Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

Б. П. Харламов

ДИФФУЗИОННЫЙ ПРОЦЕСС С ЗАДЕРЖКОЙ НА ГРАНИЦАХ ОТРЕЗКА

1. Постановка задачи

Пусть $w(t)$ $(t \geqslant 0)$ – одномерный винеровский процесс. Для данного отрезка $[a, b]$ $(a < w(0) < b)$ рассмотрим усеченный процесс

$$\overline{w}(t) = \begin{cases} b, & w(t) \geqslant b \\ w(t), & a < w(t) < b \\ a, & w(t) \leqslant a \end{cases}$$

при всех $t \geqslant 0$. Ясно, что этот процесс уже не является марковским. Однако он сохраняет полумарковость: марковское свойство выполняется относительно момента первого выхода из любого открытого интервала внутри отрезка, а также из любых односторонних окрестностей граничных точек. Полумарковское семейство мер (P_x) $(x \in [a, b])$ усеченного процесса легко определяется по исходному марковскому семейству мер (P^o_x) винеровского процесса. Например, для полузамкнутого отрезка $[a, c)$ $(a < c \leqslant b)$ и любого $t > 0$

$$P_a(\sigma_{[a,c)} < t,\, X(\sigma_{[a,c)}) = c) = P^o_a(\sigma_{(-\infty,c)} < t,\, X(\sigma_{(-\infty,c)}) = c),$$

где σ_Δ – момент первого выхода из множества Δ, $X(t) \equiv X_t$ – значение процесса в момент $t < \infty$.

Теперь рассмотрим в качестве исходного процесса диффузионный процесс, у которого скачком меняется коэффициент сноса при переходе через границы отрезка (a, b), например, слева от a – положительный снос, справа от b – отрицательный, на интервале (a, b) сохраняется нулевой снос. Применим к процессу процедуру усечения. Для нового усеченного процесса закон движения внутри интервала будет, как и у первого, но меняется поведение на границах: изменилась полумарковская переходная функция процесса.

Поддержано грантом РФФИ НШ-4222.2006.1.

Этот пример подсказывает следующую задачу: определить полумарковскую переходную функцию на границе так, чтобы процесс сохранял заданный диффузионный вид внутри интервала, т.е. до момента первого выхода на границу и в любое время схода с границы внутрь заданной области значений. Задачи такого рода важны для приложений, где принимается во внимание состояние взаимодействия диффундирующей частицы с границей, приводящее к некоторому динамическому равновесию системы. В данной работе исследуются такие граничные условия и решается задача нахождения стационарного распределения для соответствующего процесса с граничными условиями общего вида.

Обозначим (P_x) $(a \leqslant x \leqslant b)$ согласованное семейство мер полумарковского процесса на отрезке $[a,b]$, который является диффузионным полумарковским процессом на открытом интервале (a,b). Пусть

$$g_{(c,d)}(\lambda, x) = E_x(\exp(-\lambda\sigma_{(c,d)}); X(\sigma_{(c,d)}) = c),$$

$$h_{(c,d)}(\lambda, x) = E_x(\exp(-\lambda\sigma_{(c,d)}); X(\sigma_{(c,d)}) = d),$$

где $a < c \leqslant x \leqslant d < b$, $\lambda \geqslant 0$. Для полузамкнутых интервалов (“открытых” в топологии отрезка) введем специальное обозначение. Для них возможен выход только через открытую границу.

$$k_a(\lambda, y|\, x) = E_x(\exp(-\lambda\sigma_{[a,y)}); \sigma_{[a,y)} < \infty) \quad (a \leqslant x < y \leqslant b),$$

$$k_b(\lambda, y|\, x) = E_x(\exp(-\lambda\sigma_{(y,b]}); \sigma_{(y,b]} < \infty) \quad (a \leqslant y < x \leqslant b).$$

Известно, что g и h как функции от x удовлетворяют на интервале (c,d) дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2} f'' + A(x) f' - B(\lambda, x) f = 0 \tag{1}$$

при краевых условиях

$$g_{(c,d)}(\lambda, c) = h_{(c,d)}(\lambda, d) = 1, \quad g_{(c,d)}(\lambda, d) = h_{(c,d)}(\lambda, c) = 0.$$

B – некоторая положительная функция с вполне непрерывной частной производной по λ и $B(0,x) = 0$ для всех x. Для марковского случая справедливо $B(\lambda, x) = \lambda\gamma(x)$. В дальнейшем будем предполагать именно марковский случай, а также, что функции A и γ (параметры задачи) непрерывны и $\gamma \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$.

2. Переходная производящая функция на границе

Имеем

$$k_a(\lambda, y|\, x) = h_{(a,y)}(\lambda, x) + g_{(a,y)}(\lambda, x) k_a(\lambda, y|\, a) \quad a < x < y, \qquad (2)$$

$$k_b(\lambda, y|\, x) = g_{(y,b)}(\lambda, x) + h_{(y,b)}(\lambda, x) k_b(\lambda, y|\, b) \quad y < x < b, \qquad (3)$$

и, следовательно, k_a, k_b как функции от x удовлетворяют уравнению (1) с краевыми условиями, определяемыми функциями

$$K_a(\lambda, y) \equiv k_a(\lambda, y|\, a), \quad K_b(\lambda, y) \equiv k_b(\lambda, y|\, b) \quad (a \leqslant y \leqslant b).$$

Пользуясь полумарковским свойством процесса, имеем

$$K_a(\lambda, y) = K_a(\lambda, y-z)(h_{(a,y)}(\lambda, y-z) + g_{(a,y)}(\lambda, y-z) K_a(\lambda, y)) \quad (z > 0). \qquad (4)$$

При сделанных предположениях справедливо

$$h_{(a,y)}(\lambda, y-z) = 1 - h'_{(a,y)}(\lambda, y) z + o(z),$$

$$g_{(a,y)}(\lambda, y-z) = -g'_{(a,y)}(\lambda, y) z + o(z).$$

При $z \to 0$ получаем дифференциальное уравнение относительно K_a

$$K'_a(\lambda, y) + \psi_2(a, y)\, K_a(\lambda, y) - \phi_2(a, y)\, K_a^2(\lambda, y) = 0 \quad (y > a) \qquad (5)$$

(уравнение Бернулли), где

$$\phi_2(c, d) = -g'_{(c,d)}(\lambda, d), \quad \psi_2(c, d) = h'_{(c,d)}(\lambda, d).$$

Аналогично для K_b

$$K'_b(\lambda, y) - \phi_1(y, b)\, K_b(\lambda, y) + \psi_1(y, b)\, K_b^2(\lambda, y) = 0 \quad (y < b), \qquad (6)$$

где $\phi_1(c, d) = -g'_{(c,d)}(\lambda, c)$, $\psi_1(c, d) = h'_{(c,d)}(\lambda, c)$. Заметим, что $\psi_2(a, y)$ и $\phi_2(a, y)$ как функции от y имеют особенность в точке a, а также $\phi_1(y, b)$ и $\psi_1(y, b)$ как функции от y имеют особенность в точке b. Решения этих уравнений:

$$K_a(\lambda, y) = \frac{\exp\left(\int\limits_y^b \psi_2(a, s)\, ds\right)}{C_a + \int\limits_y^b \phi_2(a, t) \exp\left(\int\limits_t^b \psi_2(a, s)\, ds\right) dt}, \qquad (7)$$

$$K_b(\lambda, y) = \frac{\exp\left(\int\limits_a^y \phi_1(s,b)\,ds\right)}{C_b + \int\limits_a^y \psi_1(t,b)\exp\left(\int\limits_a^t \phi_1(s,b)\,ds\right)dt}, \tag{8}$$

Таким образом, все разнообразие рассматриваемых краевых задач определяется выбором произвольных постоянных C_a, C_b (зависящих от λ) в решениях этих уравнений.

Для выяснения вопроса о существовании процесса необходимо убедиться в том, что K_a и K_b – вполне непрерывные функции от λ. Для разрешения этого вопроса оказывается более удобной другая форма их представления. Возможность ее использования связана с нарушением условия единственности решений уравнений (5), (6), вызванного особенностью коэффициентов в начальных точках интервалов интегрирования.

Теорема 1. *Если коэффициент A имеет ограниченную производную в некоторой окрестности точки a, то $K_a(\lambda, a) = 1$ и существует частная производная функции $K_a(\lambda, y)$ справа по второму аргументу в точке a, обозначаемая как $L_a(\lambda)$. При этом*

$$K_a(\lambda, y) = \frac{\psi_1(a,y)}{-L_a(\lambda) + \phi_1(a,y)}. \tag{9}$$

Если коэффициент A имеет ограниченную производную в некоторой окрестности точки b, то $K_b(\lambda, b) = 1$ и существует частная производная функции $K_b(\lambda, y)$ слева по второму аргументу в точке b, обозначаемая как $L_b(\lambda)$. При этом

$$K_b(\lambda, y) = \frac{\phi_2(y,b)}{L_b(\lambda) + \psi_2(y,b)}. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим два уравнения вида (1) на интервале (a, b) с соответствующими двумя парами функций (A_i, B_i) $(i = 1, 2)$. Пусть (g_i, h_i) – две соответствующие пары решений этих уравнений с граничными значениями $g_i(a) = h_i(b) = 1$, $g_i(b) = h_i(a) = 0$. Имеем $g_i(x), h_i(x) \geqslant 0$ $(x \in (a, b))$, а также, как нетрудно доказать, $g_i'(x) \leqslant 0$, $h_i'(x) \geqslant 0$. Разность $\Delta_g \equiv g_2 - g_1$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}\,\Delta_g'' + A_2\Delta_g' - B_2\Delta_g = -(A_2 - A_1)g_1' + (B_2 - B_1)g_1.$$

Если $A_2(x) \geqslant A_1(x)$ и $B_2(x) \geqslant B_1(x)$ при всех $x \in (a,b)$, то правая часть уравнения неотрицательна, и из принципа максимума следует, что $\Delta_g \leqslant 0$. С другой стороны, разность $\Delta_h \equiv h_2 - h_1$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}\,\Delta_h'' + A_2\Delta_h' - B_2\Delta_h = -(A_2 - A_1)h_1' + (B_2 - B_1)h_1.$$

Если $A_2(x) \leqslant A_1(x)$ и $B_2(x) \geqslant B_1(x)$ при всех $x \in (a,b)$, то правая часть уравнения неотрицательна, и из принципа максимума следует, что $\Delta_h \leqslant 0$. Из сравнения решений уравнений выводим сравнения для производных на концах интервала (a,b):

1) из условия $A_2 \geqslant A_1$ и $B_2 \geqslant B_1$ следует $g_2'(a) \leqslant g_1'(a)$, $g_2'(b) \geqslant g_1'(b)$;
2) из условия $A_2 \leqslant A_1$ и $B_2 \geqslant B_1$ следует $h_2'(a) \leqslant h_1'(a)$, $h_2'(b) \geqslant h_1'(b)$.

Доказанные отношения позволяют использовать для оценки решения уравнения (1) решения аналогичных уравнений с постоянными коэффициентами A_i, B_i, для которого соответствующие производные имеют вид

$$g_i'(a) = -A_i - R_i\frac{\operatorname{ch}(b-a)R_i}{\operatorname{sh}(b-a)R_i}, \quad g_i'(b) = -e^{-A_i(b-a)}\frac{R_i}{\operatorname{sh}(b-a)R_i},$$

$$h_i'(a) = e^{A_i(b-a)}\frac{R_i}{\operatorname{sh}(b-a)R_i}, \quad h_i'(b) = -A_i + R_i\frac{\operatorname{ch}(b-a)R_i}{\operatorname{sh}(b-a)R_i},$$

где $R_i = \sqrt{(A_i)^2 + 2B_i}$. Отсюда при условии $A_1 \leqslant A \leqslant A_2$ и $B \leqslant B_1 = B_2$ получаем оценки

$$A_1 + R_1\frac{\operatorname{ch}(b-a)R_1}{\operatorname{sh}(b-a)R_1} \leqslant \phi_1(a,b) \leqslant A_2 + R_2\frac{\operatorname{ch}(b-a)R_2}{\operatorname{sh}(b-a)R_2}, \tag{11}$$

$$e^{-A_2(b-a)}\frac{R_2}{\operatorname{sh}(b-a)R_2} \leqslant \phi_2(a,b) \leqslant e^{-A_1(b-a)}\frac{R_1}{\operatorname{sh}(b-a)R_1}, \tag{12}$$

$$e^{A_1(b-a)}\frac{R_1}{\operatorname{sh}(b-a)R_1} \leqslant \psi_1(a,b) \leqslant e^{A_2(b-a)}\frac{R_2}{\operatorname{sh}(b-a)R_2}, \tag{13}$$

$$-A_2 + R_2\frac{\operatorname{ch}(b-a)R_2}{\operatorname{sh}(b-a)R_2} \leqslant \psi_2(a,b) \leqslant -A_1 + R_1\frac{\operatorname{ch}(b-a)R_1}{\operatorname{sh}(b-a)R_1}. \tag{14}$$

Для оценки $\psi_2(a,y)$, $\phi_2(a,y)$ при $y \to a$ используем $A_1 = \min\{A(x) : a \leqslant x \leqslant y\}$, $A_2 = \max\{A(x) : a \leqslant x \leqslant y\}$, $B_1 = B_2 = \max\{B(\lambda, x) : a \leqslant x \leqslant y\}$. Отсюда получаем предел

$$\lim_{y \to a} \left(\psi_2(a,y) - \frac{1}{y-a} \right) = A(a). \tag{15}$$

$$R_i \frac{\mathrm{ch}\,(y-a)R_i}{\mathrm{sh}\,(y-a)R_i} - \frac{1}{y-a} = \frac{R_i(y-a)\mathrm{ch}\,(y-a)R_i - \mathrm{sh}\,(y-a)R_i}{(y-a)\mathrm{sh}\,(y-a)R_i} \to 0,$$

и согласно непрерывности $A_i \to A(a)$ $(i = 1, 2)$. С другой стороны,

$$0 \leqslant \liminf_{y \to a} \frac{\psi_2(a,y) - \phi_2(a,y)}{y-a} \leqslant \\ \leqslant \limsup_{y \to a} \frac{\psi_2(a,y) - \phi_2(a,y)}{y-a} \leqslant |A'(a+)|. \tag{16}$$

Действительно, положительность разности следует из соотношения $g_{(a,b)}(\lambda, x) + h_{(a,b)}(\lambda, x) \leqslant 1$ $(x \in (a,b))$, а последнее неравенство из (12) и (14):

$$\psi_2(a,y) - \phi_2(a,y) \leqslant \\ \leqslant -A_1 + R_1 \frac{\mathrm{ch}\,(b-a)R_1}{\mathrm{sh}\,(b-a)R_1} - e^{-A_2(b-a)} \frac{R_2}{\mathrm{sh}\,(b-a)R_2} \sim A_2 - A_1.$$

Из неравенства (15) следует, что

$$\frac{y-a}{b-a} \exp\left(\int_y^b \psi_2(a,t)\,dt \right) = \exp\left(\int_y^b \left(\psi_2(a,t) - \frac{1}{t-a} \right) dt \right) \to \\ \to \exp\left(\int_{a+}^b \left(\psi_2(a,t) - \frac{1}{t-a} \right) dt \right) < \infty.$$

Из неравенства (16) следует, что при $y \to a$

$$\int_y^b (\psi_2(a,t) - \phi_2(a,t)) \exp\left(\int_t^b \psi_2(a,s)\,ds \right) dt \to \\ \to \int_{a+}^b (\psi_2(a,t) - \phi_2(a,t)) \exp\left(\int_t^b \psi_2(a,s)\,ds \right) dt < \infty.$$

Отсюда, используя равенство

$$\int\limits_y^b \psi_2(a,t))\exp\left(\int\limits_t^b \psi_2(a,s)\,ds\right)\,dt = \exp\left(\int\limits_y^b \psi_2(a,t)\,dt\right) - 1,$$

согласно формуле (7), получаем предел $\lim K_a(\lambda, y) = 1$ $(y \to a)$, а также

$$\lim \frac{1}{y-a}\,(K_a(\lambda,y)-1) =$$

$$= \frac{(b-a)\left(-C_a + 1 + \int\limits_{a+}^b (\psi_2(a,t)-\phi_2(a,t))\exp\left(\int\limits_t^b \psi_2(a,s)\,ds\right)\,dt\right)}{\exp\left(\int\limits_{a+}^b (\psi_2(a,t)-(t-a)^{-1})\,dt\right)}.$$

Обозначив последнее выражение $L_a(\lambda)$, мы получаем представление

$$K_a(\lambda, a+\epsilon) = 1 + L_a(\lambda)\epsilon + o(\epsilon) \quad (\epsilon \to 0).$$

Отсюда

$$K_a(\lambda,y) = K_a(\lambda,a+\epsilon)(h_{(a,y)}(\lambda,a+\epsilon) + g_{(a,y)}(\lambda,a+\epsilon)K_a(\lambda,y)),$$

и, следовательно,

$$K_a(\lambda,y) = \frac{K_a(\lambda,a+\epsilon)h_{(a,y)}(\lambda,a+\epsilon)}{1-K_a(\lambda,a+\epsilon)g_{(a,y)}(\lambda,a+\epsilon)}.$$

При сделанных предположениях $g_{(a,y)}(\lambda,a+\epsilon) - 1 = g'_{(a,y)}(\lambda,a)\epsilon + o(\epsilon)$, $h_{(a,y)}(\lambda,a+\epsilon) = h'_{(a,y)}(\lambda,a)\epsilon + o(\epsilon))$, откуда вытекает представление решения в виде

$$K_a(\lambda,y) = \frac{h'_{(a,y)}(\lambda,a)}{-L_a(\lambda) - g'_{(a,y)}(\lambda,a)} \equiv \frac{\psi_1(a,y)}{-L_a(\lambda)+\phi_1(a,y)}.$$

Первое утверждение доказано. Доказательство второго утверждения аналогично. □

Из общей теории непрерывных полумарковских процессов [3] следует, что конструируемый процесс с параметрами K_a, K_b существует, если эти параметры вполне монотонны как функции от λ и $K_a(0,y) \leqslant 1$, $K_b(0,y) \leqslant 1$, т.е. определяют субвероятностные распределения на положительной полупрямой. Согласно формулам (9), (10) для этого достаточно, чтобы при некотором $\epsilon > 0$ функции $1 + \epsilon L_a$ и $1 - \epsilon L_b$ были вполне монотонными. Во всех остальных отношениях функции L_a и L_b произвольны и определяют все многообразие диффузионных процессов с задержкой на краях отрезка. Заметим, что независимое условие $L_a(0) = 0$ ($L_b = 0$) эквивалентно условию $K_a(0, y) = 1$ ($K_a(0, y) = 1$) при всех $y \in [a, b]$, которое означает, что из точки a (b) точка y достигается с вероятностью единица.

3. Математическое ожидание на границе

Далее мы будем исследовать стационарное распределение процесса, для нахождения которого нам понадобятся математические ожидания времен первого выхода из полузамкнутых интервалов. Предположим, что эти первые моменты существуют. Для их вычисления мы используем полученные формулы для полумарковских переходных производящих функций. Обозначим

$$m^{(g)}_{(c,d)}(x) \equiv E_x(\sigma_{(c,d)}; X((c,d)) = c) = -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\, g_{(c,d)}(\lambda, x)\right|_{\lambda=0},$$

$$m^{(h)}_{(c,d)}(x) \equiv E_x(\sigma_{(c,d)}; X((c,d)) = d) = -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\, h_{(c,d)}(\lambda, x)\right|_{\lambda=0},$$

$$n_a(y|\, x) = -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\, k_a(\lambda, y|\, x)\right|_{\lambda=0}, \quad n_b(y|\, x) = -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\, k_b(\lambda, y|\, x)\right|_{\lambda=0},$$

$$M_a(y) = n_a(y|\, a), \quad M_b(y) = n_b(y|\, b).$$

При сделанных предположениях справедливо

$$\left.\frac{\partial}{\partial\lambda} g'_{(c,d)}(\lambda, x)\right|_{\lambda=0} = (m^{(g)}_{(c,d)})'(x),$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\lambda} h'_{(c,d)}(\lambda, x)\right|_{\lambda=0} = (m^{(h)}_{(c,d)})'(x).$$

Дифференцируя по λ в нуле формулу (9) и полагая $L_a(0) = 0$, получаем

$$M_a(y) = \frac{(m^{(h)}_{(a,y)})'(a)}{-G'_{(a,y)}(a)} - H'_{(a,y)}(a)\,\frac{-\mu_a - (m^{(g)}_{(a,y)})'(a)}{(G'_{(a,y)}(a))^2},$$

где

$$\mu_a = -\frac{\partial}{\partial\lambda} L_a(\lambda)\Big|_{\lambda=0} \geqslant 0,$$

а также $G_{(c,d)}(x) = g_{(c,d)}(0,x)$, $H_{(c,d)}(x) = h_{(c,d)}(0,x)$. Учитывая равенство $G_{(a,y)}(x) + H_{(a,y)}(x) = 1$ и его следствие $-G'_{(a,y)}(a) = H'_{(a,y)}(a)$, получаем

$$M_a(y) = \frac{\mu_a + m'_{(a,y)}(a)}{H'_{(a,y)}(a)}, \tag{17}$$

где $m_{(c,d)}(x) = m^{(g)}_{(c,d)}(x) + m^{(h)}_{(c,d)}(x)$ – среднее время первого выхода из интервала (c,d). Аналогично из формулы (10) получаем

$$M_b(y) = \frac{-\mu_b - m'_{(y,b)}(b)}{H'_{(y,b)}(b)},$$

где

$$\mu_b = -\frac{\partial}{\partial\lambda} L_b(\lambda)\Big|_{\lambda=0} \leqslant 0.$$

Кроме того из уравнений (2) и (3) следуют уравнения

$$n_a(y|\,x) = m_{(a,y)}(x) + G_{(a,y)}(x) M_a(y) \quad (a < x < y), \tag{19}$$

$$n_b(y|\,x) = m_{(y,b)}(x) + H_{(y,b)}(x) M_b(y) \quad (y < x < b), \tag{20}$$

4. Стационарное распределение

Пусть $a < y_1 < y_2 < b$. Без потери общности предположим, что процесс начинается в точке $x < y_2$. Рассмотрим альтернирующий процесс восстановления, определяемый последовательностью времен первого выхода (τ_n) $(n \geqslant 1)$, где $\tau_1 = \sigma_{[a,y_2)}$, $\tau_2 = \tau_1 + \sigma_{(y_1,b]} \circ \theta_{\tau_1}$, и т.д.

$$\tau_{2k+1} = \tau_{2k} + \sigma_{[a,y_2)} \circ \theta_{\tau_{2k}}, \quad \tau_{2k+2} = \tau_{2k+1} + \sigma_{(y_1,b]} \circ \theta_{\tau_{2k+1}} \quad (k \geqslant 1),$$

где θ_t – оператор сдвига на множестве траекторий: $X_s \circ \theta_t = X_{s+t}$. При этом $X(\tau_{2k-1}) = y_2$, $X(\tau_{2k}) = y_1$. Обозначим

$$W_1(t) = \{(\exists k \geqslant 1)\, \tau_{2k-1} \leqslant t < \tau_{2k}\},$$

$$W_2(t) = \{(\exists k \geqslant 1)\, \tau_{2k} \leqslant t < \tau_{2k+1}\} \quad (k \geqslant 1),$$

что означает: точка t принадлежит нечетному (соответственно четному) интервалу между точками τ_n.

Лемма 1. *Справедливо*

$$P_x(X_t < y_1) \leqslant P_x(W_1(t)) \leqslant P_x(X_t \leqslant y_2).$$

Доказательство. Имеем $W_1(t) \subset \{X_t \leqslant y_2\}$. Отсюда следует второе неравенство. Далее $W_2(t) \subset \{X_t \geqslant y_1\}$. Отсюда

$$P_x(X_t < y_1) = 1 - P_x(X_t \geqslant y_1) \leqslant 1 - P_x(W_2(t)) = P_x(W_1(t)).$$

□

Из общих теорем об эргодичности процессов с моментами регенерации (см. Шуренков [2]) следует, что при сделанных предположениях существует предельная функция распределения Q случайной величины X_t $(t \to \infty)$ и эта функция не зависит от начальной точки процесса. Из леммы следует, что $Q(y_1 - 0) \leqslant \lim P_x(W_1(t)) \leqslant Q(y_2)$. С другой стороны, из теории восстановления следует, что предел вероятности нечетного интервала существует, не зависит от начальной точки и равен

$$\lim P_x(W_1(t)) = \frac{n_a(y_2|\, y_1)}{n_a(y_2|\, y_1) + n_b(y_1|\, y_2)}.$$

При сделанных предположениях последнее отношение имеет предел при $y_1 \to y$, $y_2 \to y$, где $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$. Очевидно, что этот предел совпадает с $Q(y)$ во всех точках непрерывности функции Q, т.е

$$Q(y) = \lim_{y_1 \to y, y_2 \to y} \frac{n_a(y_2|\, y_1)}{n_a(y_2|\, y_1) + n_b(y_1|\, y_2)}.$$

Из непрерывности производных на краю интервала как функций от координаты этого края и из равномерности сходимости к пределу при определении производной следует (по формулам (19), (20)), что

$$n_a(y_2|\, y_1) = m_{(a,y_2)}(y_1) + G_{(a,y_2)}(y_1) M_a(y_1) =$$

$$= -m'_{(a,y)}(y)(y_2 - y_1) - G'_{(a,y)}(y) M_a(y_1)(y_2 - y_1) + o(y_2 - y_1),$$

$$n_b(y_1|\, y_2) = m_{(y_1,b)}(y_2) + H_{(y_1,b)}(y_2) M_b(y_2) =$$

$$= m'_{(y,b)}(y)(y_2 - y_1) + H'_{(y,b)}(y) M_b(y)(y_2 - y_1) + o(y_2 - y_1).$$

Отсюда получаем формулу для стационарной функции распределения

$$Q(y)=\frac{\nu_a(y)}{\nu_a(y)+\nu_b(y)}, \tag{21}$$

где, согласно (17) и (18),

$$\nu_a(y)=-m'_{(a,y)}(y)-G'_{(a,y)}(y)M_a(y)= \\ =-m'_{(a,y)}(y)+\frac{H'_{(a,y)}(y)}{H'_{(a,y)}(a)}\,(\mu_a+m'_{(a,y)}(a)),$$

$$\nu_b(y)=m'_{(y,b)}(y)+H'_{(y,b)}(y)M_b(y)= \\ =m'_{(y,b)}(y)+\frac{H'_{(y,b)}(y)}{H'_{(y,b)}(b)}\,(-\mu_b-m'_{(y,b)}(b)).$$

Заметим, что $m_{(c,d)}(x)$ может быть получено как путем “дифференцирования по λ в нуле” функции $f_{(c,d)}(\lambda,x)\equiv g_{(c,d)}(\lambda,x)+h_{(c,d)}(\lambda,x)$, так и непосредственно путем нахождения решения дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2}\,m''+A(x)m'+\gamma(x)=0 \quad (x\in(c,d)), \tag{22}$$

с граничными значениями $m(c)=m(d)=0$, где

$$\gamma(x)=\left.\frac{\partial B(\lambda,x)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}.$$

Из формул сравнения (13) и (14) следует, что

$$\frac{H'_{(c,d)}(c)}{H'_{(c,d)}(d)}\to 1 \quad (d-c\to 0).$$

Также легко показать, что $m'_{(c,d)}(c)\to 0$, $m'_{(c,d)}(d)\to 0$ при $d-c\to 0$. Отсюда $\nu_a(y)\to\mu_a$ $(y\to a)$ и $\nu_b(y)\to-\mu_b$ $(y\to b)$. Следовательно,

$$Q(b-)=\frac{\nu_a(b)}{\nu_a(b)-\mu_b},$$

и эта величина меньше 1, если $-\mu_b>0$. А также

$$Q(a+)=\frac{\mu_a}{\mu_a+\nu_b(a)},$$

и эта величина больше 0, если $\mu_a > 0$. Положительность $1-Q(b-)$ $(Q(a+))$ означает или наличие интервалов постоянства на правой (левой) границе отрезка $[a,b]$ (полумарковский случай), или отражение с замедлением (марковский случай). Существование марковского процесса с замедлением при отражении от границы доказано в работе [1].

Какой из этих двух вариантов реализуется, зависит от вида функций $K_a(\lambda, y)$, $K_b(\lambda, y)$. В работе [3] доказано, что при некоторых условиях регулярности (которые выполняются при сделанных предположениях) полумарковский процесс является марковским тогда и только тогда, когда его λ-характеристический оператор линеен по параметру λ. Линейность оператора во внутренних точках интервала следует из нашего предположения о линейности по λ функции $B(\lambda, x)$ (локальная марковость).

Рассмотрим λ-характеристический оператор A_λ в граничных точках. Имеем

$$A_\lambda(f|\,a) \equiv \lim_{r\to 0} \frac{f(a+r)K_a(\lambda, a+r) - f(a)}{M_a(a+r)} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{(f(a) + f'(a)r + o(r))(1 + L_a(\lambda)r + o(r)) - f(a)}{\mu_a r + o(r)} =$$

$$= \frac{1}{\mu_a}\,(f'(a) + L_a(\lambda)f(a)),$$

где f – дифференцируемая функция, заданная в некоторой окрестности точки a. Аналогично

$$A_\lambda(f|\,b) = \frac{1}{\mu_b}\,(f'(b) + L_b(\lambda)f(b).$$

Отсюда заключаем, что при положительных μ_a и $(-\mu_b)$ изучаемый процесс является марковским тогда и только тогда, когда

$$L_a(\lambda) = -\mu_a\lambda, \quad L_b(\lambda) = \mu_b\lambda \quad (\lambda \geqslant 0).$$

Именно к этому случаю относится содержание п. 24 главы 5 книги [1].

Формула (21) применима также к случаю отсутствия задержки на краях отрезка, т.е. к процессу с мгновенно отражающими границами. Для этого случая необходимо и достаточно, чтобы $\mu_b = \mu_a = 0$.

Для процесса, не являющегося марковским, необходимо существование интервалов постоянства хотя бы на одной из границ отрезка. Множество этих интервалов представляет собой множество фрактального типа, в котором ни один из левых концов реализуемых интервалов постоянства не является марковским моментом. Этот пример лишний раз показывает, что термин "момент остановки" является менее точным (в интуитивном смысле), чем "марковский момент".

5. Пример

Рассмотрим стандартный винеровский процесс внутри интервала (a,b). Таким образом, $A=0$, $\gamma=1$ в уравнении (1). Найдем для него вероятность (21). Легко получить $-G'_{(c,d)}(y) = H'_{(c,d)}(y) = 1/(d-c)$. Из уравнения (22) получаем $m_{(c,d)}(x) = (d-x)(x-c)$. Отсюда

$$\nu_a(y) = 2(y-a)+\mu_a, \quad \nu(b) = 2(b-y)-\mu_b,$$

$$Q(y) = \frac{2(y-a)+\mu_a}{2(b-a)+\mu_a-\mu_b}$$

(напомним, что $\mu_b \leqslant 0$), что представляет собой равномерное распределение с плотностью

$$Q'(y) = \frac{2}{2(b-a)+\mu_a-\mu_b} \quad (a<y<b).$$

Вероятности нахождения процесса на правой и левой границах:

$$1-Q(b) = \frac{-\mu_b}{2(b-a)+\mu_a-\mu_b}, \quad Q(a) = \frac{\mu_a}{2(b-a)+\mu_a-\mu_b}$$

□

6. Благодарность

Автор выражает признательность профессору Я. И. Белопольской, обратившей его внимание на главу 5 книги [1], где исследовался марковский процесс с замедленным отражением на границе ("эластичный экран").

Литература

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения.* Наукова думка, Киев, 1968.

2. В. М. Шуренков, *Эргодические процессы Маркова*. Наука, М., 1989.
3. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы*. Наука, СПб, 2001.

Harlamov B. P. Diffusion processes with delay on ends of a segment.

A continuous semi-Markov process with a segment as a range of values is considered. This process is being transformed into a diffusion process inside the segment, i.e., up to the first hitting time on the boundary of the segment and any time leaving the boundary. Some conditions in terms of a semi-Markov transition generating function on the boundary for such a process to exist are derived. A method of imbedded alternating renewal processes is applied to find a stationary distribution of the process.

Институт проблем машиноведения РАН

Поступило 12 ноября 2007 г.

E-mail: harlamov@random.ipme.ru