Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

В. Н. Судаков

ЛИПШИЦЕВОСТЬ ФУНКЦИЙ КВАНТИЛЕЙ НА ПРОСТРАНСТВАХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассматриваются функции квантилей на конечномерных и бесконечномерных пространствах случайных величин, и описывается класс таких норм на этих пространствах, относительно которых определённые на этих пространствах функции квантилей оказываются липшицевыми с константой единица (или любой другой). Для гауссовских распределений на векторном пространстве случайных величин это позволяет в задачах о случайно возникающих распределениях случайных величин переходить к более удобным для изучения неубывающим перестановкам.

Для исключения патологий мы будем предполагать, что все возникающие в нашей модели вероятностные пространства обладают свойством Лебега–Рохлина. В частности, они предполагаются сепарабельными (со счётным базисом).

Пусть E – некоторое векторное пространство классов эквивалентности измеримых функций, заданных на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Мы будем рассматривать случайный гауссовский процесс X_tс сечениями $X_t \in E$ с некоторым параметрическим множеством $T \ni t$. На этом множестве в свою очередь на индуцированной отображением $T \to E$ σ-алгебре подмножеств задана другая мера μ. Эту меру мы также для простоты будем предполагать имеющей единичную общую массу: $\mu(T) = 1$. В наших целях удобно считать, что $T \subset E$, даже $T = E$, причём если мера μ на множестве T уже была определена заранее, то “новую” меру (на E, будем её также обозначать μ) определим как меру, маргинальную для “старой” меры μ относительно разбиения, порождаемого отображением параметрического множества T в пространство E:

$$T \ni t \mapsto X_t \in E.$$

Работа поддержана Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Таким образом, мы принимаем “натуральную” параметризацию множества сечений X_t, $t \in T$ случайного процесса собственными элементами этого множества. Произвольный рассматриваемого класса случайный процесс возникает, таким образом, в качестве пространства $L^0(\mathbf{P})$ классов эквивалентности случайных величин с фиксированной (другой) борелевской вероятностной мерой μ на нём. Так, например, возникающий процесс будет (сепарабельным) гауссовским тогда и только тогда, когда мера μ оказывается сконцентрированной на некотором гауссовском подпространстве G пространства случайных величин E. (Напомним, что гауссовским подпространством пространства случайных величин называется замкнутое по естественной метрике линейное подпространство пространства всех случайных величин, состоящее из гауссовских случайных величин. В частности, μ-почти все сечения процесса гауссовские, но линейная оболочка не любых двух гауссовских случайных величин является гауссовским подпространством. Каждому конечномерному гауссовскому подпространству $G \subset E$ можно сопоставить максимальное (нерасширяемое) гауссовское подпространство, как правило, не единственное (см. [1]).)

В дальнейшем $\mathcal{P}$ будет обозначать метризуемое пространство вероятностных мер на прямой $\mathbb{R}$ или выделяемое по какому-то признаку его подпространство. Если мы намереваемся использовать метрику Канторовича $\varkappa(\cdot,\cdot)$ в пространстве вероятностных мер на прямой, то так будет обозначаться пространство вероятностных мер с конечным средним (т.е. с барицентром $b(\mathbf{P})$), которое метрикой Канторовича превращается в полное сепарабельное метрическое пространство. Каждая точка $X \in E$ – это случайная величина, и таким образом каждой точке $X \in E$ сопоставляется распределение вероятностей

$$\mathcal{L}(X, \mathbf{P}) = \mathbf{P} \circ X^{-1}.$$

Нас прежде всего будут интересовать неубывающие перестановки случайных величин X, т.е. определённые для каждого $\alpha \in (0,1)$ функции квантилей

$$X \to q(X, \alpha) : (0,1) \ni \alpha \mapsto q_\alpha(\mathcal{L}(X, \mathbf{P}))$$

где $q_\alpha(\mathcal{L}(X, \mathbf{P}))$ обозначает квантиль порядка α распределения $\mathcal{L}(X, \mathbf{P})$.

Если закон $\mathcal{L}(X)$ распределения вероятностей случайной величины X таков, что любой невырожденный отрезок имеет по этому закону положительную меру, то функция квантилей $q(X, \alpha)$ строго монотонна по α, обратна функции распределения F_X и определена однозначно для такого X и любого значения $\alpha \in (0, 1)$. Функция квантилей не определена для случайной величины X в точке α, если распределение вероятностей случайной величины содержит пустые отрезки, на которых функция распределения $F_X(\lambda)$ постоянна, и α равняется значению функции распределения на одном из этих отрезков. Для каждого $X \in E$ наличие таких точек α, в которых значение функции квантилей $q(X, \alpha)$ не определено, обусловлено присутствием подобных пустых отрезков. Но для каждого такого "не строгого" значения квантили α (с неоднозначно определённым соответствующим значением функции X) существует отрезок постоянства функции распределения, на котором значение функции распределения постоянно и равно α. Такой выбор значения X сохраняет свойство монотонности функции квантилей по α. Такого рода отрезки не пересекаются, и их суммарная длина равна мере дискретной части распределения $\mathcal{L}(X)$. Тем самым, число таких неопределённых значений функции квантилей не более чем счётно, и суммарная неопределённость невелика.

Особый для нас интерес с учётом важного гауссовского случая представляет выяснение того, обладают ли функции квантилей, рассматриваемые теперь при фиксированном значении α как числовые функции на пространстве случайных величин, свойством Липшица по какой-нибудь метрике или норме (см. [2]), и отчего зависит Липшицева константа. Функция квантилей $q(X, \alpha)$, очевидно, положительно однородна по первому аргументу, так что достаточно рассмотреть конус функций обладающих свойством Липшица с константой единица вблизи нуля.

Прежде всего рассмотрим случай вероятностной меры, равномерно распределённой на n точках $\{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\} = \Omega_n$. (Такие меры будем обозначать $\mathbf{P}_n$). Для функций X на таком множестве (т.е. на элементах координатного пространства $\mathbb{R}^n$) квантили могут быть описаны следующим удобным для нас образом. Пусть

$$X(\omega_1) = x_1, \quad X(\omega_2) = x_2, \quad X(\omega_n) = x_n.$$

т.е. $X = X(\omega)$ – некоторая функция на множестве Ω, которую мы рассматриваем как точку пространства $\mathbb{R}^n$ Будем вместо не всегда однозначно определённых квантилей этой функции рассматривать содержательно и однозначно определённые для $\alpha = \frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}, \dots \frac{n}{n} = 1$ значения функционалов $q_n(X, \alpha)$, которые могут быть записаны следующим образом:

$$q_n(X, \frac{1}{n}) = x_{n1}, q_n(X, \frac{2}{n}) = x_{n2}, \dots, q_n(X, \frac{n}{n}) = x_{nn},$$

где x_{nk} – k-й член вариационного ряда, составленного из координат точки $x \in \mathbb{R}^n$.

Члены вариационного ряда любой конечной последовательности чисел $V = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ могут быть заданы в явной форме, например, следующим образом. Пусть $M \subset \mathbb{R}$ – конечное подмножество множества всех чисел. Тогда пусть $S(M, m)$ обозначает множество всех m-элементных подмножеств множества M. Теперь члены вариационного ряда могут быть найдены по формуле:

$$x_{nm} = \max\{\min\{M : M \subset V, M \in C(M, m)\}\}.$$

Убедимся в том, что функция $x \mapsto x_{mn}$, определённая на координатном пространстве $\mathbb{R}^n$, удовлетворяет условию Липшица по норме l^∞ (или, что то же, по норме $L^\infty(\mathbf{P}_n)$. Действительно, значением этой функции является одна из координат точки-аргумента. При этом внутренний минимум после изменения каждой из координат на число, не превосходящее некоторого $\varepsilon > 0$, не изменится более чем на ε. Действительно, в таких условиях изменение внутреннего минимума наибольшее (в сторону уменьшения) при одновременном уменьшении всех координат на ε и аналогично для изменения внутреннего минимума в строну увеличения. Но тогда по тем же соображениям и изменение внешнего максимума также по абсолютной величине не превосходит того же ε, чем и доказывается очевидность нашего утверждения о липшицевости каждой функции q_k в стандартной равномерной норме. Особо отметим, что никаких ограничений на какую бы то ни было норму самой случайной величины накладывать не потребовалось. Эта особенность ещё проявится при разборе неатомической ситуации.

Переходим теперь к случаю неатомической меры $\mathbf{P}$ и к “настоящим” квантилям $q(X, \alpha)$, определяемым для любого $X \in L^0(\mathbf{P})$. Фиксируем число α из промежутка $(0, 1)$ и рассмотрим случай, когда квантили α соответствует единственная точка на числовой прямой $\mathbb{R}$ (не лежащая ни в каком пустом интервале распределения $\mathcal{L}(X)$). Если теперь мы изменим функцию X, прибавив к ней функцию ΔX, по модулю не превосходящую числа $\varepsilon > 0$, то это заставит точку α-квантили сместиться от прежнего положения не более, чем на α. Если же положение квантили α не определено однозначно, то при очень малых ε эта неоднозначность не устраняется, так что вопрос о новом значении α-квантили не встаёт. Однако, как отмечалось, множество таких α не более, чем счётно, и в этом смысле можно говорить, что для каждого числа α функция квантилей обладает относительно нормы L^∞ свойством Липшица с константой 1. Сама эта функция не обязана быть даже просто непрерывной по α.

Подобная ситуация встречается, например, в теореме о "субстандартности" образа бесконечномерного гауссовского распределения γ при отображении, липшицевом относительно гильбертовой нормы на ядре H_γ (см. [2]). (Субстандартными называют образы одномерной стандартной гауссовой меры при липшицевом с константой единица отображении прямой в прямую.)

Разумеется, описанное свойство липшицевости с константой единица относительно нормы L^∞ сохраняется и при переходе к любой более сильной норме, т.е. к такой норме, единичный шар которой содержится в единичном шаре пространства L^∞.

Сформулируем теперь наш вывод в виде теоремы.

Теорема. *Функции квантилей на пространстве случайных величин обладают свойством Липшица с константой единица относительно L^∞-нормы. При этом сами рассматриваемые случайные величины не обязательно являются элементами этого банахова пространства. L^∞-норма может быть заменена на любую более сильную норму.*

Эта теорема без полного доказательства использовалась в работе автора [3].

Литература

1. V. Sudakov, *Gaussian measures. A brief survey.* — Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Univ. di Trieste 26 (1994, supp), 285–325.
2. B. S. Cirel'son, I. A. Ibragimov, V. N. Sudakov, *Norms of Gaussian sample functions.* — Lect. Notes Math. **55** (1976), 20–111.
3. В. Н. Судаков, *Гауссовская концентрация в метрике Канторовича распределений случайных величин и функции квантилей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **328** (2005), 230–235.

Sudakov V. N. The Lipschitz property of the quantile functions on spaces of random variables.

It is proved that the quantile functions on the space of random variables obey the Lipschitz condition with the constant 1 with respect to any norm majorizing L^∞-norm. The random variables considered need not to belong this L^∞-space.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 23 ноября 2007 г.