Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

Н. В. Смородина

СОХРАНЯЮЩИЕ МЕРУ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ УСТОЙЧИВЫХ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ

1. Введение

Пусть $\xi(t), t \in [0,1]$ – устойчивый процесс Леви со значениями в $\mathbb{R}^d, d > 1$ и показателем устойчивости $\alpha \in (0,2)$. Известно ([6, 12], что выборочные функции этих процессов с вероятностью 1 принадлежат пространству Скорохода $\mathbb{D}([0,1],\mathbb{R}^d)$. Через $\mathcal{P}_\xi$ будем обозначать меру, порожденную процессом в $\mathbb{D}([0,1],\mathbb{R}^d)$.

Для описания данного класса процессов мы будем использовать представление Леви–Хинчина ([6, 3]). Именно,

$$\xi(t) = at + \int_0^t \int_{0<\|x\|\leqslant 1} x\widetilde{\nu}(ds,dx) + \int_0^t \int_{\|x\|>1} x\nu(ds,dx). \qquad (1)$$

В этом представлении $a \in \mathbb{R}^d$ – неслучайная константа, $\nu(ds,dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,1]\times\mathbb{R}^d$ с интенсивностью вида $dt\Lambda(dx)$, где мера Λ носит название меры Леви процесса ξ, а $\widetilde{\nu}(dt,dx) = \nu(dt,dx) - \mathbb{E}\nu(dt,dx)$ – соответствующая центрированная мера.

В качестве вероятностного пространства для пуассоновской случайной меры мы выберем пространство конфигураций (см. [2]) на множестве $[0,1]\times(\overline{\mathbb{R}^d}\setminus\{0\})$, где через $\overline{\mathbb{R}^d}$ мы обозначим пространство $\mathbb{R}^d$ к которому добавлена еще одна точка, именно ∞, то есть

$$\overline{\mathbb{R}^d} = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$$

(смысл добавления этой точки будет ясен далее). На этом пространстве конфигураций мы рассматриваем пуассоновскую меру с интенсивностью $\Pi(dt,dx) = dt\Lambda(dx)$.

Работа выполнена при поддержке гранта DFG 436 RUS 113/823.

Распределение процесса ξ в пространстве $\mathbb{D}([0,1],\mathbb{R}^d)$ можно рассматривать как образ пуассоновской меры на пространстве конфигураций под действием отображения, задаваемого (1). Поэтому, вместо того, чтобы строить отображения пространства $\mathbb{D}([0,1],\mathbb{R}^d)$ в себя, мы сначала решим более общую задачу построения группы, сохраняющих пуасссоновскую меру преобразований пространства конфигураций $\mathcal{X}(G)$, где множество G имеет вид прямого произведения $G = S \times (\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\})$, S – полное сепарабельное метрическое пространство.

Относительно интенсивности Π пуассоновской меры мы предположим, что она имеет вид

$$\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta)\Gamma(dx),$$

где π – конечная мера на S, а Γ – $\sigma-$конечная мера на $\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\}$.

Всюду далее мы будем рассматривать преобразования F пространства конфигураций, порожденные преобразованиями $\varphi : G \to G$, так что конфигурация X, состоящая из точек вида $\overline{x}, \overline{x} = (\theta, x), \overline{x} \in X$ под действием этого преобразования переходит в конфигурацию $Y = F(X)$, состоящую из точек вида $\varphi(\overline{x})$, $\overline{x} \in X$ т.е.

$$F(X) = \{\varphi(\overline{x})\}_{\overline{x} \in X}. \tag{2}$$

Нетрудно показать, что под действием преобразования (2) пуассоновская мера с интенсивностью Π переходит в пуассоновскую же меру с интенсивностью $\Pi\varphi^{-1}$.

Первый результат об абсолютной непрерывности пуассоновских мер в пространстве конфигураций (в $\mathbb{R}^n$) принадлежит А. В. Скороходу [4](см. также [10, 1, 2, 5]).

В работе [11] Вершика и Цилевич рассматривались трансформации гамма меры, представляющей из себя пуассоновскую меру на множестве $S \times (0,\infty)$ с интенсивностью Π вида

$$\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta)\frac{e^{-x}}{x}dx,$$

где $\theta \in S$, $x \in (0,\infty)$, причем $\pi(S) < \infty$.

В этой работе было показано, что гамма мера квазиинвариантна относительно группы преобразований F_a, $a \in \mathcal{M}$ где $\mathcal{M}$ есть множество измеримых функций $a : S \to (0,\infty)$ таких, что

$$\int\limits_S |\log a(\theta)|\pi(d\theta) < \infty,$$

а F_a есть преобразование вида (2) с $\varphi(\theta, x) = (\theta, a(\theta)x)$. Заметим, что множество $\mathcal{M}$ является коммутативной группой относительно поточечного умножения функций, и для любых $a_1, a_2 \in \mathcal{M}$ мы имеем $F_{a_1 a_2} = F_{a_1} \circ F_{a_2}$.

Далее, в работе [7] рассматривались трансформации пуассоновской меры $P_\alpha, \alpha > 0$ на пространстве $S \times \overline{\mathbb{R}}$ с интенсивностью вида $\pi(d\theta)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}$. В этой работе было показано, что мера P_α инвариантна относительно группы преобразований Φ_f, где f пробегает множество всех измеримых функций на S а Φ_f есть преобразование вида (2) с функцией φ, задаваемой формулой

$$\varphi(\theta, x) = \left(\theta, \frac{x}{(1 + \alpha f(\theta) x^\alpha)^{1/\alpha}}\right), \tag{3}$$

при этом в (3) функции x^α, $x^{1/\alpha}$ предполагаются продолженными на отрицательную полуось нечетным образом.

Настоящая работа обобщает на многомерный случай результаты [7].

2. Пространство конфигураций

В этом параграфе мы приведем список необходимых определений, относящихся к пространству конфигураций. Пусть G – метрическое пространство, $\mathcal{B}$ – его борелевская $\sigma-$алгебра, $\mathcal{B}_0$ – кольцо ограниченных борелевских подмножеств G. Далее, пусть Π – $\sigma-$конечная мера на $(G, \mathcal{B})$, причем $\Pi(V) < \infty$ для любого $V \subset \mathcal{B}_0$.

Через $\mathcal{X} = \mathcal{X}(G)$ мы обозначим пространства конфигураций на G. По определению

$$\mathcal{X}(G) = \{X \subset G : |X \cap V| < \infty \quad \text{для любого} \quad V \subset \mathcal{B}_0\},$$

где через $|A|$ обозначено число точек в множестве A. На пространстве $\mathcal{X}$ мы будем рассматривать топологию $\mathcal{O}(\mathcal{X})$, – слабейшую топологию, такую, что все функционалы $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$

$$X \mapsto \sum_{x \in X} f(x)$$

непрерывны для любых непрерывных функций $f : G \to \mathbb{R}$ с ограниченным носителем. Борелевскую $\sigma-$алгебру, порожденную $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ мы будем обозначать через $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Это наименьшая

$\sigma-$алгебра для которой отображения

$$X \mapsto |X \cap V|$$

измеримы для любого $V \subset \mathcal{B}_0$.

Далее, мы говорим, что вероятностная мера P на $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ есть пуассоновская мера с интенсивностью Π, если для каждого $V \in \mathcal{B}_0$

$$P(X : |X \cap V| = k) = e^{-\Pi(V)} \frac{\Pi(V)^k}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и для непересекающихся множеств V_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ случайные величины ν_j, где $\nu_j(X) = |X \cap V_j|$ независимы. Подробнее см. [2, 8].

3. Сохраняющие меру преобразования

В этом параграфе мы рассмотрим пространство конфигураций $\mathcal{X}(G)$ в случае, когда пространство G имеет вид прямого произведения $S \times (\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\})$, где S есть полное сепарабельное метрическое пространство, а $\overline{\mathbb{R}^d} = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$. Через S_{d-1} мы обозначим единичную сферу в $\mathbb{R}^d$, а через $\sigma(d\omega)$, $\omega \in S_{d-1}$ мы обозначим меру Лебега на S_{d-1}.

Далее, через Q мы обозначим отображение из $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ в $S_{d-1} \times (0, \infty)$ вида

$$Q(x) = \left(\frac{x}{\|x\|}, \|x\|\right). \tag{4}$$

Из (4) следует, что для $\omega \in S_{d-1}$, $r \in (0, \infty)$

$$Q^{-1}(\omega, r) = r\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Пусть μ – мера на $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Условимся называть меру μQ^{-1} на $S_{d-1} \times (0, \infty)$ представлением меры μ в сферических координатах.

На пространстве конфигураций $\mathcal{X}(G) = \mathcal{X}(S \times (\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\}))$ мы рассмотрим пуассоновскую меру P с интенсивностью Π вида

$$\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta)\Gamma(dx), \tag{5}$$

где π – конечная мера на S, а Γ – $\sigma-$конечная мера на $\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\}$. Мы предположим, что $\Gamma(\{\infty\}) = 0$ и представление меры Γ в сферических координатах имеет вид

$$\Gamma Q^{-1}(d\omega, dr) = \sigma(d\omega)\gamma_\omega(dr),$$

где в свою очередь для σ—почти всех $\omega \in S_{d-1}$ мера γ_ω удовлетворяет следующим условиям:

1)$\gamma_\omega(0,\infty) = \infty$,

2)для каждого $r > 0$ $\gamma_\omega(r,\infty) < \infty$, и функция

$$U_\omega(r) = \gamma_\omega(r,\infty)$$

непрерывна и строго убывает.

Наша дальнейшая цель состоит в построении группы преобразований $\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\}$, сохраняющих меру Γ. Для этого сначала мы построим отображение $\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\}$ в $\mathbb{R}^d$, переводящее меру Γ в меру Лебега λ^d

Определим отображение $E : \overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^d$, полагая

$$E(x) = \frac{x}{\|x\|}\big(dU_{\frac{x}{\|x\|}}(\|x\|)\big)^{1/d}. \tag{6}$$

Положим также $E(\infty) = 0$. Нетрудно показать, что обратное отображение задается формулой

$$E^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|}U^{-1}_{\frac{x}{\|x\|}}\big(\frac{\|x\|^d}{d}\big) \tag{7}$$

Лемма 1. *Отображение E переводит меру Γ в меру Лебега λ^d, то есть*

$$\Gamma E^{-1} = \lambda^d$$

и, соответственно, обратное отображение E^{-1} переводит меру Лебега в меру Γ:

$$\lambda^d E = \Gamma.$$

Доказательство. Для $\omega \in S_{d-1}$ мы определим функцию f_ω из $(0,\infty]$ в $[0,\infty)$ полагая

$$f_\omega(r) = \big(d \cdot U_\omega(r)\big)^{1/d} \tag{8}$$

для $r \in (0,\infty)$. Положим также $f_\omega(\infty) = 0$. Легко видеть, что для $r \in (0,\infty)$ мы имеем

$$f_\omega^{-1}(r) = U_\omega^{-1}\big(\frac{r^d}{d}\big). \tag{9}$$

Далее, через μ мы обозначим меру на $[0,\infty)$ вида $\mu(dr) = r^{d-1}dr$. Покажем теперь, что функция f_ω отображает меру γ_ω в меру μ и наоборот, f_ω^{-1} отображает меру μ в меру γ_ω т.е.

$$\gamma_\omega f_\omega^{-1} = \mu, \quad \mu f_\omega = \gamma_\omega.$$

Действительно, функция f_ω есть суперпозиция $f_\omega^\theta = g^{-1} \circ U_\omega$, где функция $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, задается формулой $g(r) = \frac{r^d}{d}$. Легко проверить, что $\mu g^{-1} = \lambda$ и $\gamma_\omega U_\omega^{-1} = \lambda$ и значит

$$\gamma_\omega f_\omega^{-1} = \gamma_\omega (g^{-1} \circ U_\omega)^{-1} = \mu.$$

Далее, через F мы обозначим отображение из $S_{d-1} \times (0,\infty]$в $S_{d-1} \times [0,\infty)$, определенное следующей формулой

$$F(\omega, r) = (\omega, f_\omega(r)). \tag{10}$$

Из формулы (9) немедленно вытекает, что F отображает меру ΓQ^{-1} в меру $\sigma \times \mu$, то есть

$$(\Gamma Q^{-1}) F^{-1} = \sigma \times \mu. \tag{11}$$

Утверждение леммы следует теперь из следующего соотношения

$$E = Q^{-1} \circ F \circ Q. \tag{12}$$

□

Далее, пусть $\mathcal{G}$ – группа сохраняющих меру Лебега преобразований $\mathbb{R}^d$.

Для каждого $g \in \mathcal{G}$ определим отображение T_g пространства $\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\}$ в себя, полагая

$$T_g = E^{-1} \circ g \circ E. \tag{13}$$

Из (13) немедленно следует, что для любых $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$

$$T_{g_1 \circ g_2} = T_{g_1} \circ T_{g_2}, \tag{14}$$

а из леммы 1 следует, что $\mathfrak{G} = \{T_g\}_{g \in \mathcal{G}}$ является группой, сохраняющих меру Γ преобразований $\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\}$, изоморфной группе $\mathcal{G}$, то есть для всякого $g \in \mathcal{G}$

$$\Gamma T_g^{-1} = \Gamma. \tag{15}$$

Через $L(S,\mathcal{G})$ мы обозначим множество всех борелевских функций на S принимающих значения в $\mathcal{G}$, с операцией суперпозиции, понимаемой поточечно. Для каждого $f \in L(S,\mathcal{G})$ мы определим отображение

$$\tau_f : S \times (\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\}) \to S \times (\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\}),$$

полагая

$$\tau_f(\theta, x) = (\theta, T_{f(\theta)}). \tag{16}$$

Из (14) следует, что для любых $f_1, f_2 \in L(S,\mathcal{G})$

$$\tau_{f_1 \circ f_2} = \tau_{f_1} \circ \tau_{f_2}, \tag{17}$$

а из (15) в свою очередь следует, что для любых $f \in L(S,\mathcal{G})$

$$\Pi \tau_f^{-1} = \Pi. \tag{18}$$

Используя группу преобразований τ_f, $f \in L(S,\mathcal{G})$ определим группу Φ_f, $f \in L(S,\mathcal{G})$ преобразований $\mathcal{X}(S \times (\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\}))$. В соответствии с (2), для $f \in L(S,\mathcal{G})$ мы определим отображение $\Phi_f : \mathcal{X}(S \times (\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\})) \to \mathcal{X}(S \times (\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\}))$ как отображение порожденное τ_f, так что

$$\Phi_f(X) = Y = \{(\theta, T_{f(\theta)}(x))\}.$$

Сформулируем основной результат этого параграфа

Теорема 1. 1. *Для любых* $f_1, f_2 \in L(S,\mathcal{G})$

$$\Phi_{f_1 \circ f_2} = \Phi_{f_1} \circ \Phi_{f_2}.$$

2. *Для любого* $f \in L(S,\mathcal{G})$

$$P\Phi_f^{-1} = P,$$

то есть группа Φ_f, $f \in L(S,\mathcal{G})$ *является группой сохраняющих меру* P *преобразований.*

Доказательство. Утверждение п.1 теоремы следует из (17). Для доказательства утверждения п.2 заметим, что мера $P\Phi_f^{-1}$ есть пуассоновская мера с интенсивностью $\Pi\tau_f^{-1}$, а в силу (18) $\Pi\tau_f^{-1} = \Pi$.

Рассмотрим теперь специальный случай (так называемых устойчивых мер), когда мера Γ в полярном представлении имеет вид

$$\Gamma Q^{-1}(d\omega, dx) = \sigma(d\omega)c(\omega)\frac{dx}{x^{1+\alpha}},$$

где $\alpha > 0$, и для всех $\omega \in S_{d-1}$ $\quad c(\omega) > 0$. В этом случае как легко видеть

$$U_\omega(x) = \frac{c(\omega)}{\alpha x^\alpha}.$$

Простые вычисления показывают, что в этом случае функции E, E^{-1} имеют следующий вид

$$E(x) = \frac{x}{\|x\|^{\alpha/d+1}}\left(c\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\frac{d}{\alpha}\right)^{1/d}, \tag{19}$$

$$E^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^{d/\alpha+1}}\left(c\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\frac{d}{\alpha}\right)^{1/\alpha}. \tag{20}$$

Выпишем теперь для рассматриваемого случая явные выражения для преобразований двух подгрупп группы $\mathfrak{G}$, именно подгруппы $\mathfrak{G}_1$, порожденная группой $SL(d)$ (группой вещественных матриц с определителем 1) и подгруппы $\mathfrak{G}_2$, порожденной группой сдвигов $\mathbb{R}^d$). Заметим еще, что подгруппа, порожденная свободным произведением (см.[9]) групп $SL(d)$ и группы сдвигов, естественно изоморфна свободному произведению $\mathfrak{G}_1 * \mathfrak{G}_2$.

Итак, пусть $A \in SL(d)$, $\quad g_A$ – линейный оператор с матрицей A. Из (13),(19) и (20) следует, что

$$T_{g_A}(x) = E^{-1}(AE(x)) = Ax\left(\frac{\|x\|}{\|Ax\|}\right)^{1+d/\alpha}\left(\frac{c\left(\frac{Ax}{\|Ax\|}\right)}{c\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}\right)^{1/\alpha}. \tag{21}$$

Далее, пусть g_t оператор сдвига на вектор $t \in \mathbb{R}^d$. Имеем

$$T_{g_t}(x) = E^{-1}(E(x)+t) = \frac{\|x\|}{\|y(t,x)\|^{d/\alpha}} \cdot \frac{y(t,x)}{\|y(t,x)\|} \cdot \left(\frac{c\left(\frac{y(t,x)}{\|y(t,x)\|}\right)}{c\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}\right)^{1/\alpha}, \tag{22}$$

где

$$y(t,x) = \frac{x}{\|x\|} + t\left(\frac{\alpha}{dc\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}\right)^{1/d}\|x\|^{\alpha/d}.$$

4. Преобразование траекторий устойчивых процессов

Пусть $\xi(t), t \in [0,1]$ – устойчивый процесс Леви со значениями в $\mathbb{R}^d, d > 1$ и показателем устойчивости $\alpha \in (0,2)$. Выборочные функции этих процессов с вероятностью 1 принадлежат пространству Скорохода $\mathbb{D}([0,1],\mathbb{R}^d)$. Как и ранее, через $\mathcal{P}_\xi$ будем обозначать меру, порожденную процессом в $\mathbb{D}([0,1],\mathbb{R}^d)$. Известно (см.[3]), что мера Леви Λ устойчивого случайного процесса в полярном представлении имеет следующий вид

$$\Lambda Q^{-1}(d\omega, dx) = \varrho(d\omega)\frac{dx}{x^{1+\alpha}},$$

где ϱ – некоторая конечная мера на единичной сфере S_{d-1} (спектральная мера процесса ξ). Всюду далее мы будем предполагать, что спектральная мера ϱ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега σ, причем соответствующая плотность $c = \frac{d\varrho}{d\sigma}$ строго положительна.

На пространстве конфигураций $\mathcal{X}([0,1]\times(\overline{\mathbb{R}^d}\setminus\{0\}))$ рассмотрим пуассоновскую меру P с интенсивностью $\Pi(dt,dx) = dt\Lambda(dx)$.

В соответствии с (1) на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}([0,1]\times(\overline{\mathbb{R}^d}\setminus\{0\})),P)$ процесс Леви $\xi(t)$ со спектральной мерой Λ может быть задан как

$$\xi(t,X) = at + (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{\substack{(s,x)\in X,\\ s\leqslant t,\varepsilon\leqslant\|x\|\leqslant 1}} x - t\int_{\varepsilon\leqslant\|x\|\leqslant 1} x\,d\Lambda\right) + \sum_{\substack{(s,x)\in X,\\ s\leqslant t,1<\|x\|<\infty}} x. \tag{23}$$

Суммирование в этих формулах проводится по точкам (s,x) конфигурации $X \in \mathcal{X}$. Соответствие между конфигурациями и траекториями имеет очень простой смысл. Именно, если точка (s,x) принадлежит конфигурации X, то построенная по X траектория случайного процесса в момент времени s имеет скачок величины x Отображение $\mathcal{X} \to \mathbb{D}([0,1],\mathbb{R}^d)$, задаваемое (23), сопоставляющее конфигурации траекторию случайного процесса, будем обозначать через Ξ, так что

$$\Xi(X) = \xi(\cdot, X).$$

Ясно, что различные конфигурации порождают различные траектории случайного процесса: при $X_1 \neq X_2$

$$\Xi(X_1) \neq \Xi(X_2). \tag{24}$$

Далее, рассмотрим группу преобразований $\mathfrak{G}$ определяемую (13), (19), (20) и соответствующую ей группу $\{\Phi_f, f \in L([0,1],\mathcal{G})\}$ преобразований пространства конфигураций $\mathcal{X}([0,1]\times(\overline{\mathbb{R}^d}\setminus\{0\}))$. С помощью группы $\{\Phi_f, f \in L([0,1],\mathcal{G})\}$ и отображения Ξ (задаваемого (23)) определим группу $\{\Psi_f, f \in L([0,1],\mathcal{G})\}$ преобразований пространства $\mathbb{D}([0,1],\mathbb{R}^d)$ полагая

$$\Psi_f = \Xi \circ \Phi_f \circ \Xi^{-1}. \tag{25}$$

Соотношение (25) показывает, что Ψ_f определено почти всюду по мере $\mathcal{P}_\xi$. Кроме того, из теоремы 1 вытекает, что $\{\Psi_f, f \in L([0,1],\mathcal{G})\}$ является группой преобразований то есть для любых $f_1, f_2 \in L([0,1],\mathcal{G})$ справедливо

$$\Psi_{f_1 \circ f_2} = \Psi_{f_1} \circ \Psi_{f_2}.$$

Выпишем теперь для $f \in L([0,1],\mathcal{G})$ явную формулу для преобразования Ψ_f.

Условимся для каждой функции $z \in \mathbb{D}([0,1],\mathbb{R}^d)$ через Δz обозначать функцию

$$\Delta z(t) = z(t) - z(t-0), t \in [0,1].$$

Ясно, что функция $\Delta z(t)$ отлична от нуля только в точках разрыва функции z.

Легко проверить, что преобразование Ψ_f может быть задано формулой

$$[\Psi_f(z)](t) = z(t) + \sum_{\substack{s \leqslant t, \\ \|T_{f(s)}(\Delta z(s))\| < \infty}} (T_{f(s)}(\Delta z(s)) - \Delta z(s)). \tag{26}$$

Теорема 2. *Для любой функции $f \in L([0,1],\mathcal{G})$ преобразование Ψ_f определено на множестве $\mathcal{P}_\xi$–полной меры, и является сохраняющем меру $\mathcal{P}_\xi$ преобразованием, т.е.*

$$\mathcal{P}_\xi \Psi_f^{-1} = \mathcal{P}_\xi.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 1.

□

Литература

1. Y. Takahashi, *Absolute continuity of Poisson random fields.* — Publ. Res. Inst. Math. Sci. **26** (1990), 629–649.
2. J. Kerstan, K. Mattes, and J. Mecke, *Infinite divisible point processes.* Akademie-Verlag, Berlin (1978).
3. W. Linde, *Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces.* Leipzig: Teubner (1983).
4. А. В. Скороход, *О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам.* И. — Теория Вероятн. и ее примен. ИИ (1957), 629–649.
5. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов.* Изд-во Киевского ун-та (1961).
6. А. В. Скороход, *Стохастические процессы с независимыми приращениями.* Наука, М. (1986).
7. Н. В .Смородина, *Инвариантные и квазиинвариантные преобразования мер, отвечающих устойчивым процессам с независимыми приращениями* — Зап. научн. семин. ПОМИ **339** (2006), 135–150.
8. J .F. C. Kingman, *Poisson Processes.* Oxford (1993).
9. А. Г. Курош, *Теория групп.* Гостехиздат, Москва (1953).
10. I. M. Gel'fand, M. I. Graev, A. M. Vershik, *Representations of the group of diffeomorphisms.* — Russian Math. Surveys **30** (1975), 3–50.
11. A. Vershik, N. Tsilevich, *Quasi-invariance of the gamma process and multiplicative properties of the Poisson-Dirichlet measures.* — C. R. Acad. Sci . Paris Ser. I Math. bf 329 (1999), 163–168.
12. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Наука, М. (1977).

Smorodina N. V. The measure preserving transformations of the multidimensional stable Lévy processes.

Let $\xi(t), t \in [0,1]$ be a $\alpha-$stable Lévy process in $\mathbb{R}^d$. Denote by $\mathcal{P}_\xi$ the measure generated by ξ in Skorokhod space $\mathbb{D}([0,1],\mathbb{R}^d)$. Under some conditions on the spectral measure of the process ξ we construct a group of the $\mathcal{P}_\xi-$preserving transformations of $\mathbb{D}([0,1]\mathbb{R}^d$.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: smorodin@ns2691.spb.edu

Поступило 10 декабря 2007 г.