и пересекается с какими-то из множеств $G_1, \ldots, G_k$. В силу сходимостей $A^\xi_\lambda \longrightarrow A_\xi$, для каждого $\xi \in \Xi$ найдется такое $\lambda(\xi) \in \Lambda$, что $A^\xi_\lambda \subset G$ для всех $\lambda > \lambda(\xi)$. Так как Ξ – *конечное* множество, найдется $\lambda_0 \in \Lambda$, превосходящее все $\lambda(\xi)$, и поэтому $A^\xi_\lambda \subset G$ для $\lambda \geq \lambda_0$, откуда следует, что $A_\lambda \subset G$, т.е. $A_\lambda \in PG$ для таких λ.

Рассмотрим теперь произвольное открытое в X множество G, для которого $A \in QG$, то есть $A \cap G \neq \emptyset$, и, следовательно, $A_{\xi_0} \cap G \neq \emptyset$ для некоторого $\xi_0 \in \Xi$. Тогда, в силу сходимости $A^{\xi_0}_\lambda \longrightarrow A_{\xi_0}$, найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $A^{\xi_0}_\lambda \cap G \neq \emptyset$ и следовательно $A_\lambda \cap G \neq \emptyset$, т.е. $A_\lambda \in QG$ для $\lambda \geq \lambda_0$. Рассматривая в качестве G множества $G_1, \dots, G_k$ мы получаем сформулированный выше результат.

Рассмотрим теперь другое понятие сходимости типа аддитивности, а именно понятие *полной аддитивности*.

Определение. *Будем говорить, что упорядоченное множество M является произведением упорядоченных множеств Λ_ξ по всем $\xi \in \Xi$, если $M = \prod_{\xi\in\Xi} \Lambda_\xi$ и M упорядочено покомпонентно, т.е. $\mu = (\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi) \geq \mu' = (\lambda'_\xi \mid \xi \in \Xi)$, если $\lambda_\xi \geq \lambda'_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$.*

Замечание. Заметим, что здесь множество Ξ не обязано быть упорядоченным, как это требуется при определении композиции упорядоченных множеств.

Определение. *Будем говорить, что направленность $(A_\mu \mid \mu \in M)$ множеств является полной суммой направленностей $(A^\xi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_\xi)$, заданных для всех $\xi \in \Xi$, если M является произведением всех Λ_ξ и $A_\mu = \bigcup_{\xi\in\Xi} A^\mu_{\lambda_\xi}$ для каждого $\mu = (\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi)$.*

Определение. *Будем говорить, что структура сходимость подмножеств некоторого множестве X вполне аддитивна, если для любых сходимостей $A^\xi_\lambda \longrightarrow A_\xi$ по $\lambda \in \Lambda_\xi$, $\xi \in \Xi$, их полная сумма $(A_\mu \mid \mu \in M)$ сходится к $\bigcup_{\xi\in\Xi} A_\xi$.*

Вполне аддитивные структуры сходимости подмножеств топологического пространства обладают свойством, более сильным, чем $(*)$.

$(**)$ *Произвольные (не обязательно конечные) полные суммы сходимостей множеств, являющихся сходимостями в топологии Виеториса, также являются сходимостями в топологии Виеториса.*

Проверку справедливости этого утверждения достаточно провести опять для совокупности всех множеств $PG = \{A \mid A \subset G\}$

и $QG = \{A \mid A \cap G \neq \emptyset\}$, образованных по всем открытым множествам G. Пусть $A_\lambda^\xi \longrightarrow A_\xi$ по всем $\lambda \in \Lambda_\xi$ для каждого $\xi \in \Xi$ и $(A_\mu \mid \mu \in M)$ – их полная сумма, $A = \bigcup_{\xi\in\Xi} A_\xi$. Рассмотрим произвольное открытое в X множество G, для которого $A \subset PG$ и, следовательно, каждое $A_\xi \subset G$. Тогда, в силу сходимостей $A_\lambda^\xi \longrightarrow A_\xi$, для каждого $\xi \in \Xi$ найдется такое $\lambda(\xi) \in \Lambda_\xi$, что $A_\lambda \subset G$ для всех $\lambda > \lambda(\xi)$. Положим $\mu_0 = (\lambda(\xi) \mid \xi \in \Xi)$. Если $\mu = (\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi) \geq \mu_0 = (\lambda(\xi) \mid \xi \in \Xi)$, то есть $\lambda_\xi \geq \lambda(\xi)$, для всех $\xi \in \Xi$, то $A_\lambda^\xi \subset G$ и поэтому $A \subset G$, т.е. $A \in PG$.

Рассмотрим теперь произвольное открытое в X множество G, для которого $A \in QG$, то есть $A \cap G \neq \emptyset$ и, следовательно, $A_{\xi_0} \cap G \neq \emptyset$ для некоторого $\xi_0 \in \Xi$. Тогда, в силу сходимости $A_\lambda^{\xi_0} \longrightarrow A_{\xi_0}$, найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda_{\xi_0}$, что $A_\lambda \cap G \neq \emptyset$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$. Положим $\mu_0 = (\lambda(\xi) \mid \xi \in \Xi)$, где все $\lambda(\xi)$, кроме $\lambda(\xi_0)$, фиксированы произвольно, а $\lambda(\xi_0) = \lambda_0$. Если теперь $\mu = (\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi) \geq \mu_0 = (\lambda(\xi) \mid \xi \in \Xi)$, в частности, $\lambda_{\xi_0} \geq \lambda_0$, то $A_\lambda^\xi \cap G \neq \emptyset$, и поэтому $A \cap G \neq \emptyset$, то есть $A \in QG$.

2.2. Аддитивность структур сходимости отображений

По аналогии с понятиями аддитивности структур сходимости множеств можно сформулировать соответствующие понятия аддитивности структур сходимости отображений. Но здесь нам придется рассматривать произвольные отображения, включая частичные и многозначные.

Определение. *Пусть $(f_\xi \mid \xi \in \Xi)$ – некоторая совокупность отображений (возможно частичных и многозначных) пространства X в пространство X'. Их суммой $\bigcup_{\xi\in\Xi} f_\xi$ будем называть отображение $f : X \longrightarrow X'$, определенное условием $f(x) = \bigcup_{\xi\in\Xi} f_\xi(x)$ для каждого $x \in X$.*

Определение. *Будем говорить, что структура сходимости отображений $f : X \longrightarrow X'$ (X и X' фиксированы) равномерно аддитивна, если для любых сходимостей $f_\lambda^\xi \longrightarrow f_\xi$ по λ, $\xi \in \Xi$, где Ξ – конечное множество, их сумма $f_\lambda = \bigcup_{\xi\in\Xi} f_\lambda^\xi$ сходится к $\bigcup_{\xi\in\Xi} f_\xi$.*

Определение. *Будем говорить, что направленность $(f_\mu \mid \mu \in M)$ отображений является полной суммой направленностей $(f_\lambda^\xi \mid \lambda \in \Lambda_\xi)$, заданных для всех $\xi \in \Xi$, если M является произведением всех Λ_ξ и $f_\mu = \bigcup_{\xi\in\Xi} f_{\lambda_\xi}^\mu$ для каждого $\mu = (\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi)$.*

Определение. *Будем говорить, что структура сходимость отображений вполне аддитивна, если для любых сходимостей $f_\lambda^\xi \longrightarrow f_\xi$ по $\lambda \in \Lambda_\xi$, $\xi \in \Xi$, их полная сумма $(f_\mu \mid \mu \in M)$ сходится к $\bigcup_{\xi\in\Xi} f_\xi$.*

Проверим на аддитивность три типа сходимости отображений: поточечную, компактно открытую и Виеториса.

При рассмотрении поточечной сходимости отображений $f : X \longrightarrow X'$ необходимо заранее фиксировать на X' некоторую сходимость множеств. Дело в том, что в общем случае мы сталкиваемся с многозначными отображениями, когда некоторым точкам $x \in X$ отображение сопоставляет не однозначно определенные точки, а точки некоторых множеств $A_f(x)$. Отсюда следует, что в этой ситуации, говоря о поточечной сходимости $f_\mu \longrightarrow f$, мы имеем в виду сходимость $A_{f_\mu}(x) \longrightarrow A_f(x)$ для всех $x \in X$. Непосредственно из определения получаем следующее утверждение. *Поточечная структура сходимости отображений $f : X \longrightarrow X'$ равномерно аддитивна (вполне аддитивна), если соответствующая структура сходимости множеств в X' равномерно аддитивна (вполне аддитивна).*

Обратимся теперь к компактно открытой топологической структуре на $C(X, X')$. *Докажем, что здесь структура сходимости как равномерно аддитивна, так и вполне аддитивна.*

Действительно, пусть в этой топологии $f_\lambda^\xi \longrightarrow f_\xi$ по λ, для каждого $\xi \in \Xi$, где Ξ – конечное множество. Надо доказать, что сумма $f_\lambda = \bigcup_{\xi\in\Xi} f_\lambda^\xi$ сходится к $f = \bigcup_{\xi\in\Xi} f_\xi$. Пусть $U(C, G) = \{f \mid f(C) \subset G\}$, где C – компактное множество а G – открытое в X' множество (произвольное базисное в компактно открытой топологии множество), является окрестностью отображения f, то есть $f(C) \subset G$. Тогда $f_\xi(C) \subset G$, то есть $f_\xi \in U(C, G)$ для каждого $\xi \in \Xi$. Так как для таких ξ имеет место сходимость $f_\lambda^\xi \longrightarrow f_\xi$, то $f_\lambda^\xi \in U(C, G)$, начиная с некоторого $\lambda(\xi)$, и, в силу конечности Ξ, найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $f_\lambda^\xi \in U(C, G)$, то есть $f_\lambda^\xi(C) \subset G$, для каждого $\xi \in \Xi$ и всех $\lambda > \lambda_0$. Но тогда и $f_\lambda(C) \subset G$, то есть $f_\lambda \in U(C, G)$, для всех $\lambda > \lambda_0$. Отсюда следует, в силу произвольности $U(C, G)$, что $f_\lambda \longrightarrow f$, и тем самым доказана равномерная аддитивность структуры сходимости соответствующей компактно открытой топологии.

Докажем теперь, что структура сходимости компактно открытой топологии на $C(X, X')$ вполне аддитивна.

Пусть в этой топологии $f_\lambda^\xi \longrightarrow f_\xi$ по $\lambda \in \Lambda_\xi$, для каждого $\xi \in \Xi$, где Ξ – не обязательно конечное множество, Надо доказать, что полная сумма $(f_\mu \mid \mu \in M)$ направленностей $(f_\lambda^\xi \mid \xi \in \Xi)$ сходится к $f = \bigcup_{\xi\in\Xi} f_\xi$. Пусть $U(C,G)$ – окрестность отображения f, то есть $f(C) \subset G$. Тогда $f_\xi(C) \subset G$, то есть $f_\xi \in U(C,G)$ для каждого $\xi \in \Xi$. Так как для таких ξ имеет место сходимость $f_\lambda^\xi \longrightarrow f_\xi$, то $f_\lambda^\xi \in U(C,G)$, начиная с некоторого $\lambda(\xi)$. Положим $\mu_0 = (\lambda(\xi) \mid \xi \in \Xi)$. Тогда для любого $\mu > \mu_0$, $\mu = (\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi)$, имеет место включение $f_\mu(C) \subset G$, то есть $f_\mu \in U(C,G)$. Отсюда следует, в силу произвольности $U(C,G)$, что $f_\mu \longrightarrow f$, и тем самым доказано, что структура сходимости соответствующая компактно открытой топологии вполне аддитивна.

Перейдем к изучению сходимости в пространстве $C(X,X')$ с топологией Виеториса отображений и с топологией Виеториса графиков.

Топология Виеториса отображений отличается от компактно открытой топологии только тем, что к базисным множествам $U(C,G) = \{f \mid f(C) \subset G\}$ добавляются конечные пересечения их с множествами вида $V(C,G) = \{f \mid f(C) \cap G \neq \emptyset\}$, где C – компактное множество, а G – открытое в X' множество. Докажем, что *на $C(X,X')$ структура сходимости топологии Виеториса отображений будет как равномерно аддитивна, так и вполне аддитивна.*

Начнем с равномерной аддитивности. Пусть в этой топологии $f_\lambda^\xi \longrightarrow f_\xi$ по λ для каждого $\xi \in \Xi$, где Ξ – конечное множество. Надо доказать, что сумма $f_\lambda = \bigcup_{\xi\in\Xi} f_\lambda^\xi$ сходится к $f = \bigcup_{\xi\in\Xi} f_\xi$. Иначе говоря, надо доказать, что в любом содержащем f базисном множествем содержатся f_λ для достаточно больших λ, то есть для любых открытых в X' множеств $G, G_1, \ldots, G_k$ множества $f_\lambda(C)$ содержатся в G и имеют непустое пересечение с $G_1, \ldots, G_k$ для всех достаточно больших λ.

Относительно G это уже было доказано при рассмотрении компактно открытой топологии, докажем, что $f_\lambda(C)$ имеет непустое пересечение с множествами $G_1, \ldots, G_k$ для всех достаточно больших λ.

Пусть $f_\lambda(C)$ содержится в G для всех $\lambda \geq \lambda_0$. В дальнейшем будем рассматривать только такие λ. Рассмотрим сходимости $f_\lambda^\xi \longrightarrow f_\xi$ для каждого $\xi \in \Xi$ по $\lambda \geq \lambda_0$ и $f = \bigcup_{\xi\in\Xi} f_\xi$. Пусть $f(C)$ содержится в G и пересекается с $G_1, \ldots, G_k$. Тогда каждое из этих множеств пересекается с некоторым $f_\xi(C)$ и, в силу сходимости $f_\lambda^\xi \longrightarrow f_\xi$, пересекается с $f_\lambda^\xi(C)$ для достаточно больших λ, следовательно, каждое из этих множеств пересекается с суммой $\bigcup f_\lambda^\xi(C) = f_\lambda(C)$. В силу произвольности рассмотренного базисного множества тем самым доказано, что $f_\lambda \longrightarrow f$ – сходимость в топологии Виеториса отображений – равномерно аддитивна.

Докажем теперь, что структура сходимости в топологии Виеториса отображений на $C(X, X')$ вполне аддитивна,

Пусть в этой топологии $f_\lambda^\xi \longrightarrow f_\xi$ по $\lambda \in \Lambda_\xi$ для каждого $\xi \in \Xi$, где Ξ – не обязательно конечное множество, Надо доказать, что полная сумма $(f_\mu \mid \mu \in M)$ направленностей $(f_\lambda^\xi \mid \xi \in \Xi)$ сходится к $f = \bigcup_{\xi\in\Xi} f_\xi$, то есть для любых открытых в X' множеств $G, G_1, \ldots, G_k$, таких, что множество $f(C)$ содержится в G и имеет непустое пересечение с $G_1, \ldots, G_k$, множества $f_\mu(C)$ содержатся в G и имеют непустое пересечение с $G_1, \ldots, G_k$ для всех достаточно больших μ

Пусть $G, G_1, \ldots, G_k$ – такие открытые в X' множества, что $f(C)$ содержится в G и имеет непустое пересечение с $G_1, \ldots, G_k$. Тогда каждое $f_\xi(C) \subset G$ и имеет непустое пересечение с этими множествами. Так как для таких ξ имеет место сходимость $f_\lambda^\xi \longrightarrow f_\xi$, то $f_\lambda^\xi(S)$ содержится в G и пересекается с $G_1, \ldots, G_k$, начиная с некоторого $\lambda(\xi)$. Положим $\mu_0 = (\lambda(\xi) \mid \xi \in \Xi)$. Тогда для любого $\mu > \mu_0$, $\mu = (\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi)$, множество $f_\mu(C)$ одержится в G и пересекается со всеми $G_1, \ldots, G_k$. Отсюда следует, в силу произвольности множеств $G, G_1, \ldots, G_k$, что $f_\mu \longrightarrow f$, и тем самым доказано, что структура сходимости соответствующая топологии Виеториса отображений вполне аддитивна.

Остался последний из рассматриваемых вариантов – структура сходимости, определенная топологией Виеториса графиков. Сходимость отображений представляется здесь сходимостью их графиков, т.е. сходимостью множеств в топологии Виеториса, но ранее было уже доказано, то такая сходимость равномерно аддитивна и вполне аддитивна.

2.3. Разложимость структур сходимости множеств. Понятие разложимости структур сходимости множеств прямо противоположно понятию их равномерной аддитивности.

Определение. *Будем говорить, что в топологическом пространстве X некоторая структура сходимости множеств разложима, если для любого открытого в X множества G и любого представ-*

вления G в виде конечной суммы $\cup G_i$ открытых в X множеств, каждая сходимость множеств в G может быть представлена суммой сходимостей в G_i.

В качестве примера разложимой структуры сходимости множеств можно привести сходимость множеств в топологии Виеториса. В этой топологии сходимость $A_\lambda \longrightarrow A$ имеет место, если для любых открытых в X множеств $G, G_1, \ldots, G_k$, $A \subset G$, $A \cap G_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots, k$, найдется такое λ_0, что $A_\lambda \subset G$, $A_\lambda \cap G_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots, k$, для всех $\lambda \geq \lambda_0$.

Пусть $A_\lambda \longrightarrow A$, $A \subset G = \cup G_i$, $A \cap G_i = A_i \neq \emptyset$. Положим $A^i_\lambda = G_i \cap A_\lambda$ и докажем, что $A^i_\lambda \longrightarrow A_i$. Пусть $A_i \subset H$, $A_i \cap H_j \neq \emptyset$, $H, H_1, \ldots, H_n$ – открытые в X множества, причем можно считать, что все они содержатся в G_i. Мы можем рассмотреть окрестность Виеториса множества A, определенную множествами G, $H_1, \ldots, H_n$. Так как $A_\lambda \longrightarrow A$, существует такое λ_0, что $A_\lambda \subset G$, $A_\lambda \cap H_j \neq \emptyset$, $j = 1, \ldots, n$, для всех $\lambda \geq \lambda_0$, но тогда $A^i_\lambda = G_i \cap A_\lambda \subset G_i$, $A^i_\lambda \cap H_j \neq \emptyset$, $j = 1, \ldots, n$, для всех $\lambda \geq \lambda_0$. Отсюда следует, в силу произвольности выбора $H_1, \ldots, H_n$, сходимость $A^i_\lambda \longrightarrow A_i$.

2.4. Глобализация структур сходимости

Рассмотрим переход от частичного задания сходимости множеств системой (S_λ) структур сходимости, определенных на открытых множествах G_λ, $\lambda \in \Lambda$, образующих покрытие топологического пространства X, к соответствующему глобальному заданию. Необходимым условием такой глобализации является, конечно, согласование всех S_λ. Это согласование заключается в следующем. Пусть на открытых в X множествах G_1 и G_2 определены структуры сходимости S_1 и S_2. Эти структуры считаются согласованными, если любая направленность множеств, содержащихся в $G_1 \cap G_2$, сходится к некоторому подмножеству этого пересечения или не сходится в S_1 и S_2, одновременно. Мы уже отмечали, что такой переход всегда возможен, если согласованные таким образом структуры на всех G_λ локальны – в этом случае ими однозначно определена на PX также локальная структура. Заметим, теперь, что если все исходные структуры сходимости в каком-то смысле аддитивны, то можно ввести на PX глобальную структуру сходимости, порождаемую совокупностью сумм (в соответствующем смысле) сходящихся направленностей частичных структур. В классе равномерно аддитивных сходимостей следует рассматривать совокупность всех конечных сумм, а в классе вполне аддитивных сходимостей – всех (не обязательно конечных) сумм. Такая совокупность в общем случае не удовлетворяют аксиомам структур сходимости. Ее надо дополнять. Может не выполняться даже аксиома стационарности. Если, например, среди G_λ, на которых заданы частичные структуры сходимости, нет конечной системы, образующей покрытие X, то совокупность конечных сумм сходимостей в частичных структурах не содержит стационарной сходимости к X.

Построение глобальной структуры сходимости по заданным частичным структурам можно осуществить следующей процедурой. Сначала присоединяем все суммы и стационарные сходимости. Затем присоединяем все сходимости, наличие которых необходимо для выполнения аксиомы конфинальности. Для этого достаточно рассмотреть сходимости $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \longrightarrow A$ исходной совокупности и присоединить сходимости $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda') \longrightarrow A$, где Λ' – конфинальные части Λ. Это следует из транзитивности отношения конфинальности.

Дальнейшее расширение совокупности сходящихся направленностей за счет аналогичного присоединения слабо конфинальных по носителям и, соответственно, конфинальных по носителям сходимостей, даст нам усиление аксиом типа конфинальности.

Последним шагом в этом последовательном расширении совокупности сходимостей является присоединение всех композиций имеющихся сходимостей. Но здесь ситуация более сложная, так как при этом может быть нарушены аксиомы типа конфинальности. Поэтому удобнее воспользоваться переходом к окрестностным пространствам.

Процедуру глобализации можно в некоторых случаях значительно упростить.

Теорема глобализации. *Глобализацию вполне аддитивных разложимымых частичных структур сходимости с аксиомой конфинальности, заданных на некоторой системе открытых множеств топологического пространства, можно получить, рассматривая только конечные суммы, если эта система содержит конечное покрытие этого пространства.*

Доказательство. Приведем основную идею доказательства. Пусть на некоторых открытых множествах пространства X (назовем их *выделенными*) заданы структуры сходимости, обладающие указанными в теореме свойствами, и имеется конечное число выделенных множеств, образующих покрытие X. Будем называть их *основными*. Если каждое выделенное множество содержится в некотором основном, то любая направленность множеств в выделенном множестве будет направленностью в одном из основных множеств. Поэтому, учитывая ассоциативность полного суммирования, при глобализации частичных структур сходимости достаточно рассматривать только основные множества. Полная сумма направленностей, определенных на каком-то основном множестве, является направленностью в том же множестве и, в силу полной аддитивности структуры сходимости, из их сходимости в частичных структурах выделенных множеств следует сходимость их полной суммы в структуре, заданной на основном множестве. Однако возможен и более сложный случай, когда не все выделенные множества содержатся в основных. Любое такое множество будет конечной суммой его частей, содержащихся в основных множествах, и условия теоремы позволяют доказать, что его структура сходимости является глобализацией структур заданных на этих частях. Тем самым мы получаем возможность замены выделенных множеств, не содержащихся в основных, на множества, содержащиеся в основных, и возвращаемся к уже рассмотренному случаю.

Ключевым моментом доказательста теоремы является переход от выделенного множества, не содержащегося ни в одном из основных, к представлению его суммой открытых множеств, содержащихся в основных. Итак, рассмотрим некоторое открытое в X множество G и такое открытое покрытие G множествами $G_1, \dots, G_n$, что все пересечения $H_i = G \cap G_i$ не пусты. Тогда $\cup H_i = G$, $H_i \subset G_i$. Рассмотрим в G направленность $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, сходящуюся к $A \subset G$. Без нарушения общности можно считать, что первые k пересечений $A \cap H_i = A_i \neq \emptyset$. Тогда, в силу разложимости структуры сходимости, в G найдутся такие множества A^i_λ, что $\cup A^i_\lambda = A_\lambda$, A^i_λ сходится по λ к A_i и сходимость $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \longrightarrow A$ представима суммой сходимостей $(A^i_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \longrightarrow A_i$.

Так как при глобализации рассматриваются *полные суммы сходимостей*, то надо еще доказать, что глобализация сходимостей на совокупности H_i, составляющих G, приводит нас к исходной структуре сходимости на G, Исходная направленность имеет Λ в качестве множества индексов, соответствующая полная сумма имеет множество индексов Λ^k, упорядоченное покомпонентно. Каждому $\lambda \in \Lambda$ можно сопоставить k-членную систему $(\lambda, \dots, \lambda) \in \Lambda^k$. Таким образом, исходную направленность можно рассматривать как конфинальную часть соответствующей полной суммы и поэтому исходная сходимость является следствием сходимости полной суммы направленностей, составляющих ее разложение в $H_1, \dots, H_k$.

Заменив некоторые выделенные множества, не содержащиеся в основных, на сумму множеств, содержащихся в основных, мы пришли к простейшему случаю, когда каждое выделенное множество содержится в некотором основном. Таким образом, любая сходимость в любом выделенном множестве является сходимостью в каком-то основном.множестве. Любую полную сумму сходимостей можно представить теперь в виде полной *конечной суммы* полных сумм (возможно бесконечных) сходимостей, сгруппированных по принадлежности к тому или иному основному множесту. что возможно в силу ассоциативности полного суммирования сходимостей.

Непосредственным следствием только что доказанной теоремы является следующее утверждение.

Теорема. *Глобализацию вполне аддитивных разложимымых частичных структур сходимости с аксиомой конфинальности, заданных на некоторой системе открытых множеств компактного топологического пространства, можно получить рассматривая только конечные суммы.*

Это действительно непосредственное следствие предыдущей теоремы, так как в компактном топологическом пространстве любое открытое покрытие содержит конечное покрытие.

Замечание. Если рассматривать в теореме глобализации сходимость не любых замкнутых, а только компактных множеств, то условие наличия конечного подпокрытия можно опустить. Действительно, если $F \subset X$ – произвольное компактное множество, то существует конечное покрытие этого множества выделенными множествами и, рассматривая эти множества как основные, мы сможем определить глобальную сходимость на их объединении.

§3. Категория P^2-топологических пространств

3.1. Основные определения

Напомним относящиеся к этой теме определения.

Определение. *Пусть X – некоторое множество и P^2X – непустое множество, точками которого являются не обязательно все совокупности подмножеств множества X. Топологическую структуру θ на P^2X, будем называть P^2-топологической структурой на X, а пару (X,θ) будем называть P^2-топологическим пространством.*

Замечание. Можно всегда считать, что структура θ задана на *полном* множестве P^2X *всех* совокупностей подмножеств множества X, перейдя к соответствующему, например, тривиальному, продолжению топологической структуры с части P^2X на все P^2X. С другой стороны, всегда можно перейти от топологической структуры θ, заданной на полном множестве P^2X, к ограничению ее на некоторую его часть.

Определение. *Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – произвольное отображение, A – произвольное подмножество множества X, α – произвольная совокупность подмножеств A множества X. Положим*

$$Pf(A) = f(A), \quad P^2f(\alpha) = \{f(A) \mid A \in \alpha\}, \quad P^2f : P^2X \longrightarrow P^2Y.$$

Определение. *Пусть (X,θ) и (Y,ϑ) – произвольные P^2-топологические пространства. Отображение $f : X \longrightarrow Y$ будем называть P^2-непрерывным (допустимым) отображением (X,θ) в (Y,ϑ), если $P^2f : (P^2X,\theta) \longrightarrow (P^2Y,\vartheta)$ является непрерывным отображением.*

Замечание. Это определение имеет смысл, если $P^2f(\alpha) \in P^2Y$ для любого $\alpha \in P^2X$.

Теорема. *P^2-топологические пространства и их P^2-непрерывные отображения образуют категорию.*

Доказательство. Нам надо доказать, что P^2-непрерывные отображения удовлетворяют всем категорным условиям, то есть в классе всех P^2-непрерывных отображений определена ассоциативная композиция и для каждого P^2-топологического пространства имеется единичное относительно этой композиции отображение.

Пусть $f : X \longrightarrow Y$ и $g : Y \longrightarrow Z$ являются P^2-непрерывными отображениями (X, θ) в (Y, ϑ) и (Y, ϑ) в (Z, υ), соответственно. Тогда определена композиция $g \circ f : X \longrightarrow Z$. Так как $P^2 f$ и $P^2 g$ являются непрерывными отображеними $(P^2 X, \theta)$ в $(P^2 Y, \vartheta)$ и $(P^2 Y, \vartheta)$ в $(P^2 Z, \upsilon)$, соответственно, то и их композиция $P^2 g \circ P^2 f$ является непрерывным отображением. Но $P^2 g \circ P^2 f = P^2(g \circ f)$, так как для любой совокупности $\alpha \in P^2 X$ имеет место соотношение

$$P^2 g \circ P^2 f(\alpha) = P^2 g\bigl(\{f(A) \mid A \in \alpha\}\bigr) = \\ = \bigl\{g(f(A)) \mid A \in \alpha\bigr\} = P^2(g \circ f)(\alpha).$$

Тем самым доказано, что $g \circ f$ является P^2-непрерывным отображением. Ассоциативность композиции P^2-непрерывных отображений непосредственно следует из ассоциативности отображений множеств. Остается заметить, что для любого множества X и его тождественного отображения $i : X \longrightarrow X$ в себя отображение $P^2 i : P^2 X \longrightarrow P^2 X$ также является тождественным и потому непрерывным отображением (X, θ), какова бы ни была P^2-топологическая структура θ. Тот факт, что тождественное отображение является правой и левой единицей для указанной выше композиции, очевиден.

Категорию P^2-топологических пространств и их P^2-непрерывных отображений будем обозначать через $P^2\mathrm{Top}$ или P^2T.

3.2. Естественные вложения

Мы рассмотрим прежде всего естественные связи категории P^2T с категориями T и PT. Будем считать для простоты, что имеют место *естественные вложения*

$$X \subset PX \subset P^2 X,$$

при отождествлении x с $\{x\}$, A с $\{A\}$, где x – произвольный элемент множества X, A – произвольное подмножество множества X. Любая P^2-топологическая структура ϑ на X, то есть топологическая структура на $P^2 X$, индуцирует на X топологическую структуру $\tau = \vartheta \mid X$ и поэтому можно считать, что любая P^2-топологическая структура задана не просто на множестве X, а на соответствующем топологическом пространстве (X, τ). Иначе говоря, любая P^2-топологическая структура ϑ на X является продолжением соответствующей топологической структуры τ с X на $P^2 X$. Процесс такого продолжения можно провести через

PX, рассматривая топологическую структуру на P^2X, как продолжение τ сначала на PX и затем на P^2X.

Известно, что среди продолжений топологической структуры с подмножества на все множество всегда есть максимальное, но в общем случае нет минимального. Максимальное продолжение топологической структуры τ с некоторого подмножества X на все множество X' состоит из всех подмножеств множества X', пересечение которых с X принадлежит τ. Можно пользоваться также каноническим продолжением, получаемым присоединением к τ самого множества X'.

3.3. Естественные накрытия

Рассматривая категории PT и P^2T в наибольшей общности, мы будем считать, если не оговорено противное, что PX состоит из всех непустых подмножеств множества X, а P^2X состоит из всех непустых совокупностей произвольных непустых подмножеств множества X. В этом случае для каждого отображения $f : X \longrightarrow Y$ множеств определены естественные отображения $Pf : PX \longrightarrow PY$, где $Pf(A) = f(A)$, и $P^2f : P^2X \longrightarrow P^2Y$, где $P^2f(\alpha) = \{f(A) \mid A \in \alpha\}$.

Каждому P^2-топологическому пространству (X, θ) естественно соответствует P-топологическое пространство (X, ζ), где $\zeta = \theta \mid PX$, и топологическое пространство (X, τ), где $\tau = \theta \mid X$. При этом, если $f : (X, \theta) \longrightarrow (Y, \vartheta)$ является P^2-непрерывным отображением, то $f : (X, \theta|PX) \longrightarrow (Y, \vartheta|PY)$ будет P-непрерывным отображением и $f : (X, \theta|X) \longrightarrow (Y, \vartheta|Y)$ будет непрерывным отображением, так как ограничение непрерывного отображения $P^2f : (P^2X, \theta) \longrightarrow (P^2Y, \vartheta)$ на подмножества PX и X будут непрерывными отображениями. Тем самым мы получаем функторные проекции P категории P^2T в категории PT и T, причем проекция в T представима композицией проекций $P : P^2T \longrightarrow PT$ и $P : PT \longrightarrow T$. В действительности, это проекции *на* соответствующие категории, так как для любого топологического пространства (X, τ) имеется накрывающее его P-топологическое пространство (X, ζ), $\zeta = \tau \cup PX$, и накрывающее его P^2-топологическое пространство (X, θ), $\theta = \tau \cup P^2X$, для любого P-топологического пространства имеется накрывающее его P^2-топологическое пространство (X, θ), где $\theta = \zeta \cup P^2X$.

Таким образом определены $\mathcal{P}$-детализации категории T, а именно категории PT и P^2T, при этом категория P^2Tявляется $\mathcal{P}$-детализацией категории PT и *возникает проблема проверки выполнения для них основных аксиом детализаций.* Во второй части было выяснено, что для категории PT, как детализации категории T, выполняются не все аксиомы детализации, а именно не выполняются следующие аксиомы: существования точной нижней границы накрывающих объектов, существования точной нижней границы накрывающих морфизмов, существования правых накрытий, поднятия композиции. Проверим выполнение аксиом детализации для категории P^2T как детализации категории T и как детализации категории PT.

I. *Существование точной верхней границы накрывающих объектов.* В обоих случаях мы имеем следующую ситуацию. Имеется некоторое множество X', на котором рассматриваются какие-то топологизации, индуцирующие на некотором его подмножестве X фиксированную топологическую структуру. Ясно, что объединение этих топологических структур индуцирует на X ту же топологическую структуру. Но это объединение как раз и порождает точную верхнюю границу рассматриваемых топологических структур операциями конечных пересечений и произвольных объединений входящих в него множеств. Пересечение любой такой операции с X является аналогичной операцией над пересечениями множеств с X, не выводящей из фиксированной на X топологической структуры.

I$'$. Простые примеры показывают, что в обоих случаях точная нижняя граница накрывающих объектов не всегда существует. Как и в соответствующем примере второй части книги, за основу берется правое колмогоровское двоеточие (D, δ_r), $D = \{0, 1\}$, $\delta_r = \{\emptyset, \{0\}, D\}$, $PD = \{a, b, c\}$ где $a = 0$, $b = 1$, $c = \{0, 1\}$ (мы отождествляем 0 и 1 с $\{0\}$ и $\{1\}$). Положим $\zeta = \{\emptyset, 0, PD\}$, $\theta_1 = \{\emptyset, a, P^2D\}$, $\theta_2 = \{\emptyset, \{a, c\}, P^2D\}$. Обе эти P^2-топологические структуры индуцируют на PD и D структуры ζ и δ_r соответственно, а их пересечение индуцирует на этих множествах тривиальные топологические структуры.

II. *Существование точной верхней границы накрывающих морфизмов.* В обоих случаях мы имеем какое-то множество P^2-непрерывных отображений $f_\xi : (X, \theta_\xi) \longrightarrow (X', \theta'_\xi)$, накрывающих фиксированное отображение $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$ из категории T, или (во втором случае) отображение $f : (X, \zeta) \longrightarrow (X', \zeta')$ из категории PT. В силу выполнения для P^2T аксиомы III, существуют точные верхние границы $\sup\{(X,\theta_\xi)\} = (X,\theta)$ и $\sup\{(X',\theta'_\xi)\} = (X',\theta')$. Осталось доказать, что отображение $f:(X,\theta) \longrightarrow (X',\theta')$ накрывает фиксированное в T или в PT отображение и является P^2-непрерывным отображением. Первое следует из выполнения аксиомы III. Докажем второе, т.е. непрерывность отображения $P^2 f:(P^2 X,\theta) \longrightarrow (P^2 X',\theta')$. Но это следует из того, что объединение всех θ'_ξ является предбазой топологической структуры θ', а $P^2 f^{-1}(\theta'_\xi) \subset \theta_\xi$.

II$'$. Точная нижняя граница накрывающих морфизмов не всегда существует, потому что не всегда существует точная нижняя граница накрывающих объектов.

III. *Существование левых накрытий. Напомним формулировку этой аксиомы.* Пусть категория $\mathcal{C}'$ является $\mathcal{P}$-детализацией категории $\mathcal{C}$. Говорят, что для нее выполняется аксиома существования левых накрытий, если для любого морфизма $f:X \longrightarrow X_0$ категории $\mathcal{C}$ и любого объекта X'_0 категории $\mathcal{C}'$, накрывающего X_0, существует морфизм $f':X' \longrightarrow X'_0$, накрывающий f. В рассматриваемых нами случаях: категория P^2T является детализацией категории T или является детализацией категории PT, фиксировано непрерывное отображение $f:(X,\tau) \longrightarrow (X_0,\tau_0)$ и P^2-топологическое пространство (X_0,θ_0), накрывающее топологическое пространство (X_0,τ_0) или накрывающее P-топологическое пространство (X_0,ζ_0). В обоих случаях накрытие означает то, что структура θ_0 индуцирует на X_0, соответственно на PX_0, как на подмножествах множества P^2X_0, структуру τ_0, соответственно, структуру ζ_0. Но тогда $(P^2 f)^{-1}(\theta_0)$ является базой некоторой P^2-топологической структуры на P^2X, индуцирующей на X и на PX топологическую структуру, содержащуюся в τ или в ζ, соответственно. Остается только продолжить τ, соответственно, ζ, до некоторой топологической структуры на P^2X и присоединить к этому продолжению множество $(P^2 f)^{-1}(\theta_0)$, расширить это объединение конечными пересечениями и произвольными объединениями и мы получим такую P^2-топологическую структуру θ на X, что $f:(X,\theta) \longrightarrow (X_0,\theta_0)$ является P^2-непрерывным отображением, накрывающим фиксированное непрерывное или P-непрерывное отображение.

III$'$. *Существование правых накрытий.* Эта аксиома отличается от аксиомы левых накрытий тем, что, наряду с фиксацией в категории $\mathcal{C}$ морфизма $f:X \longrightarrow X_0$, в категории $\mathcal{C}'$ фиксируется не объект X', накрывающий X_0, а объект X', накрывающий X. Простые примеры показывают, что для категории P^2T, как детализации категории T и как детализации категории PT, аксиома правых накрытий не имеет места. Как в соответствующем примере второй части книги мы фиксируем отображение $f : (X, \tau) \longrightarrow (X_0, \tau_0)$, где $X = (0, 1]$, $X_0 = D$, τ – обычная топология полуинтервала, $\tau_0 = \delta_r$, $f(0, 1) = 0$, $f(1) = 1$. Отображение f непрерывно, так как $f^{-1}(0) = (0, 1)$ – τ-открытое множество. Фиксируем теперь P^2-топологическое пространство (X, θ) и P-топологическое пространство (X, ζ), положив $\theta = \{\emptyset, \tau, P^2X\}$, $\zeta = \{\emptyset, \tau, PX\}$ (здесь мы опять считаем, что $X \subset PX \subset P^2X$). P^2-топологическое пространство (X, θ) накрывает P-топологическое пространство (X, ζ), которое, в свою очередь, накрывает топологическое пространство (X, τ). Допустим, что существует P-топологическое пространство (X_0, ζ_0), накрывающее (X_0, τ_0), и P-непрерывное отображение $f : (X, \zeta) \longrightarrow (X_0, \zeta_0)$, накрывающее фиксированное выше непрерывное отображение $f : (X, \tau) \longrightarrow (X_0, \tau_0)$. Имеем, $PX_0 = PD = \{a, b, c\}$, где $a = \{0\}$, $b = \{1\}$, $c = \{0, 1\}$, топологическая структура $\tau_0 = \{\emptyset, a, PD\}$, поэтому в ζ_0 должно входить хоть одно из множеств $\{a\}$, $\{a, c\}$. Но Pf-прообразы этих множеств не принадлежат ζ, а именно $Pf^{-1}(\{a\}) = P(0, 1)$, $Pf^{-1}(\{a, c\}) = PX \setminus \{1\}$. Таким образом, наше допущение неверно. Но тогда будет неверным и предположение о существовании P^2-топологического пространства (X_0, θ_0), накрывающего (X_0, ζ_0), и P^2-непрерывного отображения $f : (X, \theta) \longrightarrow (X_0, \theta_0)$, накрывающее $f : (X, \tau) \longrightarrow (X_0, \tau_0)$, так как (X, ζ) является подпространством (X, θ). Тем самым доказано, что аксиома III$'$ не имеет места для P^2T, как детализации T.

Аналогичные рассуждения относительно P-топологических пространств (X, ζ), где $\zeta = \{\emptyset, P(0, 1), P^2X)$, (D, ζ_0), где $\zeta_0 = \{\emptyset, \{a\}, PD\}$, P^2-топологического пространства (X, θ), где $\theta = \{\emptyset, P(0, 1), P^2X\}$, и отображения $Pf : (X, \zeta) \longrightarrow (X_0, \zeta_0)$, где $f(x) = 0$ для $x \in (0, 1)$, $f(x) = 1$ для $x = 1$, доказывают, что аксиома III$'$ не имеет места и для P^2T, как детализации PT.

IV. *Поднятие композиции.* Напомним формулировку этой аксиомы. Пусть категория $\mathcal{C}'$ является $\mathcal{P}$-детализацией категории $\mathcal{C}$. Говорят, что для нее выполняется аксиома поднятия композиции, если для любых морфизмов $f : X \longrightarrow X_0$ и $g : X_0 \longrightarrow X_1$ категории $\mathcal{C}$ и любого морфизма $h' : X'_0 \longrightarrow X'_1$ категории $\mathcal{C}'$, накрывающего gf, существуют в $\mathcal{C}'$ такие морфизмы $f' : X' \longrightarrow X'_0$, $g' : X'_0 \longrightarrow X'_1$, накрывающие f и g, что $h' = g'f'$. f. В рассматриваемых нами случаях категория P^2T является детализацией категории T или является детализацией категории PT. Докажем, что в первом случае аксиома III не имеет места.

В диаграмме

$$(X, \tau) \xrightarrow{\ f\ } (X_0, \tau_0) \xrightarrow{\ g\ } (X_1, \tau_1)$$

(X, τ) и (X_0, τ_0) – топологические пространства из III$'$, (X_1, τ_1) – двоеточие с тривиальной топологией, f – отображение из III$'$, g – тождественное отображение. Рассмотрим P-топологическое пространство (X, ζ) из III$'$, тривиальное P-топологическое пространство (X_1, ζ_1), накрывающие топологические пространства (X, τ), (X_1, τ_1) и P – непрерывное отображение $h' : (X, \zeta) \longrightarrow (X_1, \zeta_1)$, накрывающее композицию gf. Но из III$'$ следует, что вообще не существует P-непрерывного отображения $f' : (X, \zeta) \longrightarrow (X_0, \zeta_0)$, накрывающего f каким бы ни было ζ_0, а потому поднять композицию gf в PT невозможно. Отсюда, как в III$'$, следует невозможность поднять эту композицию в P^2T. Аналогичными III$'$ рассуждениями доказывается невозможность поднять соответствующую композицию из PT в P^2T. Таким образом аксиома III не имеет места для P^2T, как детализации P и как детализации PT.

V. *Аксиома вложения*. Напомним формулировку этой аксиомы. Пусть категория $\mathcal{C}'$ является $\mathcal{P}$-детализацией категории $\mathcal{C}$. Говорят, что для нее выполняется аксиома вложения, если для любых объектов X', X'_0 категории $\mathcal{C}'$, накрывающих объекты X, X_0 категории $\mathcal{C}$, отображение $\mathcal{P}$ соответствующих множеств морфизмов $C(X', X'_0)$ в $C(X, X_0)$ является вложением. Эта аксиома имеет место для категории P^2T, как детализации категории T и детализации категории PT, так как в этих категориях каждое отображение (морфизм) их объектов однозначно определяется отображением точек этих объектов.

Мы выяснили, что категория P^2T, как впрочем и категория PT, рассматриваемые как *естественные детализации* категории T, являются довольно грубыми детализациями (половина аксиом детализации не выполняется). Относительно категорий T и PT другие детализации нам не известны, но для категорий PT и P^2T существуют разнообразные детализации.

3.4. Инъективные накрытия категории PT категорией P^2T

Мы рассмотрели аксиомы детализации, определенной естественными вложениями топологических пространств PX в топологические пространства P^2X. Можно рассматривать также разнообразные детализации $\mathcal{P} : P^2T \longrightarrow PT$, инициируемые некоторыми вложениями $i : PX \longrightarrow P^2X$ (инъективные детализации), определенными для всех множеств X. Вложений PX в P^2X существует весьма много, но не все они порождают категорные накрытия.

В качестве вложений $i : PX \longrightarrow P^2X$ можно рассматривать наряду с естественным также следующие вложения:

1. Для каждого $A \subset X$, т.е. $A \in PX$, полагаем
$$i(A) = \{\{x\} \mid x \in A\} \in P^2X.$$
2. Для каждого $A \subset X$, т.е. $A \in PX$, полагаем
$$i(A) = PA \in P^2X.$$
3. Для каждого $A \subset X$, т.е. $A \in PX$, полагаем
$$i(A) = QA \in P^2X.$$

Это, так сказать, основные случаи, но можно рассматривать и "промежуточные вложения", например, вложение, *сопоставляющее каждому множеству $A \in PX$ систему всех его конечных подмножеств или всех его компактных подмножеств или всех его связных подмножеств – возможны и другие варианты.*

Нетрудно убедиться в том, что во всех этих случаях мы действительно имеем *вложения* PX в P^2X. Каждое из таких вложений определяет некоторое соответствие $\mathcal{P} : P^2T \longrightarrow PT$, сопоставляющее каждому P^2-топологическому пространству (X, θ) P-топологическое пространство (X, ζ), где структура $\zeta = i^{-1}(\theta)$ индуцирована вложением i. Однако, в отличие от естественных вложений, при других вложениях мы не всегда можем доказать, что любое P^2-непрерывное отображение $f : X \longrightarrow Y$ является и P-непрерывным отображением, т.е. мы не можем доказать, что $\mathcal{P}$ является накрытием. Достаточным условием того, что соответствие $\mathcal{P}$ инициированное вложениями $i : PX \longrightarrow P^2X$ является накрытием можно сформулировать следующим образом:

(∗) *Для любого P^2-непрерывного отображения $f : X \longrightarrow Y$ имеет место включение $P^2f(i(PX)) \subset i(PY)$.*

Теорема. *Если для вложений $i : PX \longrightarrow P^2X$ выполняется условие $(*)$, то для соответствия $\mathcal{P}$, инициированного этими вложениями, из P^2-непрерывности отображения $f : X \longrightarrow Y$ следует его P-непрерывность.*

Доказательство. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ произвольное P^2-непрерывное отображение, то есть $P^2f : P^2X \longrightarrow P^2Y$ – непрерывное отображение. Заметим, прежде всего, что ограничение этого отображения на подпространстве $i(PX)$ будет также непрерывным отображением. В силу условия $(*)$ это отображение является непрерывным отображением подпространства $i(PX)$ в подпространство $i(PY)$ пространств P^2X и P^2Y, соответственно. Мы получаем, таким образом, коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & PX \arrow[r, "i"] \arrow[d, "Pf"'] & i(Px) \arrow[d, "P^2f"'] \\ Y \arrow[r, "j"] & PY \arrow[r, "i"] & i(PY) \end{tikzcd}$$

в которой j естественные вложения X и Y в PX и PY, соответственно, а i – гомеоморфизмы. Таким образом, из непрерывности отображения P^2f следует непрерывность отображения Pf, то есть из P^2-непрерывности отображения f следует его P-непрерывность.

Замечание. Мы доказали, что если вложения $i : PX \longrightarrow P^2X$ удовлетворяют условию $(*)$, то инициированное ими соответствие $\mathcal{P}$ является накрытием, т.е. категория P^2T является детализацией категории PT. Однако условие $(*)$ не является необходимым условием.

Не все вложения, описанные в начале этого раздела, удовлетворяют условию $(*)$.

1. Для каждого $A \subset X$, то есть для $A \in PX$, полагаем $i(A) = \{\{x\} \mid x \in A\} \in P^2X$. Такого типа вложения *удовлетворяют условию* $(*)$. Действительно, если $f : X \longrightarrow Y$ и $A \in PX$, то $B = f(A) \in PY$. Так как каждая точка $y \in B$ является f-образом некоторой точки $x \in A$, то $P^2f\big(i(A)\big) = i(B)$ и поэтому $P^2f\big(i(PX)\big) \subset i(PY)$.

2. Для каждого $A \subset X$, то есть для $A \in PX$, в качестве $i(A)$ рассматриваем систему всех его конечных подмножеств. Такого типа вложения *удовлетворяют условию* $(*)$. Действительно,

если $f : X \longrightarrow Y$ и $A \in PX$, то $B = f(A) \in PY$. Каждое конечное множество $S \subset B$ является f-образом некоторого конечного подмножества множества A, поэтому $P^2 f\bigl(i(A)\bigr) = i(B)$ и $P^2 f\bigl(i(PX)\bigr) \subset i(PY)$.

3. Для каждого $A \subset X$, то есть для $A \in PX$, полагаем $i(A) = PA \in P^2 X$. Такого типа вложения *удовлетворяют условию* $(*)$. Действительно, если $f : X \longrightarrow Y$ и $A \in PX$, то $B = f(A) \in PY$. Так как каждое множество $C \subset B$ является f-образом некоторого подмножества множества A, то $P^2 f\bigl(i(A)\bigr) = i(B)$ и поэтому $P^2 f\bigl(i(PX)\bigr) \subset i(PY)$.

4. Для каждого $A \subset X$, то есть для $A \in PX$, полагаем $i(A) = QA \in P^2 X$. Такого типа вложения *не удовлетворяют условию* $(*)$. Например, если f отображает множество X в точку y не одноточечного множества Y, то $P^2 f\bigl(i(X)\bigr)$ является одноэлементной системой, содержащей только множество y, в то время как в $i(y) = Qy$ входит и само множество Y.

5. Для каждого $A \subset X$, то есть для $A \in PX$, в качестве $i(A)$ рассматриваем систему всех его компактных подмножеств. Такого типа вложения *не удовлетворяют условию* $(*)$. Например, если X является счетным дискретным пространством и Y – сходящаяся последовательность вместе с ее предельной точкой, f – отображение X на Y, то $i(X)$ состоит только из конечных множеств, а $i(Y)$ содержит и бесконечные множества.

6. Для каждого $A \subset X$, то есть для $A \in PX$, в качестве $i(A)$ рассматриваем систему всех его связных подмножеств. Такого типа вложения *не удовлетворяют условию* $(*)$. Например, если $X = [0;1) \cup (1;2]$, $Y = [0;1]$, $f(x) = x$ на $[0;1)$ и $f(x) = x - 1$ на $(1;2]$, то $f(X) = Y$, $i(X)$ не содержит X, но содержит $[0;1])$ и $(1;2]$ и, следовательно, $P^2 f\bigl(i(X)\bigr)$ содержит $[0;1)$ и $(1;2]$. Но тогда $P^2 f\bigl(i(X)\bigr)$ должно будет содержать и все Y, что невозможно по определению $i(X)$.

Из только что рассмотренных нами вложений только первые три удовлетворяют условию $(*)$ и потому определяют соответствующие детализации $\mathcal{P} : P^2 T \longrightarrow PT$. Однако эти детализации, как и естественная, удовлетворяют не всем аксиомам. Дело в том, что каждая из этих детализаций определена соответствующими подпространствами $i(PX) \subset P^2 X$ и накрытие есть по существу просто переход от пространства $P^2 X$ к выделенному подпространству $i(PX)$. Но для фиксированной топологии ζ на $i(PX)$ не существует в общем случае минимальной топологии θ на P^2X, для которой $\zeta = \theta|i(PX)$, то есть аксиома III$'$ не выполняется. Вообще для детализаций инициированных вложениями $i : PX \longrightarrow P^2X$ выполняются те же аксиомы, что и для естественной детализации.

3.5. Проективная детализация

Мы можем ввести и детализацию в определенном смысле двойственную естественной. Рассмотрим произвольное P^2-топологическое пространство (X, θ) и отображение (*проекцию*) $p : P^2X \longrightarrow PX$, сопоставляющее любой системе $\alpha \in P^2X$ подмножеств множества X их объединение $p(\alpha) = \bigcup_{A\in\alpha} A$, принадлежащее PX. Эта проекция позволяет ввести на PX максимальную топологическую структуру $\zeta = p(\theta)$ при которой проекция будет непрерывным отображением (P^2X, θ) на (PX, ζ). Нетрудно заметить, что эта структура состоит из всех подмножеств множества PX, p-прообразы которых принадлежат θ. Мы получаем таким образом соответствие $\mathcal{P} : P^2T \longrightarrow PT$, $\mathcal{P}(P^2X, \theta) = (PX, p(\theta))$. *Это соответствие оказывается накрытием*, т.е. каждое P^2-непрерывное отображение $f : (X, \theta) \longrightarrow (Y, \vartheta)$ является и P-непрерывным отображением $f : (X, p(\theta)) \longrightarrow (Y, p(\vartheta))$. Действительно, пусть $f : X \longrightarrow Y$ – некоторое P^2-непрерывное отображение относительно указанных топологических структур и $\beta \in p(\vartheta)$ – открытое в $(Y, p(\vartheta))$ множество. Докажем, что в этом случае $\alpha = (Pf)^{-1}(\beta)$ является открытым в $(X, p(\theta))$ множеством. Так как диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & PX \arrow[d, "Pf"'] & P^2X \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "P^2f"'] \\
Y \arrow[r, "j"] & PY & P^2Y \arrow[l, "p"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то $p^{-1}((Pf)^{-1}(\beta)) = (P^2f)^{-1}(p^{-1}(\beta))$. Множество, стоящее в правой части этого равенства, открыто в (P^2X, θ), так как непрерывны отображения $p : (P^2Y, \vartheta) \longrightarrow (PY, p(\vartheta))$ и $P^2f : (P^2X, \theta) \longrightarrow (P^2Y, \vartheta)$. Таким образом, открыто в (P^2X, θ) множество $p^{-1}((Pf)^{-1}(\beta))$, а потому, в соответствии с определением структуры $p(\theta)$, множество $\alpha = (Pf)^{-1}(\beta)$ открыто в $(PX, p(\theta))$. Тем самым определена детализация $\mathcal{P}$: $P^2T \longrightarrow PT$, которую мы будем называть *проективной детализацией*.

Вложение $i_S : PX \longrightarrow P^2X$ сопоставляет каждому множеству $A \subset X$ систему $i_S(A) = \{\{x\} \mid x \in A\} \in P^2X$, состоящую из *одноточечных* множеств, поэтому множество $i_S(PX) \subset P^2X$ состоит из систем одноточечных множеств и, как легко заметить, содержит все такие системы. Таким образом *основную роль играет здесь совокупность P_0^2X всех систем, состоящих из одноточечных подмножеств множества X.* При задании топологической структуры на PX по топологической структуре на P^2X при вложении $i_S : PX \longrightarrow P^2X$ достаточно знать соответствующую топологическую структуру на P_0^2X.

Проективная детализация, как и рассмотренные выше инъективные детализации, удовлетворяет не всем основным аксиомам.

3.6. Локальные P^2-топологические пространства

Особое место занимают так называемые X-локальные и PX-локальные P^2-топологические пространства.

Определение. *P^2-топологическое пространство (X, θ) называется X-локальным, если любая сходимость в нем либо стационарна, либо является сходимостью к точке $x \in X$.*

Определение. *P^2-топологическое пространство (X, θ) называется PX-локальным, если любая сходимость в нем либо стационарна, либо является сходимостью к множеству $F \in PX$.*

Локальные P^2-топологические пространства можно вводить непосредственно, а можно вводить их, *локализуя* уже заданные. Процесс локализации состоит в опускании сходимостей (кроме, конечно, стационарных) к системам множеств, не принадлежащих PX (для PX-локальности), или не принадлежащих к X (для X-локальности). Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример. Пусть X – дискретное топологическое пространство, PX – пространство всех его подмножеств с топологией Виеториса, $P^2X = P(PX)$ – пространство замкнутых в PX множеств с топологией Виеториса. PX-локализацию этого пространства обозначим через $P_l(PX)$. Эту локализацию можно задать и непосредственно. Пусть $F \subset X$ – произвольное множество, U – произвольное базисное открытое в топологии Виеториса на P^2X множество, содержащее F. Будем считать, что направленность $(\alpha_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ систем замкнутых в PX множеств сходится к F, если для каждого U найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $\alpha_\lambda \in U$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$.

Аналогично определяется X-локализация пространства P^2X.

Замечание. X-локализацию любого P^2- топологического пространства P^2X можно получить X-локализацией его PX-локализации (транзитивность локализаций). Этот факт становится очевидным, если мы от сходимостей перейдем к заданию топологической структуры открытыми множествами. PX-локализация состоит тогда в присоединении к совокупности открытых множеств всех одноточечных множеств из $P^2X \setminus PX$, а X-локализация состоит в присоединении всех одноточечных множеств из $P^2X \setminus PX$.

§4. Пространство топологизаций

4.1. Топологизации $TX \subset P^2X$

Расссмотрим произвольное множество X и множество TX всех топологических структур на X. При построении той или иной топологической структуры на TX можно использовать различные подходы. Прежде всего заметим, что любую топологическую структуру, определенную на множестве X, можно рассматривать как соответствующую совокупность всех ее замкнутых множеств и, тем самым, мы получаем вложение TX в P^2X. Под P^2X мы должны понимать здесь совокупность *всех* систем подмножеств множества X. Введя ту или иную топологизацию множества P^2X мы вводим и некоторую топологизацию множества TX, как топологическую структуру подпространства. С другой стороны, каждую систему подмножеств множества X можно рассматривать как предбазу замкнутых множеств некоторой топологической структуры на X. Тем самым определена проекция t множества P^2X на TX. Таким образом, множество TX всех топологизаций множества X оказывается ретрактом множества P^2X всех совокупностей подмножеств множества X. Если на P^2X введена какая-нибудь топологическая структура, то ретракция переносит эту структуру на TX. Наиболее интересен случай, когда для некоторой топологической структуры на P^2X обе указанные процедуры переноса топологической структуры с P^2X на TX дают одинаковый результат. Такие топологические структуры на P^2X существуют. Действительно, рассмотрим на TX произвольную топологическую структуру α и t-прообраз этой структуры $\varsigma = t^{-1}(\alpha)$ на P^2X. Тогда $tt^{-1}(\alpha) = \alpha$, то есть обе процедуры переноса топологической структуры ς с P^2X на TX дают одинаковый результат. Любая такая топологическая структура ς характеризуется следующим свойством: если две системы α и α' вляются предбазами одной и той же топологической структуры ς на X, то они одновременно принадлежат или одновременно не принадлежат любому ς-открытому множеству.

Мы можем также рассматривать последовательность вложений
$$X \subset PX \subset TX \subset P^2X,$$
где вложение $X \subset PX$ означает сопоставление точкам x множества X одноточечных множеств $\{x\}$, вложение $PX \subset TX$ означает сопоставление подмножествам $F \subset X$ топологических структур $\{\emptyset, F, X\}$, вложение $TX \subset P^2X$ означает рассмотрение топологических структур на X, как совокупностей их замкнутых множеств. Так как любая топологическая структура на P^2X индуцирует соответствующие топологические структуры на TX, PX и X, то можно начинать с некоторой топологической структуры τ на X, продолжая ее последовательно на PX, TX и P^2X. *Фиксируя различные топологизации на X и различные процедуры перехода от выбранной топологической структуры на X к топологической структуре на PX, затем на TX и, наконец, на P^2X мы получаем всю совокупность интересующих нас пространств.*

Особое место занимает следующая конструкция, состоящая в построении некоторой топологической структуры непосредственно на TX. Прежде всего фиксируется какой-нибудь метод построения по каждой топологической структуре τ на произвольном множестве X топологической структуры $P^2\tau$ на множестве P^2X *всех систем подмножеств* множества X, и в качестве окрестностей $\tau \in TX$ берутся пересечения с TX ее $P^2\tau$-окрестностей. Тем самым *система окрестностей каждой точки $\tau \in TX$ определяется самой топологической структурой τ.* Эта конструкция интересна тем, что она не требует предварительной топологизации ни X, ни P^2X. Но эта процедура дает нам лишь слабо топологическую структуру на P^2X. Заметим вдобавок, что при введении топологических структур на PX и затем на P^2X, структуры Виеториса $V\tau$ и $V^2\tau$ здесь не годятся. Их следует заменить структурами $V'\tau$ и $(V')^2\tau$, где $V'\tau$ определено предбазой, состоящей нз множеств $P'G = \{A \mid clA \subset X\}$ и $Q'G = \{A \mid clA \cap G \neq \emptyset\}$, определенных для всех $G \in \tau$. Такую структуру будем называть *обобщенной структурой Виеториса.*

Замечание. В действительности $Q'G = QG$ для любого $G \in \tau$, так как если $A \in Q'G$, т.е. существует $x \in clA \cap G$, то $A \cap G \neq \emptyset$, т.е. $A \in QG$.

Замечание. Обобщенная структура Виеториса вводится на множестве PX *всех* подмножеств множества X. Однако ее можно задать в два этапа. Сначала ввести на PX, как на множестве всех τ-*замкнутых* подмножеств пространства X, структуру Виеториса, а затем продолжить ее на множество *всех* подмножеств множества X, считая, что все $V'\tau$-открытые множества $\mathcal{G}'$ образуются из соответствующих $V\tau$-открытых множеств $\mathcal{G}$ присоединением к ним всех множеств, τ-замыкание которых принадлежат $\mathcal{G}$.

В качестве примера рассмотрим счетное множество X и окрестности топологической структуры τ типа сходящейся последовательности. Для определенности мы будем считать, что τ – обычная топологическая структура на множестве $\{0, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. На PX и P^2X рассматриваем обобщенную топологию Виеториса. Открытые множества в X, т.е. элементы структуры τ, будем обозначать через G с индексами, открытые множества в PX, т.е. элементы $V'\tau$, будем обозначать через $\mathcal{G}$ с индексами. В качестве базы окрестностей точки $\tau \in P^2X$ можно взять все $(V')^2\tau$-открытые множества, содержащие τ, т.е. конечные пересечения множеств $P'\mathcal{G}_0$ и $Q\mathcal{G}_i$. Другими словами, $\tau \subset \mathcal{G}_0$, $\tau \cap \mathcal{G}_i \neq \emptyset$. Первое условие значительно ограничивает выбор $\mathcal{G}_0$, так как $X \in \tau$ и поэтому $X \in \mathcal{G}_0$. Но $\mathcal{G}_0$ является суммой каких-то пересечений PG_0 и QG_i, поэтому среди таких слагаемых должно быть пересечение, для которого $G_0 = X$, $PG_0 = PX$. Таким образом, $P\mathcal{G}_0$ содержит все множества, имеющие непустое пересечение с некоторыми множествами $G_1, \dots, G_n$. Так как нас интересуют базисные окрестности, то мы можем считать, что среди этих $G_1, \dots, G_n$ имеются одноточечные множества $\{1\}, \{\frac{1}{2}\}, \dots, \{\frac{1}{m}\}$ и некоторые бесконечные множества, либо не содержащие предельную точку, либо содержащие предельную точку вместе с некоторой ее окрестностью. Если $G \subset X$ – произвольное конечное множество, не содержащее предельной точки, то множество $PG \cap \bigcap_{x \in G} Q\{x\} = \{G\} \in V\tau$. Отсюда следует, что $P\mathcal{G}_0$ содержит все топологические структуры $\tau_G = \{\emptyset, G, X\}$ с единственным нетривиальным открытым множеством G. Тем не менее τ не является предельной точкой множества всех $\{\tau_G\}$, так как базисное множество $Q\tau_{G_1} \cap Q\tau_{G_2}$, где $G_1 \neq G_2$, является окрестностью точки τ, не содержащей ни одной топологической структуры τ_G.

Рассмотрим теперь окрестности топологической структуры τ_G для произвольного конечного множества, не содержащего предельную точку. Здесь имеется только одно нетривиальное замкнутое множество $F = X \setminus G$ и одно нетривиальное открытое множество G. Отсюда следует, что имеется единственная $V\tau_G$-окрестность точки $F \in PX$, а именно PX, и поэтому имеется единственная $V^2\tau_G$-окрестность точки $\tau_G \in P^2X$, а именно P^2X. Тем самым показано, что *рассмотренная нами слабая топологическая структура на P^2X индуцирует на TX кодискретную топологическую структуру.*

4.2. Метрическое пространство топологизаций

Для произвольного метрического пространства (X, d) определены *метрические пространства* (PX, Hd) и (P^2X, H^2d), где PX – множество *всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств* множества X и P^2X – совокупность *всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств* множества PX, а Hd и H^2d – *метрики Хаусдорфа* на PX и P^2X, соответственно. Так как нас интересует сейчас пространство топологизаций, точками которого являются топологические структуры на X, т.е. системы подмножеств, содержащие само множество X, то метрика d должна быть ограниченной. В качестве примера мы рассмотрим опять счетное множество $X = \{0, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ с обычной метрикой $d(x, y) = |x - y|$ и обычной топологической структурой τ. Как и в предыдущем примере рассмотрим окрестности точек τ и τ_G в TX. Окрестности точки τ отличаются здесь от ее окрестностей в предыдущем примере. Любая ε-окрестность точки $\tau \in TX$ содержит все $\tau_\varepsilon = \{X, \{\frac{1}{k} \mid \frac{1}{k-1} > \varepsilon\}, \emptyset\}$. Действительно, $\tau_\varepsilon \subset \tau$ для любого положительного ε, поэтому

$$H^2d(\tau, \tau_\varepsilon) = \min\Big\{\frac{1}{k} \mid \frac{1}{k-1} > \varepsilon\Big\} < \varepsilon.$$

С другой стороны, если G_1 и G_2 – различные конечные множества и число ε достаточно мало, то $H^2d(G_1, G_2) > \varepsilon$, следовательно H^2d определяет на множестве $\{\tau_G \mid G \in \tau\}$ дискретную топологическую структуру.

4.3. Пространства топологизаций конечных множеств

В качестве конечных множеств мы будем рассматривать здесь множества $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$ натуральных чисел. При этом мы будем пользоваться очевидным соотношением $\mathbb{N}_n = \{n\} \cup \mathbb{N}_{n-1}$. Рассмотрим простейшие случаи.

$n = 1$, $\mathbb{N}_1 = \{1\}$. Здесь $T\mathbb{N}_1$ состоит из одной топологической структуры, одновременно дискретной и кодискретной. Пространство топологизаций тривиально.

$n = 2$, $\mathbb{N}_2 = D = \{1, 2\}$. Обычно это множество называют двоеточием. Здесь TD состоит из четырех топологических структур: кодискретного двоеточия $\{D, \emptyset\}$, дискретного двоеточия $\{D, \emptyset, \{1\}, \{2\}\}$, правого колмогоровского двоеточия $\{D, \emptyset, \{1\}\}$ и левого колмогоровского двоеточия $\{D, \emptyset, \{2\}\}$.

$n = 3$, $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$. Здесь $T\mathbb{N}_3$ состоит из 28 топологических структур. Четыре из них индуцируют на $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$ кодискретную структуру, по восьми индуцируют на $\mathbb{N}_2$ дискретную топологическую структуру, структуру правого колмогоровского двоеточия и структуру левого колмогоровского двоеточия.

§5. Пространства разбиений

5.1. Разбиения и факторпространства

Определение. *Разбиением множества X называют такую совокупность Σ его подмножеств (элементов разбиения), что*

1. $\bigcup_{C \in \Sigma} C = X$;
2. $C_1 \bigcap C_2 = \emptyset$ *для любых* $C_1 \neq C_2$ *из* Σ.

Любое разбиение множества X является элементом множества P^2X. Все разбиения составляют его часть, поэтому любая топологизация множества P^2X дает нам некоторую их топологизацию. Для топологического пространства (X, τ) разбиение множества X можно рассматривать как разбиение самого (X, τ). При этом элементы разбиения не обязаны быть τ-замкнутыми множествами.

Замечание. Для простоты мы будем опять говорить о топологическом пространстве X, опуская обозначение его топологической структуры τ. Так, например, мы будем говорить о разбиении топологического пространства X.

Определение. *Пусть Σ – произвольное разбиение топологического пространства X, $c : X \longrightarrow \Sigma$ – каноническое отображение, для которого $c(x) = C \Longleftrightarrow x \in C \in \Sigma$. На этом разбиении можно ввести* *топологическую структуру Σ-факторпространства – максимальную структуру, при которой $c : X \longrightarrow \Sigma$ – непрерывное отображение. Полученное пространство назовем пространством разбиения Σ.*

Таким образом, каждому разбиению Σ топологического пространства X канонически однозначно соответствует топологическое пространство (разбиения) Σ. С другой стороны, можно считать исходными объектами не разбиения, а отображения.

Определение. *Пусть f – непрерывное отображение топологического пространства X на топологическое пространство Y. Это отображение $f : X \longrightarrow Y$ определяет на X разбиение Σ, состоящее из f-прообразов точек $y \in Y$. Пространство этого разбиенния назовем f-факторпространством.*

Замечание. Топологическая структура f-факторпространства определена однозначно топологической структурой пространства X и отображением f. С другой стороны, топологическая структура на X определена отображением $f : X \longrightarrow Y$ и топологической структурой пространства Y не однозначно. Простейший пример: X – не одноточечное множество с произвольной топологической структурой, Y – одноточечное множество. В этом случае отображение $f : X \longrightarrow Y$ всегда непрерывно и Y всегда является f - факторпространством пространства X.

Определение. *f-факторпространство Y и g-факторпространство Z называются факторно изоморфными, если $f : X \longrightarrow Y$ и $g : X \longrightarrow Z$ – непрерывные отображения, $h : Y \longrightarrow Z$ – гомеоморфизм и $g = h \circ f$.*

Нетрудно доказать, что любое f-факторпространство Y топологического пространства X факторно изоморфно соответствующему Σ-факторпространству Σ, где $\Sigma = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$. Действительно, полагаем $h : Y \longrightarrow \Sigma$, где $h(y) = C \Longrightarrow C = f^{-1}(y)$ для любого $y \in Y$. Тогда

$$hf(x) = C \Longrightarrow C = f^{-1}(f(x)) \Longrightarrow x \in C \Longrightarrow c(x) = C$$

для любой точки $x \in X$, т.е. $c = h \circ f$. Из этого соотношения и определений топологических структур Σ-факторпространства и f-факторпространства следует то, что h – гомеоморфизм.

Таким образом изучение всех факторпространств любого топологического пространства сводится к изучению его канонических факторпространств и, следовательно, к изучению всех его разбиений. С другой стороны, изучение всех разбиений любого топологического пространства сводится к изучению соответствующих факторпространств. Однако это разные теории. У каждой из них своя терминологияи и свой путь развития. Мы сейчас займемся изучением разбиений, как основных объектов некоторой теории.

5.2. Разбиения

До сих пор мы не накладывали ограничения на разбиения и, следовательно, на факторпространства. Среди возможных ограничений выступают прежде всего аксиомы отделимости. Естественным образом формулируются аксиомы отделимости в терминах соответствующих канонических факторпространств.

Определение. *Пусть Σ – некоторое разбиение топологического пространства X. Будем называть это разбиение риссовским или же T_1-разбиением, если его каноническое факторпространство является риссовским пространством (T_1-пространством).*

Определение. *Пусть Σ – некоторое разбиение топологического пространства X. Будем называтб это разбиение хаусдорфовым или же T_2-разбиением, если его каноническое факторпространство является хаусдорфовым пространством (T_2-пространством).*

Аналогично вводятся для разбиений и все остальные аксиомы отделимости.

Замечание. Для любого топологического пространства X понятия T_1-разбиения и T_2-разбиения являются естественными обобщениями понятий T_1-пространства и T_2-пространства. Действительно, X является T_1-пространством или же T_2-пространством тогда и только тогда, когда его разбиение на одноточечные множества является T_1-разбиением или же T_2-разбиением, соответственно.

Естественно желание дать, так сказать, "внутренние" определения этих понятий, т.е. определения в терминах самих разбиений, не прибегая к факторпространствам.

Определение. *Будем говорить, что открытые в X множества*

U_1 и U_2 образуют Σ-свободную пару, если ни один элемент разбиения Σ не пересекается одновременно с U_1 и U_2.

Замечание. Для любого разбиения Σ произвольного топологического пространства X множество Σ-свободных пар не пусто, так как оно всегда содержит пару $X, \emptyset$.

Замечание. Любые множества U_1 и U_2, образующие Σ-свободную пару, имеют пустое пересечение, так как из $x \in U_1 \cap U_2$ следует, что элемент разбиения $C \in \Sigma$, содержащий точку x, имеет непустое пересечение как с U_1, так и с U_2, что противоречит определению Σ-свободной пары.

Определение. *Будем говорить, что разбиение Σ определяется своими Σ-свободными парами, если каждое множество, не содержащееся ни в каком элементе этого разбиения, имеет не пустое пересечение с обоими множествами некоторой Σ-свободной пары.*

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}^2$ – плоскость с обычной топологической структурой, разбиение Σ образовано вертикальными прямыми. Тогда пара U_1, U_2 открытых в X множеств Σ-свободна тогда и только тогда, когда не пересекаются их проекции на горизонтальную прямую. Докажем, что это разбиение определяется своими Σ-свободными парами. Пусть A – множество, не содержащееся ни в какой вертикальной прямой, т.е. A содержит пару точек, лежащих на различных вертикальных прямых. В этом случае достаточно малые окрестности этих точек образуют Σ-свободную пару и A пересекается с обоими этими множествами.

В этом примере мы имели дело с риссовским разбиением. Рассмотрим теперь пример с не риссовским разбиением.

Пример. Пусть $D = \{1, 2\}$ с топологической структурой колмогоровского двоеточия, то есть $\tau = \{\emptyset, \{0\}, D\}$ и $\Sigma = \{\{0\}, \{1\}\}$. Здесь будут только две Σ-свободные пары, а именно $\{0\}, \emptyset$ и $D, \emptyset$. Но точно такие же Σ-свободные пары будут для разбиения того же топологического пространства, состоящего только из D.

Этот пример показывает, что в общем случае не обязательно риссовских разбиений Σ совокупность Σ-свободных пар не определяет само разбиение.

Следующий пример показывает, что даже риссовость разбиения Σ не гарантирует его задания Σ-свободными парами.

Пример. Пусть X – топологическое пространство с бесконечным числом точек, в котором замкнутыми являются только конечные множества, Σ – его разбиение на одноточечные подмножества. Так как любые два непустые открытые множества имеют непустое пересечение, то любая Σ-свободная пара содержит пустое множество. Но точно такие же Σ-свободные пары будут для разбиения того же топологического пространства, состоящего только из X.

Можно доказать, что хаусдорфовы разбиения Σ определяются своими Σ-свободными парами.

Теорема. *Любое хаусдорфово разбиние Σ произвольного топологического пространства X однозначно определяется множеством всех Σ-свободных пар.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$ и совокупность всех Σ-свободных пар открытых множеств, состоящих из множеств, одно из которых содержит эту точку. Пусть U_1, U_2 – произвольная такая пара. Будем считать для определенности, что именно U_1 содержит точку x и поэтому $x \notin U_2$. Объединение U_x всех таких множеств U_2 не содержит точку x и поэтому $x \in C_x = X \setminus U_x$. Ясно, что элемент C разбиения Σ, содержащий точку x, содержится в C_x. Докажем теперь, что $C_x = C \in \Sigma$. Рассмотрим в связи с этим пространство разбиения Σ. По условию теоремы оно является хаусдорфовым пространством. Если предположить теперь, что $C_x \neq C$, то будет существовать точка $y \in C_x \neq C$, причем $c(y) \neq c(x)$. Но так как Σ – хаусдорфово разбиение, найдутся такие непересекающиеся открытые в пространстве разбиения Σ множества U и V, что $x \in U$ и $y \in V$. Тогда множества $c^{-1}(U)$ и $c^{-1}(V)$ образуют Σ-свободную пару, причем $x \in c^{-1}(U)$ и $y \in c^{-1}(V)$. Но отсюда следует, что $y \in U_x$, что противоречит нашему предположению.

Каждое разбиение топологического пространства X является некоторым подмножеством пространства PX и одновременно точкой пространства P^2X. Обозначим через DX некоторое множество разбиений пространства X. Тогда $\Sigma \in DX \subset P^2X$. Все эти множества можно так или иначе топологизировать. Мы остановимся здесь на топологии Виеториса для замкнутых множеств. В этом случае мы должны доказать, что топологизируемое множество состоит из замкнутых в PX множеств. К сожалению, как показывает следующий пример, само разбиение может и не быть таковым.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}^2$ с обычной топологической структурой τ. Рассмотрим разбиение Σ плоскости, состоящее из некоторой вертикальной прямой и одноточечных множеств. На PX рассмотрим топологию Виеториса $V\tau$. Нетрудно заметить, что замыкание Σ в топологии Виеториса $V\tau$ будет состоять из *всех* одноточечных множеств плоскости и отмеченной вертикальной прямой, таким образом Σ не является $V\tau$-замкнутым множеством. Однако ему можно сопоставить другое множество, замкнутое в PX.

Определение. *Пусть Σ – некоторое разбиение пространства X. Заполнением разбиения Σ мы назовем покрытие X, состоящее из всех множеств, содержащихся в элементах этого разбиения. Такое заполнение будем обозначать через $P\Sigma$.*

Теорема. *Если некоторое разбиение определено своими свободными парами, то его заполнение является замкнутым множеством пространства PX в топологии Виеториса.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что если множества U_1, U_2 образуют Σ-свободную пару, то множество $QU_1 \cap QU_2$ не содержит ни одно множество $C_1 \subset C \in \Sigma$. С другой стороны, если множество A не содержится ни в каком элементе разбиения Σ, то по условию теоремы найдется такая Σ-свободная пара U_1, U_2, что $A \in QU_1 \cap QU_2$. Тем самым доказано, что $P\Sigma$ является замкнутым множеством PX в топологии Виеториса.

Теорема. *Любое разбиение однозначно определено своим заполнением.*

Доказательство. Пусть Σ_1 и Σ_2 – различные разбиения топологического пространства X. Тогда в одном из этих разбиений, например, в Σ_1, найдется элемент C_1, не принадлежащий Σ_2. Пусть $C_2 \in \Sigma_2$ имеет непустое пересечение с C_1 и $x_1 \in C_1 \cap C_2$. Так как $C_1 \neq C_2$, найдется точка $x_2 \neq x_1$, не принадлежащая одному из этих множеств, но принадлежащая другому. Тогда множество $\{x_1, x_2\}$ содержится в одном из этих множеств и не содержится в другом, например, содержится в C_1 и не содержится в $C_2 \in \Sigma_2$. Более того, оно не содержится ни в каком элементе разбиения Σ_2, так как $x_2 \in C_2 \in \Sigma_2$. Но это означает, что заполнения рассматриваемых разбиений не совпадают.

Таким образом каждому f-факторпространству пространства X можно однозначно сопоставить не только разбиение Σ_f, но и его заполнение $P\Sigma_f$. Каждое такое заполнение является замкнутым подмножеством пространства PX в топологии Виеториса. Таким образом появляется возможность введения топологии Виеториса на множестве заполнений всех разбиений, топологизации множества разбиений и факторпространств пространства X. Надо, однако, учитывать следующее обстоятельство. Если $h : X \longrightarrow X$ – гомеоморфизм и Σ – некоторое разбиение пространства X, то $h\Sigma$ будет также разбиением пространства X. Факторпространства, соответствующие этим разбиениям, будут факторно изоморфными, т.е. по-существу одинаковыми.

В качестве интересного примера можно рассмотреть факторпространства единичного отрезка $X = [0;1]$. Класс топологических пространств, являющихся факторпространствами единичного отрезка, включает, в частности, все топологические многообразия. Мы рассмотрим сейчас факторпространство разбиения Σ_K, состоящего из стандартного канторового дисконтинуума и одноточечных множеств. Нетрудно понять, что факторпространством этого разбиения будет букет счетного числа окружностей (с одной общей точкой). Заметим, что каждая окрестность этой точки содержит почти все окружности букета (т.е. все, кроме конечного числа). Топологическая структура каждой из этих окружностей обычная. В P^2X с топологией Виеториса этот букет будет предельной точкой конечных букетов окружностей при неограниченном возрастании их числа. Отметим, что разбиениям была посвящена дипломная работа В. М. Ивановой (1947), к сожалению, так и не опубликованная.

Теория разбиений является частью общей теории покрытий. Представляют особый интерес покрытия, имеющие некоторые сходные черты с заполнениями разбиений, например, покрытия, получаемые объединением некоторых PA, где PA – множество *всех* подмножеств множества A или всех открытых (замкнутых) его подмножеств. Такие покрытия будем также называть *заполненными*. Однако заполненные покрытия могут быть еще далеки от заполнений разбиений. Например, если X является объединением возрастающей последовательности $\{X_i\}$ множеств, то $\bigcup PX_i$ не содержит ни одного максимального элемента. Покрытия с максимальными заполненными элементами уже ближе к заполнениям разбиений. Таковым является покрытие $P[-1;0] \cup [0;1]$ пространства $X = [-1;1]$ с обычной топологией.

ГЛАВА II

Структурированные множества

Введение

Понятие структурированного множества довольно широко. Уже выделение одной точки в неодноточечном множестве превращает его в структурированное множество. Класс таких элементарно структурированных множеств приобретает некоторые черты, отличающие его от класса обычных не структурированных множеств. Например, присоединение любого множества к элементарно структурированному множеству будет элементарно структурированным множеством, а объединение двух таких множеств может оказаться не элементарно структурированным множеством. Уже такая простейшая структурированность проявляется при определении допустимых отображений. Мы уже не можем рассматривать произвольные отображения, – выделенные точки должны переходить в выделенные точки.

В предыдущей главе мы рассматривали так называемые *P^2-топологические пространства* (X, θ), где X – произвольно фиксированное множество, а θ – топологическая структура на множестве P^2X, называемая также *P^2-топологической структурой на* X. Мы видим, что θ выступает здесь и как P^2-топологическая структура на X и как топологическая структура на P^2X. Более того, θ можно рассматривать и как P-топологическую структуру на множестве PX. Мы имеем, таким образом, три соответствующие друг другу пространства, расположенные на разных уровнях, а именно:

P^2-топологическое пространство (X, θ),

P-топологическое пространство (PX, θ),

топологическое пространство (P^2X, θ).

При этом необходимо помнить, что, хотя X может быть произвольным множеством без всяких структурных ограничений, множества PX и P^2X имеют вполне определенные структуры – они *структурированы*, как мы будем говорить. *Структурированные множества играют важную роль, изучению их посвящены многие разделы математики.* В этой главе мы рассмотрим топологические структуры, определенные на некоторых структурированных множествах.

Структурированность проявляется уже при определении отображений соответствующих пространств.

Для P^2-топологических пространств (X, θ), (X', θ') допустимо любое отображение $f : X \longrightarrow X'$, лишь бы соответствующее ему отображение $P^2 f : (P^2 X, \theta) \longrightarrow (P^2 X', \theta')$ было бы непрерывным.

Для P-топологических пространств (PX, θ), (PX', θ')) допустимо любое отображение $Pf : PX \longrightarrow PX'$, порожденное отображением f, причем отображение $P^2 f : (P^2 X, \theta) \longrightarrow (P^2 X', \theta')$ должно быть непрерывным.

Для топологических пространств $(P^2 X, \theta)$, $(P^2 X', \theta')$ допустимы только отображения $P^2 f : P^2 X \longrightarrow P^2 X'$, порожденные отображением f, причем отображение $P^2 f : (P^2 X, \theta) \longrightarrow (P^2 X', \theta')$ должно быть непрерывным.

Замечание. Для упрощения записи можно пользоваться унифицированным обозначением этих отображений, а именно

$f : X \longrightarrow X'$,

$f : PX \longrightarrow PX'$,

$f : P^2 X \longrightarrow P^2 X'$,

считая, что $X \subset PX \subset P^2 X$, $X' \subset PX' \subset P^2 X'$, и последовательно расширяя область задания отображения f.

1. Структурность битопологических пространств

Другие примеры проявления структурности множеств при определении допустимых отображений дают нам рассматриваемые ниже битопологические пространства и парно топологические пространства.

Битопологическим пространством мы называли пару (X, β), где X – произвольное множество, а β – топологическая структура на множестве $X \times X$, называемая *битопологической структурой* на X. Здесь β выступает сразу в двух качествах – как топологическая структура на $X \times X$ и как битопологическая структура на X. Мы имеем опять соответствующие друг другу пространства:

битопологическое пространство (X, β),

топологическое пространство $(X \times X, \beta)$.

И опять структурность множества $X \times X$ проявляется при определении допустимости отображений.

Для битопологических пространств (X, β), (X', β') допустимо любое отображение $f : X \longrightarrow X'$, лишь бы соответствующее отображение $f \times f : (X \times X, \beta) \longrightarrow (X' \times X', \beta')$ было бы непрерывным.

Для топологических пространств $(X \times X, \beta)$, $(X' \times X', \beta')$ допустимы только отображения $f \times f : X \times X \longrightarrow X' \times X'$, причем $f \times f : (X \times X, \beta) \longrightarrow (X' \times X', \beta')$ должно быть непрерывным.

Замечание. Для упрощения записи можно пользоваться унифицированным обозначением этих отображений, а именно

$f : X \longrightarrow X'$,

$f : X \times X \longrightarrow X' \times X'$,

считая, что X и X' диагонально вложены в $X \times X$ и, соответственно, $X' \times X'$ и при этом расширяя область задания f.

Довольно далеко продвинутая теория битопологических пространств была изложена в моей книге“Битопологические пространства” (Записки научных семинаров ПОМИ, том 242, 1997, с. 7–216), в главах 5 и 6 первой части книги “Пространственные структуры, их теория и применение” (Записки научных семинаров ПОМИ, том 287, 2002, с. 142–226) и в главе 3 второй части этой книги (Записки научных семинаров ПОМИ, том 313, 2004, с. 91–130).

2. Структурность парно топологических пространств

Парно топологическим пространством мы будем называть тройку (X, Y, β), где X и Y – произвольные множества, а β – топологическая структура на множестве $X \times Y$, называемая *парно топологической структурой* на паре (X, Y). Здесь β выступает опять в двух качествах, как топологическая структура на $X \times Y$ и как парно топологическая структура на (X, Y). Мы имеем здесь опять соответствующие друг другу пространства:

парно топологическое пространство (X, Y, β),

топологическое пространство $(X \times Y, \beta)$.

Структурность множества $X \times Y$ опять проявляется в определении допустимости отображений.

Для парно топологических пространств (X, Y, β), (X', Y', β') допустима любая пара отображений $f : X \longrightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$, лишь бы отображение $f \times g : (X \times Y, \beta) \longrightarrow (X' \times Y', \beta')$, порожденное отображениями f и g, было бы непрерывным.

Для топологических пространств $(X \times Y, \beta)$, $(X' \times Y', \beta')$ допустимы только отображения $f \times g : X \times Y \longrightarrow X' \times Y'$, для которых $f \times g : (X \times Y, \beta) \longrightarrow (X' \times Y', \beta')$ – непрерывное отображение.

Частные случаи парно топологических структур рассматривались в главе 2 второй части упомянутой выше книги (Записки научных семинаров ПОМИ, том 313, 2004, с. 56–90). Там же рассматривалась их связь типа двойственности с топологическими структурами на множествах $C(X,Y)$ отображений X в Y, которые канонически эквивалентны так называемым P-парно топологическим структурам. В отличие от битопологических структур, определяемых на произведениях $X \times X$ одинаковых множеств, парно топологические структуры определяются на произведениях $X \times Y$ различных, в общем случае, множеств.

Замечание. Тройку (X, X, β) мы можем рассматривать и как битопологическое пространство, и как парно топологическое пространство, но в первом случае допустимы только отображения $f \times f : (X \times X, \beta) \longrightarrow (X' \times X', \beta')$, а во втором случае допустимы отображения $f \times g : (X \times X, \beta) \longrightarrow (X' \times X', \beta')$, где f и g в общем случае не совпадают. Категорию битопологических пространств можно рассматривать как подкатегорию категории парно топологических пространств, но это будет не полная подкатегория (не все допустимые отображения категории являются допустимыми в этой подкатегории). Однако теория парно топологических пространств в общем напоминает теорию битопологических пространств. В частности, определения подпространств, фактор-пространств, произведений и свободных объединений парно топологических пространств повторяют соответствующие определения для битопологических пространств.

§1. P-битопологические структуры

1.1. Категория P-битопологических пространств

Определение. Пусть X – некоторое множество и $P(X \times X)$ множество некоторых подмножеств множества $X \times X$. Топологическую структуру ϑ на $P(X \times X)$ будем называть *P-битопологической структурой* на X, пару (X, ϑ) будем называть *P-битопологическим пространством.*

В связи с этим определением мы можем рассмотреть три типа пространств:

P-битопологическое пространство (X, ϑ),

P-топологическое пространство $(X \times X, \vartheta)$,

топологическое пространство $(P(X \times X), \vartheta)$.

Во втором и третьем вариантах мы опять встречаемся с отображениями структурированных множеств.

Для P-битопологических пространств (X,ϑ), (X',ϑ') допустимо любое отображение $f : X \longrightarrow X'$, лишь бы отображение $P(f\times f) : (P(X\times X),\vartheta) \longrightarrow (P(X'\times X'),\vartheta')$ было бы непрерывным,

Для P-топологических пространств $(X\times X,\vartheta)$, $(X'\times X',\vartheta')$ допустимы только отображения $f\times f : (X\times X) \longrightarrow (X'\times X')$, порожденые отображением f, причем $P(f\times f) : (P(X\times X),\vartheta) \longrightarrow (P(X'\times X'),\vartheta')$, должно быть непрерывным.

Для топологических пространств $(P(X\times X),\vartheta)$, $(P(X'\times X'),\vartheta')$ допустимы только отображения $P(f\times f) : (P(X\times X) \longrightarrow (X'\times X')$, порожденные отображением f, причем $P(f\times f) : (P(X\times X),\vartheta) \longrightarrow (P(X'\times X'),\vartheta')$, должно быть непрерывным.

Замечание. Нетрудно понять, что мы можем рассматривать здесь три соответствующие категории. По ситуации можно пользоваться наиболее подходящей из них, но основной будем все же считать первую – категорию P-битопологических пространств.

Замечание. Для упрощения записи можно пользоваться унифицированным обозначением этих отображений, а именно

$f : X \longrightarrow X'$,

$f : X\times X \longrightarrow X'\times X'$,

$f : P(X\times X) \longrightarrow P(X'\times X')$.

последовательно расширяя область задания отображения f.

1.2. Прямоугольные P-битопологические пространства

Теория P-битопологических структур имеет много общего с теорией P-топологических структур, но имеет и свои особенности. Объединяет их то, что они обе имеют дело с топологическими структурами на совокупности подмножесть некоторого множества. Различает же их то, что P-топологическая структура на X является топологической структурой на некоторой совокупности PX подмножеств самого множества X, в то время как P-битопологическая структура на X является топологической структурой на некоторой совокупности $P(X\times X)$ подмножеств произведения $X\times X$, то есть структурированного (над X) множества.

Наряду с множеством $P(X\times X)$ мы можем рассматривать систему вложений

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\ i\ } & X \times X & & \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i}\downarrow & & \\ PX & \xrightarrow{\ i\ } & PX \times PX & \xrightarrow{\ i\ } & P(X \times X) \end{array}$$

Эта диаграмма (назовем ее P-диаграммой) вложений множеств коммутативна. Действительно, пусть $x \in X$. В $X \times X$ ей соответствует точка (x, x), которой в $PX \times PX$ соответствует одноточечное множество $\{x\} \times \{x\} \subset P(X \times X)$. В PX точке x соответствует множество $\{x\}$, которой в $PX \times PX$ соответствует множество $\{x\} \times \{x\} \subset P(X \times X)$. Любая определенная на $P(X \times X)$ топологическая структура индуцирует соответствующие топологические структуры на множествах X, $X \times X$, PX, $PX \times PX$. С другой стороны, мы можем начинать с произвольной топологической структуры на X и, фиксировав операции перехода к битопологиям и P-топологиям, перейти к P-битопологиям последовательностью

$$X \longrightarrow X \times X \longrightarrow PX \times PX \longrightarrow P(X \times X).$$

или же последовательностью

$$X \longrightarrow PX \longrightarrow PX \times PX \longrightarrow P(X \times X).$$

На множестве $PX \times PX$ можно определить таким образом две, вообще говоря различные, топологические структуры. Одна из них определяется топологической структурой τ на X переходом к β на $X \times X$, к топологической структыре ϑ на $PX \times PX$ и, наконец, к θ на $P(X \times X)$, другая же получается переходом от τ на X к ζ на PX, к ϑ' на $PX \times PX$ и к θ' на $P(X \times X)$. Точками множества $PX \times PX$ являются произведения $A \times B$ подмножеств множества X, так называемые *прямоугольные множества.* Если при задании того или иного P-битопологического пространства мы ограничимся только прямоугольными множествами, то мы будем называть его *прямоугольным P-битопологическим пространством.* Заметим, что если операции перехода к битопологиям и P-топологиям определенным образом согласованы, то на $PX \times PX$ эти топологии совпадают, в общем же случае они различны.

Рассмотрим, например, следующие переходы к битопологиям и P-топологиям. Для произвольного топологического пространства X под PX будем понимать пространство компактных подмножеств пространства X в топологии Виеториса, под (X,β) будем понимать битопологическое пространство, в котором β – прямое произведение топологических структур пространства X. Выделим некоторые базисы открытых множеств пространств $PX \times PX$ и $P(X \times X)$. Точками пространства PX являются компактные подмножества пространства X, точками пространства $PX \times PX$ являются произведения $C \times C'$ компактных подмножеств пространства X. В качестве базиса пространства PX в топологии Виеториса можно взять совокупность множеств вида $PG_0 \cap QG_1 \cap \ldots \cap QG_m$, где $G_0, G_1, \ldots, G_m$ – открытые в X множества, следовательно в качестве базиса открытых множеств пространства $PX \times PX$ можно взять совокупность множеств вида

$$(PG_0 \cap QG_1 \ldots \cap QG_m) \times (PG'_0 \cap QG'_1 \ldots \cap QG'_n).$$

При этом можно считать, что все $G_1, \ldots, G_m$ содержатся в G_0, все $G'_1, \ldots, G'_n$ содержатся в G'_0 и поэтому все $G_i \times G'_j$ содержатся в $G_0 \times G'_0$. В $PX \times PX$ можно определить множества $P(G_0 \times G'_0)$ и $Q(G_i \times G'_j)$, как совокупности прямоугольных множеств $A \times B$, $A \subset X$, $B \subset X$, содержащихся в $G_0 \times G'_0$ и, соответственно, имеющих непустое пересечение с $G_i \times G'_j$. Нетрудно доказать соотношения

$$PG_0 \times PG'_0 = P(G_0 \times G'_0),$$

$$QG_i \times QG'_j = Q(G_i \times G'_j),$$

$$(PG_0 \times PG'_0) \cap (QG_i \times QG'_j) \subset (PG_0 \times PG'_0) \cap (PG_0 \times QG'_j),$$

$$(PG_0 \times PG'_0) \cap (QG_i \times QG'_j) \subset (PG_0 \times PG'_0) \cap (QG_i \times PG'_0).$$

Из этих соотношений следует, что в качестве базиса открытых множеств пространства $PX \times PX$ можно взять совокупность множеств вида

$$P(G_0 \times G'_0) \cap Q(G_1 \times G'_1) \cap \ldots \cap Q(G_i \times QG'_j) \cap \ldots \cap Q(G_m \times G'_n).$$

В качестве базисных открытых множеств пространства $P(X \times X)$ в топологии Виеториса можно взять множества

$$PU_0 \cap QU_1 \cap \ldots \cap QU_n.$$

Докажем теперь, что рассмотренные выше топологии на $PX \times PX$ совпадают. Пространство $PX \times PX$ в топологии Виеториса имеет базис открытых множеств вида

$$P(G_0 \times G_0') \cap Q(G_1 \times G_1') \cap \ldots \cap Q(G_i \times QG_j') \cap \ldots \cap Q(G_m \times G_n').$$

Если теперь рассматривать операции P и Q, как операции в $P(X \times X)$, то та же формула оказывается заданием некоторого базисного множества пространства $P(X \times X)$ в топологии Виеториса, причем его пересечение с $PX \times PX$ будет здесь исходным базисным множеством. Тем самым доказано, что топологическая структура произведения $PX \times PX$ не тоньше, чем топологическая структура, индуцируемая на множестве $PX \times PX$ топологической структурой на $P(X \times X)$. Докажем теперь обратное соотношение между этими топологическими структурами. Для этого достаточно доказать, что для любого открытого в $X \times X$ множества U пересечения множеств PU и QU с $PX \times PX$ являются открытыми множествами произведения $PX \times PX$. Пусть $C_0 \times C_0' \in PX \times PX$, где C_0 и C_0' – компактные подмножества в X. Тогда $C_0 \times C_0'$ – компактное множество в $X \times X$. Если $C_0 \times C_0' \subset U$, где U – открытое в $X \times X$ множество, то, в силу компактности $C_0 \times C_0'$, найдутся открытые в X множества G_0, G_0', такие, что $C_0 \times C_0' \subset G_0 \times G_0' \subset U$. Тем самым доказано, что пересечение PU с $PX \times PX$ является открытым множеством прямого произведения $PX \times PX$. Нетрудно доказать аналогичное утверждение для QU. Действительно, в этом случае даже не используется компактность множества $C_0 \times C_0'$. Если $(C_0 \times C_0') \cap U \neq \emptyset$, то есть некоторая точка $(x, y) \in X \times X$ принадлежит этому пересечению, то найдутся такие открытые в X множества G и G', что $(x, y) \in G \times G' \subset U$. Тогда $C_0 \times C_0' \in Q(G \times G')$, то есть $C_0 \times C_0'$ входит в пересечение $Q(G \times G')$ с $PX \times PX$ с некоторой окрестностью. Тем самым доказано, что пересечение QU с $PX \times PX$ вляется открытым множеством произведения $PX \times PX$.

1.3. P-битопологические подпространства и факторпространства

Определение. *Пусть (X, ϑ) – произвольное P-битопологическое пространство и $X' \subset X$. Тогда $P(X' \times X') \subset P(X \times X)$ и поэтому топологическая структура ϑ, определенная на $P(X \times X)$, индуцирует на $P(X' \times X')$ топологическую структуру $\vartheta' = \vartheta \mid P(X' \times X')$.*

P-битопологическое пространство (X', ϑ') будем называть подпространством P-битопологического пространства (X, ϑ).

Замечание. Соотношение $P(X' \times X') \subset P(X \times X)$ непосредственно следует из соотношения $X' \subset X$, так как мы условились рассматривать для любого Z в качестве множества PZ совокупность *всех* непустых подмножеств множества Z, если не оговорено противное.

Определение. *Пусть (X, ϑ) – произвольное P-битопологическое пространство и p – отображение X на некоторое множество X'. Тогда определено отображение $P(p \times p) : P(X \times X) \longrightarrow P(X' \times X')$, для которого $P(p \times p)(A) = \{(p(x), p(y)) \mid (x, y) \in A\}$, для любого $A \in P(X \times X)$. Пусть $\vartheta' = \{A' \mid P(p \times p)^{-1}(A') \in \vartheta\}$. P-битопологическое пространство (X', ϑ') будем называть P-битопологическим факторпространством.*

Как P-битопологические подпространства, так и P-битопологические факторпространства являются по существу категорными понятиями, т.е. некоторые их эквиваленты можно сформулировать в категорных терминах. Мы здесь покажем это для категории P-битопологических пространств, не входя в тонкости абстрактной теории категорий,

Пусть (X', ϑ') – произвольное P-битопологическое подпространство P-битопологического пространства (X, ϑ), $i : X' \longrightarrow X$ – вложение и $i = gf$, где $f : X' \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ – допустимые отображения, f – эпиморфизм (отображение X' *на* Y). Заметим, прежде всего, что $g(Y) = X'$, и поэтому можно считать, что $g : Y \longrightarrow X'$. Одновременно можно считать, что $i : X' \longrightarrow X'$ – тождественное отображение. Таким образом допустимые отображения f и g взаимно обратны.

Следовательно, f – изоморфизм. А это как раз является категорным условием подпространства.

Пусть теперь (X', ϑ') – произвольное P-битопологическое факторпространство P-битопологического пространства (X, ϑ), $P(p \times p) : P(X \times X) \longrightarrow P(X' \times X')$, где p – отображение X *на некоторое множество* X' и $p = fg$, $g : X \longrightarrow Y$, $f : Y \longrightarrow X'$, где f и g – допустимые отображения при рассматриваемых на X, X' и Y структурах, f – мономорфизм (разным точкам соответствуют разные точки). Тогда, как можно заметить, множества $G \subset P(Y \times Y)$ и $P(f \times f)(G) \subset P(X' \times X')$ открыты или не открыты одновременно, то есть f – изоморфизм. А это как раз является категорным условием факторпространства.

1.4. P-битопологические прямые произведения и свободные объединения

Определение. *Пусть* $((X_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ *– некоторая система P-битопологических пространств,* $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *– произведение множеств* X_λ*, образованное по всем* $\lambda \in \Lambda$*. Точками* X *являются системы* $x = (x_\mu \mid \mu \in \Lambda)$*,* $p_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$ *– проекция* X *на* X_λ*, где* $p_\lambda\big((x_\mu \mid \mu \in \Lambda)\big) = x_\lambda$*,* $\mathrm{pr}_\lambda : P(X \times X) \longrightarrow P(X_\lambda \times X_\lambda)$ *– проекция* $P(X \times X)$ *на* $P(X_\lambda \times X_\lambda)$*,* $\mathrm{pr}_\lambda(A) = \{(p_\lambda(x), p_\lambda(y)) \mid (x, y) \in A\}$*. На* $P(X \times X)$ *можно теперь ввести топологическую структуру* $\vartheta = \sup\{\mathrm{pr}_\lambda)^{-1}(\vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$*. P-битопологическое пространство* (X, ϑ) *будем называть P-битопологическим прямым произведением системы* $\big((X_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\big)$*.*

Замечание. Можно заметить, что ϑ порождена множествами $(\mathrm{pr}_\lambda)^{-1}(G)$, образованными для всех $\lambda \in \Lambda$ и всех $G \in \vartheta_\lambda$.

Определение. *Пусть* $((X_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ *– некоторая система P-битопологических пространств с попарно не пересекающимися множествами* X_λ*,* $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *– объединение множеств* X_λ*, образованное по всем* $\lambda \in \Lambda$*. Каждая точка множества* X *принадлежит только одному множеству* X_λ*,* $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$ *– вложение* X_λ *в* X*,* $i_\lambda(x) = x$*,* $in_\lambda : P(X_\lambda \times X_\lambda) \longrightarrow P(X \times X)$ *– вложение* $P(X_\lambda \times X_\lambda)$ *в* $P(X \times X)$*,* $in_\lambda(A) = A$*,* $in_\lambda(\vartheta_\lambda)$ *– совокупность всех множеств* $G \subset P(X \times X)$*,* in_λ*-прообразы которых принадлежат* ϑ_λ*, На* $P(X \times X))$ *можно теперь ввести топологическую структуру* $\vartheta = \inf\{in_\lambda(\vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$*. P-битопологическое пространство* (X, ϑ) *будем называть P-битопологическим свободным объединением системы* $\big((X_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\big)$*.*

Замечание. Можно заметить, что ϑ порождена здесь такими множествами $G \subset P(X \times X)$, что $(in_\lambda)^{-1}(G) \in \vartheta_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Как P-битопологические прямые произведения, так и P-битопологические свободные объединения являются по существу категорными понятиями, т.е. некоторые их эквиваленты можно сформулировать в категорных терминах. Мы здесь покажем это для категории P-битопологических пространств, не входя в тонкости абстрактной теории категорий, Пусть (X, ϑ) является прямым произведением P-битопологических пространств системы $((X_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ и (X', ϑ') – некоторое P-битопологическое пространства, $(f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ – система допустимых отображений (X', ϑ') в $(X_\lambda, \vartheta_\lambda)$. Определим отображение $f : (X', \vartheta') \longrightarrow (X, \vartheta)$, положив $f(x) = (f_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda)$. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$ имеем соотношение $f_\lambda = p_\lambda f$. Осталось доказать, что $f : (X', \vartheta') \longrightarrow (X, \vartheta)$ – допустимое отображение, то есть доказать непрерывность отображения $P(f \times f) : (P(X' \times X', \vartheta') \longrightarrow (P(X \times X), \vartheta)$. Для этого достаточно доказать, что $P(f \times f)$-прообраз каждого элемента $(P(\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda))^{-1}(G)$ предбазы P-битопологической структуры ϑ приналежит P-битопологической структуре ϑ'. Но этот прообраз является очевидно $P(f_\lambda \times f_\lambda)$-прообразом множества G и поэтому принадлежит ϑ'.

Пусть теперь (X, ϑ) является свободным объединением P-битопологических пространств системы $((X_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ и (X', ϑ') – некоторое P-битопологическое пространство, $(f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ – система допустимых отображений $(X_\lambda, \vartheta_\lambda)$ в (X', ϑ'). Определим отображение $f : (X, \vartheta) \longrightarrow (X', \vartheta')$, положив $f(x) = f_\lambda(x)$, если $x \in X_\lambda$. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$ имеем соотношение $f_\lambda = f i_\lambda$. Осталось доказать, что $f : (X, \vartheta) \longrightarrow (X', \vartheta')$ – допустимое отображение, т.е. доказать непрерывность отображения $P(f \times f) : (P(X \times X), \vartheta) \longrightarrow (P(X' \times X'), \vartheta')$. Заметим, прежде всего, что множества $G \subset P(X \times X)$, принадлежащие $in_\lambda(\vartheta_\lambda)$ для всех $\lambda \in \Lambda$, образуют ϑ. Пусть $G' \subset P(X' \times X')$. Докажем, что $G = f^{-1}(G') \in \vartheta$, Так как для каждого $\lambda \in \Lambda$ имеет место соотношение $f_\lambda^{-1} = i_\lambda^{-1} f^{-1}$, то $f_\lambda^{-1}(G') = i_\lambda^{-1}(G) \in \vartheta_\lambda$ для каждого λ и поэтому $G \in \vartheta$.

1.5. P-битопологические структуры и отображения

В первой части этой книги было доказано существование таких битопологических структур β на евклидовых пространствах, что отображение $f : (\mathbb{R}^m, \beta_m) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \beta_n)$ допустимо, т.е. $f \times f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \beta_m) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \beta_n)$ непрерывно, тогда и только тогда, когда $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – кусочно линейное отображение. Тем самым показано, что класс кусочно линейных отображений евклидовых пространств допускает описание в терминах битопологических структур. Это только один из примеров описания различных классов отображений пространств битопологическими структурами. Ясно, что P-битопологические структуры предоставляют еще более широкие возможности для такого рода описаний. Дело в том, что любое отображение $f \times f : X \times X \longrightarrow Y \times Y$ можно, считая что $X \times X \subset P(X \times X)$ и $Y \times Y \subset P(Y \times Y)$, естественно продолжить до отображения $P(f \times f) : P(X \times X) \longrightarrow P(Y \times Y)$, полагая $P(f \times f)(A) = \{(f(x), f(y)) \mid (x, y) \in A\}$, и любую битопологическую структуру можно продолжить до *различных* P-битопологических структур.

P-битопологические структуры представляют интерес и с другой точки зрения. Мы уже отмечали ранее, что любое подмножество произведения $X \times X$ можно рассматривать как график Γ_f отображения $f : X \longrightarrow X$, $\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$, возможно, частичного (значение функции не определено в некоторых точках) и многозначного (значение функции в некоторых точках определено не однозначно). Такое понимание отображения позволяет для любого отображения $f : X \longrightarrow X$ с графиком Γ_f определить ему обратное отображение g с графиком $\Gamma_g = \{(y, x) \mid y = f(x)\}$, $g = f^{-1}$. Обратное отображение может оказаться и частичным, и многозначным даже для однозначного отображения, заданного на всем X. Например, для функции $y = x^2$ обратное отображение $x = \pm\sqrt{y}$, $y \geq 0$, будет и частичное, и многозначное. Каждое множество $A \in P(X \times X)$ можно рассматривать как график Γ_f некоторого отображения $f : X \longrightarrow X$. Тем самым множеству $P(X \times X)$ естественно сопоставляется множество всех отображений, включая частичные и многозначные. *Теория P-битопологических пространств предстает, как теория пространств отображений.* В действительности ситуация несколько сложнее. В каждой из этих теорий есть и своя естественная проблематика. Здесь мы имеем несколько ослабленный вариант ситуации, связанной с битопологическими в смысле Келли пространствами (X, τ_1, τ_2) и с разложимыми битопологическими в смысле Иванова пространствами (X, β). Объекты и их отображения канонически соответствуют друг другу, но проблематика их различна. В первой битопологической теории основным являлся перенос по возможности всех элементов топологической теории в битопологическую теорию, вторая же битопологическая теория является частью общей теории битопологических пространств (X, β), где β – топологическая структура на $X \times X$, имеющей собственную далеко продвинутую проблематику. В свою очередь, теория P-битопологических пространств является частью теории P-парно топологических пространств $P(X, Y, \vartheta)$, которой будет посвящен следующий параграф.

1.6. Локальные P-битопологические пространства

Локальность P-битопологических пространств будет рассматриваться здесь в трех вариантах, а именно как X-локальность, как $X \times X$-локальность и как $PX \times PX$-локальность.

Определение. *P-битопологическое пространство (X, ϑ) называется X-локальным, если сходимостями в $(P(X \times X), \vartheta)$ являются только стационарные сходимости и сходимости к одноточечным множествам $\{(x, x)\}$ для всех $x \in X$.*

Определение. *P-битопологическое пространство (X, ϑ) называется $X \times X$-локальным, если сходимостями в $(P(X \times X), \vartheta)$ являются только стационарные сходимости и сходимости к одноточечным множествам $\{(x, y)\}$ для всех x, y из X.*

Определение. *P-битопологическое пространство (X, ϑ) называется $PX \times PX$-локальным, если сходимостями в $(P(X \times X), \vartheta)$ являются только стационарные сходимости и сходимости к множествам $A \times B$ для всех $A \subset X$ и $B \subset X$.*

Считая, что $X \subset X \times X \subset PX \times PX$, мы можем сказать, что для X-локального P-битопологического пространства нетривиальными могут быть только сходимости к точкам множества X, для $X \times X$-локального – только сходимости к точкам множества $X \times X$, для $PX \times PX$- локального – только сходимости к множествам $A \times B$, $A \subset X$, $B \subset X$.

Все эти типы локальности имеют достаточное обоснование с точки зрения их значимости для приложений. Рассмотрим в связи с этим три примера. В первом примере рассматривается X-локальность, во втором $X \times X$-локальность и в третьем – $PX \times PX$-локальность.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, $X \times X = \mathbb{R}^2$ – евклидова плоскость. Пусть топологическая структура ϑ на $P\mathbb{R}^2$ задана сходимостями последовательностей вложенных друг в друга отрезков к их общей *внутренней* точке, лежащей на диагонали $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Пространство $(\mathbb{R}, \vartheta)$ будет X-локальным P-битопологическим пространством. Выясним какие отображения f пространства $(\mathbb{R}, \vartheta)$ в себя допустимы. Заметим прежде всего, что на диагонали, и тем самым на $\mathbb{R}$, будет индуцирована P-топологическая структура θ, также определенная сходимостями последовательностей вложенных друг в друга отрезков к их общей внутренней точке. При этом допустимому отображению f пространства $(\mathbb{R}, \vartheta)$ в себя (P-битопологического пространства) соответствует допустимое отображение f пространства $(\mathbb{R}, \theta)$ в себя (P- топологического пространства). Но из того, что f – допустимое отображение $(\mathbb{R}, \theta)$ в себя, непосредственно следует, что f – строго монотонное отображение $\mathbb{R}$ в себя. Действительно, допустим, что f не строго монотонное отображение. Тогда найдется такая точка $x_0 \in \mathbb{R}$, что $f(x) \geq f(x_0)$ или же $f(x) \leq f(x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0. Но в этом случае f-образы всех достаточно малых отрезков, содержащих точку x_0 как внутреннюю точку, будут содержать точку $f(x_0)$, как граничную точку, и поэтому f-образ некоторой последовательности отрезков, сходящейся к точке x_0, не будет сходящейся последовательностью. Тем самым доказано, что f – строго монотонная функция.

Пусть $f(0) = a$, введем функцию g, положив $g(x) = f(x) - a$. Тогда $g(0) = 0$ и $(g \times g)(0,0) = (0,0)$. Функция g обладает теми же свойствами, что и функция f: она строго монотонна и $g \times g$ отображает каждый достаточно малый отрезок, содержащий точку (x, y) как внутреннюю точку, в отрезок, содержащий точку $(g(x), g(y))$ как внутреннюю точку. В частности, и этот случай мы выделим особо, $g \times g$ отображает каждый достаточно малый отрезок, содержащий точку $(0,0)$ как внутреннюю точку, в отрезок, содержащий точку $(0,0)$ как внутреннюю точку. Например, $g \times g$ отображает отрезок $\{(x, \lambda x) \mid |x| \leqslant \varepsilon\}$ в отрезок $\{(g(x), \lambda' g(x)) \mid |x| \leqslant \varepsilon\}$. Но это означает, что функция g удовлетворяет функциональному уравнению $g(\lambda x) = \lambda' g(x)$ в достаточно малой окрестности нуля, зависящей от λ и некоторого λ', также зависящего от λ. Без нарушения общности можно считать, что g является строго возрастающей функцией и поэтому $g(x) > 0$ для $x > 0$ и $g(x) < 0$ для $x < 0$. Фиксируем $\lambda < 1$ и соответствующее ему λ'. Пусть α такое число, что $(\lambda')^\alpha = \lambda$. Введем новую функцию h, положив $h(x) = g(x)^\alpha$ для $x > 0$ и $h(x) = -(-g(x))^\alpha$ для $x < 0$. Тогда $h(\lambda x) = g(\lambda x)^\alpha = (\lambda' g(x))^\alpha = \lambda h(x)$, и таким образом

$$h(\lambda x) = \lambda h(x)$$

для достаточно малых $x > 0$. Для $x < 0$ мы будем иметь такое же соотношение, так как

$$h(\lambda x) = -(-g(\lambda x))^\alpha = -(-\lambda' g(x))^\alpha = \lambda h(x).$$

Пусть на отрезке $[-\varepsilon;\varepsilon]$ имеет место это соотношение. Нам надо отдельно рассмотреть два случая, а именно отрезок $[0;\varepsilon]$ и отрезок $[-\varepsilon;0]$, но второй случай аналогичен первому.

Из доказанного нами соотношения $h(\lambda x)=\lambda h(x)$ еще не следует линейность функции h, так как оно доказано для некоторого фиксированного числа λ. Для другого числа $\lambda_1<1$ мы, возможно, получим другую функцию h_1 и, соответственно, другое соотношение

$$h_1(\lambda_1 x)=\lambda_1 h_1(x).$$

Фиксируем два числа $\lambda<1$, $\lambda_1<1$, и, соответственно, две функции h и h_1 на $[0,\varepsilon]$. Рассмотрим точки $\varepsilon,\lambda\varepsilon,\dots,\lambda^n\varepsilon,\dots$ и определяемые ими отрезки $[\lambda^{n+1}\varepsilon;\lambda^n\varepsilon]$. Эти отрезки переходят друг в друга при λ-сжатии. Точки $(\lambda\varepsilon,\varepsilon),(\lambda^2\varepsilon,\lambda\varepsilon),\dots,((\lambda^{n+1}\varepsilon,\lambda^n\varepsilon),\dots$ находятся на графике функции h и также переходят друг в друга при λ-сжатии. Таким образом, график функции h можно получить последовательным λ-сжатием ее графика над отрезком $[\lambda\varepsilon;\varepsilon]$. Отсюда следует, что график функции h над $[0,\varepsilon]$ лежит между прямыми $y=kx$ и $y=k'x$, $k>k'>0$. Аналогично, график функции h_1 над $[0,\varepsilon]$ лежит между прямыми $y=k_1x$ и $y=k_1'x$, $k_1>k_1'>0$. Перейдя к функции f мы получаем неравенства

$$kx\le f^{\alpha}(x)\le k'x,$$

$$k_1x\le f^{\alpha_1}(x)\le k_1'x$$

или, что то же самое

$$(kx)^{\frac{1}{\alpha}}\le f(x)\le (k'x)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$(k_1x)^{\frac{1}{\alpha_1}}\le f(x)\le (k_1'x)^{\frac{1}{\alpha_1}}.$$

Без нарушения общности можно считать, что $\alpha\le\alpha_1$ или $\frac{1}{\alpha}\ge\frac{1}{\alpha_1}$. Если это неравенство строгое, то для достаточно малых x имеет место неравенство $(k'x)^{\frac{1}{\alpha}}<(k_1x)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ и мы приходим к противоречию

$$f(x)\le (k'x)^{\frac{1}{\alpha}}<(k_1x)^{\frac{1}{\alpha_1}}\le f(x)$$

для достаточно малых x. Тем самым доказано, что $\alpha=\alpha_1$.

Таким образом функции h и h_1 совпадают, соотношение $h(\lambda x)=\lambda h(x)$ имеет место для всех $\lambda<1$, функция h является линейной функцией, $h(x)=ax$, а $f(x)=(ax)^{\frac{1}{\alpha}}$. Если мы перейдем от точки 0 к точке x_0, сколь угодно близкой к нулю, то вместо функции f мы можем рассмотреть функцию f', для которой $f'(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$. Функция f' обладает в некоторой окрестности нуля теми же свойствами, что и функция f, поэтому $f'(x) = cx^\gamma$. Таким образом для достаточно малых x имеет место соотношение $f(x + x_0) - f(x_0) = cx^\gamma$ для некоторых γ и c, то есть $((x + x_0))^{\frac{1}{\alpha}} - x_0^{\frac{1}{\alpha}} = cx^\gamma$ для некоторых c и γ. Отсюда следует, что $\alpha = 1$, то есть f вляется линейной функцией на $[0; \varepsilon]$.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, $X \times X = \mathbb{R}^2$ – евклидова плоскость. Пусть топологическая структура ϑ' на $P\mathbb{R}^2$ задана сходимостями последовательностей вложенных друг в друга отрезков к их общей *внутренней* точке (x, y) плоскости $\mathbb{R}^2$. Нетрудно заметить, что $(\mathbb{R}, \vartheta')$ будет $X \times X$-локальным P-битопологическим пространством, что ϑ предыдущего примера содержится в ϑ' и любое допустимое отображение $(\mathbb{R}, \vartheta')$ в себя является допустимым отображением $(\mathbb{R}, \vartheta)$ в себя. Отсюда следует, что $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ является допустимым отображением $(\mathbb{R}, \vartheta')$ в себя тогда и только тогда, когда оно – линейное отображение.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, $X \times X = \mathbb{R}^2$ – евклидова плоскость, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ – произвольное отображение. $A \times B$ – прямоугольное в $\mathbb{R}^2$ множество. Тогда $(f \times f)(A \times B) = f(A) \times f(B)$ – прямоугольное в $\mathbb{R}^2$ множество, то есть $f \times f$ отображает $P\mathbb{R} \times P\mathbb{R}$ в себя. На $P\mathbb{R}$ введем топологическую структуру, определенную сходимостями конгруентных множеств, на $P\mathbb{R} \times P\mathbb{R}$ введем структуру прямого произведения $P\mathbb{R}$ на себя, на $P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ – структуру, определенную сходимостями в $P\mathbb{R} \times P\mathbb{R}$ и стационарными сходимостями. Так определенная топологическая структура на $P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ будет $P\mathbb{R} \times P\mathbb{R}$-локальной структурой. Более того, любое отображение f так определенного P-битопологического пространства допустимо тогда и только тогда, когда соответствующее ему отображение пространства $P\mathbb{R} \times P\mathbb{R}$ непрерывно. Таким образом нам достаточно рассмотреть непрерывные отображения $Pf \times Pf$. *Пусть f – допустимое отображение $P\mathbb{R} \times P\mathbb{R}$ в себя, докажем, что это отображение будет линейным отображением $\mathbb{R}$ в себя.* Для этого докажем сначала, что Pf переводит конгруентные множества прямой $\mathbb{R}$ в конгруентные же множества. Итак, пусть $A \subset \mathbb{R}$, допустим, что существуют такие конгруентные A множества B, что $f(B)$ не конгруентны $f(A)$. Таким образом все конгруентные A множества прямой $\mathbb{R}$ разбиваются на два не пустых класса, а именно таких, что их f-образы конгруентны $f(A)$, и таких, что их f-образы не конгруентны $f(A)$. Возможны два случая, а именно: либо некоторое множество первого типа является пределом последовательности множеств второго типа, либо некоторое множество второго типа является пределом последовательности множеств первого типа. В обоих случаях Pf-образы некоторых сходящихся в $P\mathbb{R}$ последовательностей не являются сходящейся последовательностью, что противоречит допустимости отображения f. Тем самым доказано, что Pf переводит конгруентные множества прямой $\mathbb{R}$ в конгруентные же множества. Докажем теперь, что f – либо постоянная, либо строго возрастающая или строго убывающая функция. Действительно, в противном случае найдется такая точка $x_0 \in \mathbb{R}$ и такая ее ε-окрестность, что $f(x) \leq f(x_0)$ или $f(x) \geq f(x_0)$ для всех $x \in [x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$, причем имеет место строгое неравенство для некоторой точки $x \in [x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$. Пусть для определенности имеет место первый случай. Тогда f-образы отрезков $[x - \varepsilon; x + \varepsilon]$ для некоторых сколь угодно близких к x_0 точек x не будут конгруентны f-образу отрезка $[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$, что противоречит допустимости отображения f. Итак доказано, что f – либо постоянная либо строго возрастающая или строго убывающая функция. В первом случае она является линейной функцией. Во втором случае предположим для определенности, что f вляется строго возрастающей функцией. Рассмотрим отрезки $\left[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}\right]$ для фиксированного n и всех целых чисел k. Эти отрезки и их f-образы образуют разбиение прямой $\mathbb{R}$ на равные отрезки. Пусть отношение длины f-образа любого из таких отрезков к его длине равно λ. Нетрудно заметить, что λ не зависит от n и поэтому отношение длины f-образа любого отрезка $[a; b]$ к длине самого отрезка равно λ. Отсюда непосредственно следует, что $f(x) = \lambda x + f(0)$.

§2. P-парно топологические структуры

2.1. Категория P-парно топологических пространств

В первой главе была отмечена тесная связь между *отображениями*, сопоставляющими элементам некоторых множеств (областей задания) элементы тех же или других множеств (областей значений), и их *графиками*, являющимися соответствующими подмножествами произведений $X \times Y$ областей задания X на области значений Y. Графиком отображения $f : X \longrightarrow Y$ называют обычно множество $\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\} \subset X \times Y$. При этом каждому отображению f однозначно соответствует его график Γ_f. В дальнейшем мы будем рассматривать и *частичные отображения*, значения которых определены не для всех $x \in X$, и *многозначные отображения*, значения которых определены в некоторых точках неоднозначно. Это соглашение позволяет рассматривать каждое непустое множество $A \subset X \times Y$ в качестве графика некоторого отображения f_A, значения которого определяются следующим правилом: для каждой точки $x \in X$ рассматриваем множество $A_x = \{y \mid (x, y) \in A\}$. Если $A_x = \emptyset$, то в точке x отображение f_A не определено, если $A_x = \{y\}$ – одноточечное множество то в точке x отображение f_A определено однозначно и $f(x) = y$, если же множество A_x содержит больше одной точки, то отображение определено неоднозначно и $f(x) = y$ для каждой точки $y \in A_x$.

Замечание. Следует подчеркнуть, что если A_x содержит больше одной точки, то часто рассматривают ошибочно само множество A_x как значение отображения, то есть вместо $f : X \longrightarrow Y$ рассматривают отображение $f : X \longrightarrow PY$. В связи с этим меняется и определение непрерывности многозначного отображения. На PY вводится какая-нибудь топологическая структура и отображение f считается непрерывным, если оно непрерывно как отображение X в PY. В действительности в этой ситуации каждая точка $y \in A_x$ является значением отображения и его непрерывность может быть определена в терминах сходимости направленных систем точек. То же замечание относится и к случаю $A_x = \emptyset$. Точке x из X не сопоставляется пустое множество, в этой точке отображение просто не определено.

Определение. *Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y непрерывно в точке $x \in X$, если для любой сходящейся к x направленной системы точек $(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ существует направленная система $(f(x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ значений этого отображения, сходящаяся к некоторому значению $f(x)$ отображения f, причем каждое такое значение является пределом соответствующей направленной системы $(f(x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$.*

И теория отображений, и теория их графиков имеют свои плюсы и свои минусы, трудно сказать какая теория предпочтительнее. Что первично, отображение или его график, что должно быть непосредственным предметом изучения? Ответ на этот вопрос не однозначен, он зависит от интересов исследователя. Для нас здесь более важными окажутся графики отображений, то есть подмножества множества $X \times Y$.

Определение. *Пусть X и Y – некоторые множества и $P(X \times Y)$ – множество всех или части подмножеств множества $X \times Y$. Топологическую структуру ϑ на $P(X \times Y)$ будем называть P-парно топологической структурой на паре (X, Y), тройку (X, Y, ϑ) будем называть P-парно топологическим пространством.*

В связи с этим определением мы можем рассмотреть три типа пространств:

P-парно топологическое пространство (X, Y, ϑ),

P-топологическое пространство $(X \times Y, \vartheta)$,

топологическое пространство $(P(X \times Y), \vartheta)$.

Во втором и третьем варианте мы опять встречаемся с отображениями структурированных множеств.

Для P-парно топологических пространств (X, Y, ϑ), (X', Y', ϑ') допустима любая пара f, g отображений $f : X \longrightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$, лишь бы отображение $P(f \times g) : (P(X \times Y), \vartheta) \longrightarrow (P(X' \times Y'), \vartheta')$ было бы непрерывным.

Для P-топологических пространств $(X \times Y, \vartheta)$ и $(X' \times Y', \vartheta')$ допустимы только пары отображений (Pf, Pg), порожденные парами f, g, причем отображения $P(f \times g) : (P(X \times Y), \vartheta) \longrightarrow (P(X' \times Y'), \vartheta')$ должны быть непрерывными.

Для топологических пространств $(P(X \times Y), \vartheta)$ и $(P(X' \times Y'), \vartheta')$ допустимы только непрерывные отображения $P(f \times g) : (P(X \times Y), \vartheta) \longrightarrow (P(X' \times Y'), \vartheta')$.

Замечание. Нетрудно заметить, что мы можем рассматривать три соответствующие друг другу категории. По ситуации можно пользоваться наиболее подходящей из них, но основной будем все же считать категорию P-парно топологические пространств и их допустимых отображений.

2.2. Прямоугольные P-парно топологические пространства

Изучая прямоугольные P-битопологические пространства мы рассматривали некоторую систему вложений, в которой фигурировали *диагональные вложения* $X \longrightarrow X \times X$ и $PX \longrightarrow PX \times PX$.

Для P-парно топологически пространств ситуация более сложная. Здесь нет стандартных вложений пар множеств в их произведения, поэтому приходится ограничиваться просто соответствием. Наряду с множеством $P(X\times Y)$ мы можем рассматривать систему множеств и их вложений

$$\begin{array}{ccccc} X,Y & \longrightarrow & X\times Y & & \\ {\scriptstyle i}\Big\downarrow & & {\scriptstyle i}\Big\downarrow & & \\ PX,PY & \longrightarrow & PX\times PY & \xrightarrow{\ i\ } & P(X\times Y) \end{array}$$

Любая определенная на $P(X\times Y)$ топологическая структура однозначно индуцирует соответствующие топологические структуры на множествах $X\times Y$ и $PX\times PY$. С другой стороны, мы можем начинать с произвольной пары топологических пространств X и Y. Фиксировав операции перехода к парно топологиям и P-топологиям, мы можем перейти к P-парно топологии последовательностью

$$X,Y\longrightarrow X\times Y\longrightarrow PX\times PY\longrightarrow P(X\times Y).$$

или последовательностью

$$X,Y\longrightarrow PX,PY\longrightarrow PX\times PY\longrightarrow P(X\times Y).$$

На множестве $PX\times PY$ можно определить таким образом две, вообще говоря различные, топологические структуры. Одна из них индуцируется топологической структурой определенной на $P(X\times Y)$ переходом от τ на X и τ' на Y к β на $X\times Y$ и к θ на $P(X\times Y)$, другая же получается переходом от τ,τ' на X, Y к ζ, ζ' на PX, PY и к ϑ на $PX\times PY$. Точками множества $PX\times PY$ являются произведения $A\times B$ подмножеств множеств X и Y, соответственно, так называемые *прямоугольные множества.* Если при задании того или иного P-парно топологического пространства мы ограничимся только прямоугольными множествами, то мы будем называть его *прямоугольным P-парно топологическим пространством.* Заметим, что если операции перехода к парным топологиям и P-топологиям определенным образом согласованы, то на $PX\times PY$ эти топологии совпадают. Так например, они совпадают, если под PX и PY мы будем понимать пространства компактных подмножеств пространств X и Y в топологии Виеториса, а под (X,Y,β) – парно топологическое пространство, в котором β – произведение топологических структур пространств X и Y. Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет приведенное выше доказательство соответствующего утверждения для P-битопологических пространств.

2.3. P-парно топологические подпространства и факторпространства

Определение. *Пусть (X, Y, ϑ) – произвольное парно топологическое пространство, $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, $P(X' \times Y') \subset P(X \times Y)$. Тогда топологическая структура ϑ, заданная на $P(X \times Y)$, индуцирует на $P(X' \times Y')$ топологическую структуру ϑ'. P-парно топологическое пространство (X', Y', ϑ') будем называть подпространством P-парно топологического пространства (X, Y, ϑ).*

Определение. *Пусть (X, Y, ϑ) – произвольное парно топологическое пространство, p – отображение X на некоторое множество X', q – отображение Y на некоторое множество Y', $P(p \times q)$ – отображение $P(X \times Y)$ на $P(X' \times Y')$, где $P(p \times q)(A) = \{(p(x), q(y)) \mid (x, y) \in A\}$ для любого $A \in P(X \times Y)$ (факторное отображение). Тогда топологическая структура ϑ, заданная на $P(X \times Y)$, индуцирует топологическую структуру ϑ' на $P(X' \times Y')$ как на фактормножестве. P-парно топологическое пространство (X', Y', ϑ') будем называть факторпространством P-парно топологического пространства (X, Y, ϑ).*

P-парно топологические подпространства и факторпространства являются по существу категорными понятиями, т.е. некоторые их эквиваленты можно сформулировать в категорных терминах. Технически проще доказывать это для категории топологических пространств $(P(X \times Y), \vartheta)$ и их допустимых отображений $P(f \times g)$.

Пусть (X'_1, X'_2, ϑ') – произвольное P-парно топологическое подпространство P-парно топологического пространства (X_1, X_2, ϑ), $P(i_1 \times i_2)$ – соответствующее вложение. Предположим, что $P(i_1 \times i_2)$ представлено композицией $P(g_1 f_1 \times g_2 f_2)$, где $f_1 : X'_1 \longrightarrow Y_1$, $f_2 : X'_2 \longrightarrow Y_2$, $g_1 : Y_1 \longrightarrow X_1$, $g_2 : Y_2 \longrightarrow X_2$, причем f_1 и f_2 – эпиморфизмы. Без нарушения общности можно считать, что $i_1 : X'_1 \longrightarrow X'_1$ и $i_2 : X'_2 \longrightarrow X'_2$ – тождественные отображения, а $g_1 : Y_1 \longrightarrow X'_1$, $g_2 : Y_1 \longrightarrow X'_2$. Таким образом отображения f_1 и g_1, равно как отображения f_2 и g_2, взаимно обратны, т.е. f_1 и f_2 –

изоморфизмы, а потому $P(f_1 \times f_2)$ – изоморфизм. А это как раз является категорным условием подпространства.

Пусть теперь (X_1', X_2', ϑ') – произвольное P-парно топологическое факторпространство P-парно топологического пространства (X_1, X_2, ϑ), определенное эпиморфизмами $p : X_1 \longrightarrow X_1'$ и $q : X_2 \longrightarrow X_2'$. Предположим, что $P(p \times q)$ представлено композицией $P(f_1 g_1 \times f_2 g_2)$, где $f_1 : Y_1' \longrightarrow X_1'$, $f_2 : Y_2' \longrightarrow X_2'$, $g_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$, $g_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$. причем f_1 и f_2 – мономорфизмы. Тогда, как можно заметить, множества $G \subset P(Y_1 \times Y_2)$ и $P(f_1 \times f_2)(G)$ открыты или не открыты одновременно, то есть $P(f_1 \times f_2)$ – изоморфизм. А это как раз является категорным условием факторпространства.

2.4. P-парно топологические прямые произведения и свободные объединения

Определение. *Пусть $(X_\lambda, Y_\lambda, \vartheta_\lambda)$ – некоторая система парно топологических пространств, $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ и $Y = \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ – произведения множеств X_λ и Y_λ, соответственно, образованные по всем $\lambda \in \Lambda$. Точками X являются системы $x = (x_\mu \mid \mu \in \Lambda)$, точками Y являются системы $y = (y_\mu \mid \mu \in \Lambda)$, Определим проекции $p_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$ и $q_\lambda : Y \longrightarrow Y_\lambda$ множеств X и Y на X_λ и Y_λ, соответственно, $p_\lambda(x_\mu \mid \mu \in \Lambda) = x_\lambda$, $q_\lambda(y_\mu \mid \mu \in \Lambda) = y_\lambda$ и проекции $\mathrm{pr}_\lambda : P(X \times Y) \longrightarrow P(X_\lambda \times Y_\lambda)$, $\mathrm{pr}_\lambda(A) = \{(p_\lambda(x), q_\lambda(y)) \mid (x, y) \in A\}$. На $P(X \times Y))$ можно теперь ввести топологическую структуру $\vartheta = \sup\{\mathrm{pr}_\lambda)^{-1}(\vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$. P-парно топологическое пространство (X, Y, ϑ) будем называть P-парно топологическим прямым произведением системы $((X_\lambda, Y_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$.*

Замечание. Можно заметить, что ϑ порождена множествами $(\mathrm{pr}_\lambda)^{-1}(G)$, образованными для всех $\lambda \in \Lambda$ и всех $G \in \vartheta_\lambda$.

Определение. *Пусть $(X_\lambda, Y_\lambda, \vartheta_\lambda)$ – некоторая система парно топологических пространств, причем все X_λ и все Y_λ между собой не пересекаются. Положим $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, $Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ – объединения множеств X_λ, Y_λ, образованные по всем $\lambda \in \Lambda$. Каждая точка множества X принадлежит только одному множеству X_λ, каждая точка множества Y принадлежит только одному множеству Y_λ. Определим для всех $\lambda \in \Lambda$ вложения $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$, $j_\lambda : Y_\lambda \longrightarrow Y$, $in_\lambda : P(X_\lambda \times Y_\lambda) \longrightarrow P(X \times Y)$, и P-парно топологические структуры $in_\lambda(\vartheta_\lambda)$, положив $i_\lambda(x) = x$, $j_\lambda(y) = y$, $in_\lambda(A) = A$, $in_\lambda(\vartheta_\lambda) = \{G \mid in_\lambda^{-1}(G) \in \vartheta_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$. На $P(X \times Y)$ можно ввести* *теперь топологическую структуру* $\vartheta = \inf\{in_\lambda(\vartheta_\lambda)\}$. *$P$-парно топологическое пространство* (X, Y, ϑ) *будем называть P-парно топологическим свободным объединением системы* $(X_\lambda, Y_\lambda, \vartheta_\lambda)$.

Как P-парно топологические прямые произведения, так и (X, Y, ϑ) свободные объединения являются по существу категорными понятиями, т.е. некоторые их эквиваленты можно сформулировать в категорных терминах. Мы здесь покажем это для категории P-парно топологических пространств, не вдаваясь в тонкости абстрактной теории категорий.

Пусть (X, Y, ϑ) является прямым произведением P-парно топологических пространств системы $((X_\lambda, Y_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ и (X', Y', ϑ') – некоторое P-парно топологическое пространство. Пусть $(f_\lambda, g_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ – система допустимых отображений (X', Y', ϑ') в $((X_\lambda, Y_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$. Определим отображение $f, g : (X', Y', \vartheta') \longrightarrow (X, Y, \vartheta)$, положив $f(x) = (f_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda)$ и $g(x) = (g_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda)$. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda)$ имеем соотношение $f_\lambda = p_\lambda f$, $g_\lambda = q_\lambda g$. Осталось доказать, что $(f, g) : (X', Y', \vartheta') \longrightarrow (X, Y, \vartheta)$ – допустимое отображение, т.е. доказать, что $P(f \times g) : (P(X' \times Y', \vartheta') \longrightarrow (P(X \times Y), \vartheta)$ – непрерывное отображение. Для этого достаточно доказать, что $P(f \times g)$-прообраз каждого элемента G предбазы P-парно топологической структуры ϑ принадлежит P-парно топологической структуре ϑ'. Но этот прообраз является очевидно $P(f_\lambda \times g_\lambda)$-прообразом множества G и поэтому принадлежит ϑ'.

Пусть теперь (X, Y, ϑ) является свободным объединением P-парно топологических пространств системы $((X_\lambda, Y_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$, (X', Y', ϑ') – некоторое P-парно топологическое пространство и $(f_\lambda, g_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ – система допустимых отображений $((X_\lambda, Y_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ в (X', Y', ϑ'). Определим отображение $(f, g) : (X, Y, \vartheta) \longrightarrow (X', Y', \vartheta')$, положив $f(x) = f_\lambda(x)$, $g(x) = g_\lambda(x)$, если $x \in X_\lambda$. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$ имеем соотношения $f_\lambda = f i_\lambda$, $g_\lambda = g i_\lambda$.

Осталось доказать, что $(f, g) : (X, Y, \vartheta) \longrightarrow (X', Y', \vartheta')$ – допустимое отображение, т.е. доказать, что $P(f \times g) : (P(X \times Y), \vartheta) \longrightarrow (P(X' \times Y'), \vartheta')$ – непрерывное отображение. Заметим прежде всего, что множества $G \subset P(X \times Y)$, принадлежащие $in_\lambda(\vartheta_\lambda)$ для всех $\lambda \in \Lambda$, образуют ϑ. Пусть $G' \subset P(X' \times Y')$ и $G = (f, g)^{-1}(G')$. Так как для каждого $\lambda \in \Lambda$ имеют место соотношения $f_\lambda^{-1} = i_\lambda^{-1} f^{-1}$, $g_\lambda^{-1} = j_\lambda^{-1} g^{-1}$, то $(f_\lambda, g_\lambda)^{-1}(G') = (i_\lambda, j_\lambda)^{-1}(G) \in \vartheta_\lambda$ для всех λ и поэтому $G \in \vartheta$.

2.5. P-парно топологические структуры и отображения

Мы уже отмечали, что категория парно топологических пространств содержит категорию битопологических пространств, правда не как полную подкатегорию. Категория P-парно топологических пространств также содержит категорию P-битопологических пространств и также не как полную подкатегорию. Соответственно, каждую P-битопологическую структуру можно считать P-парно топологической структурой и поэтому теорию P-парно топологических пространств можно считать обобщением теории P-битопологических пространств. В действительности это совершенно разные теории с существенно различной проблематикой. В то время как в теории P-битопологических пространств (X, ϑ) основными объектами являются P-битопологические структуры ϑ, в теории P-парно топологических пространств (X, Y, ϑ) основными объектами являются подмножества Γ_f множества $X \times Y$, рассматриваемые как графики отображений $f : X \longrightarrow Y$, возможно частичных и многозначных. Представление отображений f их графиками $\Gamma_f \subset X \times Y$ позволяет изучать так называемые пространственно подобные свойства отображений, т.е. понятия и утверждения, являющиеся распространениями на отображения соответствующих понятий и утверждений, относящихся к топологическим пространствам. Имеется довольно значительная литература, посвященная этой тематике. В ней содержится целая система понятий, являющихся, по мнению авторов, естественными обобщениями на отображения соответствующих понятий, определенных первоначально лишь для топологических пространств. Во многих случаях их подход к отображениям не представляется бесспорным – при формировании тех или иных пространственно подобных понятий, относящихся к отображениям, авторы не всегда последовательны. Их перенос некоторых пространственных понятий на отображения следует иногда рассматривать просто как использование старых терминов в новой ситуации.

Мы воспользуемся здесь взаимно однозначным соответствием $f \Longleftrightarrow \Gamma_f$, при котором любому отображению $f : X \longrightarrow Y$ сопоставляется его график $\Gamma_f \subset X \times Y$. Так как любое подмножество множества $X \times Y$ является графиком Γ_f некоторого отображения $f : X \longrightarrow Y$, возможно частичного и многозначного, то для любых множеств X и Y мы получаем взаимно однозначное соответствие между $C(X,Y)$ и $P(X \times Y)$.

Назовем *морфизмом отображения* $f : X \longrightarrow Y$ в $f' : X' \longrightarrow Y'$ такую пару (φ, ψ) непрерывных отображений $\varphi : X \longrightarrow X'$ и $\psi : Y \longrightarrow Y'$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\psi}\big\downarrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

коммутативна, т.е. $\psi f(x) = f'\varphi(x)$ для каждой точки $x \in X$.

Мы можем теперь рассмотреть новую категорию Map или M, состоящую из непрерывных отображений как объектов и их морфизмов. Композиция таких морфизмов определяется в этой категории естественным образом, а именно

$$(\varphi', \psi')(\varphi, \psi) = (\varphi'\varphi, \psi'\psi)$$

где

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\psi}\big\downarrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ {\scriptstyle\varphi'}\big\downarrow & & {\scriptstyle\psi'}\big\downarrow \\ X'' & \xrightarrow{f''} & Y'' \end{array}$$

при этом диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\varphi'\varphi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\psi'\psi}\big\downarrow \\ X'' & \xrightarrow{f''} & Y'' \end{array}$$

очевидно, будет коммутативной, так как $(\psi'\psi)f(x) = \psi'(f'\varphi(x)) = f''(\varphi'\varphi)(x)$. Морфизмам отображений $(\varphi, \psi) : f \longrightarrow f'$ соответствуют непрерывные отображения (но не все!) их графиков $(\varphi \times \psi) : \Gamma_f \longrightarrow \Gamma_{f'}$.

Таким образом возникает новая категория Graph или G графиков и их покоординатных непрерывных отображений. Каждый график является топологическим пространством с дополнительной структурой *частичного прямого произведения*, то есть вложения в прямое произведение $X \times Y$ топологических пространств. Категория Graph естественно изоморфна категории Map, а категория Top вложима в эти категории. Одно вложение сопоставляет топологическому пространству X отображение в фиксированное одноточечное пространство E, другое сопоставляет топологическому пространству X тождественное отображение на себя. Морфизмы таких отображений очевидны – в первом случае отображению $f : X \longrightarrow Y$ сопоставляется морфизм (f, e), где e –отображение фиксированного одноточечного пространства E в себя,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & E \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e} \\ Y & \xrightarrow{p} & E \end{array}$$

во втором случае сопоставляется морфизм (f, f).

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ Y & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

2.6. Локальные P-парно топологические пространства

Для P-парно топологических пространств, в отличие от P-битопологических пространств, имеется только два понятия локальности, а именно $X \times Y$-локальность и $PX \times PY$-локальность.

Определение. *P-парно топологическое пространство (X, Y, ϑ) называется $X \times Y$-локальным, если сходимостями в $(P(X \times Y), \vartheta)$ являются только стационарные сходимости и сходимости к одноточечным множествам $\{(x, y)\}$ для всех (x, y) из $X \times Y$.*

Определение. *P-парно топологическое пространство (X, Y, ϑ) называется $PX \times PY$-локальным, если сходимостями в $(P(X \times X), \vartheta)$ являются только стационарные сходимости и сходимости к прямоугольным множествам $A \times B$ для всех $A \subset X$ и $B \subset X$.*

Вообще говоря, мы можем задать любое $X \times Y$-локальное и $PX \times PY$-локальное P-парно топологическое пространство, рассмотрев соответствующее P-парно топологическое пространство

(X, Y, ϑ) и опустив все сходимости, кроме сходимостей к точкам множества $X \times Y$ и, соответственно, к точкам множества $PX \times PY$. Однако можно определять такие пространства и непосредственно.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример. Пусть F – некоторое множество однозначных непрерывных отображений замыканий открытых множеств регулярного топологического пространства X в регулярное топологическое пространство Y, $\Gamma_F = \{\Gamma_f \mid f \in F\}$, $P(X \times Y) = \Gamma_F$. Для каждой точки $(x.y) \in X \times Y$ и каждого отображения $f \in F$, для которого точка x является внутренней точкой области задания и $y = f(x)$, определим сходимость $\Gamma_{f|clU} \longrightarrow (x, y)$ по всем достаточно малым окрестностям U точки x. Эти сходимости и стационарные сходимости определяют $X \times Y$-локальное P-парно топологическое пространство (X, Y, ϑ). Существует стандартное пополнение этого пространства, состоящее из *всех отображений* замыканий открытых множеств пространства X в Y, каждое из которых совпадает с каким-нибудь отображением $f \in F$ в достаточно малой окрестности каждой точки $x \in X$. Заметим, что это пополнение будет также $X \times Y$-локальным.

Пример. Пусть X и Y – произвольные топологические пространства класса T_1 (риссовские пространства), PX и PY – пространства их замкнутых подмножеств в топологии Виеториса, $PX \times PY$ – прямое произведение. Точками этого произведения являются замкнутые в $X \times Y$ прямоугольные множества. *Прямоугольным замыканием* множества $A \subset X \times Y$ будем называть наименьшее замкнутое прямоугольное множество, содержащее A. Будем считать, что система A_λ подмножеств множества $X \times Y$ сходится к прямоугольному множеству A, если система прямоугольных замыканий этих множеств сходится к A. Такие сходимости и стационарные сходимости определяют $PX \times PY$-локальное P-парно топологическое пространство (X, Y, ϑ).

§3. P^2-битопологические структуры

3.1. Категория P^2-битопологических пространств

Пусть X – некоторое множество и $P^2(X \times X)$ – множество некоторых систем подмножеств множества $X \times X$. Топологическую структуру ϑ на $P^2(X \times X)$ будем называть P^2-

битопологической структурой на X, пару (X, ϑ) будем называть P^2-*битопологическим пространством.*

В связи с этим определением мы можем рассмотреть четыре типа пространств:

P^2-битопологическое пространство (X, ϑ),

P^2-топологическое пространство $(X \times X, \vartheta)$,

P-топологическое пространство $(P(X \times X), \vartheta)$,

топологическое пространство $(P^2(X \times X), \vartheta)$.

В трех последних вариантах мы имеем дело с отображениями структурированных множеств.

Для P^2-битопологических пространств (X, ϑ), (X', ϑ') допустимо любое отображение $f : X \longrightarrow X'$, лишь бы отображение $P^2(f \times f) : (P^2(X \times X), \vartheta) \longrightarrow (P^2(X' \times X'), \vartheta')$ было непрерывным.

Для P^2-топологических пространств $(X \times X, \vartheta)$, $(X' \times X', \vartheta')$ допустимы только отображения $f \times f : X \times X \longrightarrow X' \times X'$, порожденные отображением f, причем отображение $P^2(f \times f) : (P^2(X \times X), \vartheta) \longrightarrow (P^2(X' \times X'), \vartheta')$, должно быть непрерывным.

Для P-топологических пространств $(P(X \times X), \vartheta)$, $(P(X' \times X'), \vartheta')$ допустимы только отображения $P(f \times f) : P(X \times X) \longrightarrow P(X' \times X')$, порожденные отображением f, причем отображение $P^2(f \times f) : (P^2(X \times X), \vartheta) \longrightarrow (P^2(X' \times X'), \vartheta')$, должно быть непрерывным.

Для топологических пространств $(P^2(X \times X), \vartheta), (P^2(X' \times X'), \vartheta')$ допустимы только непрерывные отображения $P^2(f \times f) : P^2(X \times X) \longrightarrow P^2(X' \times X')$, порожденные отображением f.

3.2. Прямоугольные P^2-битопологические пространства

Теория P^2-битопологических структур имеет много общего как с теорией P^2-топологических структур, так и с теорией P-битопологических структур, но имеет и свои особенности. Наряду с множеством $P^2(X \times X)$ мы можем рассматривать систему вложений

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{i} & X\times X & & & & \\
{\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i}\downarrow & & & & \\
PX & \xrightarrow{i} & PX\times PX & \xrightarrow{i} & P(X\times X) & & \\
{\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i}\downarrow & & \\
P^2X & \xrightarrow{i} & P^2X\times P^2X & \xrightarrow{i} & P(PX\times PX) & \xrightarrow{i} & P^2(X\times X)
\end{array}$$

Как можно заметить, эта P^2-диаграмма вложений множеств коммутативна. Любая заданная на $P^2(X\times X)$ топологическая структура определяет соответствующие топологические структуры на множествах X, $X\times X$, PX, $PX\times PX$, $P(X\times X)$, P^2X, $P^2X\times P^2X$, $P(PX\times PX)$. С другой стороны, мы можем начинать с произвольной топологической структуры на X и, фиксировав операции перехода к битопологиям и P-топологиям, перейти от топологической структуры на X к топологической структуре на $P^2(X\times X)$. При этом имеется пять вариантов последовательного перехода от топологической структуры на X к топологической структыре на $P^2(X\times X)$. Среди этих вариантов можно выделить *верхнюю последовательность*

$$X \longrightarrow X\times X \longrightarrow PX\times PX \longrightarrow P(X\times X) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow P(PX\times PX) \longrightarrow P^2(X\times X)$$

и *нижнюю последовательность*

$$X \longrightarrow PX \longrightarrow P^2X \longrightarrow P^2X\times P^2X \longrightarrow P(PX\times PX) \longrightarrow P^2(X\times X).$$

Особое место в этих последовательностях занимают множества $P^2X\times P^2X$ и $P(PX\times PX)$, состоящие из *прямоугольных* в $P^2(X\times X)$ множеств и, соответственно, из *систем прямоугольных* в $P(X\times X)$ множеств. В общем случае фиксация топологической структуры на X и операций переходов к битопологиям и P-топологиям определяет различные топологические структуры на множестве $PX\times PX$ (два варианта), $P(X\times X)$ (два варианта), $P^2X\times P^2X$ (три варианта), $P(PX\times PX)$ (пять вариантов), $P^2(X\times X)$ (пять вариантов), Заметим, что если операции перехода к битопологиям и P-топологиям согласованы должным образом, то на каждом из этих множеств определяется одна и та же топологическая структура. В пункте 2 первого параграфа было доказано, что если для произвольного топологического пространства X под PX понимается пространство компактных подмножеств пространства X с топологией Виеториса и под $X \times X$ понимается прямое произведение топологических пространств X на себя, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X \times X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i}\downarrow \\ PX & \xrightarrow{i} & PX \times PX \end{array}$$

топологических пространств коммутативна. В P^2-диаграмме эта диаграмма является верхним левым прямоугольником. Более того, нижний левый прямоугольник P^2-диаграммы имеет тот же тип. Он получается из верхнего левого заменой топологического пространства X на топологическое пространство PX и поэтому также коммутативен. Правый прямоугольник

$$\begin{array}{ccc} PX \times PX & \xrightarrow{i} & P(X \times X) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i}\downarrow \\ P^2X \times P^2X & \xrightarrow{i} & P(PX \times PX) \end{array}$$

P^2-диаграммы имеет другой тип и поэтому должен быть рассмотрен отдельно. Его нижняя строка также получается из верхней заменой топологического пространства X на топологическое пространство PX, но сама-то верхняя строка имеет другой тип. Можно, впрочем, рассмотреть и другой прямоугольник

$$\begin{array}{ccc} PX \times PX & \xrightarrow{i} & P(X \times X) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i}\downarrow \\ P(PX \times PX) & \xrightarrow{i} & P^2(X \times X) \end{array}$$

в котором нижняя строка получается из верхней применением операции P. Коммутативность этого прямоугольника очевидна – она является частным случаем более общего коммутативного прямоугольника

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & {\scriptstyle i}\big\downarrow \\ PX & \xrightarrow{Pf} & PY. \end{array}$$

Однако отсюда следует однозначная определенность топологических структур на всех множествах рассматриваемой P^2-диаграммы кроме, быть может, $P(PX \times PX)$.

3.3. P^2-битопологические подпространства и факторпространства

Определение. *Пусть (X, ϑ) – произвольное P^2-битопологическое пространство и $X' \subset X$. Тогда $P^2(X' \times X') \subset P^2(X \times X)$ и поэтому топологическая структура ϑ, определенная на $P^2(X \times X)$, индуцирует на $P^2(X' \times X')$ топологическую структуру $\vartheta' = \vartheta \mid P^2(X' \times X')$. P^2-битопологическое пространство (X', ϑ') будем называть подпространством P^2-битопологического пространства (X, ϑ).*

Замечание. Соотношение $P^2(X' \times X') \subset P^2(X \times X)$ непосредственно следует из соотношения $X' \subset X$, если для любого Z мы рассматриваем в качестве PZ совокупность *всех* непустых подмножеств множества Z, в противном случае надо специально оговорить выполнение этого условия.

Определение. *Пусть (X, ϑ) – произвольное P^2-битопологическое пространство и p – отображение X на некоторое множество X', Тогда определено отображение $P^2(p \times p) : P^2(X \times X) \longrightarrow P^2(X' \times X')$, для которого $P^2(p \times p)(\alpha) = \{P(p \times p)(A) \mid A \in \alpha\}$ для любого $\alpha \in P^2(X \times X)$. Положим $\vartheta' = \{G' \mid P^2(p \times p)^{-1}(G') \in \vartheta\}$. P^2-битопологическое пространство (X', ϑ') будем называть P^2-битопологическим факторпространством.*

Для P-битопологических пространств было доказано, что понятия P-битопологического подпространства и P-битопологического факторпространства являются категорными понятиями, т.е. некоторые их эквиваленты можно сформулировать в категорных терминах. Точно так же можно доказать, что понятия P^2-битопологического подпространства и P^2-битопологического факторпространства являются категорными понятиями.

3.4. P^2-битопологические прямые произведения и свободные объединения

Определение. *Пусть* $((X_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ *– некоторая система* P^2*-битопологических пространств,* $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *– произведение множеств* X_λ*, образованное по всем* $\lambda \in \Lambda$*. Точками* X *являются системы* $x = (x_\mu \mid \mu \in \Lambda)$*,* $p_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$ *– проекция* X *на* X_λ*,* $p_\lambda(x_\mu \mid \mu \in \Lambda) = x_\lambda$*,* $\mathrm{pr}_\lambda : P^2(X \times X) \longrightarrow P^2(X_\lambda \times X_\lambda)$ *– проекция* $P^2(X \times X)$ *на* $P^2(X_\lambda \times X_\lambda)$*,* $\mathrm{pr}_\lambda(\alpha) = \{P(p_\lambda \times p_\lambda)(A) \mid A \in \alpha\}$*. На* $P^2(X \times X))$ *можно теперь ввести топологическую структуру* $\vartheta = \sup\{\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(\vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$*.* P^2*-битопологическое пространство* (X, ϑ) *будем называть* P^2*-битопологическим прямым произведением системы* $((X_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$*.*

Замечание. Можно заметить, что ϑ порождена множествами $(\mathrm{pr}_\lambda)^{-1}(G)$, образованными для всех $\lambda \in \Lambda$ и всех $G \in \vartheta_\lambda$.

Определение. *Пусть* $((X_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ *– некоторая система* P^2*-битопологических пространств с попарно не пересекающимися множествами* X_λ*,* $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *– объединение множеств* X_λ*, образованное по всем* $\lambda \in \Lambda$*, каждая точка множества* X *принадлежит только одному множеству* X_λ*,* $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$ *– вложение* X_λ *в* X*,* $i_\lambda(x) = x$*,* $in_\lambda : P^2(X_\lambda \times X_\lambda) \longrightarrow P^2(X \times X)$ *– вложение* $P^2(X_\lambda \times X_\lambda)$ *в* $P^2(X \times X)$*,* $in_\lambda(\alpha) = \alpha$*,* $in_\lambda(\vartheta_\lambda)$ *– совокупность всех множеств* $G \subset P^2(X \times X)$*,* in_λ*-прообразы которых принадлежат* ϑ_λ*. На* $P^2(X \times X))$ *можно теперь ввести топологическую структуру* $\vartheta = \inf\{in_\lambda(\vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$*.* P^2*-битопологическое пространство* (X, ϑ) *будем называть* P^2*-битопологическим свободным объединением системы* $((X_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$*.*

Замечание. Можно заметить, что ϑ порождена здесь такими множествами $G \subset P^2(X \times X)$, что $(in_\lambda)^{-1}(G) \in \vartheta_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Ранее было доказано, что понятия P-битопологического прямого произведения и P-битопологического свободного объединения являются категорными понятиями, т.е. некоторые их эквиваленты можно сформулировать в категорных терминах. Точно так же можно доказать, что понятия P^2-битопологического прямого произведения и P-битопологического свободного объединения являются категорными понятиями.

3.5. P^2-битопологические структуры и отображения

В первой части этой книги было доказано существование таких битопологических структур β на евклидовых пространствах, что отображение $f:(\mathbb{R}^m,\beta_m)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\beta_n)$ допустимо, т.е. $f\times f:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m,\beta_m)\longrightarrow(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\beta_n)$ непрерывно, тогда и только тогда, когда $f:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$ – кусочно линейное отображение. Тем самым показано, что класс кусочно линейных отображений евклидовых пространств допускает описание в терминах битопологических структур. Это только один из примеров описания различных классов отображений пространств битопологическими структурами. Ясно, что P^2-битопологические структуры предоставляют еще более широкие возможности для такого рода описаний. Дело в том, что, как было отмечено выше, любое отображение $f\times f:X\times X\longrightarrow Y\times Y$ можно, считая что $X\times X\subset P(X\times X)$ и $Y\times Y\subset P(Y\times Y)$, естественно продолжить до отображения $P(f\times f):P(X\times X)\longrightarrow P(Y\times Y)$, полагая $P(f\times f)(A)=\{(f(x),f(y))\mid(x,y)\in A\}$, и любую битопологическую структуру можно продолжить до *различных* P-битопологических структур. Затем, в силу включения $P(X\times X)\subset P^2(X\times X)$ и $P(Y\times Y)\subset P^2(Y\times Y)$, отображение $P(f\times f):P(X\times X)\longrightarrow P(Y\times Y)$ можно продолжить до отображения $P^2(f\times f):P^2(X\times X)\longrightarrow P^2(Y\times Y)$, полагая $P^2(f\times f)(\alpha)=\{P(f\times f)(A)\mid A\in\alpha\}$, и любую битопологическую структуру можно продолжить до *различных* P^2-битопологических структур.

P^2-битопологические структуры представляют интерес и с другой точки зрения. Мы уже отмечали ранее, что любое подмножество произведения $X\times X$ можно рассматривать как график Γ_f отображения $f:X\longrightarrow X$. Тем самым множеству $P(X\times X)$ естественно сопоставляется множество всех отображений, включая частичные и многозначные. *Теория P^2-битопологических пространств предстает как теория систем отображений.*

3.6. Локальные P^2-битопологические пространства

Локальность P^2-битопологических пространств будет рассматриваться здесь в четырех вариантах, а именно как X-локальность, как $X\times X$-локальность, как $PX\times PX$-локальность и как $P^2X\times P^2X$-локальность.

Определение. *P^2-битопологическое пространство (X,ϑ) называется X-локальным, если сходимостями в $(P^2(X\times X),\vartheta)$ являются* *только стационарные сходимости и сходимости к одноточечным множествам $\{(x,x)\}$ для всех $x \in X$.*

Определение. *P^2-битопологическое пространство (X,ϑ) называется $X \times X$-локальным, если сходимостями в $(P^2(X \times X),\vartheta)$ являются только стационарные сходимости и сходимости к одноточечным множествам $\{(x,y)\}$ для всех $x, y \in X$.*

Определение. *P^2-битопологическое пространство (X,ϑ) называется $PX \times PX$-локальным, если сходимостями в $(P^2(X \times X),\vartheta)$ являются только стационарные сходимости и сходимости к множествам $A \times B$ для всех $A \subset X$ и $B \subset X$.*

Определение. *P^2-битопологическое пространство (X,ϑ) называется $P^2X \times P^2X$-локальным, если сходимостями в $(P^2(X \times X),\vartheta)$ являются только стационарные сходимости и сходимости к системам множеств $\alpha \times \beta$ для всех $\alpha \subset PX$ и $\beta \subset PX$.*

Считая, что

$$X \subset X \times X \subset PX \times PX \subset P^2X \times P^2X,$$

мы можем считать, что *для X-локального P^2-битопологического пространства нетривиальными могут быть только сходимости к точкам множества X, для $X \times X$-локального – только сходимости к точкам множества $X \times X$, для $PX \times PX$-локального – только сходимости к множествам $A \times B$, $A \subset X$, $B \subset X$, для $P^2X \times P^2X$-локального – только сходимости к системам $\alpha \times \beta$.*

Все эти типы локальности имеют достаточное обоснование с точки зрения их значимости для приложений.

3.7. Пространство равномерностей окружений

В первой части книги были приведены некоторые сведения относительно равномерностей окружений, которые назывались там Δ-*равномерностями окружений*. Напомним соответствующее определение.

Определение. *Систему $\mathfrak{U}$ окружений диагонали в $X \times X$ называют Δ-равномерной структурой на X, если она удовлетворяет следующим условиям:*

P1. *Если $U \in \mathfrak{U}$ и $U \subset U'$, то $U' \in \mathfrak{U}$.*

P2. *Если $U \in \mathfrak{U}$ и $U' \in \mathfrak{U}$, то $U \cap U' \in \mathfrak{U}$.*

Пару $(X, \mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$ – некоторая Δ-равномерная структура на X, будем называть Δ-равномерным пространством. Иначе говоря, Δ-равномерной структурой на X называется любой фильтр, состоящий из окружений диагонали $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$.

Определение. *Отображение $f : (X, \mathfrak{U}) \longrightarrow (X', \mathfrak{U}')$ называют Δ-равномерным (равномерным, допустимым) отображением, если $f^{-1}(U') \in \mathfrak{U}$ для любого окружения $U' \in \mathfrak{U}'$.*

Определение. *Категорию всех Δ-равномерных пространств и их допустимых отображений обозначают через $\Delta Unif$ или ΔU.*

Заметим, что любую Δ-равномерную структуру $\mathfrak{U}$ можно дополнить до топологической структуры β_0 на $X \times X$, присоединив пустое множество.

Таким образом теорию *Δ-равномерных пространств* можно рассматривать как специальную часть общей теории битопологических пространств. Возможно и другое вложение категории Δ-равномерных пространств в категорию битопологических пространств посредством присоединения к $\mathfrak{U}$ системы $P((X \times X) \setminus \Delta)$ всех подмножеств $X \times X$, не пересекающихся с Δ.

С другой стороны, любая совокупность Δ-равномерных пространств является $P^2(X \times X)$-множеством и, следовательно, топологическая структура на этой совокупности является P^2-битопологической структурой. С этой точки зрения теория P^2-битопологических пространств представляет несомненный интерес. Рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть X – некоторое топологическое пространство с непустым множеством метрик на нем. Обозначим через $\mathbb{D}_X$ множество *всех* метрик на X. Каждая такая метрика d определяет соответствующую ей Δ-равномерную структуру $\mathfrak{U}_d$ на X, состоящую из окружений диагонали, содержащих окружения $U_\delta = \{(x, y) \mid d(x, y) < \delta\}$. Тем самым определяется взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbb{D}_X$ метрик d на X и множеством Δ-равномерных структур $\mathfrak{U}_d$ на X. Любая метрика на X является непрерывным отображением $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$. Следовательно, множество $\mathbb{D}_X$ можно заменить соответствующим множеством $C(X \times X, \mathbb{R})$ с какой-нибудь топологической структурой, например, структурой поточечной сходимости, компактно открытой или более тонкой сходимостью Виеториса отображений.

§4. P^2-парно топологические структуры

4.1. Категория P^2-парно топологических пространств

Пусть X, Y – некоторые множества и $P^2(X \times Y)$ – множество некоторых систем подмножеств множества $X \times Y$. Топологическую структуру ϑ на $P^2(X \times Y)$ будем называть *P^2-парно топологической структурой* на X, Y, тройку (X, Y, ϑ) будем называть *P^2-парно топологическим пространством.*

В связи с этим определением мы можем рассмотреть четыре типа пространств:

P^2-парно топологическое пространсто (X, Y, ϑ),

P^2-топологическое пространство $(X \times Y, \vartheta)$,

P-топологическое пространство $(P(X \times Y), \vartheta)$,

топологическое пространство $(P^2(X \times Y), \vartheta)$.

В трех последних вариантах мы имеем дело с отображениями структурированных множеств.

Для P^2-парно топологических пространств (X, Y, ϑ), (X', Y', ϑ') допустима любая пара отображений $f : X \longrightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$, лишь бы отображение $P^2(f \times g) : (P^2(X \times Y), \vartheta) \longrightarrow (P^2(X' \times Y'), \vartheta')$ было бы непрерывным.

Для P^2-топологических пространств $(X \times Y, \vartheta)$, $(X' \times Y', \vartheta')$ допустимы только отображения $f \times g : X \times Y \longrightarrow X' \times Y'$, порожденные отображениями f, g, причем отображение $P^2(f \times g) : (P^2(X \times Y), \vartheta) \longrightarrow (P^2(X' \times Y'), \vartheta')$, должно быть непрерывным.

Для P-топологических пространств $(P(X \times Y), \vartheta)$, $(P(X' \times Y'), \vartheta')$ допустимы только отображения $P(f \times g) : P(X \times Y) \longrightarrow P(X' \times Y')$, порожденные отображениями f, g, причем отображение $P^2(f \times g) : (P^2(X \times Y), \vartheta) \longrightarrow (P^2(X' \times Y'), \vartheta')$, должно быть непрерывным.

Для топологических пространств $(P^2(X \times Y), \vartheta)$, $(P^2(X' \times Y'), \vartheta')$ допустимы только непрерывные отображения $P^2(f \times g) : P^2(X \times Y) \longrightarrow P^2(X' \times Y')$, порожденные отображениями f, g.

4.2. Прямоугольные P^2-парно топологические пространства

Теория P^2-парно топологических пространств строится в общем подобно теории P^2-битопологических пространств, но имеет и некоторые особенности. Так, например, в P^2-диаграмме некоторые вложения заменяются соответствиями и у их стрелок опускаются обозначения вложения, а именно

$$\begin{tikzcd}
X,Y \arrow[r] \arrow[d] & X\times Y \arrow[d, "i"'] & & \\
PX,PY \arrow[r] \arrow[d] & PX\times PY \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & P(X\times Y) \arrow[d, "i"'] & \\
P^2X,P^2Y \arrow[r] & P^2X\times P^2Y \arrow[r, "i"] & P(PX\times PY) \arrow[r, "i"] & P^2(X\times Y)
\end{tikzcd}$$

Как можно заметить, эта P^2-диаграмма соответствий множеств является коммутативной. Любая заданная на $P^2(X \times Y)$ топологическая структура определяет соответствующие топологические структуры на множествах $X \times Y$, $PX \times PY$, $P(X \times Y)$, $P^2X \times P^2Y$, $P(PX \times PY)$. С другой стороны, мы можем начать с произвольных топологических структур на X, Y и, фиксировав операции перехода к парным топологиям и P-топологиям, перейти от топологических структур на X и Y к топологической структуре на $P^2(X \times Y)$. При этом имеется пять вариантов последовательного перехода от топологических структур на X, Y к топологической структыре на $P^2(X \times Y)$. Среди этих вариантов можно выделить *верхнюю последовательность*

$$X,Y \longrightarrow X\times Y \longrightarrow PX\times PY \longrightarrow P(X\times Y) \longrightarrow P(PX\times PY) \longrightarrow P^2(X\times Y)$$

и *нижнюю последовательность*

$$X,Y \longrightarrow PX,PY \longrightarrow P^2X,P^2Y \longrightarrow P^2X\times P^2Y \longrightarrow P(PX\times PY) \longrightarrow P^2(X\times Y).$$

Особое место в этих последовательностях занимают множества $P^2X\times P^2Y$ и $P(PX\times PY)$, состоящие из *прямоугольных* в $P^2(X\times Y)$ множеств и, соответственно, из *систем прямоугольных* в $P(X\times Y)$ множеств. В общем случае фиксация топологических структур на X, Y и операций переходов к битопологиям и P-топологиям определяет различные топологические структуры на множестве $PX \times PY$ (два варианта), $P(X \times Y)$ (два варианта), $P^2X \times P^2Y$ (три варианта), $P(PX \times PY)$ (пять вариантов), $P^2(X \times Y)$ (пять вариантов), Заметим, что если операции перехода к битопологиям и P-топологиям должным образом согласованы, то на каждом из этих множеств определяется одна и та же топологическая структура. Такое согласование реализуется, если для произвольного топологического пространства Z под PZ понимается пространство компактных подмножеств пространства Z с топологией Виеториса и под $X \times Y$ понимается прямое произведение топологических пространста X и Y. В этом случае диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X, Y & \longrightarrow & X \times Y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i} \\ PX, PY & \longrightarrow & PX \times PY \end{array}$$

топологических пространств коммутативна. В P^2-диаграмме эта диаграмма является верхним левым прямоугольником. Более того, нижний левый прямоугольник P^2-диаграммы имеет тот же тип. Он получается из верхнего левого заменой топологического пространства X на топологическое пространство PX и топологического пространства Y на топологическое пространство PY, поэтому он также коммутативен. Правый прямоугольник

$$\begin{array}{ccc} PX \times PY & \xrightarrow{i} & P(X \times Y) \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i} \\ P^2X \times P^2Y & \xrightarrow{i} & P(PX \times PY) \end{array}$$

P^2-диаграммы имеет другой тип и поэтому должен быть рассмотрен отдельно. Его нижняя строка также получается из верхней заменой топологического пространства X на топологическое пространство PX и топологического пространства Y на топологическое пространство PY, но сама-то верхняя строка имеет другой тип. Можно, впрочем, рассмотреть и другой прямоугольник

$$\begin{array}{ccc} PX \times PY & \xrightarrow{i} & P(X \times Y) \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i} \\ P(PX \times PY) & \xrightarrow{i} & P^2(X \times Y) \end{array}$$

в котором нижняя строка получается из верхней применением операции P. Коммутативность этого прямоугольника очевидна – она является частным случаем более общего коммутативного прямоугольника

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i} \\ PX & \xrightarrow{Pf} & PY. \end{array}$$

Однако отсюда следует однозначная определенность топологических структур на всех множествах рассматриваемой P^2-диаграммы кроме, быть может, $P(PX \times PY)$.

4.3. P^2-парно топологические подпространства и факторпространства

Определение. *Пусть* (X, Y, ϑ) *– произвольное* P^2*-парно топологическое пространство,* $X' \subset X$, $Y' \subset Y$. *Тогда* $P^2(X' \times Y') \subset P^2(X \times Y)$, *и поэтому топологическая структура* ϑ, *определенная на* $P^2(X \times Y)$, *индуцирует на* $P^2(X' \times Y')$ *топологическую структуру* $\vartheta' = \vartheta \mid P^2(X' \times Y')$. P^2*-парно топологическое пространство* (X', Y', ϑ') *будем называть подпространством* P^2*-парно топологического пространства* (X, Y, ϑ).

Замечание. Соотношение $P^2(X' \times Y') \subset P^2(X \times Y)$ непосредственно следует из соотношения $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, если для любого Z мы рассматриваем в качестве PZ совокупность *всех* непустых подмножеств множества Z, в противном случае надо специально оговорить выполнение этого условия.

Определение. *Пусть* (X, Y, ϑ) *– произвольное* P^2*-парно топологическое пространство,* p *– отображение* X *на некоторое множество* X', q *– отображение* Y *на некоторое множество* Y', *Тогда определено отображение* $P^2(p \times q) : P^2(X \times Y) \longrightarrow P^2(X' \times Y')$, *для которого* $P^2(p \times q)(\alpha) = \{P(p \times q)(A) \mid A \in \alpha\}$ *для любого* $\alpha \in P^2(X \times Y)$. *Положим* $\vartheta' = \{G' \mid P^2(p \times q)^{-1}(G') \in \vartheta\}$. P^2*-парно топологическое пространство* (X', Y', ϑ') *будем называть* P^2*-парно топологическим факторпространством.*

Для P-парно топологических пространств было доказано, что понятия P-парно топологического подпространства и P-парно топологического факторпространства являются категорными понятиями, т.е. некоторые их эквиваленты можно сформулировать в категорных терминах. Точно так же можно доказать, что понятия P^2-парно топологического подпространства и P^2-парно топологического факторпространства являются категорными понятиями.

4.4. P^2-парно топологические прямые произведения и свободные объединения

Определение. *Пусть* $((X_\lambda, Y_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ *– некоторая система* P^2*-парно топологических пространств,* $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *и* $Y =$

$\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ – *произведение множеств* X_λ *и* Y_λ*, соответственно, образованные по всем* $\lambda \in \Lambda$*. Точками* X *являются системы* $x = (x_\mu \mid \mu \in \Lambda)$*,* $p_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$ *– проекция* X *на* X_λ*,* $p_\lambda(x_\mu \mid \mu \in \Lambda) = x_\lambda$*, точками* Y *являются системы* $y = (y_\mu \mid \mu \in \Lambda)$*,* $q_\lambda : Y \longrightarrow Y_\lambda$ *– проекция* Y *на* Y_λ*,* $q_\lambda(y_\mu \mid \mu \in \Lambda) = y_\lambda$*,* $\mathrm{pr}_\lambda : P^2(X\times Y) \longrightarrow P^2(X_\lambda \times Y_\lambda)$ *– проекция* $P^2(X\times Y)$ *на* $P^2(X_\lambda \times Y_\lambda)$*,* $\mathrm{pr}_\lambda(\alpha) = \{P(p\times q)(A) \mid A \in \alpha\}$*. На* $P^2(X\times Y))$ *можно теперь ввести топологическую структуру* $\vartheta = \sup\{\mathrm{pr}_\lambda)^{-1}(\vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$*.* P^2*-парно топологическое пространство* (X, Y, ϑ) *будем называть* P^2*-парно топологическим прямым произведением системы* $((X_\lambda, Y_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$*.*

Замечание. Можно заметить, что ϑ порождена множествами $(\mathrm{pr}_\lambda)^{-1}(G)$, образованными для всех $\lambda \in \Lambda$ и всех $G \in \vartheta_\lambda$.

Определение. *Пусть* $((X_\lambda, Y_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ *– некоторая система* P^2*-парно топологических пространств с попарно непересекающимися множествами* X_λ *и множествами* Y_λ*. Пусть* $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *– объединение множеств* X_λ*,* $Y = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$*, образованные по всем* $\lambda \in \Lambda$*, при этом каждая точка множества* X *принадлежит только одному из множеств* X_λ*, каждая точка множества* Y *принадлежит только одному из множеств* Y_λ*. Обозначим* $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$ *– вложение* X_λ *в* X*,* $j_\lambda : Y_\lambda \longrightarrow Y$ *– вложение* Y_λ *в* Y*,* $i_\lambda(x) = x$*,* $j_\lambda(y) = y$*,* $in_\lambda : P^2(X_\lambda \times Y_\lambda) \longrightarrow P^2(X\times Y)$ *– вложение* $P^2(X_\lambda \times Y_\lambda)$ *в* $P^2(X\times Y)$*,* $in_\lambda(\alpha) = \alpha$*,* $in_\lambda(\vartheta_\lambda)$ *– совокупность всех множеств* $G \subset P^2(X\times Y)$*,* in_λ*-прообразы которых принадлежат* ϑ_λ*. На* $P^2(X\times Y))$ *можно теперь ввести топологическую структуру* $\vartheta = \inf\{in_\lambda(\vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$*.* P^2*-парно топологическое пространство* (X, Y, ϑ) *будем называть* P^2*-парно топологическим свободным объединением системы* $((X_\lambda, Y_\lambda, \vartheta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$*.*

Замечание. Можно заметить, что ϑ порождена здесь такими множествами $G \subset P^2(X\times Y)$, что $(in_\lambda)^{-1}(G) \in \vartheta_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Ранее было доказано, что понятия P^2-битопологического прямого произведения и P^2-битопологического свободного объединения являются категорными понятиями, то есть некоторые их эквиваленты можно сформулировать в категорных терминах. Точно так же можно доказать, что понятия P^2-парно топологического прямого произведения и P-парно топологического свободного объединения являются категорными понятиями.

4.5. P^2-парно топологические структуры и отображения

В первой части этой книги было доказано существование таких битопологических структур β на евклидовых пространствах, что отображение $f : (\mathbb{R}^m, \beta_m) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \beta_n)$ допустимо, т.е. $f \times f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \beta_m) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \beta_n)$ непрерывно, тогда и только тогда, когда $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – кусочно линейное отображение. Тем самым было доказано, что класс кусочно линейных отображений евклидовых пространств допускает описание в терминах битопологических структур. Это только один из примеров описания различных классов отображений пространств битопологическими структурами. Ясно, что P^2-парно топологические структуры предоставляют еще более широкие возможности для такого рода описаний. Мы уже отмечали ранее, что любое подмножество произведения $X \times Y$ можно рассматривать как график Γ_f отображения $f : X \longrightarrow Y$, Тем самым множеству $P(X \times Y)$ естественно сопоставляется множество всех отображений, включая частичные и многозначные, а множеству $P^2(X \times Y)$ – сопоставляется множество систем таких отображений. *Теория P^2-битопологических пространств предстает как теория систем отображений.*

4.6. Локальные P^2-парно топологические пространства

Локальность P^2-парно топологических пространств можно рассматриваться в трех вариантах, а именно как $X \times Y$-локальность, как $PX \times PY$-локальность и как $P^2X \times P^2Y$-локальность.

Определение. *P^2-парно топологическое пространство (X, Y, ϑ) называется $X \times Y$-локальным, если сходимостями в $(P^2(X \times Y), \vartheta)$ являются только стационарные сходимости и сходимости к одноточечным множествам $\{(x, y)\}$ для всех $x \in X, y \in Y$.*

Определение. *P^2-парно топологическое пространство (X, Y, ϑ) называется $PX \times PY$-локальным, если сходимостями в $(P^2(X \times Y), \vartheta)$ являются только стационарные сходимости и сходимости к множествам $A \times B$ для всех $A \subset X$ и $B \subset Y$.*

Определение. *P^2-парно топологическое пространство (X, Y, ϑ) называется $P^2X \times P^2Y$-локальным, если сходимостями в $(P^2(X \times Y), \vartheta)$ являются только стационарные сходимости и сходимости к системам множеств $\alpha \times \beta$ для всех $\alpha \subset PX$ и $\beta \subset PY$.*

Считая, что

$$X \times Y \subset PX \times PY \subset P^2X \times P^2Y,$$

мы можем считать, что *для $X \times Y$-локального P^2-парно топологического пространства нетривиальными могут быть только сходимости к точкам множества $X \times Y$, для $PX \times PY$-локального – только сходимости к множествам $A \times B$, $A \subset X$, $B \subset Y$, для $P^2X \times P^2Y$-локального – только сходимости к системам $\alpha \times \beta$, $\alpha \in P^2X, \beta \in P^2Y$.*

Все эти типы локальности имеют достаточное обоснование с точки зрения их значимости для приложений.

§5. P^3-топологические структуры

5.1. Категория P^3-топологических пространств

Определение. *Пусть X – некоторое множество и P^3X – множество всех или части совокупностей систем подмножеств множества X. Топологическую структуру θ на P^3X будем называть P^3-топологической структурой на X, а пару (X, θ) будем называть P^3-топологическим пространством.*

В связи с этим определением мы можем рассматривать четыре типа соответствующих друг другу пространств, а именно:

P^3-топологическое пространство (X, θ),

P^2-топологическое пространство (PX, θ),

P-топологическое пространство (P^2X, θ),

топологическое пространство (P^3X, θ).

Во втором третьем и четвертом варианте мы имеем дело с структурированными множествами. Это обстоятельство проявляется при определении допустимых отображений этих пространств.

Для P^3-топологических пространств (X, θ), (X', θ') допустимо любое отображение $f : X \longrightarrow X'$, лишь бы отображение $P^3f : (P^3X, \theta) \longrightarrow (P^3X', \theta')$ было бы непрерывным,

Для P^2-топологических пространств (PX, θ), (PX', θ') допустимы только отображения $Pf : PX \longrightarrow PX'$, порожденые отображением f, причем отображение $P^3f : (P^3X, \theta) \longrightarrow (P^3X', \theta')$, должно быть непрерывным.

Для P-топологических пространств (P^2X, θ), (P^2X', θ') допустимы только отображения $P^2f : P^2X \longrightarrow P^2X'$, порожденые отображением f, причем отображение $P^3f : (P^3X, \theta) \longrightarrow (P^3X', \theta')$, должно быть непрерывным.

Для топологических пространств (P^3X, θ), (P^3X', θ') допустимы только непрерывные отображение $P^3f : (P^3X, \theta) \longrightarrow (P^3X', \theta')$,

Ясно, что P^3-топологические пространства и их допустимые отображения образуют категорию. Мы не будем здесь останавливаться на определениях подпространств, факторпространств, прямых произведений и свободных объединений в категории P^3-топологических пространств – об этом достаточно, может быть даже слишком много, говорилось в предыдущих параграфах, а рассмотрим конкретную категорию этого типа – категорию Σ-равномерных пространств. Существуют различные варианты введения понятий равномерной структуры и равномерной непрерывности отображений. Сюда относится понятие упомянутой выше Δ-равномерной структуры окружений диагонали $\Delta \subset X \times X$, понятие Ω-равномерной структуры окрестностей $(U_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda)$ точек $x \in X$ и понятие Σ-равномерной структуры открытых покрытий пространства X.

5.2. Σ-равномерные пространства

При введении понятия Σ-равномерной структуры, к описанию которой мы сейчас перейдем, нам потребуются два понятия, относящиеся к системам множеств, а именно понятие *внутреннего пересечения* систем множеств и понятие *вписанности* одной системы множеств в другую систему.

Внутренним пересечением двух систем s_1, s_2 множеств будем называть систему $s_1 \wedge s_2 = \{G_1 \cap G_2 \mid G_1 \in s_1, G_2 \in s_2\}$.

Будем говорить, что система s_1 вписана в систему s_2, если каждый элемент системы s_1 содержится в каком-нибудь элементе системы s_2.

Система s называется покрытием множества X, если $X = \bigcup_{G \in s} G$.

Система s называется открытым покрытием топологического пространства X, если его элементы являются открытыми в X множествами.

Определение. *Пусть X – произвольное топологическое простран-*

ство и $\mathfrak{U}$ – некоторая система его открытых покрытий. Будем говорить, что $\mathfrak{U}$ является Σ-равномерной структурой на X, если

из того, что $s_1 \in \mathfrak{U}$ и $s_2 \in \mathfrak{U}$ следует, что $s_1 \wedge s_2 \in \mathfrak{U}$,

из того, что $s_1 \in \mathfrak{U}$ и покрытие s_1 вписано в s_2 следует, что $s_2 \in \mathfrak{U}$.

Пару $(X, \mathfrak{U})$ будем называть Σ-равномерным пространством.

Определение. *Пространством Σ-равномерностей на X будем называть множество ΣX некоторых Σ-равномерностей на X, рассматриваемое вместе с некоторой заданной на нем топологической структурой θ.*

Замечание. Если $(\Sigma X, \theta)$ – пространство Σ-равномерностей на X, то (X, θ) является P^3-топологическим пространством.

Любую топологическую структуру на множестве P^3X мы можем ввести трехкратной P-топологизацией, а именно переходом от топологической структуры на X к топологической структуре на PX, от топологической структуры на PX к топологической структуре на P^2X и, наконец, от топологической структуры на P^2X к топологической структуре на P^3X. В простейшем случае все эти топологизации имеют одинаковый тип, например топологии Виеториса. Но топологизации Виеториса определяются на множествах *замкнутых подмножеств* топологических пространств, а каждая Σ-равномерная структура является некоторой совокупностью систем *открытых множеств*. Однако каждой Σ-равномерной структуре можно сопоставить так называемую структуру соседства, являющуюся совокупностью систем *замкнутых множеств*.

Определение. *Пусть X – произвольное топологическое пространство и ν – некоторая совокупность систем его замкнутых множеств. Будем говорить, что ν является структурой соседства на X при выполнении следующих условий:*

если $\bigcap_{F\in\alpha} F \neq \emptyset$, то $\alpha \in \nu$,

если каждый элемент системы α_1 содержит какой-нибудь

элемент системы $\alpha_2 \in \nu$, то $\alpha_1 \in \nu$,

если $\alpha_1 \vee \alpha_2 \in \nu$ то $\alpha_1 \in \nu$ или $\alpha_2 \in \nu$.

Здесь $\alpha_1 \vee \alpha_2 = \{F_1 \cup F_2 \mid F_1 \in \alpha_1, F_2 \in \alpha_2\}$.

Соответствие между Σ-равномерными структурами и структурами соседства взаимно однозначно. Действительно, пусть $\mathfrak{U}$

– некоторая Σ-равномерная структура на топологическом пространстве X. Положим $\nu = \{\alpha \mid C\alpha \notin \mathfrak{U}\}$, где $C\alpha = \{X \setminus A \mid A \in \alpha\}$. Докажем, что так определенная структура является структурой соседства.

Если $\bigcap_{F\in\alpha} F \neq \emptyset$, то $C\alpha$ не является покрытием пространства X, следовательно $C\alpha \notin \mathfrak{U}$, и поэтому $\alpha \in \nu$.

Если каждый элемент системы α_1 содержит какой-нибудь элемент системы $\alpha_2 \in \nu$, то система $C\alpha_1$ вписана в систему $C\alpha_2 \notin \mathfrak{U}$, и поэтому $C\alpha_1 \notin \mathfrak{U}$, т.е. $\alpha_1 \in \nu$.

Если $\alpha_1 \vee \alpha_2 \in \nu$, то $C(\alpha_1 \vee \alpha_2) \notin \mathfrak{U}$. Но $C(\alpha_1 \vee \alpha_2) = C\alpha_1 \wedge C\alpha_2$, поэтому $C\alpha_1 \wedge C\alpha_2 \notin \mathfrak{U}$, следовательно $C\alpha_1 \notin \mathfrak{U}$ или $C\alpha_2 \notin \mathfrak{U}$, т.е. $\alpha_1 \in \nu$ или $\alpha_2 \in \nu$.

Пусть теперь ν – некоторая структура соседства на X и $\mathfrak{U} = \{s \mid Cs \notin \nu\}$. Докажем, что так определенная структура является Σ-равномерной структурой.

Если $s_1 \wedge s_2 \notin \mathfrak{U}$, т.е. $C(s_1 \wedge s_2) \in \nu$, то $Cs_1 \vee Cs_2 \in \nu$. Тогда $Cs_1 \in \nu$ или $Cs_2 \in \nu U$ и поэтому $s_1 \notin \mathfrak{U}$ или $s_2 \notin \mathfrak{U}$.

Если $s_2 \notin \mathfrak{U}$ и s_1 вписано в s_2, то каждый элемент системы Cs_1 содержит какой-нибудь элемент системы $Cs_2 \in \nu$, и поэтому $Cs_1 \in \nu$, т.е. $s_1 \notin \mathfrak{U}$.

Указанные соответствия между Σ-равномерными структурами и структурами соседства взаимно обратны, так как для любой Σ-равномерной структуры $\mathfrak{U}$ и соответствующей структуре соседства ν справедливо, что

$$s \in \mathfrak{U} \Longleftrightarrow Cs = \alpha \notin \nu \Longleftrightarrow s \in \mathfrak{U}$$

Существует и другая возможность сопоставления Σ-равномерным структурам совокупностей систем замкнутых множеств, именно, так называемых Φ-структур.

Определение. *Совокупность μ систем замкнутых в X множеств будем называть Φ-структурой, если она удовлетворяет следующим условиям:*

если $\alpha \in \mu$, то $\bigcap_{A\in\alpha} A = \emptyset$,

если $\alpha_1 \in \mu$ и $\alpha_2 \in \mu$, то $\alpha_1 \vee \alpha_2 \in \mu$,

если каждый элемент системы $\alpha_1 \in \mu$ содержит какой-нибудь элемент системы α_2, то $\alpha_2 \in \nu$.

Между Σ-равномерными структурами $\mathfrak{U}$ и Φ-структурами μ существует взаимно однозначное соответствие, определенное условием

$$s \in \mathfrak{U} \Longleftrightarrow Cs \in \mu.$$

Ivanov A. A. Space structures, their theory, and applications 3.

The paper is the third part of the book "Space structures, their theory and applications". This part consists of introduction and two chapters:P^2*-topological spaces and structuralized sets.* The second chapter consists of introduction and five paragraphs: P*-bitopological structures,* P*-pairwise topological structures,* P^2*-bitopological structures,* P^2*-pairwise topological structures and* P^3*-topological structures.*

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: aaivanov@pdmi.ras.ru

Поступило 12 ноября 2007 г.