Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

А. Н. Фролов

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРИРАЩЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

1. Введение

Исследование асимптотического п.н. (почти наверное) поведения приращений сумм независимых случайных величин, случайных процессов и случайных полей является одной из интересных и важных задач современной теории вероятностей. Интерес к этой области предельных теорем обусловлен теоретической важностью исследования поведения различных функционалов от траекторий случайных блужданий и случайных процессов, а также различными применениями подобных результатов в теории вероятностей, математической статистике и разнообразных приложениях. К настоящему времени появилось более сотни работ по данной тематике.

В рассматриваемой области важное место занимают четыре типа предельных теорем, в которых речь идет о п.н. верхнем пределе или пределе нормированных приращений сумм независимых случайных величин, случайных процессов и полей. Это – усиленный закон больших чисел (УЗБЧ), закон повторного логарифма (ЗПЛ), законы Эрдёша–Реньи и законы Чёргё–Ревеса. Первые два типа предельных теорем хорошо известны. Опишем остальные два типа результатов.

Для последовательности независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин П. Эрдёш и А. Реньи [1] установили, что в случае малых приращений (приращений логарифмической и меньшей длины) нормирующая последовательность зависит от всего распределения слагаемых, а иногда даже однозначно определяет это распределение. Результаты этого типа называются законами Эрдёша–Реньи. М. Чёргё и П. Ревес [2] получили обобщенный ЗПЛ для больших приращений сумм н.о.р. случайных величин с нулевым средним и конечным вто-

Работа выполнена при поддержке гранта 05-01-00486 РФФИ.

рым моментом. Оказалось, что нормировка в этом случае зависит лишь от дисперсии распределения слагаемых, подобно тому, как в теореме Хармана–Винтнера о ЗПЛ. Кроме того, М. Чёргё и П. Ревес установили, что для больших приращений, длина которых растет достаточно медленно, верхний предел можно заменять на предел. Результаты такого типа называются законами Чёргё–Ревеса. Отметим, что теорема Хармана–Винтнера является частным случаем результата М. Чёргё и П. Ревеса.

Дальнейшему изучению асимптотического п.н. поведения приращений сумм н.о.р. случайных величин посвящены работы М. Чёргё, П. Ревеса, П. Девельса, Л. Девроя, Д. Линча, Д. Мэйсона, У. Айнмаля, Й. Штайнебаха, Ш. Чёргё, С. Бука, К. М. Шао и целого ряда других авторов. В их работах были получены усиления и уточнения законов Эрдёша–Реньи и Чёргё–Ревеса, найдены оценки скорости сходимости в них, изучены вопросы оптимальности моментных предположений. Обобщения этих результатов на случай независимых неодинаково распределенных слагаемых были получены Й. Штайнебахом, С. Буком, Д. Хансоном, Р. Руссо, З. Линем, А. И. Мартикайненом, А. Н. Фроловым и др. Различные варианты этих результатов были получены также для слабозависимых величин, самонормализованных сумм и взвешенных сумм.

Параллельно с исследованием п.н. поведения приращений сумм шло изучение п.н. поведения приращений случайных процессов и полей.

Прежде всего, отметим здесь результаты для приращений винеровского процесса, которые были получены в работах П. Эрдёша, А. Реньи, М. Чёргё, П. Ревеса, Е. Чаки, С. Бука, Т. Шора, Й. Ортеги, М. Вшебора и др. Результаты, аналогичные результатам для винеровского процесса, были получены также для устойчивых процессов со скачками одного знака.

Важным классом исследуемых случайных процессов стали процессы восстановления, к которым, в частности, относится пуассоновский процесс. Результаты в этом направлении были получены П. Девельсом, Й. Штайнебахом и др. В работах П. Ревеса, М. Чёргё, П. Девельса, Д. Мэйсона, Е. Чаки и др. было исследовано поведение приращений некоторых процессов, связанных с винеровским процессом, эмпирических процессов, локальных времен, а также ряда других случайных процессов. В статьях П. Ревеса, К. А. Боровкова, П. Девельса, Д. Мэйсона и др. для приращений сумм независимых случайных величин и некоторых случайных процессов были доказаны функциональные предельные теоремы. Поведение приращений случайных полей было исследовано Й. Штайнебахом, П. Девельсом и др. Результаты для приращений гауссовских и устойчивых случайных полей вытекают из соответствующих результатов для многопараметрических случайных процессов, полученных А. Ченом, М. Чёргё, П. Ревесом и др.

Общей чертой упомянутых выше результатов для приращений сумм н.о.р. случайных величин, является то, что малые и большие приращения практически всегда исследовались отдельно. Вместе с тем, ЗПЛ и УЗБЧ можно рассматривать как частные случаи результатов для больших приращений. В работах А.Н. Фролова [3–5] была найдена формула универсальной (охватывающей случай и больших, и малых приращений) нормирующей последовательности в сильных предельных теоремах для приращений сумм н.о.р. случайных величин. Это позволило объединить единой теорией законы Эрдёша–Реньи, законы Чёргё–Ревеса, ЗПЛ и УЗБЧ. При этом был получен ряд новых результатов для случайных величин из областей притяжения нормального закона и асимметричных устойчивых законов с характеристическим показателем из интервала $(1, 2)$, а также установлена оптимальность моментных предположений в этих результатах (см. [6]). Затем А. Н. Фроловом была построена аналогичная теория и были получены подобные результаты для процессов восстановления [7], случайных полей [8], однородных процессов с независимыми приращениями [9], сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин [10, 11]. В этих работах читатель сможет найти более подробные изложение истории вопроса и библиографию.

В настоящей работе мы построим соответствующую теорию для приращений случайных процессов из одного важного класса – обобщенных процессов восстановления. Обобщенным процессом восстановления мы называем сумму случайного числа н.о.р. случайных величин, в которой число слагаемых является процессом восстановления. При этом мы не предполагаем независимости слагаемых и времен восстановления. Отметим, что класс обобщенных процессов восстановления включает в себя процессы восстановления, пуассоновские и обобщенные пуассоновские процессы, процессы суммирования н.о.р. случайных величин. Доказав универсальные предельные теоремы (предельные теоремы с универсальной нормировкой) для обобщенных процессов восстановления, мы выведем из них ряд новых результатов. В частности, будет доказан ряд новых результатов об асимптотическом поведении больших приращений для порождающих процесс случайных величин из областей притяжения нормального закона и асимметричных устойчивых законов с характеристическим показателем из интервала $(1, 2)$.

2. Результаты

Пусть (X, Y), $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ – последовательность н.о.р. случайных векторов таких, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}X = \lambda \in (0, \infty), \\ &\mathbf{P}(Y > 0) = 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}Y = \mu \in (0, \infty). \end{aligned}$$

(Подчеркнем, что компоненты векторов X и Y могут быть зависимыми.) Положим

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad R_n = Y_1 + \dots + Y_n, \quad \text{для} \quad n \geqslant 1, \quad S_0 = R_0 = 0,$$

и определим обобщенный процесс восстановления соотношением

$$\xi(t) = S_{N(t)},$$

где $N(t)$ – процесс восстановления, порожденный последовательностью $\{Y_i\}$, т.е.

$$N(t) = \max\{n : R_n \leqslant t\}, \quad t \geq 0.$$

Отметим, что если $\mathbf{P}(Y_1 > u) = e^{-u/\mu}$ при $u > 0$, то $N(t)$ – однородный пуассоновский процесс, а если $N(t)$ и $\{X_i\}$ независимы, то $\xi(t)$ называется обобщенным пуассоновским процессом. Если $\mathbf{P}(X = 1) = 1$, то $\xi(t) = N(t)$. Если $\mathbf{P}(Y = 1) = 1$, то $\xi(t)$ превращается в процесс суммирования н.о.р. случайных величин. Таким образом, класс обобщенных процессов восстановления включает в себя процессы восстановления, пуассоновские и обобщенные пуассоновские процессы, процессы суммирования н.о.р. случайных величин.

Обобщенные процессы восстановления играют важную роль в актуарной и финансовой математике (см., например, обзор Эмбрехтса и Клюппельберг [12]). Они описывают, в частности, процесс суммарных выплат страховой компании по портфелю однотипных договоров страхования. В этом случае X_i обозначает размер i-ой выплаты страхового возмещения, $N(t)$ есть число выплат до момента времени t, а Y_i суть случайные времена между последовательными выплатами.

Пусть a_T – неубывающая непрерывная функция такая, что $1 \leqslant a_T \leqslant T$ при $x \to \infty$ и T/a_T не убывает. Обозначим

$$W_T = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T-a_T} \sup_{0 \leqslant s \leqslant a_T} \left(\xi(t+s) - \xi(t) - \frac{\lambda}{\mu} s \right),$$

$$U_T = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T-a_T} (\xi(t+a_T) - \xi(t)) - \frac{\lambda}{\mu} a_T.$$

Мы опишем асимптотическое п.н. поведение приращений обобщенных процессов восстановления W_T и U_T. Важную роль при этом играет предельное п.н. поведение приращений процессов восстановления

$$u_T = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T-a_T} (N(t+a_T) - N(t)),$$

$$v_T = \inf_{0 \leqslant t \leqslant T-a_T} (N(t+a_T) - N(t)).$$

Отметим, что исследование асимптотического поведения u_T и v_T представляет самостоятельный интерес.

Обозначим

$$Q_n = S_n - \frac{\lambda}{\mu} R_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Наш первый результат содержит п.н. оценки сверху для нормированных максимальных приращений обобщенных процессов восстановления.

Теорема 1. *Пусть c_T – неубывающая положительная непрерывная функция такая, что $c_T \to \infty$ при $T \to \infty$ и*

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{u_T}{c_T} \leqslant 1 \quad \text{п.н.} \tag{1}$$

Предположим, что b_T – неубывающая положительная непрерывная функция такая, что $b_T \to \infty$ при $T \to \infty$.

Предположим, что либо выполнены соотношения

$$\limsup_{\theta\searrow 1}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\max_{0\leqslant k\leqslant\theta T/\mu}\max_{0\leqslant j\leqslant\theta c_T}(Q_{k+j}-Q_k)\leqslant 1 \quad \text{п.н.}, \tag{2}$$

$$\limsup_{\theta\searrow 1}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\max_{1\leqslant k\leqslant\theta T/\mu}Y_k = 0 \quad \text{п.н.}, \tag{3}$$

либо выполнены соотношения

$$\limsup_{\theta\searrow 1}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\max_{0\leqslant k\leqslant\theta T/\mu}\max_{0\leqslant j\leqslant\theta c_T}(Q_{k+j}-Q_{k+1})\leqslant 1 \quad \text{п.н.}, \tag{4}$$

$$\limsup_{\theta\searrow 1}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\max_{1\leqslant k\leqslant\theta T/\mu}X_k = 0 \quad \text{п.н.} \tag{5}$$

Тогда

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{W_T}{b_T}\leqslant 1 \quad \text{п.н.} \tag{6}$$

В теореме 1 по крайней мере одно из условий (5) и (3) выполнено, если хотя бы одна из случайных величин X и Y ограничена сверху.

Наш следующий результат содержит п.н. оценки снизу для нормированных максимальных приращений обобщенных процессов восстановления.

Теорема 2. *Предположим, что c_T – неубывающая положительная непрерывная функция такая, что $c_T\to\infty$ при $T\to\infty$ и выполнено* (1). *Пусть d_T – неубывающая положительная непрерывная функция такая, что $d_T\to\infty$ при $T\to\infty$ и*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{v_T}{d_T}\geqslant 1 \quad \text{п.н.} \tag{7}$$

Обозначим $\Delta_T = T - a_T$.

Предположим, что $\Delta_T\to\infty$ при $T\to\infty$.

Пусть b_T – неубывающая положительная непрерывная функция такая, что $b_T\to\infty$ при $T\to\infty$ и

$$\liminf_{\theta\searrow 1}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\max_{0\leqslant k\leqslant\Delta_T/(\theta\mu)}\big(Q_{k+[\theta c_T]}-Q_k\big)\geqslant 1 \quad \text{п.н.} \tag{8}$$

$$\limsup_{\theta\searrow 1}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\max_{0\leqslant k\leqslant\Delta_T/(\theta\mu)}\max_{d_T/\theta\leqslant j\leqslant\theta c_T}\big(Q_{k+[\theta c_T]}-Q_{k+j}\big)=0 \ \text{п.н.} \tag{9}$$

Пусть выполнено по крайней мере одно из следующих двух условий:

$$\limsup_{\theta\searrow 1}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\max_{1\leqslant k\leqslant(\Delta_T/(\theta\mu))+\theta c_T} X_k = 0 \quad \text{п.н.}, \tag{10}$$

$$\limsup_{\theta\searrow 1}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\max_{1\leqslant k\leqslant(\Delta_T/(\theta\mu))+\theta c_T} Y_k = 0 \quad \text{п.н.} \tag{11}$$

Если $\limsup_{T\to\infty}\Delta_T<\infty$, *то предположим, что выполнены все вышеперечисленные условия кроме условия* (8). *Вместо него предположим, что*

$$\liminf_{\theta\searrow 1}\limsup_{T\to\infty}\frac{Q_{[\theta c_T]}}{b_T}\geqslant 1 \quad \text{п.н.} \tag{12}$$

Тогда

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{U_T}{b_T}\geqslant 1 \quad \text{п.н.} \tag{13}$$

В последнем соотношении можно заменить $\limsup$ *на* $\liminf$, *если* (8) *выполнено с заменой* $\limsup_{T\to\infty}$ *на* $\liminf_{T\to\infty}$.

Условие (12) получается из условия (8), если положить $a_T = T$.

Из теорем 1, 2 и неравенства $U_T\leqslant W_T$ вытекает следующий результат.

Теорема 3. *Если выполнены условия теорем* 1 *и* 2, *то*

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{W_T}{b_T}=\limsup_{T\to\infty}\frac{U_T}{b_T}=1 \quad \text{п.н.}$$

Если, дополнительно, условие (8) *выполнено с заменой* $\limsup_{T\to\infty}$ *на* $\liminf_{T\to\infty}$, *то*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{W_T}{b_T}=\lim_{T\to\infty}\frac{U_T}{b_T}=1 \quad \text{п.н.}$$

Теорема 3 представляет собой универсальную предельную теорему, позволяющую получать результаты о поведении приращений обобщенных процессов восстановления, используя результаты о поведении приращений сумм н.о.р. случайных величин и процессов восстановления. Большинство из нужных результатов содержатся в работах автора [3–11]. Недостающие результаты типа УЗБЧ для минимальных приращений процессов восстановления будут получены ниже с помощью методов работы [7].

Рассмотрим сначала случай больших приращений, т.е. $a_T/\log T \to \infty$ при $T \to \infty$.

В дальнейшем нам потребуется УЗБЧ для больших приращений процессов восстановления. Мы начнем с результата, который устанавливает связь между УЗБЧ для больших приращений процессов восстановления и асимптотическим поведением приращений сумм н.о.р. случайных величин $\{Y_k\}$.

Теорема 4. *Пусть $a_T/\log T \to \infty$ при $T \to \infty$.*

Обозначим $\Delta_T = T - a_T$.

Если $\limsup\limits_{T\to\infty} \Delta_T < \infty$, то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{u_T}{a_T} = \lim_{T\to\infty} \frac{v_T}{a_T} = \frac{1}{\mu} \quad \textit{п.н.} \tag{14}$$

Если $\Delta_T \to \infty$ при $T \to \infty$ и существует $\theta_0 > 1$ такое, что для любого $\theta \in (1, \theta_0)$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{a_T} \max_{0\leqslant k\leqslant \theta\Delta_T/\mu} (R_{k+[a_T/(\theta\mu)]+1} - R_k) < 1 \quad \textit{п.н.}, \tag{15}$$

то выполнено соотношение (14).

УЗБЧ для больших приращений процессов восстановления мы получим при различных односторонних моментных условиях на времена восстановления $\{Y_k\}$. Для того, чтобы эти условия сформулировать, мы введем в рассмотрение следующие два класса функций $\mathcal{E}$ и $\mathcal{M}_p$ из [4].

Мы считаем, что $H(x) \in \mathcal{E}$, если $H(x) \nearrow$, $H(x)/x \searrow$ и $\liminf\limits_{x\to\infty} H(cx)/H(x) > 1$ для некоторого $c > 1$. Отметим, что, если $H(x) \in \mathcal{E}$, то $\log x = o(H(x))$ при $x \to \infty$ и $(H^{-1}(x))^2/x$ не убывает. (Здесь и далее $H^{-1}(x)$ обозначает обратную функцию.)

Мы пишем $H(x) \in \mathcal{M}_p$, если $H(x) \nearrow$, $\limsup_{x\to\infty} H(cx)/H(x) < \infty$ для всех $c > 0$, $H(x)/x^p$ не убывает и $\lim_{x\to\infty} \log H(x)/\log x = p$ для некоторого $p > 0$.

Например, правильно меняющаяся на бесконечности функция порядка p принадлежит классу $\mathcal{E}$ при $p \in (0, 1)$ и классу $\mathcal{M}_p$ при $p > 0$.

Сформулируем теперь УЗБЧ для больших приращений процессов восстановления.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{E}Y^2 < \infty$. *Предположим, что выполнено одно из следующих трех условий:*

1) $\mathbf{E}e^{h_0 Y} < \infty$ *для некоторого* $h_0 > 0$ *и* $a_T/\log T \to \infty$ *при* $T \to \infty$;

2) $\mathbf{E}\exp\{H(Y)\} < \infty$, $H(x) \in \mathcal{E}$ *и для некоторого* $\theta_0 > 1$ *выполняется неравенство* $a_T \geqslant \theta_0 \mu C(H^{-1}(\log(\theta_0 T/\mu)))^2/\log(T/\mu)$, *где* $C = C(H)$ – *абсолютная положительная постоянная;*

3) $\mathbf{E}H(Y) < \infty$, $H(x) \in \mathcal{M}_p$, $p > 2$, *и для некоторого* $\theta_0 > 1$ *выполняется неравенство* $a_T \geqslant C(H^{-1}(\theta_0 T/\mu))^2/\log(T/\mu)$, *где* C – *произвольная положительная постоянная.*

Тогда выполнено (14).

Замечание 1. В условии 2) теоремы 5 можно положить $C = c^{2k}/2$, где c — константа из определения класса $\mathcal{E}$, $k = \min\{j \geqslant 1 : 4\theta^{-j} < 1\}$, $\theta \in (1, \liminf\limits_{x\to\infty} H(cx)/H(x))$.

Приведем простые условия, достаточные для выполнения условий 2) и 3) теоремы 5.

Если $H(x) = x^\beta$, $\beta \in (0,1)$, и $a_T(\log T)^{(2/\beta)-1} \to \infty$ при $T \to \infty$, то выполнено условие 2).

Если $H(x) = x^p$, $p > 2$, и $a_T \geqslant CT^{2/p}/\log T$, где C – произвольная положительная постоянная, то выполнено условие 3).

В дальнейшем нам потребуется следующий результат, дающий достаточные условия для (3) и (11).

Теорема 6. *Если выполнены условия теоремы* 5, *то соотношения* (3) *и* (11) *справедливы при* $c_T = a_T/\mu$ *и*

$$b_T = \sqrt{a_T\,(\log(T/a_T) + \log\log T)}.$$

Перейдем к результатам для обобщенных процессов восстановления.

Теорема 7. *Положим* $Z = X - (\lambda/\mu)Y$.

Пусть $\mathbf{E}Y^2 < \infty$ *и* $\mathbf{E}e^{h_0 Y} < \infty$ *для некоторого* $h_0 > 0$.

Пусть $\mathbf{E}Z^2 < \infty$ *и выполнено одно из следующих трех условий:*

1) $\mathbf{E}e^{h_1 Z} < \infty$ *для некоторого* $h_1 > 0$ *и* $a_T/\log T \to \infty$ *при* $T \to \infty$;

2) $\mathbf{E}\exp\{H(Z^+)\} < \infty$, $H(x) \in \mathcal{E}$ *и* $a_T \log T/(H^{-1}(\log(\theta_0 T/\mu)))^2 \to \infty$ *при* $T \to \infty$ *для некоторого* $\theta_0 > 1$;

3) $\mathbf{E}H(Z^+) < \infty$, $H(x) \in \mathcal{M}_p$, $p > 2$, *и для некоторого* $\theta_0 > 1$ *выполняется неравенство* $a_T \geqslant C(H^{-1}(\theta_0 T/\mu))^2/\log(T/\mu)$, *где* C – *произвольная положительная постоянная.*

Положим $\sigma^2 = \mathbf{D}(X - \frac{\lambda}{\mu}Y) < \infty$ *и*

$$b_T = \sqrt{2(\sigma^2/\mu)a_T\,(\log(T/a_T) + \log\log T)}.$$

Тогда

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{W_T}{b_T} = \limsup_{T\to\infty} \frac{U_T}{b_T} = 1 \quad \text{п.н.} \tag{16}$$

Если дополнительно $\log\log T = o(\log(T/a_T))$, *то*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{W_T}{b_T} = \lim_{T\to\infty} \frac{U_T}{b_T} = 1 \quad \text{п.н.} \tag{17}$$

В теореме 7 экспоненциальное моментное условие на Y можно заменять более слабыми условиями 2) и 3) теоремы 7.

Теорема 8. *Пусть* $\mathbf{E}Y^2 < \infty$ *и* $\mathbf{E}Z^2 < \infty$. *Если выполнено условие 2) теоремы 5 и одно из условий 2) или 3) теоремы 7, то справедливо заключение теоремы 7.*

Если выполнены условия 3) теорем 5 и 7, то справедливо заключение теоремы 7.

Заметим, что в теоремах 7 и 8 нормировка

$$b_T = \sqrt{2(\sigma^2/\mu)T\log\log T} \quad \text{при} \quad a_T = T$$

и (16) превращается в ЗПЛ для обобщенных процессов восстановления. В частности, если $\mathbf{P}(X = 1) = 1$, то мы получим $b_T = \sqrt{2(\mathbf{D}Y/\mu^3)T\log\log T}$, что дает ЗПЛ для процессов восстановления. Если $\mathbf{P}(Y = 1) = 1$, то получим ЗПЛ для процессов суммирования н.о.р. случайных величин.

Перейдем к случаю $\mathbf{E}Z^2 = \infty$.

Обозначим $F(x) = \mathbf{P}(Z < x)$.

Далее мы пишем $F \in DN(\alpha)$ $(F \in D(\alpha))$, $\alpha \in (1, 2]$, если F принадлежит области нормального (ненормального соотв.) притяжения устойчивого закона с характеристической функцией (х.ф.)

$$\psi(t) = \exp\left\{ -c|t|^\alpha \Big(1 + i\frac{t}{|t|}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha\Big)\right\},$$

где $c = \cos(\pi(2-\alpha)/2)/\alpha$, $1 < \alpha \leqslant 2$. В случае нормального притяжения мы считаем, что нормирующие постоянные имеют вид $n^{1/\alpha}$. Иначе случайную величину Z нужно должным образом нормировать.

Далее, если $g(x)$ – правильно меняющаяся на бесконечности (в нуле) функция, то $g^{-1}(x)$ – асимптотически обратная к ней функция, т.е. $g^{-1}(g(x)) \sim g(g^{-1}(x)) \sim x$ при $x \to \infty$ $(x \to 0)$. Известно (см., например, Сенета [13, стр. 27), что $g^{-1}(x)$ определяется асимптотически однозначно. В дальнейшем, когда речь идет о правильно (медленно) меняющихся функциях, мы опускаем для краткости слово бесконечность и всегда указываем, когда речь идет о правильном (медленном) изменении в нуле.

Теорема 9. *Пусть* $\mathbf{E}Z^2 = \infty$ *и* $F \in D(2)$. *Положим*

$$b_T = (a_T/\mu)\widehat{m}(\widehat{f}^{-1}((\log(T/a_T) + \log\log T)/a_T)), \tag{18}$$

где $\widehat{m}(h) = hG(1/h)$, $\widehat{f}(h) = h^2G(1/h)/2$, $G(x) = \int\limits_{-x}^{0} u^2 dF(u)$, $x > 0$. *($G(x)$ – медленно меняющаяся функция.)*

Пусть $\mathbf{E}Y^2 < \infty$ *и* $\mathbf{E}e^{h_0 Y} < \infty$ *для некоторого* $h_0 > 0$.

Пусть выполнено одно из следующих трех условий:

1) $\mathbf{E}e^{h_1 Z} < \infty$ *для некоторого* $h_1 > 0$ *и* $a_T/\log T \to \infty$ *при* $T \to \infty$;

2) $\mathbf{E}\exp\{H(Z^+)\} < \infty$, $H(x) \in \mathcal{E}$, *и* $b_T/H^{-1}(\log(\theta_0 T/\mu)) \to \infty$ *при* $T \to \infty$ *для некоторого* $\theta_0 > 1$;

3) $\mathbf{E}H(Z^+) < \infty$, $H(x) \in \mathcal{M}_p$, $p > 2$, *и для некоторого* $\theta_0 > 1$ *выполняется неравенство* $b_T \geqslant CH^{-1}(\theta_0 T/\mu)$, *где* C *– произвольная положительная постоянная.*

Тогда выполнено (16) *с* b_T *из* (18). *Если, кроме того,* $\log\log T = o(\log(T/a_T))$, *то выполнено* (17).

В теореме 9 экспоненциальное моментное условие на Y можно заменять более слабыми условиями 2) и 3) теоремы 5.

Теорема 10. *Пусть* $\mathbf{E}Y^2 < \infty$, $\mathbf{E}Z^2 = \infty$ *и* $F \in D(2)$. *Если выполнено условие* 2) *теоремы* 5 *и одно из условий* 2) *или* 3) *теоремы* 9, *то справедливо заключение теоремы* 9.

Если выполнены условия 3) *теорем* 5 *и* 9, *то справедливо заключение теоремы* 9.

Если в теоремах 9 и 10 взять $a_T = T$, то мы получим ЗПЛ для обобщенных процессов восстановления. В частности, для вырожденной случайной величины X, это дает ЗПЛ для процессов восстановления. Если Y вырождена, то мы получим ЗПЛ для процессов суммирования н.о.р. случайных величин.

Перейдем к случаю $\alpha \in (1, 2)$.

Теорема 11. *Пусть* $F \in DN(\alpha)$, $\alpha \in (1,2)$.

Пусть $\mathbf{E}Y^2 < \infty$ *и* $\mathbf{E}e^{h_0 Y} < \infty$ *для некоторого* $h_0 > 0$.

Предположим, что выполнено одно из следующих трех условий:

1) $\mathbf{E}e^{h_1 Z} < \infty$ *для некоторого* $h_1 > 0$ *и* $a_T/\log T \to \infty$ *при* $T \to \infty$;

2) $\mathbf{E}\exp\{H(Z^+)\} < \infty$, $H(x) \in \mathcal{E}$, *и* $a_T(\log T)^{\alpha-1}/(H^{-1}(\log(\theta_0 T/\mu)))^\alpha \to \infty$ *при* $T \to \infty$ *для некоторого* $\theta_0 > 1$;

3) $\mathbf{E}H(Z^+) < \infty$, $H(x) \in \mathcal{M}_p$, $p > \alpha$, *и для некоторого* $\theta_0 > 1$ *выполняется неравенство* $a_T \geqslant C(H^{-1}(\theta_0 T/\mu))^\alpha/(\log(T/\mu))^{\alpha-1}$, *где* C *– произвольная положительная постоянная.*

Тогда (16) *выполнено с*

$$b_T = \nu^{-\nu}(a_T/\mu)^{1/\alpha}\Big(\log\frac{T}{a_T} + \log\log T\Big)^\nu,$$

где $\nu = (\alpha-1)/\alpha$.

Если, кроме того, $\log\log T = o(\log(T/a_T))$, *то выполнено* (17).

В теореме 11 экспоненциальное моментное условие на Y можно заменять более слабыми условиями 2) и 3) теоремы 5.

Теорема 12. *Пусть* $\mathbf{E}Y^2 < \infty$ *и* $F \in DN(\alpha)$, $\alpha \in (1,2)$. *Если выполнено условие* 2) *теоремы* 5 *и одно из условий* 2) *или* 3) *теоремы* 11, *то справедливо заключение теоремы* 11.

Если выполнены условия 3) *теорем* 5 *и* 11, *то справедливо заключение теоремы* 11.

Если в теоремах 11 и 12 взять $a_T = T$, то мы приходим к ЗПЛ для обобщенных процессов восстановления с нормирующей функцией $b_T = \nu^{-\nu}(T/\mu)^{1/\alpha}(\log\log T)^\nu$. В частности, для вырожденной случайной величины X, это дает ЗПЛ для процессов восстановления. Если Y вырождена, то мы получим ЗПЛ для процессов суммирования н.о.р. случайных величин.

Теорема 13. *Пусть* $F \in D(\alpha)$, $\alpha \in (1,2)$.

Положим

$$b_T = (a_T/\mu)\widehat{m}(\widehat{f}^{-1}((\log(T/a_T) + \log\log T)/a_T)), \tag{19}$$

где $\widehat{m}(h) = h^{\alpha-1}G(1/h)\alpha\Gamma(2-\alpha)/(\alpha-1)$, $\widehat{f}(h) = \Gamma(2-\alpha)h^\alpha G(1/h)$, $G(x) = x^\alpha F(-x)$, $x > 0$. *(*$G(x)$ *– медленно меняющаяся функция.)*

Пусть $\mathbf{E}Y^2 < \infty$ *и* $\mathbf{E}e^{h_0 Y} < \infty$ *для некоторого* $h_0 > 0$.

Пусть выполнено одно из следующих условий:

1) $\mathbf{E}e^{h_1 Z} < \infty$ *для некоторого* $h_1 > 0$ *и* $a_T/\log T \to \infty$ *при* $T \to \infty$;

2) $\mathbf{E}\exp\{H(Z^+)\} < \infty$, $H(x) \in \mathcal{E}$, *и* $b_T/H^{-1}(\log(\theta_0 T/\mu)) \to \infty$ *при* $T \to \infty$ *для некоторого* $\theta_0 > 1$;

3) $\mathbf{E}H(Z^+) < \infty$, $H(x) \in \mathcal{M}_p$, $p > \alpha$, *и для некоторого* $\theta_0 > 1$ *выполняется неравенство* $b_T \geqslant CH^{-1}(\theta_0 T/\mu)$, *где* C *– произвольная положительная постоянная.*

Тогда выполнено (16) *с* b_T *из* (19). *Если, кроме того,* $\log\log T = o(\log(T/a_T))$, *то выполнено* (17).

В теореме 13 экспоненциальное моментное условие на Y можно заменять более слабыми условиями 2) и 3) теоремы 5.

Теорема 14. *Пусть* $\mathbf{E}Y^2 < \infty$ *и* $F \in D(\alpha)$, $\alpha \in (1, 2)$. *Если выполнено условие* 2) *теоремы* 5 *и одно из условий* 2) *или* 3) *теоремы* 13, *то справедливо заключение теоремы* 13.

Если выполнены условия 3) *теорем* 5 *и* 13, *то справедливо заключение теоремы* 13.

Если в теоремах 13 и 14 взять $a_T = T$, то мы снова получим ЗПЛ для обобщенных процессов восстановления. В частности, для вырожденной случайной величины X, это дает ЗПЛ для процессов восстановления. Если Y вырождена, то мы получим ЗПЛ для процессов суммирования н.о.р. случайных величин.

Перейдем к УЗБЧ для приращений обобщенных процессов восстановления.

Теорема 15. *Пусть* $a_T \to \infty$ *при* $T \to \infty$. *Если выполнены условия одной из теорем* 7–14, *то*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{W_T}{a_T} = \lim_{T\to\infty} \frac{U_T}{a_T} = 0 \quad \textit{п.н.}$$

Рассмотрим теперь поведение малых приращений. Предположим, что $a_T/\log T \to c$ при $T \to \infty$. Если $\mathbf{E}e^{h_0 Y} < \infty$ для некоторого $h_0 > 0$, то соотношения (1) и (7) будут выполнены с различными нормирующими последовательностями. В этом случае $c_T = \beta_1(c)a_T$ и $d_T = \beta_2(c)a_T$, а постоянные $\beta_1(c)$ и $\beta_2(c)$ будут зависеть от распределения Y. Поэтому условие (9) не будет выполнено. Окажется, что если $\mathbf{E}e^{h_1 Z} < \infty$ для некоторого $h_1 > 0$, то верхний предел в (9) будет ограничен сверху некоторой постоянной, зависящей от c. При этом эта постоянная будет в свою очередь зависеть от распределения Z. В результате из теоремы 3 можно получить следующий вариант закона Эрдёша–Реньи для обобщенных процессов восстановления:

$$\gamma_1(c) \leqslant \liminf_{T\to\infty} \frac{U_T}{a_T} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{W_T}{a_T} \leqslant \gamma_2(c) \quad \text{п.н.}$$

для всех $c \geqslant c_0$ и некоторого $c_0 \geqslant 0$, где $\gamma_1(c)$, $\gamma_2(c)$ и c_0 сложным образом зависят от распределений Y и Z.

Здесь мы не будем точно формулировать и доказывать такой результат, так как нормирующие постоянные и постоянная c_0 в законе Эрдёша–Реньи для сумм н.о.р. случайных величин зависят от того, к какому из 5 различных классов относится распределение слагаемых (см. [5]). Аналогично обстоит дело и для процессов восстановления (см. [7]). В нашем случае это приведет к различным комбинациям типов распределений случайных величин Y и Z. Поэтому соответствующие результаты будут рассмотрены в другой работе.

В заключение отметим, что представляет интерес исследование асимптотического п.н. поведения нецентрированных вариантов W_T и U_T:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T-a_T} \sup_{0\leqslant s\leqslant a_T} (\xi(t+s)-\xi(t)) \quad \text{и} \quad \sup_{0\leqslant t\leqslant T-a_T} (\xi(t+a_T)-\xi(t)).$$

Используя методы, аналогичные развитым в этой работе, можно получить такой же спектр результатов для нецентрированных приращений, как и для центрированных. Это будет сделано в другой работе.

3. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Возьмем $\theta > 1$.

Траекториями процесса $\xi(t)$ являются ступенчатые функции и $\xi(t) = S_n$ при $R_n \leqslant t < R_{n+1}$. Поэтому

$$W_T \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant N(T-a_T)} \max_{0\leqslant j\leqslant u_T} \left(S_{k+j} - S_k - \frac{\lambda}{\mu}(R_{k+j} - R_{k+1})\right).$$

Так как $N(t)$ имеет неубывающие траектории, то в силу УЗБЧ для процессов восстановления с вероятностью 1 неравенство $N(T-a_T) \leqslant N(T) \leqslant \theta T/\mu$ выполнено для всех достаточно больших T. Из (1) следует, что п.н. $u_T \leqslant \theta c_T$ для всех достаточно больших T. Поэтому с вероятностью 1 выполняется неравенство

$$W_T \leqslant w_T = \max_{0 \leqslant k \leqslant \theta T/\mu} \max_{0 \leqslant j \leqslant \theta c_T} \left(S_{k+j} - S_k - \frac{\lambda}{\mu}(R_{k+j} - R_{k+1}) \right)$$

для всех достаточно больших T.

Учитывая равенство

$$S_{k+j} - S_k - \frac{\lambda}{\mu}(R_{k+j} - R_{k+1}) = Q_{k+j} - Q_k + \frac{\lambda}{\mu} Y_{k+1},$$

мы имеем

$$\begin{aligned} w_T &\leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant \theta T/\mu} \max_{0 \leqslant j \leqslant \theta c_T} (Q_{k+j} - Q_k) + \frac{\lambda}{\mu} \max_{0 \leqslant k \leqslant \theta T/\mu + 1} Y_k \\ &\leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant \theta T/\mu} \max_{0 \leqslant j \leqslant \theta c_T} (Q_{k+j} - Q_k) + \frac{\lambda}{\mu} \max_{0 \leqslant k \leqslant \theta^2 T/\mu} Y_k = M_T(\theta) + M_T^Y(\theta) \end{aligned}$$

для всех достаточно больших T. Поэтому

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{W_T}{b_T} \leqslant \limsup_{T \to \infty} \frac{M_T(\theta)}{b_T} + \limsup_{T \to \infty} \frac{M_T^Y(\theta)}{b_T} \quad \text{п.н.}$$

Следовательно,

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{W_T}{b_T} \leqslant \limsup_{\theta \searrow 1} \limsup_{T \to \infty} \frac{M_T(\theta)}{b_T} + \limsup_{\theta \searrow 1} \limsup_{T \to \infty} \frac{M_T^Y(\theta)}{b_T} \quad \text{п.н.}$$

Если выполнены условия (2) и (3), то из них и последнего соотношения мы получаем (6). Если выполнены условия (4) и (5), то, используя равенство

$$S_{k+j} - S_k - \frac{\lambda}{\mu}(R_{k+j} - R_{k+1}) = Q_{k+j} - Q_{k+1} + X_{k+1},$$

мы получим

$$\begin{aligned} w_T &\leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant \theta T/\mu} \max_{0 \leqslant j \leqslant \theta c_T} (Q_{k+j} - Q_{k+1}) + \max_{0 \leqslant k \leqslant \theta T/\mu + 1} X_k \\ &\leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant \theta T/\mu} \max_{0 \leqslant j \leqslant \theta c_T} (Q_{k+j} - Q_{k+1}) + \max_{0 \leqslant k \leqslant \theta^2 T/\mu} X_k \\ &= M'_T(\theta) + M_T^X(\theta) \end{aligned}$$

для всех достаточно больших T. Действуя так же, как раньше, мы снова получим из условий (4) и (5) соотношение (6). $\square$

Доказательство теоремы 2. Возьмем $\theta > 1$.

Используя снова то, что процесс $\xi(t)$ имеет ступенчатые траектории и $\xi(t) = S_n$ при $R_n \leqslant t < R_{n+1}$, мы имеем

$$U_T \geqslant \max_{0\leqslant k\leqslant N(\Delta_T)} \min_{v_T\leqslant j\leqslant u_T} \left(S_{k+j} - S_k - \frac{\lambda}{\mu}(R_{k+j+1} - R_k)\right).$$

Предположим сначала, что $\Delta_T \to \infty$ при $T \to \infty$.

Пусть выполнено (11).

В силу УЗБЧ для процессов восстановления и соотношений (1) и (7) с вероятностью 1 неравенства $N(\Delta_T) \geqslant \Delta_T/(\mu\sqrt{\theta})$, $u_T \leqslant \theta c_T$ и $v_T \geqslant d_T/\sqrt{\theta}$ выполнены для всех достаточно больших T. Используя последние неравенства и соотношения

$$S_{k+j} - S_k - \frac{\lambda}{\mu}(R_{k+j+1} - R_k) = Q_{k+j} - Q_k - \frac{\lambda}{\mu}Y_{k+j+1},$$

мы получим, что с вероятностью 1

$$\begin{aligned}
U_T &\geqslant \max_{0\leqslant k\leqslant \Delta_T/(\mu\sqrt{\theta})} \min_{d_T/\sqrt{\theta}\leqslant j\leqslant \theta c_T} (Q_{k+j} - Q_k) - \frac{\lambda}{\mu} \max_{0\leqslant k\leqslant \Delta_T/(\mu\sqrt{\theta})+\theta c_T+1} Y_k \\
&\geqslant \max_{0\leqslant k\leqslant \Delta_T/(\mu\theta)} \min_{d_T/\theta\leqslant j\leqslant \theta c_T} (Q_{k+j} - Q_k) - \frac{\lambda}{\mu} \max_{0\leqslant k\leqslant \Delta_T/(\mu\sqrt{\theta})+\sqrt{\theta}c_T+1} Y_k \\
&= \max_{0\leqslant k\leqslant \Delta_T/(\mu\theta)} \left(Q_{k+[\theta c_T]} - Q_k - \max_{d_T/\theta\leqslant j\leqslant \theta c_T} \left(Q_{k+[\theta c_T]} - Q_{k+j}\right)\right) \\
&\quad - M_T^Y(\theta) \geqslant \max_{0\leqslant k\leqslant \Delta_T/(\mu\theta)} \left(Q_{k+[\theta c_T]} - Q_k\right) \\
&\quad - \max_{0\leqslant k\leqslant \Delta_T/(\mu\theta)} \max_{d_T/\theta\leqslant j\leqslant \theta c_T} \left(Q_{k+[\theta c_T]} - Q_{k+j}\right) - M_T^Y(\theta) \\
&= M_T^1(\theta) - M_T^2(\theta) - M_T^Y(\theta)
\end{aligned} \tag{20}$$

для всех достаточно больших T. Поэтому

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{U_T}{b_T} \geqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{M_T^1(\theta)}{b_T} - \limsup_{T\to\infty} \frac{M_T^2(\theta)}{b_T} - \limsup_{T\to\infty} \frac{M_T^Y(\theta)}{b_T} \quad \text{п.н.}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\limsup_{T\to\infty} \frac{U_T}{b_T} &\geqslant \liminf_{\theta\searrow 1} \limsup_{T\to\infty} \frac{M_T^1(\theta)}{b_T} - \limsup_{\theta\searrow 1} \limsup_{T\to\infty} \frac{M_T^2(\theta)}{b_T} \\
&\quad - \limsup_{\theta\searrow 1} \limsup_{T\to\infty} \frac{M_T^Y(\theta)}{b_T} \quad \text{п.н.}
\end{aligned}$$

Теперь из (8), (9) и (11) следует (13).

Если (8) выполнено с заменой $\limsup_{T\to\infty}$ на $\liminf_{T\to\infty}$, то

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{U_T}{b_T}\geqslant\liminf_{T\to\infty}\frac{M_T^1(\theta)}{b_T}-\limsup_{T\to\infty}\frac{M_T^2(\theta)}{b_T}-\limsup_{T\to\infty}\frac{M_T^Y(\theta)}{b_T}\quad\text{п.н.}$$

и мы приходим к (13) так же, как раньше.

Если выполнено (10) вместо (11), то, используя равенства

$$S_{k+j}-S_k-\frac{\lambda}{\mu}(R_{k+j+1}-R_k)=Q_{k+j+1}-Q_k+X_{k+j+1},$$

мы получим, что с вероятностью 1

$$\begin{aligned}U_T&\geqslant\max_{0\leqslant k\leqslant\Delta_T/(\mu\sqrt{\theta})}\ \min_{d_T/\sqrt{\theta}\leqslant j\leqslant\theta c_T}(Q_{k+j+1}-Q_k)-\max_{0\leqslant k\leqslant\Delta_T/(\mu\sqrt{\theta})+\theta c_T+1}X_k\\
&\geqslant\max_{0\leqslant k\leqslant\Delta_T/(\mu\sqrt{\theta})}\ \min_{d_T/\sqrt{\theta}+1\leqslant j\leqslant\theta c_T+1}(Q_{k+j}-Q_k)-\max_{0\leqslant k\leqslant\Delta_T/(\mu\sqrt{\theta})+\sqrt{\theta}c_T+1}X_k\\
&\geqslant\max_{0\leqslant k\leqslant\Delta_T/(\mu\theta^2)}\ \min_{d_T/\theta^2\leqslant j\leqslant\theta^2c_T}(Q_{k+j}-Q_k)-\max_{0\leqslant k\leqslant\Delta_T/(\mu\sqrt{\theta})+\sqrt{\theta}c_T+1}X_k\\
&=M_T^3(\theta)-M_T^X(\theta)\end{aligned}$$

для всех достаточно больших T. Используя (10) вместо (11), отсюда мы получаем (13) так же, как раньше.

Если $\limsup_{T\to\infty}\Delta_T<\infty$ и выполнено (11), то, положив $\Delta_T=0$ в (20), мы имеем

$$U_T\geqslant Q_{[\theta c_T]}-\max_{d_T/\theta\leqslant j\leqslant\theta c_T}\left(Q_{[\theta c_T]}-Q_j\right)-\frac{\lambda}{\mu}\max_{0\leqslant k\leqslant\sqrt{\theta}c_T+1}Y_k.$$

С помощью этой оценки мы приходим к (13) так же, как раньше.

Случай, в котором $\limsup_{T\to\infty}\Delta_T<\infty$ и выполнено (10), рассматривается аналогично. □

Доказательство теоремы 4. Так как $v_T\leqslant u_T$ нам достаточно доказать, что

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{u_T}{a_T}\leqslant\frac{1}{\mu}\quad\text{п.н.},\tag{21}$$

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{v_T}{a_T}\geqslant\frac{1}{\mu}\quad\text{п.н.}\tag{22}$$

Соотношение (21) вытекает из теоремы 10 работы автора [7]. Докажем (22).

Если $\limsup_{T\to\infty} \Delta_T < \infty$, то в силу УЗБЧ для процессов восстановления мы имеем

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{v_T}{a_T} \geqslant \liminf_{T\to\infty} \frac{N(a_T) - N(\Delta_T)}{a_T} = \liminf_{T\to\infty} \frac{N(a_T)}{a_T} = \frac{1}{\mu} \quad \text{п.н.}$$

Пусть теперь $\Delta_T \to \infty$ при $T \to \infty$.

Возьмем $\theta \in (1, \theta_0)$. Если $v_T < a_T/(\theta\mu)$, то $N(t + a_T) + 1 < N(t) + (a_T/(\theta\mu)) + 1$ для некоторого $t \in [0, \Delta_T]$. Из последнего неравенства и определения $N(t)$ следует, что $R_{N(t)} + a_T \leqslant t + a_T < R_{N(t+a_T)+1} < R_{N(t)+(a_T/(\theta\mu))+1}$ для некоторого $t \in [0, \Delta_T]$. Отсюда мы заключаем, что

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N(\Delta_T)} (R_{k+[a_T/(\theta\mu)]+1} - R_k) \geqslant a_T.$$

В силу УЗБЧ для процессов восстановления с вероятностью 1 неравенство $N(\Delta_T) \leqslant \theta\Delta_T/\mu$ выполнено для всех достаточно больших T. Поэтому

$$\mathbf{P}(v_T < a_T/(\theta\mu) \text{ б.ч.}) \leqslant \mathbf{P}\big(\max_{0\leqslant k\leqslant \theta\Delta_T/\mu} (R_{k+[a_T/(\theta\mu)]+1} - R_k) \geqslant a_T \text{ б.ч.}\big).$$

Из соотношения (15) следует, что последняя вероятность равна 0. Отсюда вытекает (22). $\square$

Для доказательства теоремы 5 нам потребуется теорема 1.20 из работы автора [14]. Отметим, что эта теорема представляет собой объединение в одной формулировке результатов из пункта IV на стр. 345 работы автора [4].

Доказательство теоремы 5. Возьмем $\theta \in (1, \theta_0)$. Положим $n = [\theta\Delta_T/\mu + a_T/(\mu\theta)]$, $a_n = [a_T/(\mu\theta)] + 1$.

Если выполнено условие 1), то $a_n/\log n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Если выполнено условие 2), то $n \leqslant \theta T/\mu$ и

$$\begin{aligned} a_n &\geqslant C\frac{\theta_0}{\theta}\frac{(H^{-1}(\log(\theta_0 T/\mu)))^2}{\log(T/\mu)} \geqslant C\frac{\theta_0}{\theta}\frac{(H^{-1}(\log(\theta_0 T/\mu)))^2}{\log(\theta_0 T/\mu)} \\ &\geqslant C\frac{\theta_0}{\theta}\frac{(H^{-1}(\log(\theta T/\mu)))^2}{\log(\theta T/\mu)} \geqslant C\frac{\theta_0}{\theta}\frac{(H^{-1}(\log n))^2}{\log n} \geqslant C\frac{(H^{-1}(\log n))^2}{\log n}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(H^{-1}(x))^2/x$ не убывает.

Если выполнено условие 3), то $T/(\mu\theta) \leqslant n \leqslant \theta T/\mu$ и

$$\begin{aligned} a_n &\geqslant \frac{C}{\theta\mu}\frac{(H^{-1}(\theta_0 T/\mu))^2}{\log(T/\mu)} \geqslant \frac{C}{\theta\mu}\frac{(H^{-1}(\theta T/\mu))^2}{\log(T/\mu)} \\ &\geqslant \frac{C}{\theta\mu}\frac{(H^{-1}(n))^2}{\log n + \log\theta} \geqslant \frac{C}{\theta\mu}\frac{(H^{-1}(n))^2}{\log n(1+\log\theta)} = C_1\frac{(H^{-1}(n))^2}{\log n}. \end{aligned}$$

По теореме 1.20 из [14], мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\max_{0\leqslant k\leqslant n-a_n}(R_{k+a_n} - R_k) = \mu \quad \text{п.н.}$$

Так как $a_n \sim a_T/(\mu\theta)$ при $T \to \infty$, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{a_T}\max_{0\leqslant k\leqslant \theta\Delta_T/\mu}(R_{k+[a_T/(\mu\theta)]+1} - R_k) = \frac{1}{\theta} \quad \text{п.н.}$$

Отсюда следует (15). По теореме 4 мы получаем (14). □

Доказательство теоремы 6. Возьмем $\theta \in (1, \theta_0)$. Положим $n = [\theta T/\mu]$, $a_n = [a_T/(\mu\theta)]$. Обозначим $b_n = \sqrt{a_n\,(\log(n/a_n) + \log\log n)}$.

Пусть выполнено условие 1). Тогда $a_n/\log n \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, $b_n/\log n \to \infty$ при $n \to \infty$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как $\mathbf{E}e^{h_0 Y} < \infty$, то мы имеем

$$\sum_n \mathbf{P}(Y \geqslant \varepsilon b_n) \leqslant \sum_n \mathbf{P}(Y \geqslant \log n/h_0) = \sum_n \mathbf{P}(e^{h_0 Y} \geqslant n) < \infty.$$

Из книги Галамбоша [15, следствие 4.3.1, стр. 190] мы получим

$$\mathbf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} Y_k \geqslant \varepsilon b_n \quad \text{б.ч.}) = 0.$$

Значит

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\max_{1\leqslant k\leqslant n} Y_k = 0 \quad \text{п.н.} \tag{23}$$

Далее, используя неравенство $\log x/\log y \leqslant x/y$ при $x \geqslant y \geqslant e$, получим

$$1 \leqslant \frac{b_n}{b_T} = \sqrt{\frac{a_n\log((n\log n)/a_n)}{a_T\log((T\log T)/a_T)}} \leqslant \sqrt{\frac{n\log n}{T\log T}} \to \sqrt{\frac{\theta}{\mu}}$$

при $T \to \infty$. Из последнего соотношения и (23) следует (3).

Пусть теперь выполнено условие 2). Так же, как в доказательстве теоремы 5, мы заключаем, что $a_n \geqslant C(H^{-1}(\log n))^2/\log n$. Из последнего неравенства следует, что $b_n \geqslant H^{-1}(\log n)$ (см., например, [4]).

Возьмем $\varepsilon \in (0,1)$. Положим $c = 1/\varepsilon$. Так как $H(x)/x \searrow$, мы имеем $H(cx) \leqslant cH(x)$. Поэтому $H^{-1}(x) \geqslant cH^{-1}(x/c)$. Далее,

$$\begin{aligned}
&\sum_n \mathbf{P}(Y \geqslant \varepsilon b_{n^c}) \leqslant \sum_n \mathbf{P}(Y \geqslant \varepsilon H^{-1}(c\log n)) \\
&\leqslant \sum_n \mathbf{P}(Y \geqslant \varepsilon c H^{-1}(\log n)) = \sum_n \mathbf{P}(Y \geqslant H^{-1}(\log n)) \\
&= \sum_n \mathbf{P}(e^{H(Y)} \geqslant n) < \infty.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathbf{E}\exp\{H(Y)\} < \infty$. Отсюда так же, как раньше, мы заключаем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{b_{n^c}} \max_{1\leqslant k\leqslant n^c} Y_k \leqslant \varepsilon \quad \text{п.н.}$$

Если $n^c \leqslant m \leqslant (n+1)^c$, то

$$\frac{1}{b_m}\max_{1\leqslant k\leqslant m} Y_k \leqslant \frac{1}{b_{n^c}} \max_{1\leqslant k\leqslant (n+1)^c} Y_k = \frac{b_{(n+1)^c}}{b_{n^c}} \frac{1}{b_{(n+1)^c}} \max_{1\leqslant k\leqslant (n+1)^c} Y_k.$$

Снова используя неравенство $\log x/\log y \leqslant x/y$ при $x \geqslant y \geqslant e$, получим

$$1 \leqslant \frac{b_{(n+1)^c}}{b_{n^c}} \leqslant \sqrt{\frac{(n+1)^c \log(n+1)^c}{n^c \log n^c}} \to 1$$

при $n \to \infty$. Отсюда следует (23). Оставшаяся часть доказательства (3) не отличается от приведенного выше доказательства для случая, когда выполнено условие 1).

Пусть теперь выполнено условие 3). Так же, как в доказательстве теоремы 5, мы заключаем, что $a_n \geqslant C_1(H^{-1}(n))^2/\log n$. Из последнего неравенства следует, что $b_n \geqslant H^{-1}(n)$ (см., например, [4]).

Возьмем $\varepsilon > 0$. Учитывая, что $\mathbf{E}H(Y/\varepsilon) < \infty$, мы имеем

$$\sum_n \mathbf{P}(Y \geqslant \varepsilon b_n) \leqslant \sum_n \mathbf{P}(Y/\varepsilon \geqslant H^{-1}(n)) = \sum_n \mathbf{P}(H(Y/\varepsilon) \geqslant n) < \infty.$$

Отсюда мы получаем (3) так же, как при выполнении условия 1).

Так как $c_T = a_T/\mu$ и $a_T \leqslant T$, то $\Delta_T/(\mu\theta) + \theta c_T = T/(\mu\theta) + (a_T/\mu)(\theta - 1/\theta) \leqslant \theta T/\mu$. Поэтому соотношение (11) следует из (3). $\square$

При доказательстве теорем 7–14 нам потребуются теоремы 1.15–1.18 из работы автора [14]. Теорема 1.15 представляет собой объединенные одной формулировкой результаты пунктов 1a, 1b, 1c на стр. 339–341 работы автора [4]. Теорема 1.16 является объединением результатов из пунктов 2a, 2b, 2c на стр. 341–343 работы [4]. Теорема 1.17 есть объединение результатов из пунктов 3a, 3b, 3c на стр. 343–344 работы [4]. Теорема 1.18 является объединением результатов из пунктов 3d, 3e, 3f на стр. 344 работы [4]. Отметим, также, что в [4] нужные в ходе доказательства оценки сверху доказаны для максимумов $M_n = \max_{0\leqslant k\leqslant n-a_n} \max_{0\leqslant j\leqslant a_n} (Q_{k+j} - Q_k)$. Тем не менее, оценка сверху для вероятности $\mathbf{P}(A_n(2\varepsilon)) = \mathbf{P}(M_n \geqslant (1+\varepsilon)b_n)$ на стр. 350 в [4] справедлива с заменой M_n на $M_n' = \max_{0\leqslant k\leqslant n} \max_{0\leqslant j\leqslant a_n} (Q_{k+j} - Q_k)$. Поэтому все упомянутые результаты для M_n верны и для M_n'.

Доказательство теорем 7 и 8.

Мы начнем с доказательства теоремы 7.

Докажем сначала, что выполнено (6). Для этого проверим, что выполнены все условия теоремы 1.

По теореме 5 соотношение (1) выполнено с $c_T = a_T/\mu$. По теореме 6 выполнено (3). Остается проверить, что выполнено условие (2) с $c_T = a_T/\mu$.

Возьмем $\theta \in (1, \theta_0)$. Положим $n = [\theta T/\mu]$, $a_n = [\theta a_T/\mu]$. Обозначим $b_n = \sqrt{2\sigma^2 a_n\,(\log(n/a_n) + \log\log n)}$.

Так же, как при доказательстве теоремы 5 проверяются все условия теоремы 1.15 из [14]. В доказательстве этой теоремы было показано, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \max_{0\leqslant k\leqslant n} \max_{0\leqslant j\leqslant a_n} (Q_{k+j} - Q_k) \leqslant 1 \quad \text{п.н.}$$

Так как $b_n \sim \sqrt{\theta} b_T$ при $T \to \infty$, то из последнего соотношения мы получаем (2) с $c_T = a_T/\mu$.

Докажем теперь, что выполнено (13). Для этого проверим, что выполнены все условия теоремы 2.

Рассмотрим сначала случай $\Delta_T \to \infty$ при $T \to \infty$.

Положим $d_T = c_T = a_T/\mu$. По теореме 5 выполнены соотношения (1) и (7). По теореме 6 выполнено (11). Остается проверить, что выполнены условия (8) и (9).

Возьмем $\theta \in (1, \theta_0)$. Положим $n = [\theta\Delta_T/\mu + \theta a_T/\mu]$, $a_n = [\theta a_T/\mu]$. Обозначим $b_n = \sqrt{2\sigma^2 a_n\,(\log(n/a_n) + \log\log n)}$.

Так же, как при доказательстве теоремы 5 проверяются все условия теоремы 1.15 из [14]. По этой теореме

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \max_{0\leqslant k\leqslant n-a_n} (Q_{k+a_n} - Q_k) \geqslant 1 \quad \text{п.н.} \tag{24}$$

Учитывая, что $b_n \sim \sqrt{\theta} b_T$ при $T \to \infty$, из последнего соотношения мы получаем (8) с $c_T = a_T/\mu$.

Перейдем к условию (9). Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leqslant k\leqslant \Delta_T/(\theta\mu)} \max_{d_T/\theta\leqslant j\leqslant \theta c_T} \left(Q_{k+[\theta c_T]} - Q_{k+j}\right) \\
&\leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant \Delta_T/(\theta\mu)+\theta c_T} \max_{0\leqslant j\leqslant \theta c_T - d_T/\theta} (Q_{k+j} - Q_k) \\
&= \max_{0\leqslant k\leqslant \Delta_T/(\theta\mu)+\theta a_T/\mu} \max_{0\leqslant j\leqslant \theta a_T/\mu - a_T/(\mu\theta)} (Q_{k+j} - Q_k)\,.
\end{aligned}$$

Возьмем $\theta \in (1, \theta_0)$. Положим $n = [\Delta_T/(\theta\mu) + \theta a_T/\mu]$, $a_n = [\theta a_T/\mu - a_T/(\mu\theta)]$. Обозначим $b_n = \sqrt{2\sigma^2 a_n\,(\log(n/a_n) + \log\log n)}$.

Так же, как при доказательстве теоремы 5 проверяются условия 1) и 3) теоремы 1.15 из [14]. Если выполнено условие 2), то так же, как в доказательстве теоремы 5, мы получим $a_n \geqslant A(H^{-1}(\log n))^2/\log n$ для всех достаточно больших n, где A– произвольная положительная постоянная. Отсюда мы получаем условие 2) теоремы 1.15. При доказательстве этой теоремы было установлено, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \max_{0\leqslant k\leqslant n} \max_{0\leqslant j\leqslant a_n} (Q_{k+j} - Q_k) \leqslant 1 \quad \text{п.н.}$$

Учитывая, что $b_n \sim \sqrt{(\theta^2-1)/\theta}\, b_T$ при $T \to \infty$, из последнего соотношения мы получаем (9).

Если $\limsup_{T\to\infty} \Delta_T < \infty$, то нужно вместо соотношения (8) проверить (12) с $c_T = a_T/\mu$. Соотношение (12) является следствием ЗПЛ.

Принимая во внимание неравенство $U_T \leqslant W_T$, мы приходим к (16).

Если дополнительно $\log\log T = o(\log(T/a_T))$, то по теореме 1.15 из [14] соотношение (24) выполнено с заменой $\limsup$ на $\lim$. Поэтому, в этом случае, мы получим (17).

Теорема 7 доказана. Теорема 8 доказывается аналогично. Нужно лишь при проверке условий теоремы 1.15 взять из двух условий на скорость роста функции a_T, которые предполагаются выполненными, наиболее жесткое. □

Доказательство теорем 9 и 10. Доказательство теоремы 9 проводится по образцу доказательства теоремы 7. Отличие состоит в том, что вместо теоремы 1.15 из [14] используется теорема 1.16 оттуда же. Отметим, что мы можем применять теорему 6, так как $\sqrt{a_T(\log(T/a_T) + \log\log T)} = o(b_T)$ при $T \to \infty$.

Определим a_n так же, как в доказательстве теоремы 7. Положим $b_n = a_n \widehat{m}(\widehat{f}^{-1}((\log(n/a_n) + \log\log n)/a_n))$. Тогда из условия 1) теоремы 9 вытекает, что $a_n/\log n \to \infty$ при $n \to \infty$. Если выполнено условие 2), то, учитывая, что $b_n \sim \sqrt{\theta} b_T$ при $T \to \infty$, мы получим $b_n \geqslant A\sqrt{\theta} H^{-1}(\log(\theta_0 T/\mu)) \geqslant A\sqrt{\theta} H^{-1}(\log(\theta T/\mu)) \geqslant A\sqrt{\theta} H^{-1}(\log n)$ для всех достаточно больших n, где A– произвольная положительная постоянная. Поэтому $b_n \geqslant CH^{-1}(\log n)$ для всех достаточно больших n, где C– положительная постоянная из условия 2) теоремы 1.16. Если выполнено условие 3), то так же, как в предыдущем случае, мы придем к неравенству $b_n \geqslant C_1 H^{-1}(\log n)$, где C_1– некоторая положительная постоянная. Таким образом, если выполнено одно из условий 1)–3) теоремы 9, то выполнено одно из условий 1)–3) теоремы 1.16.

В остальном доказательство теоремы 9 не отличается от доказательства теоремы 7.

Теорема 10 доказывается аналогично теореме 9. Нужно лишь при проверке условий теоремы 1.16 взять из двух условий на скорость роста функции a_T, которые предполагаются выполненными, наиболее жесткое. Детали мы здесь опускаем. □

Доказательство теорем 11 и 12. Доказательство теорем 11 и 12 проводится по образцу доказательства теорем 7 и 8. Отличие состоит в том, что вместо теоремы 1.15 из [14] используется теорема 1.17 оттуда же. Отметим, что мы можем применять теорему 6, так как нормировки в доказываемых результатах тяжелее, чем в теореме 6. Последовательность a_n нужно взять ту же, что и в доказательстве теоремы 7, а b_n определить соотношением

$b_n = \nu^{-\nu} a_n^{1/\alpha}(\log \frac{n}{a_n} + \log\log n)^{\nu}$. Детали мы здесь опускаем. $\square$

Доказательство теорем 13 и 14. Доказательство теорем 13 и 14 проводится по образцу доказательства теорем 9 и 10. Отличие состоит в том, что вместо теоремы 1.16 из [14] используется теорема 1.18 оттуда же. Отметим, что мы можем применять теорему 6, так как нормировки в доказываемых результатах тяжелее, чем в теореме 6. Последовательность a_n нужно взять ту же, что и в доказательстве теоремы 7, а b_n определить соотношением $b_n = a_n \widehat{m}(\widehat{f}^{-1}((\log(n/a_n) + \log\log n)/a_n))$. Детали мы здесь опускаем. $\square$

Доказательство теоремы 15. В силу условия теоремы 15 и соотношения $b_T = o(a_T)$ при $T \to \infty$ мы имеем

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{W_T}{a_T} \leqslant 0 \quad \text{п.н.}$$

Учитывая неравенство $U_T \leqslant W_T$, нам осталось проверить, что

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{U_T}{a_T} \geqslant 0 \quad \text{п.н.}$$

Возьмем $\tau \in (0,1)$. Мы имеем $U_T \geqslant S_{N(a_T)} - (\lambda/\mu)a_T$. В силу ЗПЛ для процессов восстановления с вероятностью 1 неравенство $N(a_T) \geqslant a_T/\mu - 2\sqrt{2(\mathbf{D}Y/\mu^3)a_T \log\log a_T}$ выполнено для всех достаточно больших T. Из теоремы Колмогорова об УЗБЧ следует, что п.н. $S_n \geqslant (1-\tau)\lambda n$ для всех достаточно больших n. Поэтому с вероятностью 1 неравенство

$$\frac{U_T}{a_T} \geqslant \frac{(1-\tau)\lambda}{\mu} - \frac{2(1-\tau)\lambda\sqrt{2(\mathbf{D}Y/\mu^3)a_T \log\log a_T}}{a_T} - \frac{\lambda}{\mu} \geqslant -2\tau\frac{\lambda}{\mu}$$

выполнено для всех достаточно больших T. Так как τ может быть выбрано сколь угодно малым, мы получаем требуемое. $\square$

Литература

1. P. Erdös, A. Rényi, *On a new law of large numbers.* — J. Analyse Math. **23** (1970), 103–111.
2. M. Csörgő, P. Révész, *Strong approximations in probability and statistics.* Budapest, Akadémiai Kiadó (1981).
3. А. Н. Фролов, *Об асимптотическом поведении приращений сумм независимых случайных величин.* — Доклады Академии Наук **372**, (2000), No. 5, 596–599.

4. A. N. Frolov, *On one-sided strong laws for increments of sums of i.i.d. random variables.* — Studia Sci. Math. Hungar. **39** (2002), 333–359.
5. А. Н. Фролов, *Предельные теоремы для приращений сумм независимых случайных величин.* — Теор. вероятн. и ее примен. **48** (2003), вып. 1, 104–121.
6. A. N. Frolov, *Converses to the Csörgő–Révész laws.* — Statist. and Probab. Letters **72** (2005), 113–123.
7. А. Н. Фролов, *Сильные предельные теоремы для приращений процессов восстановления.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **298**, (2003), 208–225.
8. А. Н. Фролов, *Об асимптотическом поведении приращений случайных полей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **298**, (2003), 191–207.
9. А. Н. Фролов, *Универсальные предельные теоремы для приращений процессов с независимыми приращениями.* — Теория вероятностей и ее применения **49**, 3, (2004), 601–609.
10. А. Н. Фролов, *Сильные предельные теоремы для приращений сумм независимых случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **311** (2004), 260–285.
11. А. Н. Фролов, *О законе повторного логарифма для приращений сумм независимых случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **320** (2004), 174–186.
12. П. Эмбрехтс, К. Клюппельберг, *Некоторые аспекты страховой математики.* — Теория вероятн. и ее примен. **38** (1993), 374–416.
13. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции.* Наука, М., (1985).
14. А. Н. Фролов, *Предельные теоремы для приращений сумм независимых случайных величин и случайных процессов.* Дисс. на соиск. уч. ст. доктора физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский государственный университет (2004).
15. Я. Галамбош, *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик.* Наука, М., (1984).

Frolov A. N. Limit theorems for increments of compound renewal processes.

We derive universal strong limit theorems for increments of compound renewal processes which unifies the strong law of large numbers, the Erdős–Rényi law, the Csörgő-Révész law and the law of the iterated logarithm for such processes. New results are obtained under various moment assumptions on distributions of random variables generating the process. In particular, it is investigated the case of distributions from domains of attraction of a normal law and completely asymmetric stable laws with index $\alpha \in (1, 2)$.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

Поступило 11 ноября 2007 г.