Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

Ю. И. Ингстер, И. А. Суслина

ОЦЕНИВАНИЕ И ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ

1. Постановка задачи

Рассмотрим наблюдения вида

$$X_\varepsilon = f + \varepsilon N, \quad f = f(t), \quad t = (t_1, \dots, t_d) \in [0,1]^d,$$
$$f \in L_2^d = L_2([0,1]^d), \quad (1.1)$$

где N – гауссовский белый шум на единичном кубе размерности d. Это означает, что для любой функции $\phi \in L_2^d$, мы наблюдаем случайную величину $\xi = X_\varepsilon(\phi) \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, где

$$a = (f, \phi) = \int\limits_{[0,1]^d} f(t)\phi(t)dt, \ \ \sigma^2 = \varepsilon^2 \|\phi\|_2^2 = \varepsilon^2 \int\limits_{[0,1]^d} \phi^2(t)dt,$$

и для любых $\xi_1 = X_\varepsilon(\phi_1)$, $\xi_2 = X_\varepsilon(\phi_2)$ справедливо $\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \varepsilon^2(\phi_1, \phi_2)$. Наблюдения (1.1) задают гауссову меру $P_{\varepsilon,f}$ со средним значением f и ковариационным оператором $\varepsilon^2 I$, где I единичный оператор (см., например, [18]).

Мы будем изучать асимптотику при $\varepsilon \to 0$ в задачах минимаксного оценивания и обнаружения. В основном, нас интересует случай $d = d_\varepsilon \to \infty$.

Пусть задано множество $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\varepsilon \subset L_2^d$. Для оценки $\widehat{f}$ (то есть измеримой функции наблюдения X_ε со значениями в L_2^d) рассмотрим максимальный квадратичный риск

$$R_\varepsilon^2(\widehat{f}, \mathcal{F}) \stackrel{\Delta}{=} \sup_{f \in \mathcal{F}} E_{\varepsilon,f} \|f - \widehat{f}\|_2^2,$$

Настоящая работа частично поддерживалась грантами РФФИ 05-01-00920 и ведущих школ NSh 4222.2006.1.

где $E_{\varepsilon,f}$ – математическое ожидание по мере $P_{\varepsilon,f}$. Минимаксный квадратичный риск оценивания есть

$$R_\varepsilon = R_\varepsilon(\mathcal{F}) \stackrel{\Delta}{=} \inf_{\widehat{f}} R_\varepsilon(\widehat{f}, \mathcal{F}), \tag{1.2}$$

где инфимум ищется по всем возможным оценкам $\widehat{f}$. Семейство оценок f_ε^* называется *асимптотически минимаксным*, если $R_\varepsilon(f_\varepsilon^*, \mathcal{F}) \sim R_\varepsilon$.

Здесь и далее все пределы рассматриваются при $\varepsilon \to 0$, если не указан другой предельный переход.

Нас также интересует порядковая асимптотика и минимаксные по порядку оценки f_ε^*, то есть такие, что $R_\varepsilon^2(f_\varepsilon^*, \mathcal{F}) \asymp R_\varepsilon^2$. Если $d = d_\varepsilon \to \infty$, то также представляет интерес логарифмическая асимптотика, то есть асимптотика величины $\log(R_\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, $d_\varepsilon \to \infty$.

В задаче обнаружения для заданного семейства $r_\varepsilon > 0$, $r_\varepsilon \to 0$, положим

$$\check{\mathcal{F}}(r_\varepsilon) \stackrel{\Delta}{=} \{f \in \mathcal{F} \ : \ \|f\|_2 \geq r_\varepsilon\}. \tag{1.3}$$

Будем проверять простую гипотезу $H_0 : f = 0$ против альтернативы $H_1 : f \in \check{\mathcal{F}}(r_\varepsilon)$, то есть, в качестве альтернативы мы рассматриваем функции $f \in \mathcal{F}$, лежащие вне шара радиуса r_ε в L_2-норме. Нас будет интересовать асимптотика минимаксных вероятностей ошибок и структура асимптотически минимаксных тестов в этой задаче. Именно, для теста ψ, то есть для измеримой функции наблюдений X_ε со значениями в $[0,1]$, положим

$$\alpha_\varepsilon(\psi) = E_{\varepsilon,0}\psi, \quad \beta_\varepsilon(\psi, f) = E_{\varepsilon,f}(1-\psi), \quad \gamma_\varepsilon(\psi, f) = \alpha_\varepsilon(\psi) + \beta_\varepsilon(\psi, f).$$

Рассмотрим два критерия асимптотической оптимальности. Первый соответствует классическому критерию Неймана–Пирсона. Пусть

$$\beta(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \psi) \stackrel{\Delta}{=} \sup_{f \in \check{\mathcal{F}}(r_\varepsilon)} E_{\varepsilon,f}(1-\psi).$$

Для любого $\alpha \in (0,1)$ пусть

$$\beta(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \alpha) \stackrel{\Delta}{=} \inf_{\psi : \alpha(\psi) \leqslant \alpha} \beta(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \psi).$$

Назовем семейство тестов $\psi_{\varepsilon,\alpha}$ *асимптотически минимаксным* (*по критерию* $\beta(\alpha)$), если

$$\alpha(\psi_{\varepsilon,\alpha}) \leqslant \alpha + o(1), \quad \beta(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \psi_{\varepsilon,\alpha}) \leqslant \beta(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \alpha) + o(1).$$

Второй критерий соответствует минимальной суммарной вероятности ошибок. Пусть $\gamma_\varepsilon(\psi) = \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \psi) \stackrel{\Delta}{=} \alpha_\varepsilon(\psi) + \beta(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \psi)$. Положим

$$\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon) \stackrel{\Delta}{=} \inf_\psi \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \psi), \quad \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon) \in [0,1],$$

где инфимум ищется по всем тестам. Назовем семейство тестов ψ_ε *асимптотически минимаксным* (*по критерию* γ), если $\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \psi_\varepsilon) \le \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon) + o(1)$. Известно [7], что

$$\beta(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \alpha) \in [0, 1-\alpha], \quad \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon) \in [0,1],$$
$$\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon) = \inf_{\alpha \in (0,1)} (\alpha + \beta(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \alpha)).$$

Нас интересует асимптотика $\beta(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \alpha)$ и $\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon)$ (с точностью до слагаемого, стремящегося к 0) и структура асимптотически минимаксных семейств тестов $\psi_{\varepsilon,\alpha}$, ψ_ε. Также нас интересуют условия минимаксной различимости, то есть условия, при которых $\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon) \to 1$ или $\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon) \to 0$, а при выполнении последнего условия – структура *состоятельных (в минимаксном смысле)* семейств тестов ψ_ε таких, что $\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \psi_\varepsilon) \to 0$. Обычно эти условия соответствуют некоторой минимальной скорости убывания семейства r_ε. Именно, будем говорить, что $r^*_\varepsilon = r^*_\varepsilon(\mathcal{F})$ есть семейство *критических радиусов*, если

$$\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon) \to 1 \quad \text{при} \quad r_\varepsilon / r^*_\varepsilon \to 0,$$

$$\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon) \to 0, \quad \beta(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \alpha) \to 0 \quad \forall\ \alpha \in (0,1) \quad \text{при} \quad r_\varepsilon / r^*_\varepsilon \to \infty.$$

Другими словами, при малых ε и большом отношении $r_\varepsilon / r^*_\varepsilon$ можно обнаружить все функции $f \in \breve{\mathcal{F}}(r_\varepsilon)$ с малой вероятностью ошибки, в то время как, если это отношение мало, то невозможно различение нулевой гипотезы и альтернативы с малой вероятностью ошибки в минимаксном смысле.

Часто точная асимптотика имеет гауссовский вид (см. [7]), то есть

$$\beta(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \alpha) = \Phi(H_\alpha - u_\varepsilon) + o(1), \quad \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon) = 2\Phi(-u_\varepsilon/2) + o(1), \quad (1.4)$$

где Φ есть функция распределения стандартного нормального закона, H_α – ее $(1-\alpha)$-квантиль, а семейство $u_\varepsilon = u_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon)$ характеризует *различимость* в задаче. Критические радиусы $r^*_\varepsilon(\mathcal{F})$

при этом определяются условием $u_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon^*) \asymp 1$. Изучение точной асимптотики сводится к вычислению u_ε и построению асимптотически минимаксных семейств тестов.

В случае больших размерностей $d = d_\varepsilon \to \infty$ также представляет интерес логарифмическая асимптотика, то есть асимптотика величин $\log(r_\varepsilon^*)$.

Опишем теперь функциональные множества $\mathcal{F}$, которые будут рассматриваться в этой статье. Фиксируем ортонормальный базис Фурье в $L_2(0,1) = L_2$,

$$\phi_0(t) = 1, \quad \phi_l(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi lt), \quad \phi_{-l}(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi lt), \quad \text{при } l > 0.$$

Отметим, что $L_2 = \mathcal{L}_0 \bigoplus \mathcal{L}_1$, где $\mathcal{L}_0$ состоит из постоянных функций, а $\mathcal{L}_1$ есть его ортогональное дополнение.

Пусть задана неубывающая последовательность $\lambda_k \geqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$. Доопределим λ_k для $k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N} : \lambda_0 = 1$, $\lambda_k = \lambda_{-k}$, $k \leqslant -1$. Введем другую гильбертову норму, полагая $\|f\|_\lambda^2 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \lambda_l^2\theta_l^2$ для $f = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \theta_l\phi_l$, и обозначим $\mathcal{L}_\lambda$ соответствующее гильбертово пространство. Аналогично мы имеем $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L}_0 \bigoplus \mathcal{L}_{\lambda,1}$. Нас будут интересовать следующие примеры.

Пример 1.1. Пусть $\lambda_k = (2\pi k)^\sigma$, $\sigma > 0$. Тогда при $\sigma \in \mathbb{N}$ для $f \in \mathcal{L}_{\lambda,1}$ будем иметь $\|f\|_\lambda = \|f^\sigma\|$, где f^σ производная порядка σ функции f.

Пример 1.2. Пусть $\lambda_k^2 = \cosh(2\pi\kappa k)$, $\kappa > 0$. Тогда для $f \in \mathcal{L}_\lambda$ получим

$$\|f\|_\lambda^2 = \frac{1}{2}\left(\|f(\cdot + i\kappa)\|^2 + \|f(\cdot - i\kappa)\|^2\right),$$

где $f(x+iy)$ продолжение f на полосу в комплексной плоскости $|y| \leqslant \kappa$.

Пример 1.3.

Пусть $\lambda_k = \exp(\pi\kappa k)$, $\kappa > 0$. В силу того, что $\exp(|x|) \leqslant 2\cosh(x) \leqslant 2\exp(|x|)$, нормы $\|\cdot\|_\lambda$ в примерах 1.2 и 1.3 эквивалентны.

Рассмотрим L_2^d как тензорное произведение $L_2^d = L_2^1 \bigotimes \ldots \bigotimes L_2^1$ с базисом

$$\phi_l(t) = \prod_{k=1}^d \phi_{l_k}(t_k), \quad l = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{Z}^d.$$

При этом имеет место ортогональное разложение

$$L_2^d = \Big(\mathcal{L}_0 \bigoplus \mathcal{L}_1\Big)^d = \bigoplus_{u\subset\{1,\dots,d\}} \mathcal{L}_u^d, \tag{1.5}$$

где $\mathcal{L}_u^d$ содержит функции $f_u(t_u)$, зависящие от $t_u = \{t_j,\ j\in u\}$, сумма берется по всем 2^d подмножествам u множества $\{1,\dots,d\}$. Ясно, что, если $f\in L_2^d$, то

$$f(t) = \sum_{u\subset\{1,\dots,d\}} f_u(t_u), \quad \int_0^1 f_u(t_u)dt_j = 0 \ \text{ п.в.} \quad \forall j\in u,$$

и базис Фурье в подпространстве $\mathcal{L}_u^d$ состоит из функций ϕ_l с $l_j\neq 0,\ j\in u$ и $l_j = 0,\ j\notin u$. Для $u=\emptyset$ имеем $f_u = \int_{\Delta^d} f(t)dt = \mathrm{const}$, где $\Delta^d = [0,1]^d$.

Разложение (1.5) соответствует разложению дисперсионного анализа

$$L_2^d = \bigoplus_{m=0}^d \mathcal{L}_m^d, \quad \mathcal{L}_m^d = \bigoplus_{|u|=m} \mathcal{L}_u^d, \quad |u| = \#(u), \tag{1.6}$$

то есть подпространство $\mathcal{L}_m^d$ состоит из сумм функций m переменных; в частности $\mathcal{L}_1^d = \Big\{\sum_{j=1}^d f_j(t_j), \quad f_j\in\mathcal{L}_1\Big\}$. Обозначим $\mathcal{L}^{d,m} = \bigoplus_{k=0}^m \mathcal{L}_k^d$ пространство, состоящее из m-аддитивных функций, то есть из сумм функций от не более чем m переменных; в частности $\mathcal{L}^{d,1} = \Big\{\mathrm{const} + \sum_{j=1}^d f_j(t_j),\ f_j\in\mathcal{L}_1\Big\}$.

Пусть $\mathcal{L}_\lambda^d = (\mathcal{L}_\lambda)^d \subset L_2^d$ тензорное произведение пространств $\mathcal{L}_\lambda$. Аналогично (1.5), (1.6) мы имеем ортогональное разложение

$$\mathcal{L}_\lambda^d = \bigoplus_{u\subset\{1,\dots,d\}} \mathcal{L}_{\lambda,u}^d = \bigoplus_{m=0}^d \mathcal{L}_{\lambda,m}^d, \quad \mathcal{L}_{\lambda,u}^d \subset \mathcal{L}_u^d, \tag{1.7}$$

то есть $\|f\|_\lambda^2 = \sum_u \|f_u\|_\lambda^2$. Кроме того, эту норму можно представить в виде $\|f\|_\lambda^2 = \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} c_l^2\theta_l^2$, где θ_l коэффициенты Фурье функции f, а

$$c_l = \prod_{j=1}^d \lambda_{l_j} \quad \text{и} \quad \|f\|_\lambda^2 = \sum_u \sum_{l\in\mathbb{Z}_u^d} c_l^2\theta_l^2. \tag{1.8}$$

Норма $\|f_u\|_\lambda^2$ соответствует сумме по множеству $\mathbb{Z}_u^d$, состоящему из $l = (l_1, \ldots, l_d)$, таких что $l_j \neq 0$ только при $j \in u$.

В примере 1.1, если $u = \{j_1, \ldots, j_m\}$, $\sigma \in \mathbb{N}$, то норма $\|f_u\|_\lambda$ является нормой смешанной производной порядка $m\sigma$

$$\|f_u\|_\lambda = \|\frac{\partial^{m\sigma} f_u}{\partial t_{j_1}^\sigma \ldots \partial t_{j_m}^\sigma}\|. \tag{1.9}$$

В примере 1.2 $\mathcal{L}_\lambda^d$ состоит из функций $f(t)$, допускающих аналитическое продолжение на d-мерную комплексную полосу $(t_1 + iu_1, \ldots, t_d + iu_d)$, $|u_k| \leqslant \kappa$,

$$\|f\|_\lambda^2 = 2^{-d} \sum_{\overline{\varepsilon}} \|f(\cdot + \overline{\varepsilon}\kappa)\|^2, \tag{1.10}$$

где суммирование производится по всем $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$, $\varepsilon_j = \pm 1$. Пример 1.3 тесно связан с функциональными классами, рассматриваемыми в [12].

Рассматриваемые далее множества $\mathcal{F}$ есть единичные шары в одном из пространств $\mathcal{L}_\lambda^d$, $\mathcal{L}_{\lambda,m}^d$ (см. (1.7)) или $\mathcal{L}_\lambda^{d,m} = \bigoplus_{k=0}^m \mathcal{L}_{\lambda,k}^d$:

$$\mathcal{F}_d = \{f \in \mathcal{L}_\lambda^d : \|f\|_\lambda \leqslant 1\}, \quad \mathcal{F}_d^m = \mathcal{F}_d \cap \mathcal{L}_m^d, \quad \mathcal{F}_{d,m} = \mathcal{F}_d \cap \mathcal{L}^{d,m}.$$

В пространстве последовательностей коэффициентов Фурье $\theta = \{\theta_l\}_{l \in \mathcal{M}}$, эти множества имеют вид

$$\mathcal{F} = \{f(t) = \sum_{l \in \mathcal{M}} \theta_l \phi_l(t),\ \theta \in \Theta\}, \quad \Theta = \{\theta : \sum_{l \in \mathcal{M}} \theta_l^2 c_l^2 \leqslant 1\}, \tag{1.11}$$

то есть Θ есть эллипсоиды с коэффициентами $\{c_l\}_{l \in \mathcal{M}}$ вида (1.8) и с множествами индексов, соответственно, $\mathcal{M} = \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{M} = \mathbb{Z}_m^d$, $\mathcal{M} = \mathbb{Z}_{d,m}$, где $\mathbb{Z}_m^d$ состоит из $l \in \mathbb{Z}^d$ таких что $\#\{j : l_j \neq 0\} = m$, и $\mathbb{Z}_{d,m} = \cup_{k=0}^m \mathbb{Z}_k^d$.

Случай $\mathcal{M} = \mathbb{Z}_{d,m}$ соответствует m-аддитивным функциям. Для норм вида (1.9) при фиксированном d и $m = 1$ задачи оценивания изучалась в [19]. При этом получена асимптотика $R_\varepsilon(\mathcal{F}_{d,1}) \asymp \varepsilon^{2\sigma/(2\sigma+1)}$, такая же как для σ-гладких функций при $d = 1$ (см. [4]). Случай $\mathcal{M} = \mathbb{Z}_d^d$ изучался в [5], где получена асимптотика $R_\varepsilon(\mathcal{F}_d^d) \asymp (\varepsilon(\log(\varepsilon^{-1}))^{(d-1)/2})^{2\sigma/(2\sigma+1)}$. Случай $\mathcal{M} = \mathbb{Z}_{d,m}$ при $m > 1$ изучался в [14], где показано, что $R_\varepsilon(\mathcal{F}_{d,m}) \asymp (\varepsilon(\log(\varepsilon^{-1}))^{(m-1)/2})^{2\sigma/(2\sigma+1)}$, то есть от m зависит только логарифмический множитель. Для случая норм (1.10) и множеств, близких к $\mathcal{F}_d$ при фиксированных d, точная асимптотика в задачах оценивания получена в [12] и имеет вид $R_\varepsilon \sim C(d,\kappa)\varepsilon(\log(\varepsilon^{-1}))^{d/2}$.

В этой работе мы изучаем задачи для множеств, описанных выше. Нас интересует, в основном, случай $d = d_\varepsilon \to \infty$.

Результаты базируются на изучении $N(t)$ – “функции распределения” коэффициентов; они изложены в разделе 2. В разделах 3, 4 на базе геометрических методов изучается асимптотика функции $N(t)$. Это изучение позволяет в условиях примеров 1.1–1.3 установить точную асимптотику $R_\varepsilon(\mathcal{F}_d)$, $r_\varepsilon^*(\mathcal{F}_d)$ для множеств $\mathcal{F}_d$ при фиксированном d и при не слишком быстро возрастающем $d \to \infty$ (с точностью до логарифмического множителя, $d = o(\sqrt{\log(\varepsilon^{-1})})$). На основе этих результатов в разделе 5 получена точная асимптотика для m-аддитивных функций. В разделе 6 описываются вероятностные методы анализа асимптотики $N(t)$, $t \to \infty$, позволяющие установить логарифмическую асимптотику $R_\varepsilon(\mathcal{F}_d)$, $r_\varepsilon^*(\mathcal{F}_d)$, которая оказывается различной при $d \ll \log(\varepsilon^{-1})$ и при $d \gg \log(\varepsilon^{-1})$. В условиях примеров 1.1–1.3 мы получаем точную асимптотику при $d = o(\log(\varepsilon^{-1}))$. Изучение точной асимптотики базируется на некотором варианте локальной предельной теоремы, доказательство которой приведено в приложении.

Далее в тексте через B, b обозначаются положительные постоянные, значения которых могут быть различны даже в пределах одного соотношения.

2. Оценивание и обнаружение для эллипсоидов

Напомним некоторые результаты о порядковой и точной асимптотике для эллипсоидов $\mathcal{F}$ вида (1.11) с коэффициентами $c_l = c_{l,\varepsilon} > 0$, $l \in \mathcal{M}$, где $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\varepsilon$ – счетное множество индексов. Не умаляя общности можно считать, что $c_l \geqslant 1$. Для упрощения обозначений часто будем далее опускать индекс ε. Обозначим $N(t) = N^\varepsilon(t) = N^\varepsilon(t, \mathcal{M}_\varepsilon)$ “функцию распределения” коэффициентов,

$$N(t) = \#\{l \in \mathcal{M} : c_l \leq t\}, \quad N(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 1. \tag{2.1}$$

Будем считать, что

$$N^\varepsilon(t) < \infty, \quad \forall\ t > 0; \quad N^\varepsilon(t_\varepsilon) \to \infty, \quad \text{если} \quad t_\varepsilon \to \infty.$$

2.1. Порядковая асимптотика

Функция $N(t)$ определяет порядковую асимптотику квадратичного риска в задаче оценивания и критических радиусов в задаче проверки гипотез. Действительно, в задаче оценивания рассмотрим "проекционную оценку":

$$\widehat{f}_{\varepsilon,t} = \sum_{l\in\mathcal{M},\, c_l<t} X_l\phi_l, \quad X_l = X_\varepsilon(\phi_l). \tag{2.2}$$

Пусть $f = \sum_{l\in\mathcal{M}} \theta_l\phi_l$, $\theta \in \Theta$. Используя стандартные оценки, будем иметь

$$E_{\varepsilon,f}\|f-\widehat{f}_{\varepsilon,t}\|_2^2 = \varepsilon^2 N(t) + \sum_{c_l\geqslant t}\theta_l^2$$
$$\le \varepsilon^2 N(t) + t^{-2}\sum_{c_l\geqslant t} c_l^2\theta_l^2 \le \varepsilon^2 N(t) + t^{-2}. \tag{2.3}$$

Выберем семейство $B = B_\varepsilon \asymp 1$ и пусть $T = T_{\varepsilon,est}(B)$ удовлетворяет *уравнению баланса*:

$$T = \sup\{t : \varepsilon^2 t^2 N(t) \leqslant B\}. \tag{2.4}$$

Выбирая $t_1 < T$ и $t_2 > T$, из (2.3) получим верхние границы

$$R_\varepsilon(\mathcal{F}) \leqslant t_1^{-1}(1+B)^{1/2}, \quad R_\varepsilon(\mathcal{F}) \leqslant \varepsilon\sqrt{N(t_2)(1+1/B)}. \tag{2.5}$$

Для получения нижних границ используем методы, аналогичные использованным в [1], основанные на неравенстве ван Триса для байесовской задачи оценивания. Для любого $t>0$ множество Θ содержит шар размерности $N(t)$ и радиуса t^{-1}, и, следовательно, содержит $N(t)$-мерный куб со стороной $2L$, $L = 1/(t\sqrt{N(t)})$. Выберем априорное распределение $\mu(d\theta) = g(\theta)\lambda(d\theta)$, где λ мера Лебега на $\mathbb{R}^{N(t)}$, с плотностью $g(\theta) = \prod_{j=1}^{N(t)} h(\theta_j/L)/L$, $h(x) = \cos^2(\pi x/2)\mathbb{1}_{|x|\le 1}$; здесь и ниже $\mathbb{1}_A$ – индикатор множества A. Пусть $R^2(\mu)$ – квадратичный риск для байесовской задачи оценивания. Так как $\mu(\Theta) = 1$, используя неравенство ван Триса (ср. с [1, предложение 1]), имеем

$$R_\varepsilon^2(\mathcal{F}) \ge R^2(\mu) \geqslant \frac{\varepsilon^2 N(t)L^2}{L^2+\pi^2\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2 N(t)}{1+\pi^2\varepsilon^2 t^2 N(t)}. \tag{2.6}$$

Выбирая $t_1 > T$ и $t_2 < T$, где $T = T_{\varepsilon,est}(B)$ определено (2.4), получим

$$R_\varepsilon \geqslant t_1^{-1}(B/(1+\pi^2 B))^{1/2}, \quad R_\varepsilon(\mathcal{F}) \geqslant \varepsilon\sqrt{N(t_2)/(1+\pi^2 B)}. \tag{2.7}$$

Таким образом, мы получили

Предложение 2.1. *Пусть* $\mathcal{F}$ – *эллипсоид* (1.11). *Тогда* $R_\varepsilon(\mathcal{F}) \asymp T^{-1}$, *где* $T = T_\varepsilon$ *определено уравнением* (2.4). *В частности,* $\liminf R_\varepsilon(\mathcal{F}) > 0$ *при* $T = O(1)$.

В задаче обнаружения рассуждения основаны на асимптотике χ^2 распределения с $N \to \infty$ степенями свободы (сравни с [7, раздел 3.2]). Нижние границы основаны на изучении равномерного на сфере $S^{N-1}(r_\varepsilon)$ априорного распределения π^ε. Выбирая размерность $N = N(t)$ так, чтобы $tr_\varepsilon \leqslant 1$, мы имеем $S^{N-1}(r_\varepsilon) \subset \check{\mathcal{F}}(r_\varepsilon)$. Байесовские тесты есть тесты хи-квадрат с $N(t)$ степенями свободы. В силу асимптотической нормальности распределения χ^2 при $N(t) \to \infty$, это приводит к неравенствам (см. [7, раздел 3.2.1])

$$\beta_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon, \alpha) \geqslant \beta_\varepsilon(\alpha, \pi^\varepsilon) = \Phi(H_\alpha - u_\varepsilon(t)) + o(1), \tag{2.8}$$

$$\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon) \geqslant \gamma_\varepsilon(\pi^\varepsilon) = 2\Phi(-u_\varepsilon(t)/2) + o(1),$$
$$u_\varepsilon^2(t) \sim \frac{r_\varepsilon^4}{2\varepsilon^4 N(t)} \quad \text{при} \quad tr_\varepsilon \leqslant 1.$$

Здесь $\beta_\varepsilon(\alpha, \pi^\varepsilon)$ и $\gamma_\varepsilon(\pi^\varepsilon)$ – минимальная вероятность ошибок II рода для уровня значимости α и минимальная сумма вероятностей ошибок I и II рода в байесовской задаче проверки гипотез.

Верхние границы основаны на анализе мощности тестов типа хи-квадрат

$$\psi_{\varepsilon,H} = \mathbb{1}_{\{L_\varepsilon > H\}}, \quad \text{где} \quad L_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2N(t)}} \sum_{c_l < t} ((X_l/\varepsilon)^2 - 1). \tag{2.9}$$

Пусть $f = \sum_{l \in \mathcal{M}} \theta_l \phi_l$. Имеем при $N(t) \to \infty$ (см. [7, раздел 3.1.2])

$$\alpha(\psi_{\varepsilon,H}) = \Phi(-H) + o(1), \quad \beta(\psi_{\varepsilon,H}, f) = \Phi(H - h_\varepsilon(\theta, t)) + o(1), \tag{2.10}$$

для любого $H = H_\varepsilon = O(1)$ или $H_\varepsilon \to \infty$, так что $\limsup H_\varepsilon / h_\varepsilon(\theta, t) < 1$, где

$$h_\varepsilon(\theta, t) = \frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt{2N(t)}} \sum_{c_l < t} \theta_l^2 \geqslant \frac{r_\varepsilon^2 - t^{-2}}{\varepsilon^2 \sqrt{2N(t)}}$$
$$\geqslant u_\varepsilon(t)(1 - C^{-2}), \quad \text{при} \quad tr_\varepsilon > C > 1, \tag{2.11}$$

и при $u_\varepsilon(t)$, определенном в (2.8). Из оценок (2.8). (2.10), (2.11) вытекает

Предложение 2.2. *Пусть $\mathcal{F}$ есть эллипсоид* (1.11). *Тогда* $r_\varepsilon^* \asymp T^{-1}$, *где* $T = T_{\varepsilon,\mathrm{det}}(B)$ *определяется уравнением баланса*

$$T = \sup\{t : \varepsilon^4 t^4 N(t) \leqslant B\}, \quad B = B_\varepsilon \asymp 1. \tag{2.12}$$

В частности, $\liminf r_\varepsilon^*(\mathcal{F}) > 0$ *при* $T = O(1)$.

2.2. Точная асимптотика

2.2.1. Медленно меняющиеся функции

Пусть сначала $N(t)$ не зависит от ε, что соответствует фиксированному d. Будем называть $N(t)$ *медленно меняющейся функцией*, если $N(ct)/N(t) \to 1$ при $t \to \infty$ $\forall c > 0$. Если же $N^\varepsilon(t)$ зависит от ε, модифицируем определение следующим образом. Для заданного семейства $T = T_\varepsilon \to \infty$ будем говорить, что $N^\varepsilon(T_\varepsilon)$ *медленно меняется*, если $N^\varepsilon(cT_\varepsilon)/N^\varepsilon(T_\varepsilon) \to 1$, $\forall\ c > 0$.

Предложение 2.3. *Пусть $\mathcal{F}$ есть эллипсоид* (1.11). *Пусть семейства* $T_\varepsilon = T_{\varepsilon,\mathrm{est}}(B)$, $T_\varepsilon = T_{\varepsilon,\mathrm{det}}(B)$ *определяются уравнениями* (2.4), (2.12) *соответственно и* $N^\varepsilon(T_\varepsilon)$ *медленно меняется. Тогда*

$$R_\varepsilon(\mathcal{F}) \sim \varepsilon N_{\varepsilon,\mathrm{est}}^{1/2}, \quad N_{\varepsilon,\mathrm{est}} = N^\varepsilon(T_{\varepsilon,\mathrm{est}}(B)), \tag{2.13}$$

и существует семейство $B_\varepsilon \to \infty$ *такое, что оценки* (2.2) *с* $t = T_{\varepsilon,\mathrm{est}}(B_\varepsilon)$ *асимптотически минимаксны. В задаче обнаружения справедливо* (1.4) *с* $u_\varepsilon(\mathcal{F}, r_\varepsilon) = u_\varepsilon(T_{\varepsilon,\mathrm{det}}(B))$, *где* $u_\varepsilon(t)$ *определено в* (2.8). *Существует семейство* $C_\varepsilon \to \infty$ *такое, что семейства тестов* (2.9) *при* $t = C_\varepsilon T_{\varepsilon,\mathrm{det}}(B)$ *и* $H = H_\alpha$ *или* $H = u_\varepsilon/2$ *асимптотически минимаксны по критериям* $\beta(\alpha)$ *или* γ.

Доказательство. Рассмотрим задачу оценивания. Асимптотика $N_{\varepsilon,\mathrm{est}}$ не зависит от семейства $B_\varepsilon \asymp 1$ в (2.4). Действительно, если $B_{\varepsilon,1} \asymp 1$ – другое семейство в (2.4), то $T_{\varepsilon,\mathrm{est}}(B_\varepsilon) \asymp T_{\varepsilon,\mathrm{est}}(B_{\varepsilon,1})$ и $N^\varepsilon(T_\varepsilon) \sim N^\varepsilon(T_{\varepsilon,1})$. Можно выбрать семейства $B_\varepsilon \to \infty$, $b_\varepsilon \to 0$ такие, что $N^\varepsilon(T_{\varepsilon,\mathrm{est}}(B_\varepsilon)) \sim N^\varepsilon(T_{\varepsilon,\mathrm{est}}(b_\varepsilon)) \sim N^\varepsilon(T_{\varepsilon,\mathrm{est}}(1))$. Переходя к семейству $T_{\varepsilon,\mathrm{est}}(B_\varepsilon)$ в (2.5) и к семейству $T_{\varepsilon,\mathrm{est}}(b_\varepsilon)$ в (2.7), получим (2.13), при этом из (2.3) следует утверждение теоремы об оценках (2.2).

Аналогично в задаче обнаружения асимптотика $u_\varepsilon(T_\varepsilon)$, $T_\varepsilon = T_{\varepsilon,\mathrm{det}}(B_\varepsilon)$, не зависит от семейства $B_\varepsilon \asymp 1$ в (2.12). Достаточно рассмотреть случай $r_\varepsilon \asymp r_\varepsilon^*$, что соответствует $r_\varepsilon T_\varepsilon \asymp 1$. Выбирая семейство $t_\varepsilon \sim (2r_\varepsilon)^{-1} \asymp T_\varepsilon$, получим $r_\varepsilon t_\varepsilon \sim 1/2$. Используя

(2.8) при $t = t_\varepsilon$, получаем нижние границы. Для верхних границ возьмем $C_\varepsilon \to \infty$ такое, что $N^\varepsilon(C_\varepsilon T_\varepsilon) \sim N^\varepsilon(T_\varepsilon)$. Используя (2.10) для семейства $t_\varepsilon = C_\varepsilon T_\varepsilon$ при $H = H_\alpha$ и $H = u_\varepsilon/2$, с учетом (2.11) получим $\inf\limits_{f \in \breve{\mathcal{F}}(r_\varepsilon)} h_\varepsilon(\theta, t_\varepsilon) \geqslant u_\varepsilon(T_{\varepsilon,\mathrm{det}})(1 + o(1))$. Из (2.10) получаем верхние границы и асимптотическую минимаксность тестов (2.9). □

2.2.2. Общий случай

В общем случае точная асимптотика минимаксного квадратичного риска в задачах оценивания и минимаксной вероятности ошибок в задачах обнаружения описывается в терминах решений специальных экстремальных задач, см. [17, 2, 7], где описаны соответствующие экстремальные задачи и их решения. Эти результаты можно переформулировать следующим образом.

Для задачи оценивания положим

$$I_{\mathrm{est},1}(T) = \sum_{c_l < T} (1 - c_l/T), \quad I_{\mathrm{est},2}(T) = \sum_{c_l < T} (c_l/T)(1 - c_l/T). \quad (2.14)$$

Из [17] следует (сравни с [8, 9])

Предложение 2.4. *Пусть $T = T_\varepsilon$ определяется из уравнения*

$$T^2 \varepsilon^2 I_{\mathrm{est},2}(T) = 1 \quad (2.15)$$

и $T \to \infty$. Тогда

$$R_\varepsilon^2(\mathcal{F}) \sim \varepsilon^2 I_{\mathrm{est},1}(T) = T^{-2} I_{\mathrm{est},1}(T)/I_{\mathrm{est},2}(T). \quad (2.16)$$

Асимптотически минимаксная оценка имеет вид

$$f_\varepsilon^*(t) = \sum_{l \in \mathcal{M}} \alpha_{\varepsilon,l}^* X(\phi_l)\phi_l, \quad \alpha_{\varepsilon,l}^* = (1 - c_l/T)_+ .$$

Для задачи обнаружения положим

$$I_{\mathrm{det},1}(T) = \sum_{c_l < T} (1 - (c_l/T)^2), \quad (2.17)$$

$$I_{\mathrm{det},2}(T) = \sum_{c_l < T} (c_l/T)^2 (1 - (c_l/T)^2), \quad (2.18)$$

$$I_{\mathrm{det},0}(T) = \sum_{c_l < T} (1 - (c_l/T)^2)^2 = I_{\mathrm{det},1}(T) - I_{\mathrm{det},2}(T). \quad (2.19)$$

Из [2, 6, 7] следует (сравни с [8, 9])

Предложение 2.5. *Пусть $T = T_\varepsilon$ определяется из уравнения*

$$T^2 r_\varepsilon^2 I_{\text{det},2}(T) = I_{\text{det},1}(T) \tag{2.20}$$

и $T \to \infty$. Тогда справедливы соотношения (1.4) при

$$u_\varepsilon^2(\mathcal{F}, r_\varepsilon) = \frac{1}{2}(r_\varepsilon/\varepsilon)^4 I_{\text{det},0}(T)/I^2_{\text{det},1}(T). \tag{2.21}$$

Асимптотически минимаксные тесты по критериям $\beta(\alpha)$ и γ имеют вид $\psi_{\varepsilon,H} = \mathbb{1}_{\{L_\varepsilon > H\}}$ с $H = T_\alpha$ или $H = H_\varepsilon = u_\varepsilon/2$ соответственно и основаны на статистиках

$$L_\varepsilon = w_\varepsilon^{-1} \sum_{c_l < T} w_{\varepsilon,l}((X(\phi_l)/\varepsilon)^2 - 1),$$

$$w_{\varepsilon,l} = (1 - (c_l/T)^2)_+, \quad w_\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\sum_{c_l<T} w^2_{\varepsilon,l}.$$

Замечание 2.1.

Асимптотика (2.21) представляет интерес при $u_\varepsilon \asymp 1$, что соответствует $r_\varepsilon \asymp r_\varepsilon^*$. Поэтому достаточно изучать эту асимптотику только в указанном случае.

Замечание 2.2. Функции $I(T)$ можно выразить через функцию $N(t)$. Для задач оценивания, в силу того, что $N(t) = 0$ при $t \leqslant 1$, получим

$$I_{\text{est},1}(T) = \int_1^T (1 - t/T)dN(t), \quad I_{\text{est},2}(T) = T^{-1}\int_1^T t(1 - t/T)dN(t).$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $N(1) = 0$, будем иметь

$$I_{\text{est},1}(T) = T^{-1}\int_1^T N(t)dt, \quad I_{\text{est},2}(T) = T^{-1}\int_1^T (2t/T - 1)N(t)dt.$$

Аналогично, полагая $M(h) = \#\{l \in \mathcal{M} : c_l^2 < h\} = N(h^{1/2})$, $H = T^2$, получим

$$I_{\text{det},1}(T) = \int_1^H (1 - h/H)dM(h) = H^{-1}\int_1^H M(h)dh,$$

$$I_{\det,2}(T) = H^{-1}\int_1^H h(1-h/H)dM(h) = H^{-1}\int_1^H (2h/H-1)M(h)dh,$$

$$I_{\det,0}(T) = \int_1^H (1-h/H)^2 dM(h) = 2H^{-1}\int_1^H (1-h/H)M(h)dh.$$

3. Асимптотика $N(t)$ при малых d

Пусть c_l определяется первым соотношением (1.8). Изучим асимптотику функции $N(t,\mathbb{Z}^d) \triangleq N_d(t)$, определенной (2.1) полагая, что d фиксировано или $d \to \infty$ не “слишком быстро” (см. (3.4) ниже). Обозначим

$$\mathbb{N}_k^d = \{l \in \mathbb{N}^d,\ \min_{1\leqslant j\leqslant d} l_j \geqslant k\}, \quad \mathbb{N}_d^+(t,k) = \{l \in \mathbb{N}_k^d : c_l < t\},$$

$$N_d^+(t,k) = \#\mathbb{N}_d^+(t,k), \quad N_d^+(t) = N_d^+(t,1).$$

Заметим, что для любого $k \in \mathbb{N},\ t > 1$,

$$N_d(t) = 1 + \sum_{i=1}^d 2^i C_d^i N_i^+(t);\ N_d^+(t,k)$$

$$\leqslant 1 + \sum_{i=1}^d C_d^i N_i^+(t,k+1), \quad N_d^d = 2^d N_d^+(t). \quad (3.1)$$

Предположим, что существует определенная при $u > 0$ неубывающая функция $\lambda(u) \geqslant 1$, такая что $\lambda(k) = \lambda_k$ при $k \in \mathbb{N}$. Для $l \in \mathbb{Z}^d$, пусть $\Delta_l^+ = \prod_{j=1}^d (l_j, l_j+1]$, $\Delta_l^- = \prod_{j=1}^d (l_j-1, l_j]$ – кубы со стороной 1. Положим

$$G_d(t,k) = \{x \in (k,\infty)^d : \prod_{j=1}^d \lambda(x_j) < t\}, \quad (3.2)$$

$$H_d^+(t,k) = \cup_{l\in\mathbb{N}_d^+(t,k)} \Delta_l^+, \quad H_d^-(t,k) = \cup_{l\in\mathbb{N}_d^+(t,k)} \Delta_l^-.$$

Заметим, что $N_d^+(t,k) = \mathrm{Vol}_d(H_d^+(t,k)) = \mathrm{Vol}_d(H_d^-(t,k))$, где $\mathrm{Vol}_d(H)$ – объем множества H в $\mathbb{R}^d$, и справедливы вложения

$$G_d(t,k) \subset H_d^+(t,k), \quad H_d^-(t,k) \subset G_d(t,k-1).$$

Это влечет неравенства для $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Vol}_d(G_d(t,k)) \leqslant N_d^+(t,k) \leqslant \mathrm{Vol}_d(G_d(t,k-1)). \tag{3.3}$$

Вернемся к примерам. В примере 1.1 асимптотика $N_d(t)$ при $t \to \infty$ для фиксированного d известна, см., например, [15, 13]. См. также работу [11], где можно найти существенно более общие результаты, на базе которых можно получить точную асимптотику в задачах оценивания и обнаружения при $\lambda_k \sim Ak^\sigma \log^b(k)$, $A > 0$, $\sigma > 0$ при фиксированном d.

В этом разделе мы будем предполагать

$$t \to \infty, \quad d^2 = o(\log(t)). \tag{3.4}$$

Предложение 3.1. *В примере* 1.1 *равномерно по* d, *удовлетворяющим* (3.4), *для любого* $k \in \mathbb{N}$

$$N_d^+(t,k) \sim \frac{t^{1/\sigma}\log^{d-1}(t)}{(2\pi)^d\sigma^{d-1}\Gamma(d)}, \quad N_d(t) \sim N_d^d(t) \sim \frac{t^{1/\sigma}\log^{d-1}(t)}{\pi^d\sigma^{d-1}\Gamma(d)}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Возьмем $\lambda(u) = (2\pi u)^\sigma$. Положим

$$Q_d(t,k) = \{x \in (k,\infty)^d : \prod_{j=1}^d x_j < t\}, \quad t_1 = t^{1/\sigma}(2\pi)^{-d}. \tag{3.6}$$

Будем иметь

$$\mathrm{Vol}_d(G_d(t,k)) = \mathrm{Vol}_d(Q_d(t_1,k)) \triangleq V_d(t_1,k).$$

Используя замену переменных $y_j = h^{-1}\log(x_j/k)$, $h = \log t_1 - d\log k$ получим

$$V_d(t_1,k) = (kh)^d \int\limits_{y_j \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^d y_j \leqslant 1} \exp\Big(h\sum_{j=1}^d y_j\Big)dy_1\dots dy_d$$

$$= \frac{(kh)^d}{\Gamma(d)}\int_0^1 \exp(hu)u^{d-1}\,du,$$

последнее равенство следует из формулы Лиувилля (см. [3]). Для $\delta \in (0,1)$,

$$\frac{e^h - 1}{h} = \int_0^1 e^{hu} du \geqslant \int_0^1 e^{hu} u^{d-1} du \geqslant \int_{1-\delta}^1 e^{hu} u^{d-1} du \geqslant \frac{e^h(1-e^{-h\delta})(1-\delta)^{d-1}}{h}.$$

При выполнении (3.4) можно так выбрать $\delta = \delta(h) > 0$, что $h\delta \to \infty$, $d\delta = o(1)$. Отсюда

$$\int_0^1 e^{hu} u^{d-1} du \sim \frac{e^h}{h},$$

$$V_d(t_1, k) \sim \frac{e^h k^d h^{d-1}}{\Gamma(d)} = \frac{t_1 \log^{d-1}(t_1)}{\Gamma(d)} \left(1 - \frac{d\log(k)}{\log(t_1)}\right)^{d-1},$$

откуда равномерно по d, удовлетворяющим (3.4), для любого $k > 0$ имеем

$$V_d(t_1, k) \sim \frac{t_1 \log^{d-1}(t_1)}{\Gamma(d)} \sim \frac{t^{1/\sigma} \log^{d-1}(t)}{(2\pi)^d \sigma^{d-1} \Gamma(d)}.$$

В силу (3.3) это влечет первое соотношение (3.5) для целого $k > 1$. Пусть $k = 1$. Тогда, используя второе соотношение (3.1) и первое соотношение (3.5) для $k = 2$, будем иметь при (3.4)

$$N_d^+(t,2) \leqslant N_d^+(t,1) \leqslant 1 + \sum_{i=1}^d C_d^i N_i^+(t,2) \sim N_d^+(t,2) \sum_{i=1}^d \frac{C_d^i \Gamma(d)(2\pi\sigma)^{d-i}}{\Gamma(i)\log^{d-i}(t)}$$

$$\leqslant N_d^+(t,2) \sum_{i=0}^d C_d^i \frac{(2\pi d\sigma)^{d-i}}{\log^{d-i}(t)} = N_d^+(t,2)(1 + 2\pi d\sigma/\log(t))^d \sim N_d^+(t,2).$$

Второе соотношение (3.5) следует из первого соотношения (3.5) при $k = 1$ и третьего соотношения (3.1):

$$2^d N_d^+(t,1) \leqslant N_d(t)$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^d 2^i C_d^i N_i^+(t,1) \sim 2^d N_d^+(t,1) \sum_{i=1}^d \frac{C_d^i \Gamma(d)(\pi\sigma)^{d-i}}{\Gamma(i)\log^{d-i}(t)}$$

$$\leqslant 2^d N_d^+(t,1)(1 + \pi d\sigma/\log(t))^d \sim 2^d N_d^+(t,1).$$

□

Предложение 3.2. *Пусть для примера* 1.3 *выполнено* (3.4). *Тогда для* $k \in \mathbb{N}$

$$N_d^+(t,k) \sim \frac{\log^d(t)}{(\pi\kappa)^d\Gamma(d+1)}, \quad N_d(t) \sim N_d^d(t) \sim \frac{2^d\log^d(t)}{(\pi\kappa)^d\Gamma(d+1)}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Пусть $\lambda(u) = \exp(\pi\kappa u)$, $\kappa > 0$, положим $t_1 = (\pi\kappa)^{-1}\log(t)$. Для множеств $G_d(t,k)$, задаваемых (3.2), имеем

$$\mathrm{Vol}_d(G_d(t,k)) = \mathrm{Vol}_d(\{x \in (k,\infty)^d : \sum_{j=1}^d x_j < t_1\}) \stackrel{\Delta}{=} V_d(t_1,k),$$

Замена переменных $y_j = h^{-1}(x_j - k)$, $h = t_1 - dk$ приведет к

$$V_d(t_1,k) = h^d \int\limits_{y_j \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^d y_j \leqslant 1} dy_1 \dots dy_d = \frac{h^d}{\Gamma(d+1)}$$

$$= \frac{\log^d(t)}{(\pi\kappa)^d\Gamma(d+1)}(1 - dk\pi\kappa/\log(t))^d \sim \frac{\log^d(t)}{(\pi\kappa)^d\Gamma(d+1)}.$$

Отсюда, аналогично доказательству предложения 3.1, получим (3.7). □

Предложение 3.3. *Пусть для примера* 1.2 *выполнено* (3.4). *Тогда для* $k \in \mathbb{N}$

$$N_d^+(t,k) \sim \frac{\log^d(t)}{(\pi\kappa)^d\Gamma(d+1)}, \quad N_d(t) \sim N_d^d(t) \sim \frac{2^d\log^d(t)}{(\pi\kappa)^d\Gamma(d+1)}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Положим $\lambda^2(u) = \cosh(2\pi\kappa u)$. Пусть $\widetilde{N}_d^+(t,k)$, $\widetilde{N}_d(t)$ – соответствующие множества примера 1.3. Так как $e^x < 2\cosh(x) = e^x(1+e^{-2x})$, будем иметь

$$\widetilde{N}_d^+((2b_k)^{d/2}t,k) \leqslant N_d^+(t,k) \leqslant \widetilde{N}_d^+(2^{d/2}t,k), \quad b_k = (1+e^{-2\pi\kappa k})^{-1}.$$

Из предложения 3.2 и условия (3.4) следует, что для любого $c > 0$ при $\widetilde{t} = c^d t$,

$$\widetilde{N}_d^+(\widetilde{t},k) \sim \widetilde{N}_d^+(t,k)(1 + d\log(c)/\log(t))^d \sim \widetilde{N}_d^+(t,k).$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получим (3.8). □

Отметим, что $N^\varepsilon(t_\varepsilon)$ медленно меняется в условиях предложений 3.2, 3.3.

4. Точная асимптотика для $\mathcal{F}_d$ при "малых" d

Используя результаты разделов 2.2, 3 получим точную асимптотику минимаксного квадратичного риска и минимаксных вероятностей ошибок при фиксированном d или $d = d_\varepsilon \to \infty$, не "слишком быстро", а именно

$$d^2 \log(d) = o(\log(\varepsilon^{-1})). \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнено* (4.1). *Тогда, в условиях примера* 1.1,

$$R_\varepsilon(\mathcal{F}_d) \sim R_\varepsilon(\mathcal{F}_d^d) \sim c_1(d,\sigma)\varepsilon^{2\sigma/(2\sigma+1)}(\log(\varepsilon^{-1}))^{(d-1)\sigma/(2\sigma+1)}, \tag{4.2}$$

$$u_\varepsilon^2(\mathcal{F}_d, r_\varepsilon) \sim u_\varepsilon^2(\mathcal{F}_d^d, r_\varepsilon) \sim c_2(d,\sigma)\varepsilon^{-4} r_\varepsilon^{4+1/\sigma} \log^{-(d-1)}(r_\varepsilon^{-1}), \tag{4.3}$$

и условие (1.4) *выполнено. Здесь, при* $d \to \infty$,

$$c_1(d,\sigma) = \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{a(d,\sigma)} \sim \sqrt{2\sigma+1}\Big(\Big(\frac{d(2\sigma+1)\pi}{2e}\Big)^d 2\sqrt{2\pi/d}\,(1+\sigma^{-1})\Big)^{-\sigma/(1+2\sigma)}$$

$$c_2(d,\sigma) = 2b(\sigma)(4\sigma+1)^{-b(\sigma)}\Gamma(d)(\pi\sigma)^d \sim \frac{\sqrt{2\pi}(2\sigma+1)}{\sigma(4\sigma+1)^{1+1/(2\sigma)}}\Big(\frac{\pi\sigma}{e}\Big)^d d^{\,d-1/2},$$

величины $a(d,\sigma)$, $b(\sigma)$ *определены соотношениями* (4.5) *ниже. Критические радиусы для задач обнаружения имеют вид*

$$r_\varepsilon^*(\mathcal{F}_d) \asymp c(d,\sigma)\varepsilon^{4\sigma/(4\sigma+1)}(\log\varepsilon^{-1})^{(d-1)\sigma/(4\sigma+1)}, \tag{4.4}$$

где, при $d \to \infty$,

$$c(d,\sigma) = \left(\Big(\frac{(4\sigma+1)\pi}{4}\Big)^d \Gamma(d)\right)^{-\sigma/(4\sigma+1)} \asymp \left(\Big(\frac{(4\sigma+1)\pi}{4e}\Big)^d d^{\,d-1/2}\right)^{-\sigma/(1+4\sigma)}.$$

Замечание 4.1. Соотношение (4.3) справедливо при несколько более слабом условии, чем (4.1): достаточно $d^2 = o(\log(\varepsilon^{-1}))$.

Доказательство. Для задачи оценивания будем искать T – удовлетворяющее двум условиям: T является решением уравнения (2.15) и $\log(T) \asymp \log(\varepsilon^{-1})$. Если такое решение существует, то из (4.1) для него следует $d^2 = o(\log(T))$. Используя замечание 2.2 и соотношение

$$\int_1^T t^a \log^b(t)dt \sim \frac{T^{a+1}\log^b(T)}{a+1} \quad \text{при} \quad T \to \infty, \quad b = o(\log(T)),$$

в силу монотонности $N_d(t)$ по t получим при $\log(T) \asymp \log(\varepsilon^{-1})$

$$I_{\text{est},1}(T) \sim \frac{1}{\pi^d \sigma^{d-1}\Gamma(d)T}\int_1^T t^{1/\sigma}\log^{d-1}(t)dt \sim \frac{T^{1/\sigma}\log^{d-1}(T)}{\pi^d\sigma^{d-2}(\sigma+1)\Gamma(d)};$$

$$I_{\text{est},2}(T) \sim \frac{1}{\pi^d \sigma^{d-1}\Gamma(d)T}\int_1^T (2t/T-1)t^{1/\sigma}\log^{d-1}(t)dt$$
$$\sim \frac{T^{1/\sigma}\log^{d-1}(T)}{\pi^d\sigma^{d-2}(\sigma+1)(2\sigma+1)\Gamma(d)}.$$

Отсюда и из уравнения (2.15) при выполнении (4.1) будем иметь

$$T \sim a(d,\sigma)\varepsilon^{-2\sigma/(2\sigma+1)}(\log(\varepsilon^{-1}))^{-(d-1)\sigma/(2\sigma+1)},$$

где

$$a(d,\sigma) = \left(\left(\frac{(2\sigma+1)\pi}{2}\right)^d \Gamma(d)\frac{2(\sigma+1)}{\sigma}\right)^{1/(2b(\sigma))}, \; b(\sigma) = \frac{2\sigma+1}{2\sigma}. \tag{4.5}$$

Для найденного T – решения (2.15) имеем $\log(T) \asymp \log(\varepsilon^{-1})$. Так как T – решение уравнения (2.15), то выполнено (2.16). Из (2.16) получим (4.2).

Для задачи обнаружения из (3.5) при $d^2 = o(\log(t))$ имеем

$$M(t) = N(t^{1/2}) \sim \frac{t^{1/2\sigma}\log^{d-1}(t)}{\pi^d(2\sigma)^{d-1}\Gamma(d)}.$$

Отсюда и из замечания 2.2 получим в силу монотонности $M(t)$

по t

$$I_{\det .1}(T)\sim \frac{1}{\pi^d(2\sigma)^{d-1}\Gamma(d)T^2}\int_1^{T^2} t^{1/(2\sigma)}\log^{d-1}(t)dt\sim \frac{2T^{1/\sigma}\log^{d-1}(T)}{\pi^d\sigma^{d-2}(2\sigma+1)\Gamma(d)},$$

$$I_{\det .2}(T)\sim \frac{1}{\pi^d(2\sigma)^{d-1}\Gamma(d)T^2}\int_1^{T^2}(2t/T^2-1)t^{1/(2\sigma)}\log^{d-1}(t)dt$$

$$\sim \frac{2T^{1/\sigma}\log^{d-1}(T)}{\pi^d\sigma^{d-2}(2\sigma+1)(4\sigma+1)\Gamma(d)},$$

$$I_{\det .0}(T)=I_{\det .1}(T)-I_{\det .2}(T)\sim \frac{8T^{1/\sigma}\log^{d-1}(T)}{\pi^d\sigma^{d-3}(2\sigma+1)(4\sigma+1)\Gamma(d)}.$$

Используя (2.20), имеем $T\sim c(\sigma)r_\varepsilon^{-1}$, где $c(\sigma)=\sqrt{4\sigma+1}$, и условие $d^2=o(\log(T))$ равносильно условию $d^2=o(\log(r_\varepsilon^{-1}))$. Это условие совместно с (2.21) влечет (4.3), а совместно с (4.1) влечет (4.4). С учетом замечания 2.1, достаточно рассматривать $r_\varepsilon\asymp r_\varepsilon^*$. Так как $\log(r_\varepsilon^*)\asymp\log(\varepsilon)$ в силу (4.4), то предположение (4.1) влечет условие $d^2=o(\log(T))$. □

Теорема 4.2. *Пусть выполнено* (4.1). *Тогда для примеров* 1.2, 1.3,

$$R_\varepsilon^2(\mathcal{F}_d)\sim R_\varepsilon(\mathcal{F}_d^d)\sim\frac{\varepsilon^2 2^d\log^d(\varepsilon^{-1})}{(\pi\kappa)^d\Gamma(d+1)},$$

$$u_\varepsilon^2(\mathcal{F}_d,r_\varepsilon)\sim u_\varepsilon^2(\mathcal{F}_d^d,r_\varepsilon)\sim\frac{r_\varepsilon^4(\pi\kappa)^d\Gamma(d+1)}{2^{d+1}\varepsilon^4\log^d(\varepsilon^{-1})},$$

и справедливо (1.4).

Доказательство. Из (3.7), (3.8) следует, что $N_{d_\varepsilon}(t_\varepsilon)$ является медленно растущей функцией в условиях теоремы, и мы можем использовать предложение 2.3. При выполнении (4.1) из уравнений баланса (2.4), (2.12) и соотношений (3.7), (3.8) следует, что

$$\log^d(T_\varepsilon)\sim\log^d(\varepsilon^{-1}),\quad N^\varepsilon(T_\varepsilon)\sim\frac{2^d\log^d(\varepsilon^{-1})}{(\pi\kappa)^d\Gamma(d+1)}.$$

Отсюда следуют утверждения теоремы. □

5. Асимптотика для m-аддитивных функций

Обозначим (см. с. 5 и (2.1))

$$N_m(t) = N(t, \mathbb{Z}^m), \quad N_m^d(t) = N(t, \mathbb{Z}_m^d), \quad N_{d,m}(t) = N(t, \mathbb{Z}_{d,m}).$$

Из соображений симметрии $N_m^d(t) = C_d^m N_m^m(t)$ и $N_{d,m}(t) = 1 + \sum_{k=1}^m N_k^d(t)$ при $t > 1$. Используя эти соотношения и (2.15), (2.16), (2.20), (2.21), замечание 2.2 и аддитивность функций I по $N(t)$, получим

Предложение 5.1. *Положим $M = C_d^m$.*

(i) *Для задачи оценивания, пусть $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon M^{1/2} \to 0$. Тогда $R_\varepsilon(\mathcal{F}_d^m) \sim R_{\widetilde{\varepsilon}}(\mathcal{F}_m^m)$.*

(ii) *Для задачи обнаружения, пусть $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon M^{1/4} \to 0$, $r_\varepsilon \to 0$. Тогда выполнены соотношения (1.4) с $u_\varepsilon(\mathcal{F}_d^m, r_\varepsilon) \sim u_{\widetilde{\varepsilon}}(\mathcal{F}_m^m, r_\varepsilon)$.*

Для множеств $\mathcal{F}_{d,m}$ при $\widetilde{\varepsilon}$, определенном в предложении 5.1, справедлива

Теорема 5.1. *Пусть $m^2 = o(\log(t))$, $t \to \infty$. Тогда в примерах 1.1–1.3 имеем $N_{d,m}(t) \sim C_d^m N_m^m(t)$. Отсюда следует, что в примерах 1.1–1.3 при $m^2 \log(m) = o(\log(\widetilde{\varepsilon}^{-1}))$ справедливо соотношение $R_\varepsilon(\mathcal{F}_{d,m}) \sim R_{\widetilde{\varepsilon}}(\mathcal{F}_m^m)$, и выполнены соотношения (1.4) с $u_\varepsilon(\mathcal{F}_{d,m}, r_\varepsilon) \sim u_{\widetilde{\varepsilon}}(\mathcal{F}_m^m, r_\varepsilon)$. При этом асимптотика величин $R_{\widetilde{\varepsilon}}(\mathcal{F}_m^m)$ и $u_{\widetilde{\varepsilon}}(\mathcal{F}_m^m, r_\varepsilon)$ определяется теоремами 4.1, 4.2.*

Доказательство. Заметим, что $C_d^m N_m^m(t) \leqslant N_{d,m}(t) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^m C_d^k N_k^d(t)$. В силу предложений 3.1–3.3, $N_{i+1}^{i+1}(t)/N_i^i(t) \asymp \log(t)/i$ для $i^2 = o(\log(t))$, так что

$$N_{d,m}(t) \leqslant 1 + C_d^m N_m^m(t) \left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m!(d-m)! N_{m-k}(t)}{(m-k)!(d-m+k)! N_m(t)}\right)$$
$$\leqslant 1 + C_d^m N_m^m(t) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{Bm^2}{(d-m+1)\log(t)}\right)^k\right) \sim C_d^m N_m^m(t).$$

Отсюда следуют утверждения теоремы. □

6. Асимптотика для множеств $\mathcal{F}_d$ при больших d

Асимптотика при $d = d_\varepsilon \to \infty$ изучается на основе вероятностной техники (ср. с [8, 9], а также с [13], где сходная техника использовалась для другой задачи). При общих предположениях мы получаем логарифмическую асимптотику (теоремы 6.1, 6.3, следствие 6.1) в задачах оценивания и обнаружения. Точная асимптотика получена при более жестких условиях.

6.1. Логарифмическая асимптотика при $d = o(\log(\varepsilon^{-1}))$

Положим

$$G(h) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-h}, \quad \mathcal{H} = \{h : G(h) < \infty\}.$$

Пусть $\mathcal{H} \neq \emptyset$. Это равносильно тому, что $N_1^+(t) = \#(k \in \mathbb{N} : \lambda_k \leqslant t) = O(t^{h_0})$, $t \to \infty$, для некоторого $h_0 > 0$. Пусть $h^* = \inf \mathcal{H}$; ясно, что $h^* \geqslant 0$, $(h^*, \infty) \subset \mathcal{H}$. Положим $Y(k) = \log(\lambda_k)$ и введем семейство вероятностных мер P_h на $\mathbb{Z}$,

$$P_h(k) = \exp(-hY(k) - Z(h)), \quad Z(h) = \log(G(h)), \quad h \in \mathcal{H}. \tag{6.1}$$

Пусть P_h^d есть произведение мер на $\mathbb{Z}^d$, то есть для $l = (l_1, \ldots, l_d)$, $h \in \mathcal{H}$,

$$P_h^d(l) = \exp(-hS(l) - Z_d(h)), \quad S(l) = \sum_{j=1}^{d} Y(l_j), \quad Z_d(h) = dZ(h).$$

Положим $x = \log(t)$. Мы рассматриваем $S = S(l) = \log(c_l)$ как случайную величину на $\mathbb{Z}^d$ относительно меры P_h^d. Имеем при $h \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} N_d(t) &= \#\{l \in \mathbb{Z}^d : c_l \leqslant t\} = \#\{l \in \mathbb{Z}^d : S(l) \leqslant x\} \\ &= e^{Z_d(h)+hx} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d : S(l) \leqslant x} e^{h(S(l)-x)} P_h^d(l) \\ &= e^{Z_d(h)+hx} E_{d,h}\left(e^{h(S-x)} \mathbb{1}_{\{S \leqslant x\}}\right) \leqslant e^{Z_d(h)+hx}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь и ниже $E_{d,h}$, $\mathrm{Var}_{d,h}$ – ожидание и дисперсия по мере P_h^d, а E_h, Var_h – ожидание и дисперсия по мере P_h. Отсюда имеем

$$\log N_d(t) \leqslant Z_d(h) + hx = (h + o(1))\log(t), \quad \text{если} \quad d = o(\log(t)), \quad \forall\ h \in \mathcal{H}. \tag{6.3}$$

Так как $h \in \mathcal{H}$ можно выбрать произвольно близко к h^*, получим

Предложение 6.1. *Пусть* $\mathcal{H} \neq \emptyset$. *Тогда* $\log N_d(t) \leqslant \log(t)(h^* + o(1))$, *если* $d = o(\log(t))$.

Легко видеть, что $\limsup\limits_{t\to\infty} t^{-h} N_1^+(t) > 0$, $\forall\ h < h^*$. При $h^* > 0$ введем более сильное предположение:

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-h} N_1^+(t) > 0, \quad \forall\ h \in (0, h^*). \tag{6.4}$$

В силу (3.1) условие (6.4) влечет $\log N_d(t) \geqslant \log(N_1^+(t)) \geqslant \log(t)(h^* + o(1))$ при $t \to \infty$, $h^* > 0$, и мы имеем

$$\log N_d(t) = \log(t)(h^* + o(1)) \quad \text{при} \quad d = o(\log(t)), \quad \forall\ h^* \geqslant 0. \tag{6.5}$$

Пусть $t = T_\varepsilon$ выбирается из уравнений баланса (2.4), (2.12). Легко видеть, что $\log(t) \asymp \log(\varepsilon^{-1}) \gg d$. Объединяя (6.5) с предложениями 2.1, 2.2, получим

Теорема 6.1. *Пусть* $\mathcal{H} \neq \emptyset$ *и* $d = o(\log(\varepsilon^{-1}))$. *Пусть* $h^* = 0$, *или* $h^* > 0$ *и выполнено* (6.4). *Тогда*

$$\log(R_\varepsilon(\mathcal{F}_d)) \sim \frac{2\log(\varepsilon)}{2 + h^*}, \quad \log(r_\varepsilon^*(\mathcal{F}_d)) \sim \frac{4\log(\varepsilon)}{4 + h^*}. \tag{6.6}$$

Пример 6.1 (обобщение примера 1.1) Пусть $\log(\lambda_k) \sim \sigma \log(k)$ при $k \to \infty$, $\sigma > 0$. В частности, это выполнено для $\lambda_k \asymp k^\sigma (\log(k+1))^b$, $b \in \mathbb{R}$, ср. с [11]. Тогда $h^* = 1/\sigma > 0$, выполнено условие (6.4) и

$$\log(R_\varepsilon(\mathcal{F}_d)) \sim \frac{2\sigma\log(\varepsilon)}{2\sigma + 1}, \quad \log(r_\varepsilon^*(\mathcal{F}_d)) \sim \frac{4\sigma\log(\varepsilon)}{4\sigma + 1} \quad \text{при} \quad d = o(\log(\varepsilon^{-1})).$$

Пример 6.2. (обобщение примеров 1.2–1.3) Пусть $\log(\lambda_k) \asymp k^s$ при $k \to \infty$, $s > 0$. Тогда $h^* = 0$ и $\log(R_\varepsilon(\mathcal{F}_d)) \sim \log(r_\varepsilon^*(\mathcal{F}_d)) \sim \log(\varepsilon)$ при $d = o(\log(\varepsilon^{-1}))$.

6.2. Логарифмическая асимптотика при $d \asymp \log(\varepsilon^{-1})$

Пусть $\tau_h = (S - x)/s_h$, где $s_h = s_{d,h} > 0$ и $h = h_d(x)$ будут выбраны позже. Преобразуем (6.2) к виду

$$N_d(t) = \Lambda(x) J(h s_h), \quad \Lambda(x) \triangleq e^{Z_d(h) + hx},$$
$$J(b) \triangleq E_{d,h}\left(e^{b\tau_h} \mathbb{1}_{\{\tau_h < 0\}}\right). \tag{6.7}$$

Заметим, что $Z(h)$ является выпуклой (так как $Z^{''}(h) = \mathrm{Var}_h(Y)$) бесконечно дифференцируемой функцией при $h \in (h^*, \infty)$, убывающей по $h > h^*$. Легко видеть, что $G(h) \to 1$ при $h \to \infty$, $G'(h) < 0$ при $h \in (h^*, \infty)$ и $\lim\limits_{h\to\infty} G'(h) = 0$. Отсюда $\lim\limits_{h\to\infty} Z'(h) = 0$. Предположим

$$\lim_{h\to h^*} Z'(h) = -\infty. \tag{6.8}$$

При этом условии для любого $x > 0$ мы можем выбрать $h = h_d(x)$ так, чтобы

$$Z_d'(h) = dZ'(h) = -x, \quad \text{что соответствует} \quad E_{d,h}S = x. \tag{6.9}$$

Выберем $s_h = s_{d,h}$ так, чтобы

$$s_h^2 = Z_d^{''}(h) = dZ^{''}(h), \quad \text{что соответствует} \quad \mathrm{Var}_{d,h}S = s_h^2. \tag{6.10}$$

Напомним, что $S = \sum_{j=1}^d Y_j$, где $Y_1, \ldots, Y_d$ – независимые копии Y. Положим

$$\mu_Y^k = E_h|Y - E_h(Y)|^k, \quad L_h^{(k)} \triangleq d\,\mu_Y^k/(d\,\mu_Y^2)^{k/2}, \quad k = 2, 3, 4. \tag{6.11}$$

Используя хорошо известные связи между центральными моментами и семиинвариантами 4-го порядка и соотношение $d\,\mu_Y^2 = s_h^2$ имеем $d\,\mu_Y^4 = Z_d^{(4)}(h) + 3s_h^4/d$. Полагая $H_{d,h} \triangleq Z_d^{(4)}(h)/s_h^4$, получим $L_h^{(4)} = H_{d,h} + 3/d$. Тогда из неравенства Берри-Эссеена и неравенства $L_h^{(3)} \leqslant \sqrt{L_h^{(4)}}$ имеем

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} |F_h(u) - \Phi(u)| \leqslant A\sqrt{H_{d,h} + 3d^{-1}}, \tag{6.12}$$

где $F_h(u) = P_h^d(\tau_h < u)$, A – абсолютная постоянная.

Предложение 6.2. *Пусть $R = R_h \triangleq \sqrt{H_{d,h} + 3d^{-1}}$, $z = z_h \triangleq s_h R$ и предположим $R = 0(1)$. Тогда для $J(b)$ из (6.7) при $b = hs_h$, имеем*

$$|\log(J(hs_h))| = O(zh + \log(R^{-1})). \tag{6.13}$$

Замечание 6.1. Заметим, что

$$z^2 = \frac{Z^{(4)}(h)}{Z''(h)} + 3Z^{''}(h), \quad 2\log(R^{-1}) = \log(d) - \log\left(3 + \frac{Z^{(4)}(h)}{(Z''(h))^2}\right),$$

и $z \asymp 1$, $2\log(R^{-1}) = \log(d) + O(1)$ при $h \to h_1 \in (h^*, \infty)$.

Доказательство предложения 6.2. Для любого $B>0$ имеем

$$1 \geqslant J(hs_h) \geqslant e^{-BRhs_h} P_h^d(\tau_h \in (-BR, 0)).$$

Используя (6.12), получим, при $R \to 0$,

$$P_h^d(\tau_h \in (-BR, 0)) \geqslant 1/2 - \Phi(-BR) - 2AR \sim \frac{BR}{\sqrt{2\pi}} - 2AR.$$

Выбирая $B > (2A+1)\sqrt{2\pi}$, $B = O(1)$, имеем $P_h^d(\tau_h \in (-BR, 0)) \geqslant R$.
□

Теорема 6.2. *Пусть выполнено* (6.8), $d \asymp \log(\varepsilon^{-1})$, *и* $h = h_e$, $h = h_d$ *определяются, соответственно, уравнениями*

$$-Z'(h)(2+h) + Z(h) \sim \frac{2\log(\varepsilon^{-1})}{d},$$
$$-Z'(h)(4+h) + Z(h) \sim \frac{4\log(\varepsilon^{-1})}{d}. \qquad (6.14)$$

Пусть $x = -d\,Z'(h)$. *Тогда* $\log(R_\varepsilon(\mathcal{F}_d)) \sim -x, \quad \log(r_\varepsilon^*(\mathcal{F}_d)) \sim -x.$

Доказательство. Займемся задачей оценивания. Пусть $T = T_{\rm est} \to \infty$ определено уравнением баланса (2.4) с $B = 1$. Из предложения 2.1 имеем $\log(R_\varepsilon(\mathcal{F}_d)) \sim \log(T_{\rm est}^{-1})$. Из свойств функции $Z_d'(h) = dZ'(h)$ следует, что существует $h_{\rm est} : \log(T_{\rm est}) = -dZ'(h_{\rm est})$. Выберем $\delta > 0$ и $h^{\pm}$ так, что

$$-d\,Z'(h^+)(2+h^+) + d\,Z(h^+) \sim (2+\delta)\log(\varepsilon^{-1}),$$
$$-d\,Z'(h^-)(2+h^-) + d\,Z(h^-) \sim (2-\delta)\log(\varepsilon^{-1}).$$

Легко видеть, что величины $h^{\pm}$ ограничены и отделены от h^*. Из замечания 6.1, имеем $\log(J(h^{\pm}s_{h^{\pm}})) = o(dZ'(h^{\pm}))$. Пусть $\log(t^{\pm}) = -d\,Z'(h^{\pm})$. Тогда из уравнения баланса и вида $\log(N_d(t))$ следует, что $t^+ > T_{\rm est} > t^-$. Из монотонности $Z'(h)$ при достаточно малых ε имеем $h^+ < h_{\rm est} < h^-$. Так как $\delta > 0$ произвольно мало, можно выбрать такое $\delta = \delta_\varepsilon \to 0$, что $h^{\pm} \sim h_{\rm est}$, и все они удовлетворяют первому уравнению (6.14). Заметим, что любое $\widetilde{h}$ - решение первого уравнения (6.14) удовлетворяет условиям $\widetilde{h} \sim h_e$ и $Z'(\widetilde{h}) \sim Z'(h_e)$. Таким образом, $\log(R_\varepsilon(\mathcal{F}_d)) \sim d\,Z'(h_{\rm est}) \sim d\,Z'(h_e)$.

Задача проверки гипотез изучается аналогичным образом на основании уравнения (2.12) и предложения 2.2. □

Следствие 6.1. *Предположим, что выполнено* (6.8) *и* $d \asymp \log(\varepsilon^{-1})$. *Тогда*

$$\log(R_\varepsilon(\mathcal{F}_d)) \asymp \log(r^*_\varepsilon(\mathcal{F}_d)) \asymp \log(\varepsilon).$$

6.3. Логарифмическая асимптотика при $d \gg \log(\varepsilon^{-1})$

Пусть $h \to \infty$. Из условия $\lim\limits_{h\to\infty} Z'(h) = 0$, монотонности $Z'(h)$ и соотношения (6.9) следует, что это соответствует тому, что $x \triangleq \log(t) = o(d)$. Будем считать, что

$$\lambda_k > \lambda_1 > 1, \quad k \geqslant 2. \tag{6.15}$$

Легко видеть, что при $C = \log \lambda_1$ справедливы следующие соотношения

$$G(h) = 1 + (2 + o(1))\lambda_1^{-h}, \quad Z(h) \sim 2\lambda_1^{-h} \triangleq p \to 0,$$
$$Z'(h) \sim -Cp, \quad x \sim Cdp, \quad Z''(h) \sim C^2p, \quad Z^{(4)}(h) \sim C^4p.$$

Пусть $x \to \infty$, тогда $dp \to \infty$ и соотношение $R = o(1)$ выполнено, так как

$$H_{d,h} = Z_d^{(4)}(h)/s_h^4 \sim dC^4p/(dC^2p)^2 = (dp)^{-1} \to 0.$$

Кроме того, $s_h \sim C(dp)^{1/2} = o(x)$, а из $Z_d(h) \sim pd = o(hx)$ имеем

$$\log(\Lambda(x)) = Z_d(h) + hx \sim hx. \tag{6.16}$$

Заметим, что

$$xh \sim dp\log(p^{-1}). \tag{6.17}$$

Из предложения 6.2 и соотношений $R = \sqrt{H_{d,h} + 3/d} \sim (C/s_h)$, $z = s_hR \asymp 1$, получим

$$\log(J(hs_h)) = O(h + \log(s_h)) = o(hx). \tag{6.18}$$

В силу соотношений (6.7), (6.16), (6.18) имеем

$$\log(N_d(t)) \sim hx. \tag{6.19}$$

В задаче оценивания из (2.4) в силу (6.19), (6.17) при $x = \log(T_\varepsilon)$ имеем

$$2\log(\varepsilon^{-1}) \sim 2\log(T_\varepsilon) + \log(N_d(T_\varepsilon)) \sim xh \sim dp\log(p^{-1}), \tag{6.20}$$

соотношения $h \to \infty$, $x \to \infty$ соответствуют тому, что

$$d \gg \log(\varepsilon^{-1}), \quad \log(d) = o(\log(\varepsilon^{-1})). \tag{6.21}$$

Положим

$$U \triangleq d/(2\log(\varepsilon^{-1})) \to \infty, \quad \log(U) = o(\log(\varepsilon^{-1})), \quad X \triangleq p^{-1} \to \infty.$$

Можно преобразовать (6.20) к виду $X/\log(X) \sim U$, откуда $X \sim U\log(U)$ и

$$\log(T_\varepsilon) = x \sim Cdp \sim \frac{Cd}{U\log(U)} \sim \frac{2C\log(\varepsilon^{-1})}{\log(d) - \log\log(\varepsilon^{-1})}.$$

Аналогично, для задачи проверки гипотез, используя (2.12) получим

$$\log(T_\varepsilon) \triangleq x \sim Cdp \sim \frac{4C\log(\varepsilon^{-1})}{\log(d) - \log\log(\varepsilon^{-1})}.$$

Отсюда и из предложений 2.1, 2.2 получим

Теорема 6.3. *Пусть* (6.15), (6.21) *выполнены. Тогда, при* $C = \log(\lambda_1)$, *имеем*

$$\log(R_\varepsilon(\mathcal{F}_d)) \sim \frac{2C\log(\varepsilon)}{\log(d) - \log\log(\varepsilon^{-1})},$$
$$\log(r^*_\varepsilon(\mathcal{F}_d)) \sim \frac{4C\log(\varepsilon)}{\log(d) - \log\log(\varepsilon^{-1})}.$$

Замечание 6.2. Пусть $\liminf \log(d)/\log(\varepsilon^{-1}) > 0$. Из предыдущих оценок следует, что в этом случае $T_\varepsilon = O(1)$ в задачах обнаружения и оценивания. В силу предложений 2.1, 2.2 это влечет $\limsup R_\varepsilon(\mathcal{F}_d) > 0$, $\limsup r^*_\varepsilon(\mathcal{F}_d) > 0$.

6.4. Точная асимптотика

Предложение 6.3. *Пусть* $b = hs_h \to \infty$. *Предположим, что существует такое* $\rho = \rho_h = o(1/b)$, $\rho > 0$, *что для любого* $a = o(1)$ *имеем*

$$P^d_h(\tau_h \in (a, a+\rho)) \sim \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \tag{6.22}$$

(это выполнено для гауссовской τ_h*). Тогда*

$$J(b) \sim (\sqrt{2\pi}\, b)^{-1}. \tag{6.23}$$

Предположение (6.22) является некоторой формой локальной предельной теоремы и для примеров 1.1–1.3 проверяется в разделах 6.6, 6.7.

Доказательство предложения 6.3. Выберем такое семейство $K = K_h \in \mathbb{N}$, $K \to \infty$, что $K\rho = o(1)$, $Kb\rho > 2\log(b)$. Разобьем интервал $(-K\rho, 0]$ на непересекающиеся интервалы $\Delta_k = (-k\rho, -(k-1)\rho]$, $k = 1, \dots, K$. Тогда

$$A_1 \leqslant E_{d,h} \exp(b\tau_h) \mathbb{1}_{\{\tau_h < 0\}} \leqslant A + \exp(-Kb\rho) = A + o(1/b),$$

где $A = \sum_{k=1}^{K} e^{-(k-1)b\rho} P_h^d(\tau_h \in \Delta_k)$, $A_1 = \sum_{k=1}^{K} e^{-kb\rho} P_h^d(\tau_h \in \Delta_k) = Ae^{b\rho} \sim A$. Используя (6.22) получим

$$A \sim \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{K-1} e^{-kb\rho} = \frac{\rho(1 - e^{-Kb\rho})}{\sqrt{2\pi}(1 - e^{-b\rho})} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b}.$$

□

В силу (6.7) при выполнении (6.22), из предложения 6.3 следует

$$N_d(t) \sim \frac{\Lambda(x)}{\sqrt{2\pi}\, hs_h}, \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad hs_h \to \infty. \tag{6.24}$$

Рассмотрим теперь уравнения (2.15), (2.16) для задачи оценивания и уравнения (2.20), (2.21) для задачи обнаружения. Пусть функции $I_{\mathrm{est},k}$, $I_{\mathrm{det},k}$ определены при помощи (2.14) и (2.17)–(2.19). Аналогично (6.7), имеем

$$I_{\mathrm{est},k}(T) = \Lambda(x) J_{\mathrm{est},k}, \quad I_{\mathrm{det},k}(T) = \Lambda(x) J_{\mathrm{det},k}, \tag{6.25}$$

где

$$\begin{gathered} J_{\mathrm{est},k} \triangleq E_{d,h} \left(f_k(e^{s_h \tau_h}) \exp(hs_h \tau_h) \mathbb{1}_{\{\tau_h < 0\}} \right), \quad k = 1, 2, \\ J_{\mathrm{det},k} \triangleq E_{d,h} \left(f_k(e^{2s_h \tau_h}) \exp(hs_h \tau_h) \mathbb{1}_{\{\tau_h < 0\}} \right), \quad k = 0, 1, 2, \\ f_1 = 1 - t, \quad f_2 = t(1-t), \quad f_0(t) = f_1(t) - f_2(t). \end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &J_{\mathrm{est},1} = J(hs_h) - J(s_h(h+1)), \quad J_{\mathrm{est},2} = J(s_h(h+1)) - J(s_h(h+2)); \\ &J_{\mathrm{det},1} = J(hs_h) - J(s_h(h+2)), \quad J_{\mathrm{det},2} = J(s_h(h+2)) - J(s_h(h+4)), \\ &J_{\mathrm{det},0} = J(hs_h) - 2J(s_h(h+2)) + J(s_h(h+4)). \end{aligned}$$

При выполнении (6.22) из предложения 6.3 следует

$$I_{\mathrm{est},k}(T) \sim \frac{b_{\mathrm{est},k}\Lambda(x)}{\sqrt{2\pi}\,s_h},\ k=1,2, \quad I_{\mathrm{det},k}(T) \sim \frac{b_{\mathrm{det},k}\Lambda(x)}{\sqrt{2\pi}\,s_h},\ k=0,1,2,$$

$$b_{\mathrm{est},1} = \frac{1}{h(h+1)}, \quad b_{\mathrm{est},2} = \frac{1}{(h+1)(h+2)}, \quad b_{\mathrm{det},1} = \frac{2}{h(h+2)},$$

$$b_{\mathrm{det},2} = \frac{2}{(h+2)(h+4)}, \quad b_{\mathrm{det},0} = b_{\mathrm{det},1} - b_{\mathrm{det},2} = \frac{8}{h(h+2)(h+4)}.$$

Комбинируя эти соотношения и уравнения (2.15), (2.16) или (2.20), (2.21), учитывая (6.9), (6.10) и полагая $x = \log(T)$, получим

Теорема 6.4. *Пусть $h^* > 0$, выполнено $d = O\left(\log(\varepsilon^{-1})\right)$ и величины $h = h_{\mathrm{est}}$, $h = h_{\mathrm{det}}$ определены, соответственно, первым и вторым уравнениями:*

$$\begin{aligned} -d\,Z'(h)(2+h) + d\,Z(h) - (\log(2\pi d) + \log(Z''(h)))/2 \\ - \log((1+h)(2+h)) = 2\log(\varepsilon^{-1}) + o(1), \\ - 2d\,Z'(h) + \log(h/(4+h)) = 2\log(r_\varepsilon^{-1}) + o(1). \end{aligned}$$

Если выполнено (6.22), то $R_\varepsilon^2(\mathcal{F}_d) \sim (h+2)\exp(2d\,Z'(h))/h$, и (1.4) верно с

$$u_\varepsilon^2(\mathcal{F}_d, r_\varepsilon) \sim \frac{\sqrt{2\pi d\,Z''(h)}\,h(h+2)r_\varepsilon^4}{\exp(-dhZ'(h) + dZ(h))(h+4)\varepsilon^4}.$$

6.5. Случай $h^* = 0$

Укажем условия, при которых $N_d(t) = N_{d_\varepsilon}(t_\varepsilon)$ является *медленно меняющейся*, что позволяет использовать предложение 2.3.

Предложение 6.4. *Предположим (6.22). Пусть $h^* = 0$, $hs_h \to \infty$ и существуют $h_0 > 0$ и убывающая функция $\phi(h) > 0$, $h \in (0, h_0)$, такая что $Z''(h) \sim \phi^2(h)$ при $h \to 0$. Тогда $N_d(t)$ является медленно меняющейся.*

Доказательство. Так как $N_d(t)$ не убывает по t, достаточно показать, что $N_d(Ct) \leqslant N_d(t)(1+o(1))$, для любого $C > 1$. Обозначим

$$x = \log(t), \quad x_1 = \log(Ct) = x + b, \quad b = \log(C) > 0,$$
$$h = h_d(x), \quad h_1 = h_d(x_1).$$

В силу (6.24) достаточно показать, что при $t \to \infty$, $h \to h^* = 0$, выполнено

$$Z_d(h_1)+x_1h_1 \leqslant Z_d(h)+xh+o(1), \quad h_1 \sim h, \quad s_h/s_{h_1} \leqslant 1+o(1). \quad (6.26)$$

Заметим, во-первых, что из выбора $h : dZ'(h) = -x$ следует

$$Z_d(h_1) + x_1h_1 = \min_{y>0}(Z_d(y) + x_1y) \leqslant Z_d(h) + x_1h = Z_d(h) + xh + o(1),$$

так как $h \to h^* = 0$. Во-вторых,

$$b = x_1 - x = Z_d'(h) - Z_d'(h_1) = Z_d''(\widetilde{h})(h - h_1), \quad \widetilde{h} \in (h_1, h),$$

что влечет $h > h_1 > 0$, $h - h_1 = O(1/s^2_{\widetilde{h}}) = O(1/s_h^2)$, так как $s^2_{\widetilde{h}} \sim d\phi^2(\widetilde{h}) \geqslant d\phi^2(h) \sim s_h^2$. Следовательно,

$$\frac{h_1}{h} = 1 - \frac{h - h_1}{h} = 1 - O((hs_h^2)^{-1}) \to 1, \quad \frac{s_h}{s_{h_1}} \sim \frac{\phi(h)}{\phi(h_1)} \leqslant 1.$$

Отсюда видим, что (6.26) выполнено. □

6.6. Изучение примера 1.1

Напомним, что $\lambda_k = (2\pi k)^\sigma$ при $k \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$. Функция $G(h)$ имеет вид

$$G(h) = 1 + 2(2\pi)^{-\sigma h} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\sigma h}, \quad \mathcal{H} = (h^*, \infty), \quad h^* = 1/\sigma > 0.$$

Пусть $h \to h^*$. Тогда $G(h) \to \infty$. Положим $\delta = \sigma h - 1 > 0$, $\delta \to 0$. Легко видеть, что

$$G(h) = (\pi\delta)^{-1} + O(1), \quad Z(h) = \log(G(h)) \sim \log(\delta^{-1}),$$

$$Z'(h) \sim -\frac{\sigma}{\delta}, \quad Z''(h) \sim \frac{\sigma^2}{\delta^2}, \quad Z^{(4)}(h) \asymp \delta^{-4}.$$

Из соотношений (6.9) и предположения (6.8) следует, что случай $h \to h^*$ соответствует $d = o(x) = o(\log(t))$. Из соотношений (6.9), (6.10) получаем

$$\delta \sim \frac{\sigma d}{x}, \quad s_h^2 \sim \frac{d\sigma^2}{\delta^2} \sim \frac{x^2}{d}.$$

Условия предложения 6.2 выполнены: $R \asymp d^{-1/2} \to 0$, $z = s_h R \asymp 1/\delta \asymp x/d$.

Предложение 6.5. *Пусть* $\lambda_k = (2\pi k)^\sigma$. *Тогда для любого* $b > 0$, *соотношение* (6.22) *выполнено при* $h = h^*(1+\delta)$, $\delta = o(1)$, $\log(\delta^{-1}) = o(d)$.

Доказательство предложения 6.5 приведено в разделе 7.2.

Применяя теорему 6.4 и предложение 6.5, получаем точную асимптотику в задаче для $\log\varepsilon^{-1} \gg d$, $\log\log(\varepsilon^{-1}) = o(d)$. Если выполнено (4.1), то теорема 6.4 дает асимптотику теоремы 4.1. Если $d \to \infty$ быстрее, чем указано в (4.1), то асимптотика изменяется – появляются дополнительные сомножители. В частности, при $d^3 = o(\log^2(\varepsilon^{-1}))$ в задаче обнаружения получаем

$$u_\varepsilon^2(\mathcal{F}_d, r_\varepsilon) \sim B_1 r_\varepsilon^{4+1/\sigma}\varepsilon^{-4}(\log(r_\varepsilon^{-1}))^{1-d}\left(\frac{\pi\sigma d}{e}\right)^d \times d^{-1/2}\exp\left(\frac{\sigma d^2(\log(2\pi) - c_1)}{\log(r_\varepsilon^{-1})}\right),$$

где

$$B_1 = \frac{B}{\sigma(1+4\sigma)^{1/(2\sigma)}}, \quad B = \frac{\sqrt{2\pi}(1+2\sigma)}{1+4\sigma}, \quad c_1 = \sum_{k=1}^\infty \int_0^1 \frac{(1-u)du}{(k+u)^2}.$$

Для задачи оценивания при $d^3\log(d) = o(\log^2(\varepsilon^{-1}))$, $\log(d) \asymp \log\log(\varepsilon^{-1})$ (ср. с замечанием 4.1) имеем

$$R_\varepsilon(\mathcal{F}_d) \sim c(\sigma)\Big(\varepsilon^2\log^{(d-1)}(\varepsilon^{-1})\Big(\frac{2e}{d(2\sigma+1)\pi}\Big)^d\sqrt{d}\,\Delta(\varepsilon, d, \sigma)\Big)^{\sigma/(1+2\sigma)},$$

$$\Delta(\varepsilon, d, \sigma) = \Big(\Big(\frac{2d\pi}{e(2\sigma)\log(\varepsilon^{-1})}\Big)^{1/2}\exp((2\sigma+1)(c_1 - \log(2\pi))/2)\Big)^{d^2/\log(\varepsilon^{-1})},$$

где константа c_1 определена выше и

$$c(\sigma) = \sqrt{2\sigma+1}/(2\sqrt{2\pi}\,(1+\sigma^{-1}))^{\sigma/(1+2\sigma)}.$$

Применяя теорему 6.2, получим логарифмическую асимптотику для случая $d = O(\log\varepsilon^{-1})$. Результаты в случае $d \gg \log\varepsilon^{-1}$ следуют из теоремы 6.3.

6.7. Изучение примеров 1.2, 1.3

Пусть $\lambda_k = \exp(\pi\kappa k)$, $\kappa > 0$, что соответствует примеру 1.3. Функция $G(h)$ имеет вид

$$G(h) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-h\pi\kappa k) = 1 + \frac{2}{\exp(h\pi\kappa) - 1},$$
$$\mathcal{H} = (0, \infty), \quad h^* = 0.$$

Пусть $h \to 0$. Тогда $G(h) \sim 2(h\pi\kappa)^{-1} \to \infty$, и

$$Z(h) = \log(G(h)) \sim \log(h^{-1}), \quad Z'(h) \sim -\frac{1}{h},$$
$$Z''(h) \sim \frac{1}{h^2}, \quad Z^{(4)}(h) \asymp h^{-4}.$$

Легко видеть, что те же самые соотношения справедливы для примера 1.2, то есть для $\lambda_k^2 = \cosh(2\pi\kappa k)$. Из соотношений (6.9) следует, что случай $h \to 0$ соответствует $d = o(x) = o(\log(t))$. Из (6.9), (6.10) получим

$$h \sim \frac{d}{x}, \quad s_h^2 \sim \frac{d}{h^2} \sim \frac{x^2}{d}.$$

Условия предложения 6.2 выполнены: $R \asymp d^{-1/2} = o(1)$, $z = s_h R \asymp 1/h \asymp x/d$.

Предложение 6.6. *Пусть* $\lambda_k \sim Ae^{\kappa k}$ *и* $h\log(d) \to 0$. *Тогда* (6.22) *выполнено.*

Доказательство предложения 6.6 приведено в разделе 7.3.

Из предложения 6.4 следует, что $N_d(t)$ *слабо меняется*. Предложение 2.3 дает точную асимптотику в задачах оценивания и обнаружения при $\log\varepsilon^{-1} \gg d\log(d)$ с $N^\varepsilon(T_\varepsilon)$, определенным в (6.7) и $J(hs_h)$ вида (6.23). Если выполнено (4.1), то эта асимптотика совпадает с полученной в теореме 4.2.

Случай $x \asymp d$ соответствует h ограниченному и отделенному от 0. Из теоремы 6.2 получаем логарифмическую асимптотику при $d = O(\log\varepsilon^{-1})$. Результат для $d \gg \log\varepsilon^{-1}$ следует из теоремы 6.3.

7. Приложение: поверка (6.22)

7.1. Схема доказательства

Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0,\zeta^2)$ гауссовская случайная величина, τ_h и ξ независимы, а

$$\zeta = o(\rho/\sqrt{\log(\rho^{-1})}), \quad \rho = o((hs_h)^{-1}), \quad hs_h \to \infty. \tag{7.1}$$

Положим $\tau_{h,1} = \tau_h + \xi$. В силу 7.1 для любого $b > 0$ имеем $P(|\xi| > b\rho) = o(\rho)$, и легко видеть, что достаточно доказать (6.22) для $\tau_{h,1}$ вместо τ_h. Возьмем $c \in (0,1/2)$, пусть $g^-(t)$ – такая функция из $C^1(\mathbb{R})$ со значениями в $[0,1]$, отличная от 0 только при $t \in (-1/2,1/2)$, что $g^-(t) = 1$ при $|t| < c$. Положим $g^+(t) = g^-(2ct)$, $g^\pm_\rho(t) = g^\pm((t-a-\rho/2)/\rho)$. Достаточно показать (см. доказательство леммы 4.2 в [10]), что для любого $c \in (0,1/2)$ выполнено

$$E_{d,h} g^\pm_\rho(\tau_{h,1}) = Eg^\pm_\rho(\tau) + o(\rho), \quad \text{где} \quad \tau \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{7.2}$$

Рассмотрения для $g^-(t)$ и для $g^+(t)$ аналогичны. Далее будем проводить рассуждения для $g = g^-$. Пусть $\phi(u)$ – преобразование Фурье g, $\phi_\rho(u) = \rho e^{i(a+\rho/2)u}\phi(\rho u)$ – преобразование Фурье g_ρ, и $f_h(u)$, $f_{h,1}(u) = f_h(u)e^{-u^2\zeta^2/2}$, $f(u) = e^{-u^2/2}$ – характеристические функции τ_h, $\tau_{h,1}$, τ соответственно. Так как $\phi_\rho \in L_1(\mathbb{R})$, соотношение (7.2) эквивалентно

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \phi_\rho(u)\overline{f}_{h,1}(u)du = \int\limits_{\mathbb{R}} \phi_\rho(u)\overline{f}(u)du + o(\rho).$$

Последнее соотношение следует из

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\phi(\rho u)||(f_h(u)e^{-u^2\zeta^2/2} - f(u))|du = o(1). \tag{7.3}$$

Пусть $L_h^{(k)}$ определяется соотношением (6.11). Положим

$$N \triangleq (4L_h^{(3)})^{-1} \geqslant (16L_h^{(4)})^{-1/2} \triangleq N_1.$$

Тогда (см. [16, лемма 1, глава 5]) справедливо неравенство

$$|f_h(u) - f(u)| \leqslant 4N^{-1}|u|^3 e^{-u^2/3}, \quad |u| \leqslant N. \tag{7.4}$$

Пусть $N_1 \to \infty$, что эквивалентно условию $R = o(1)$ в предложении 6.2. Так как функция $\phi(u)$ ограничена и $\zeta = o(1)$, отсюда следует

$$\int_{-N_1}^{N_1} |\phi(\rho u)||(f_h(u)e^{-u^2\zeta^2/2} - f(u))|du = o(1).$$

Заметим, что $\int\limits_{|u|>N_1} f(u)du = o(1)$, и для любого $M > N_1$,

$$\int\limits_{|u|>N_1} |f_h(u)e^{-u^2\zeta^2/2}|du \leqslant \int\limits_{M>|u|>N_1} |f_h(u)|du + \int\limits_{|u|>M} e^{-u^2\zeta^2/2}du.$$

Более того, при $M \geqslant 2\zeta^{-1}(\log(\zeta^{-1}))^{1/2}$, $\zeta \to 0$ имеем

$$\int_M^\infty \exp(-u^2\zeta^2/2)du = \sqrt{2\pi}\zeta^{-1}\Phi(-M\zeta) \to 0.$$

Из (7.4), (7.1) видим, что для получения (7.3), достаточно показать, что существует такое $M = M_h > N_1$, $M \gg hs_h\log(hs_h)$, что

$$J_{N_1,M}(h) \triangleq \int\limits_{N_1<|u|<M} |f_h(u)|du = o(1). \tag{7.5}$$

Справедливо соотношение $|f_h(u)| = |f_{h,Y}(u/s_h)|^d$, где $f_{h,Y}(v)$ – характеристическая функция случайной величины Y, с распределением P_h

$$f_{h,Y}(v) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_h(k)\exp(ivY(k)).$$

При $v = u/s_h$ выполнено

$$\begin{aligned}
\log|f_h(u)| &= \frac{d}{2}\log|f_{h,Y}(v)|^2 \leqslant -\frac{d}{2}(1 - |f_{h,Y}(v)|^2)\\
&= -d\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} P_h(k)P_h(l)\sin^2(v(Y(l)-Y(k))/2)\\
&\leqslant -\frac{2d}{G^2(h)}\sum_{(k,l)\in\mathcal{N}} \exp(-h(Y(l)+Y(k)))\sin^2(v(Y(l)-Y(k))/2)\\
&\triangleq -\frac{2dR_h(v)}{G^2(h)},
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{N} =\{(k,l)\in\mathbb{N}^2,\ k<l\},$$
$$R_h(v)=\sum_{(k,l)\in\mathcal{N}} e^{-h(Y(l)+Y(k))}\sin^2(v(Y(l)-Y(k))/2).$$

Получим нижние границы $R_h(v)$ в условиях примеров 1.1–1.3.

7.2. Доказательство предложения 6.5

Пусть $\lambda_k=(2\pi k)^\sigma$, $h^*=1/\sigma$. Положим $h=(1+\delta)/\sigma$, $\delta>0$. Напомним, что, если $\delta=O(1)$, то $N_1\asymp\sqrt{d}$, $s_h\asymp\sqrt{d}/\delta$ и $|v|=|u|/s_h>b\delta$ в интегралах (7.5). Покажем, что (7.5) справедливо для $M\asymp s_h^{1+a}$ при некотором $a>0$, что влечет $M\gg hs_h\log(hs_h)$ и соответствует $|v|=O(s_h^a)$. Рассмотрим множества

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{k,n}&=\{l:\pi n+\pi/4\leqslant|v|(Y(l)-Y(k))\leqslant\pi n+3\pi/4\}\\&=\{l:e^{(4\pi n+\pi)/(4|v|)}\leqslant\lambda_l/\lambda_k\leqslant e^{(4\pi n+3\pi)/(4|v|)}\}.\end{aligned}$$

Если $l\in\mathcal{N}_{k,n}$, то $\sin^2(v(Y(l)-Y(k))/2)\geqslant 1/2$, откуда

$$\begin{aligned}R_h(v)&\geqslant\frac12\sum_{k=1}^\infty\exp(-hY(k))\sum_{n=1}^\infty\sum_{l\in\mathcal{N}_{k,n}}\exp(-hY(l))\\&=\frac12\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^{-h}\sum_{n=1}^\infty\sum_{l\in\mathcal{N}_{k,n}}\lambda_l^{-h}.\end{aligned}$$

Имеем $\mathcal{N}_{k,n}=\{kK_n\le l\le kK_{n,1}\}$, где

$$K_n=e^{(4\pi n+\pi)/(4|v|\sigma)},\quad K_{n,1}=K_nq,\quad K_{n+1}=K_nq^2,\quad q=e^{\pi/(2|v|\sigma)}.$$

Выберем $B>0$ и пусть $n_0=n_0(v,\delta)=[B|v|\sigma\log(\delta^{-1})/\pi]$, где через $[x]$ обозначена целая часть x. Заметим, что для достаточно малого δ справедливо $K_{n_0}\ge\delta^{-B/4}$ при $|v|\le 1$ и $K_{n_0}\asymp\delta^{-B}$ при $|v|>1$. При этом $R_h(v)\ge(2\pi)^{-2(1+\delta)}\sum_{n=n_0}^\infty G_n(v)$, где

$$G_n(v)=\sum_{k=1}^\infty k^{-(1+\delta)}G_{n,k},\quad G_{n,k}=\sum_{kK_n\le l\le kK_{n,1}}l^{-(1+\delta)}.$$

Обозначим

$$I_{n,k}=\int_{kK_n}^{kK_{n,1}}x^{-(1+\delta)}dx=\frac{1-q^{-\delta}}{\delta(kK_n)^\delta}.$$

Функция $x^{-(1+\delta)}$ убывает при $x > 0$, откуда $G_{n,k} \geq I_{n,k} - (kK_n)^{-(1+\delta)}$. Следовательно, для некоторого $b > 0$, $B_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$, $B_2 = (2\pi)^{2(1+\delta)}$ справедливы неравенства

$$G_n(v) \geq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1+\delta)}(I_{n,k} - (kK_n)^{-(1+\delta)}) = \frac{1-q^{-\delta}}{\delta K_n^{\delta}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1+2\delta)}$$

$$-K_n^{-(1+\delta)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2+2\delta)} \geq \frac{b(1-q^{-\delta})}{\delta^2 K_n^{\delta}} - B_1 K_n^{-(1+\delta)};$$

$$B_2 R_h(v) \geq \frac{b(1-q^{-\delta})}{\delta^2} \sum_{n=n_0}^{\infty} K_n^{-\delta} - B_1 \sum_{n=n_0}^{\infty} K_n^{-(1+\delta)} = \frac{b(1-q^{-\delta})}{\delta^2 K_{n_0}^{\delta}(1-q^{-2\delta})}$$

$$-\frac{B_1}{K_{n_0}^{(1+\delta)}(1-q^{-2(1+\delta)})} \geq \frac{b}{2\delta^2 K_{n_0}^{\delta}} - \frac{B_1}{K_{n_0}^{(1+\delta)}(1-q^{-2(1+\delta)})}.$$

Заметим, что $1 \leq K_{n_0}^{\delta} \leq \exp(\pi/(4b\sigma))$, и при достаточно малом $\delta > 0$, можно найти такие $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, что

$$1 - q^{-2(1+\delta)} = 1 - \exp\left(-(1+\delta)\pi/(\sigma|v|)\right) \geq \begin{cases} b_1, & |v| \leq 1, \\ b_2/|v|, & |v| \geq 1. \end{cases}$$

Из этого следует, что для $|v| = o(\delta^{-(B+2)})$, $|v| \geq b\delta$ выполнено неравенство

$$R_h(v) \geq b\delta^{-2} - b\max(1, |v|\delta^{B}) \sim b\delta^{-2},$$

которое влечет $-\log|f_h(u)| \geq bd\delta^{-2}/G^2(h) \sim \pi^2 bd$. Значит, для любых $B > 0$, $b > 0$ и некоторого $b_1 > 0$ выполнено

$$|f_h(u)| \leq \exp(-b_1 d), \quad b\sqrt{d} \leq |u| = |vs_h| \leq s_h\delta^{-2-B}. \tag{7.6}$$

Пусть сначала $M/s_h = s_h^a \leq \delta^{-2-B}$. Это возможно при $0 < a < 2 + B$. Тогда $\delta \leq (\sigma^2 d)^{-a/(2(2+B-a))}(1+o(1))$. У нас $\log(\delta^{-1}) = o(d)$. Значит, справедливо (7.5):

$$J_{N_1,M}(h) \leq M\exp(-b_1 d) \asymp \left(\sqrt{d}/\delta\right)^{1+a} \exp(-b_1 d) \to 0. \tag{7.7}$$

Рассмотрим теперь случай $M = s_h^{1+a} > s_h\delta^{-2-B} \triangleq M_1$, что соответствует $\delta > (\sigma^2 d)^{-a/(2(2+B-a))}(1 + o(1))$. Если $|u| \leqslant M_1$, то мы можем использовать только что полученные оценки. Следовательно, достаточно рассмотреть случай $M \geqslant |u| \geqslant M_1$, при этом $s_h^a \geq |v| > \delta^{-2-B}$, $|v| \to \infty$ при $\delta \to 0$. Введем множества

$$\mathcal{N}_k = \{l \in \mathbb{N} : 0 < |v|(Y(l) - Y(k))/2 \leq 1\} = \{k+1 \leq l \leq k \exp(2/(\sigma|v|))\},$$

где $\mathcal{N}_k \neq \emptyset$ при $k \geq \sigma|v|/2 - 1 + O(1/|v|)$. Пусть $k \geq \sigma|v|/2$, $l \in \mathcal{N}_k$. Для таких k, l справедливо

$$c \triangleq \sin(1) \leq \sin(|v|\sigma(\log(l/k))/2)/(|v|\sigma(\log(l/k))/2) < 1,$$

откуда

$$\begin{aligned} R_h(v) &\geq \frac{(c|v|\sigma)^2}{4(2\pi)^{2(1+\delta)}} \sum_{k \geq |v|\sigma/2} k^{-(1+\delta)} \sum_{k+1 \leq l \leq k \exp(2/(|v|\sigma))} \log^2(l/k) l^{-(1+\delta)} \\ &\geq bv^2 \exp(-2(1+\delta)/(|v|\sigma)) \sum_{k \geq |v|\sigma/2} k^{-2(1+\delta)} G_k \\ &= \widetilde{b} v^2 \sum_{k \geq |v|\sigma/2} k^{-2(1+\delta)} G_k, \end{aligned}$$

где $G_k = \sum\limits_{k+1 \leq l \leq k \exp(2/(|v|\sigma))} \log^2(l/k)$. Так как $\log(1+x) \geq x/2$, $0 \leq x \leq 1$, выполнено $\log^2(l/k) \geq (l-k)^2/(2k)^2$. Следовательно, для $k \geq \sigma|v| \to \infty$,

$$G_k \geq \frac{1}{4k^2} \sum_{k+1 \leq l \leq k \exp(2/(|v|\sigma))} (l-k)^2 = \frac{1}{4k^2} \sum_{n=1}^{L} n^2,$$

где $L = [k \exp(2/(|v|\sigma))] - k > 2k/(|v|\sigma) - 1 \geq k/(|v|\sigma)$ и $[x]$ – целая часть x. Так как $\sum_{n=1}^{L} n^2 > L^3/3$, имеем $G_k \geq k/(12|v|^3\sigma^3)$,

$$\begin{aligned} R_h(v) &\geq \frac{b}{|v|} \sum_{k \geq |v|\sigma} k^{-(1+2\delta)} \\ &\geq \frac{b}{|v|} \left(\int_{|v|\sigma}^{\infty} x^{-1-2\delta} dx - |v|^{-(1+2\delta)} \right) \sim \frac{\widetilde{b}}{\delta |v|^{1+2\delta}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, при $u = vs_h$,

$$-\log|f_h(u)| \geq bd/(\delta|v|^{1+2\delta} G^2(h)) \sim \pi^2 bd\delta/|v|^{1+2\delta}, \quad s_h^a \geq |v| \geq \delta^{-2-B},$$

$$|f_h(u)| \leq \exp(-bd\delta/s_h^{a(1+2\delta)}), \quad \delta^{-2-B}s_h \leq |u| = |vs_h| \leq s_h^{1+a}. \quad (7.8)$$

Используя (7.7) и только что полученные оценки, для любого $0 < a < (4+2B)/(5+B) = r$, $\delta \geq (\sigma^2 d)^{-a/(2(2+B-a))}(1+o(1))$, будем иметь

$$J_{N_1,N} \leq M(\exp(-b_1 d) + \exp(-bd\delta/s_h^{a(1+2\delta)})) \quad (7.9)$$

$$\leq C\left(\frac{\sqrt{d}}{\delta}\right)^{1+a}\left(\exp(-b_1 d) + \exp(-bd^{(r-a)/(2(5+B)(2+B-a))+O(\delta)})\right) \to 0.$$

□

7.3. Доказательство предложения 6.6

Пусть $\lambda_k \sim A\exp(\kappa k)$, то есть, $Y(k) = \kappa k + c + o(1)$, $c = \log(A)$. Тогда

$$G(h) \sim 2A(\kappa h)^{-1}, \quad x \sim d/h, \quad s_h \sim \sqrt{d}/h, \quad N_1 \asymp \sqrt{d} \quad \text{при } h \to 0.$$

Случай $|u| > N_1$ соответствует $|v| > bh$ при некотором $b > 0$, а соотношения $u < M$, $M \gg hs_h\log(hs_h) \asymp \sqrt{d}\log(d)$ представимы в виде $|v| \leqslant H$, $H \gg h\log(d)$. В предположении $h\log(d) \to 0$ можно так выбрать M, H, что

$$1 \gg H \gg h\log(d), \qquad H \leqslant h(\log(d))^2, \quad d \gg M \gg \sqrt{d}\log(d).$$

Пусть $|v| \in (bh, H)$. Аналогично разделу 7.2 положим, для $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{N}_k = \{l \in \mathbb{N} : 0 < |v|(Y(l) - Y(k))/2 \leqslant 1\} = \{l : k < l \leqslant k + 2/(\kappa|v|) + o(1)\},$$

и заметим, что $\mathcal{N}_k \neq \emptyset$ при $|v| < 1/\kappa$. Так как $|v| \leqslant H = o(1)$, имеем

$$\begin{aligned} R_h(v) &\geqslant bv^2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-h\kappa k) \sum_{k<l\leqslant k+2/(\kappa|v|)+o(1)} (l-k)^2 \exp(-h\kappa l) \\ &= bv^2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2h\kappa k) \sum_{0<r\leqslant 2/(\kappa|v|)+o(1)} r^2 \exp(-h\kappa r) \\ &= bv^2 D(v) \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2h\kappa k) \asymp v^2 D(v) h^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} D(v) &\triangleq \sum_{0<r\leqslant 2/(\kappa|v|)+o(1)} r^2\exp(-h\kappa r) \\ &= K^2 \sum_{0<r\leqslant 2/(\kappa|v|)+o(1)} (r/K)^2\exp(-r/K) \\ &\asymp K^3 \int\limits_0^{c/|v|K+o(h)} e^{-x}x^2dx \asymp |v|^{-3}, \quad c=2/\kappa, \end{aligned}$$

где $K=(h\kappa)^{-1}\to\infty$ и мы учитываем, что $|v|K>b/\kappa$. Таким образом, $-\log(f_h(u))\geqslant bdh/|v|\geqslant bdh/H\geqslant bd/(\log(d))^2$, откуда $J_{N_1,M}(h)\leqslant M\exp(-bd/(\log(d))^2)\to 0$. □

Литература

1. E. N. Belitser, B. V. Levit, *On minimax filtring over ellipsoids.* — Math. Methods Statist. **4** (1995), 259–273.
2. М. С. Ермаков, *Минимаксное обнаружение сигнала в гауссовском белом шуме.* — Теория вероятностей и ее примен **35**, 4, (1990) 704–715.
3. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* т. III, Физматгиз, М., 1963.
4. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *Одна задача статистического оценивания в гауссовском белом шуме.* — Докл. АН СССР **236**, 6 (1977), 1300–1302.
5. I. A. Ibragimov, R. Z. Khasminskii, *Some estimation problems on Infinite dimensional Gaussian white noise.* — In: Festschrift for Lusien Le Cam. Research papers in Probability and Statictics, Springer-Verlag, NY (1997), pp. 275–296.
6. Yu. I. Ingster, *Asymptotically minimax hypothesis testing for nonparametric alternatives.* I, II, III. — Math. Methods Statist. **2** (1993), 85–114, 171–189, 249–268.
7. Yu. I. Ingster, I. A. Suslina, *Nonparametric Goodness-of-Fit Testing under Gaussian Model.* Springer-Verlag, New York, 2002.
8. Yu. I. Ingster, I. A. Suslina, *On estimation and detection of smooth function of many variables.* — Math. Methods Statist. **14** (2005), 299–331.
9. Ю. И. Ингстер, И. А. Суслина, *Оценивание и проверка гипотез для функций бесконечного числа переменных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **328** (2005), 91–113.
10. Yu. I. Ingster, I. A. Suslina, *Estimation and detection of high-variable function from Sloan–Woźniakowski space.* — Math. Methods Statist. **16**, No. 4 (2007), 318–353.
11. A. Karol', A. Nazarov, Ya. Nikitin, *Small balls probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators.* — Trans. AMS **360**, No. 3 (2006), 1443–1474.

12. B. Levit, N. Stepanova, *Effisient estimation of multivatiate analytic functions in cube-like domains.* — Math. Methods Statist. **13** (2004), 253–281.
13. M. A. Lifshits, E. V. Tulyakova, *Curse of dimensionality in approximation of random fields.* — Probab. Math. Stat. **26** (2006), 97–112.
14. Y. Lin, *Tensor product space ANOVA model.* — Ann. Stat. **28** (2000), 734–755.
15. A. Papageorgiou, G. W. Wasilkovski, *On the average complexity of multivariate problems.* — J. Complexity, **6** (1990), 1–23.
16. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М., 1972.
17. М. С. Пинскер, *Оптимальная фильтрация квадратично-интегрируемых сигналов на фоне гауссовского шума.* — Проблемы передачи информации **16**, 2 (1980), 52–68.
18. А. В. Скороход, *Интегрирование в гильбертовом пространстве.* Наука, М., 1975.
19. Ch. Stone, *Additive regression and other nonparametric models.* — Ann. Stat. **13** (1985), 689–705.

Ingster Yu. I., Suslina I. A. On estimation and detection of a function from tensor product spaces.

We observe an unknown d-variables function $f(t)$, $t \in [0,1]^d$ in the white Gaussian noise of a level $\varepsilon > 0$. We suppose that $f \in \mathcal{F}$, where $\mathcal{F}$ is a ball in Hilbert space $\mathcal{L}^d \subset L_2([0,1]^d)$ of tensor product structure. Under minimax setup, we consider two problems: to estimate f (for quadratic losses) and to detect f, i.e., to test the null hypothesis $H_0 : f = 0$ against alternatives $H_1 : f \in \mathcal{F}_d$, $\|f\|_2 \geq r_\varepsilon$. We are interesting in the case $d = d_\varepsilon \to \infty$. We study sharp, rate and log-asymptotics (as $\varepsilon \to 0,\ d \to \infty$) in the problems. In particular, we show that log-asymptotics are different essentially for $d \ll \log \varepsilon^{-1}$ and for $d \gg \log \varepsilon^{-1}$.

С.-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ)

Поступило 11 ноября 2007 г.

С.-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики