Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

Л. В. Розовский

ОДНА НЕРАВНОМЕРНАЯ ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

Рассмотрим G – множество функций $g(x)$, определенных для всех действительных x и удовлетворяющих следующим условиям: (а) $g(x)$ – неотрицательная, четная, неубывающая в области $x > 0$ функция, такая, что $g(x) \neq 0$ при $x \neq 0$; (б) функция $x/g(x)$ не убывает в области $x > 0$.

В [1] был получен следующий результат:

Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые копии случайной величины X с математическим ожиданием, равным нулю,и положительной дисперсией σ^2. Если

$$\mathbf{E}X^2\, g(X) < \infty \tag{1}$$

для некоторой функции $g \in G$, удовлетворяющей дополнительному условию (в) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x^2)/(xg(x)) = 0$, то

$$\left| P\Big((\sigma\sqrt{n})^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j < x \Big) - \Phi(x) \right| \leqslant \frac{\psi(\sqrt{n}\,(1+|x|))}{(1+|x|)^2 g(\sigma\sqrt{n}\,(1+|x|))} \tag{2}$$

для любых n и x, где $\psi(u)$ – ограниченная функция, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u) = 0$. Здесь $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения.

Это утверждение можно уточнить, заменив условие (в) менее ограничительным предположением.

Теорема 1. *Пусть условие* (1) *выполняется для некоторой функции $g \in G$, такой что*

$$\tau(x) = x/g(x) \to \infty. \tag{3}$$

Работа над статьей была поддержана грантом НШ No. 4222.2006.1 и грантом РФФИ No. 06-01-00179-a.

Тогда справедливо соотношение (2).

Заметим, что условие (3) нельзя ослабить. Действительно, функция $\tau(x)$ не убывает и, следовательно, имеет предел на бесконечности, причем в случае конечности этого предела соотношение (2) не выполняется (см.пример в [1]).

Доказательство теоремы 2, также как и доказательство теоремы 1, опирается на одну оценку из [2] (см. также [1, (2)]), которую в нашем случае можно переписать в следующем виде:

$$\Big|P\Big((\sigma\sqrt{n})^{-1}\sum_{j=1}^{n}X_j < x\Big) - \Phi(x)\Big| \leqslant A\left\{(\sigma\,(1+|x|))^{-2}\,\mathbf{E}\Big(X^2\wedge\frac{|X|^3}{\sigma\,n^{1/2}(1+|x|)}\Big)\right\}, \qquad (4)$$

где A – некоторая абсолютная положительная постоянная.

При $z>0$

$$\mathbf{E}\Big(X^2\wedge\frac{|X|^3}{z}\Big) = \frac{1}{g(z)}\,\mathbf{E}\,u(X,z)\,X^2\,g(X), \qquad (5)$$

где

$$u(x,z) = \Big(1\wedge\frac{|x|}{z}\Big)\,\frac{g(z)}{g(x)}. \qquad (6)$$

Если $g\in G$, то $u(x,z)\leqslant 1$, а при условии (3) $\lim\limits_{z\to\infty}u(x,z)=0$ в каждой точке x. Таким образом, если выполнено условие (3), то функция $\mathbf{E}\,u(X,z)\,X^2\,g(X)$ ограничена и, в силу принципа мажорируемой сходимости [3, Гл.4, §2], стремится к нулю при $z\to\infty$. Отсюда и из (4), (5) следует (2).

Теорему 1 можно обобщить и уточнить.

Пусть теперь $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ – независимые случайные величины с нулевыми средними, конечными дисперсиями и функциями распределения $V_1(x),\ldots,V_n(x),\ldots$; $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n}X_j$, $B_n^2=E(S_n^2)$, $Z_n=B_n^{-1}S_n$, $F_n(x)=P(Z_n<x)$.

Предположим, что для некоторой функции $g(x)\in G$ и всех $j=1,\ldots,n,\ldots$

$$\mathbf{E}X_j^2\,g(X_j)<\infty. \qquad (7)$$

Обозначим

$$M_n(z) = B_n^{-2} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|u|>z} u^2 g(u)\, dV_j(u), \qquad z \geqslant 0.$$

Имеет место следующий вариант неравномерной оценки остаточного члена в центральной предельной теореме.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (7). *Тогда для любых* n *и* x

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant A\, \frac{\psi_n(B_n\,(1+|x|))}{(1+|x|)^2 g(B_n\,(1+|x|))}, \tag{8}$$

где

$$\psi_n(z) = \inf_{0<k\leqslant z} \Bigl(M_n(k) + \frac{\tau(k)}{\tau(z)}\,(M_n(0) - M_n(k))\Bigr).$$

Заметим, что функция $\psi_n(z) \leqslant M_n(0)$ и $\psi_n(z) \leqslant M_n(\tau(z)) + M_n(0)/g(\tau(z))$.

Для доказательства (8) снова воспользуемся соответствующей оценкой из [2] (см. [1, (2)]), записав ее в удобном для наших целей виде с использованием обозначения (6):

$$|F_n(x) - \Phi(x)|$$
$$\leqslant \frac{A}{(1+|x|)^2 g(B_n\,(1+|x|)}\, \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\, u(X_j,\, B_n\,(1+|x|))\, X_j^2\, g(X_j), \tag{9}$$

A – некоторая абсолютная положительная постоянная.

Оценка (8) вытекает из (9), поскольку, если $g \in G$, то $u(x,z) \leqslant 1$ и $u(x,z) \leqslant \tau(k)/\tau(z)$, $x \leqslant k \leqslant z$.

Следствие. *Предположим, что для некоторой функции* $g(x) \in G$, *удовлетворяющей условию* (3), *и всех* $n \geqslant n_0$ *имеет место оценка* $M_n(z) \leqslant M(z)$, *где* $M(z)$, $z \geqslant 0$, *– ограниченная функция, стремящаяся к нулю при* $z \to \infty$. *Тогда для любых* $n \geqslant n_0$ *и* x

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant A\, \frac{\psi(B_n\,(1+|x|))}{(1+|x|)^2 g(B_n\,(1+|x|))},$$

где

$$\psi(z) = \inf_{0<k\leqslant z} \Bigl(M(k) + \frac{\tau(k)}{\tau(z)}\,(M(0) - M(k))\Bigr).$$

Теорема 1, очевидным образом, вытекает из следствия, причем для правой части соотношения (2) получено явное представление.

В заключение заметим, что утверждение, аналогичное (9), справедливо в многомерном случае (см. [4, теорема 1 при $s = 2$]), а следовательно имеют место соответствующие многомерные аналоги теорем 1 и 2.

Литература

1. В. В. Петров, *Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **341** (2007), 142–146.
2. А. Бикялис, *Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме.* — Литовский матем. сборник **6**, No. 3 (1966), 323–346.
3. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* 2, Мир, М., 1984.
4. Л. В. Розовский, *Об асимптотических разложениях для вероятностных функций сумм независимых случайных векторов.* — Теория вероятн. и матем. стат., Киев **11** (1974), 143–152.

Rozovsky L. V. A nonuniform estimate of the remainder in the central limit theorem.

In the note a refinement and a generalization of one result of V. V. Petrov is obtained.

С.-Петербургская
Химико-фармацевтическая Академия

Поступило 23 ноября 2007 г.