Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

В. Ф. Захарова

АГРЕГАЦИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГАЗА С КОНЕЧНЫМИ СТЕПЕННЫМИ МОМЕНТАМИ СКОРОСТЕЙ ЧАСТИЦ

1. Введение

Рассмотрим одномерную модель газа - систему, состоящую из n частиц. В начальный момент каждая частица характеризуется своей массой, начальным положением на прямой и начальной скоростью. Между любыми двумя частицами существует парное притяжение. В промежутках между столкновениями частицы двигаются по правилам ньютоновой механики под действием взаимного тяготения. Столкновения считаются абсолютно неупругими, то есть в результате столкновения двух или большего числа частиц возникает одна новая частица (кластер), чьи характеристики определяются законами сохранения массы и импульса. Вследствие столкновений кластеры становятся все больше и больше, а их количество уменьшается – до тех пор, пока на прямой не останется один единственный кластер, содержащий всю массу. Весь процесс можно представлять себе как очень приблизительную модель образования "звезды" из космической "пыли". И действительно, модель уходит корнями в астрономию (см. [8, 9]), однако на самом деле интерес к изучению подобных задач вызван их непосредственной связью с нелинейными уравнениями в частных производных типа уравнения Бюргерса (см. [2, 3, 5]). Наиболее интересные результаты об изучаемом типе моделей получены в работах [4–7, 11, 12, 17].

Цель нашей работы состоит в том, чтобы описать существенные особенности процесса скопления (агрегации) в системах, начальные данные которых являются случайными и начальное количество частиц стремится к бесконечности. В частности, нас интересует размер максимального кластера в произвольный момент времени, предшествующий *критическому времени системы*, т.е. такому моменту времени, когда практически вся масса оказывается сосредоточенной в одном кластере.

Картина известных результатов в общих чертах такова. Пусть изначально имеется n частиц, масса каждой равна $1/n$, и начальные положения частиц в том или ином смысле равномерно распределены на некотором отрезке. Пусть скорости частиц являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Попытаемся понять поведение $L_n(t)$ – наибольшего числа начальных частиц, которые сформировали общий кластер к моменту времени t. Тогда, разумеется, $L_n(\cdot)$ является неубывающей функцией времени и $L_n(t)$ растет от 1 вначале до n к моменту общего сбора частиц. Из работы [7] известно, что *при достаточных моментных предположениях* об общем распределении скоростей существует такое детерминированное критическое время T_*, что

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{L_n(t)}{n} = 0$ по вероятности для любого $t < T_*$,

но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{L_n(t)}{n} = 1$ по вероятности для любого $t > T_*$.

Другими словами, время, за которое происходит существенный сбор частиц, фактически не случайно. "Существенный" означает, что после критического времени еще можно наблюдать некоторое число маленьких периферийных кластеров, но главное ядро уже будет сформировано и будет содержать подавляющую часть общей массы.

В работе [6] показано, что для случая невырожденного распределения начальных скоростей для $t < T_*$

$$L_n(t) \approx c(t) n^{2/3} (\log n)^{1/3},$$

в то время как в вырожденном случае

$$L_n(t) \approx c(t) \log n.$$

Однако все сказанное относится к системам с хорошими моментными свойствами распределений скоростей, например удовлетворяющими условию $\mathbb{E}\exp(a|u_i|) < \infty$. Возникает естественный вопрос: будет ли таким же поведение системы, если на распределение скоростей наложить более слабое условие? Ведь если мы заменим предположение $\mathbb{E}\exp(a|u_i|) < \infty$ на более слабое условие $\mathbb{E}(|u_i|^p) < \infty$, то маленькое число частиц с большими начальными скоростями может существенно изменить поведение $L_n(t)$. На физическом уровне это означает более вероятное появление частиц со сверхвысокой начальной скоростью, которые, ударяя и увлекая за собой соседние частицы, способны инициировать образование необычайно больших кластеров. Мы покажем, что картина, обрисованная выше, т.е. наличие критического времени и степенное поведение $L_n(t)$, еще в целом сохраняется, но степенные показатели оценок будут совсем другие. Больше всего нас интересуют случаи распределения скоростей, имеющие относительно небольшое количество конечных абсолютных моментов, так как из работы [6] известно, что при достаточно больших p ($p \geq 7$) оценка $L_n(t) \approx n^{2/3} (\log n)^{1/3}$ все еще верна.

Статья построена следующим образом. Строгое описание модели дано в разделе 2. В разделе 3 приведены основные результаты и комментарии, в разделе 4 мы напоминаем необходимую технику (метод барицентров) и выведение основных верхней и нижней оценок размера кластеров, а раздел 5 посвящен непосредственно доказательству теорем.

2. Системы неупругих частиц

2.1. Динамика систем частиц

Мы рассматриваем следующую одномерную систему (газ) частиц с тяготением. В начальный момент времени $t = 0$ наш газ состоит из n частиц, расположенных на вещественной прямой в точках с координатами $x_1(0), \ldots, x_n(0)$. Частицы всегда пронумерованы так, что $x_1(0) \leqslant \cdots \leqslant x_n(0)$. Каждая частица характеризуется своей массой m_i и своей начальной скоростью $v_i(0)$. Частицы движутся под действием сил парного взаимного тяготения. Сила тяготения, действующая на частицу массы m и расположенную в точке x, со стороны частицы массы μ, расположенной в y, равна

$$F = \gamma\, m\, \mu\ \mathrm{sign}(y - x).$$

Здесь $\gamma > 0$ есть положительная константа – *постоянная гравитации*. Отметим, что сила тяготения не зависит от расстояния между частицами. Эта особенность типична для одномерных гравитационных моделей.

Между столкновениями частицы подчиняются второму закону Ньютона ($F = m\frac{d^2x}{dt^2}$). Общая сила гравитации, действующая на частицу, очевидно пропорциональна разности масс частиц, находящихся справа и слева от нее.

Введем стохастическую версию задачи. Рассмотрим начальные скорости частиц как случайные величины. В дальнейшем мы рассмотрим асимптотическую ситуацию, когда число n частиц стремится к бесконечности, а остальные параметры меняются согласованным образом.

Предположим, что массы частиц известны и равны ρn^{-1}, где $\rho > 0$ – фиксированная константа. Это позволит в пределе иметь модель с заданной плотностью вещества ρ. Будем называть *размером кластера* число входящих в него частиц.

Будем считать, что начальные скорости частиц имеют вид $v_i(0) = u_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, где (u_i) – независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Нулевое среднее берется только для удобства. Легко видеть, что одновременное изменение всех скоростей на одну и ту же константу не повлечет изменения моментов столкновений и размеров образующихся кластеров. На поведение системы лишь наложится дополнительный равномерный дрейф.

Что касается начальных положений, мы будем предполагать, что частицы в начальный момент времени расположены на решетке $x_i(0) = i/n$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

3. Основные результаты

В этой части мы исследуем асимптотическое поведение $L_n(t)$ – размера наибольшего кластера на момент времени t в системе, содержащей изначально n частиц. Так как размер кластера совпадает с количеством частиц, которые он содержит, то всегда $1 \leqslant L_n(t) \leqslant n$.

Введем *критическое время системы*, определенное как

$$T^* := (\gamma\rho)^{-1/2}.$$

3.1. Скопления частиц в теплом газе

Рассмотрим теплый газ, то есть систему частиц с ненулевыми начальными скоростями $v_i(0) = u_i$, где (u_i) - семейство независимых случайных величин с $\mathbb{E}(u_i) = 0$ и $\mathbb{E}(u_i^2) = 1$.

Критическое время T^* интерпретируется как время, после которого существует единый кластер огромной массы и, возможно, "пыль" маленьких кластеров, чья общая масса незначительна. Другими словами, для любого $t > T^*$, имеем $\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(t)}{n} = 1$ по вероятности.

Скопление частиц в теплом газе в критический момент времени T^* достаточно хорошо изучено в [17]. Поэтому остается оценить $L_n(t)$ в моменты $t < T^*$.

Для формулировки результатов нам потребуется естественное, но не совсем стандартное определение верхнего и нижнего пределов по вероятности, которые часто будут использоваться в будущем. Пусть ξ_n – последовательность случайных величин и $c \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\liminf_{n\to\infty} \ \xi_n \geqslant c \quad \text{по вероятности}$$

означает, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\xi_n \leqslant c-\varepsilon\right\} = 0.$$

Аналогично,

$$\limsup_{n\to\infty} \ \xi_n \leqslant c \quad \text{по вероятности}$$

означает, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\xi_n \geqslant c+\varepsilon\right\} = 0.$$

Мы будем говорить, что последовательность ξ_n ограничена по вероятности, если

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{|\xi_n| \geqslant M\right\} = 0$$

и будем говорить, что последовательность ξ_n отделена от нуля по вероятности, если $\frac{1}{\xi_n}$ ограничена по вероятности.

Из работы [6] известно: если начальные скорости u_i имеют конечный экспоненциальный момент $\mathbb{E}\exp\{a|u_i|\} < \infty$ для некоторого $a > 0$, то для любого $t < T^*$ имеем

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L_n(t)}{n^{2/3}(\log n)^{1/3}} \geqslant c_1(t) \quad \text{по вероятности,} \tag{3.1}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{L_n(t)}{n^{2/3}(\log n)^{1/3}} \leqslant c_2(t) \quad \text{по вероятности,} \tag{3.2}$$

где

$$c_1(t) := 2\left(\frac{t}{1-\gamma\rho t^2}\right)^{2/3}, \quad c_2(t) := (20/3)^{1/3} c_1(t).$$

То есть получаем $L_n(t) \approx n^{2/3} (\log n)^{1/3}$.

Интересно понять что произойдет, если мы заменим предположение $\mathbb{E}\exp(a|u_i|) < \infty$ на более слабое условие $\mathbb{E}(|u_i|^p) < \infty$. Тогда маленькое число частиц с большими начальными скоростями может существенно изменить поведение $L_n(t)$. Однако из той же работы [6] известно, что при достаточно больших p ($p \geq 7$) оценки (3.1) и (3.2) все еще верны.

Вопрос в том как поведет себя $L_n(t)$ при $\mathbb{E}(|u_i|^p) < \infty$ и $p < 7$. Оказывается, верны следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Предположим, что* $\mathbb{E}(|u_i|^2) < \infty$. *Также предположим, что выполняется условие*

$$\mathbb{P}\left\{|u_i| \geq r\right\} \geq \frac{c}{r^p}, \quad \text{где } c \text{ – некоторая константа,} \quad 2 \leq p < 3.$$

Тогда для любого $t < T_*$ *последовательность* $\frac{L_n(t)}{n^{\frac{p+1}{2p}}}$ *отделена от нуля по вероятности.*

Теорема 3.2. *Предположим, что* $\mathbb{E}(|u_i|^p) < \infty$ *при некотором* $p > 2$. *Тогда для любого* $t < T^*$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L_n(t)}{n^{2/3}(\log n)^{1/3}} \geqslant \delta_1(t) \quad \text{по вероятности,}$$

где

$$\delta_1(t) := \left(\frac{2t}{1-\gamma\rho t^2}\right)^2,$$

Теорема 3.3. *Предположим, что* $\mathbb{E}(|u_i|^p) < \infty$. *Тогда для любого* $t < T_*$

а) *если* $2 \leq p < 3$, *то последовательность* $\frac{L_n(t)}{n^{\frac{p+1}{2p}}}$ *ограничена по вероятности;*

б) *если* $p = 3$, *то последовательность* $\frac{L_n(t)}{n^{2/3}(\log n)^{1/3}}$ *ограничена по вероятности.*

Замечание 1. Фактически теорема 3.2 представляет наибольший интерес при $p = 3$, так как при $2 \leq p < 3$ в теореме 3.1 получена более точная оценка, правда при дополнительных ограничениях на распределение начальных скоростей частиц.

Замечание 2. При $1 \leq p \leq 2$ аналогичные результаты получены в работе [12] при условии, что распределения скоростей находятся в области притяжения устойчивого закона. Таким образом мы получаем весь возможный спектр оценок: от $L_n(t) \asymp n$ при $p = 1$ до $L_n(t) \asymp n^{2/3}(\log n^{1/3})$ при $p = 3$.

4. Основные оценки размера кластеров

4.1. Метод барицентров

В этой части мы опишем и расширим метод барицентров для изучения систем частиц. Такая техника уже использовалась в [1. 4, 5, 7, 17]. Подробное обоснование этого метода можно найти в [6]. Сначала несколько слов о терминологии. Мы отождествим частицы с их номерами и будем называть *блоком частиц* любое множество частиц, имеющих последовательные номера. Обозначим такой блок $J = (i, i+k]$; этот блок содержит частицы с номерами от $i+1$ до $i+k$.Число k называется *размером* блока.

Будем говорить, что блок *свободен справа* к моменту времени t, если ни одна из частиц этого блока не сталкивалась до времени t ни с одной частицей, расположенной изначально справа от блока. Аналогично определяется блок *свободный слева*. Наконец, блок *свободен* к моменту времени t, если он свободен и справа, и слева одновременно.

Определим *барицентр (центр тяжести)* блока J как $\bar{x}_J(s) := k^{-1}\sum_{j=i+1}^{i+k} x_j(s)$. Определим также

$$\overline{x}^*_J(s) := \overline{x}_J(0) + \overline{x}'_J(0)s + \frac{1}{2}\,\gamma(M_J^{(R)} - M_J^{(L)})s^2$$
$$= \frac{2i+k+1}{2n} + \bar{v}_{(i,i+k]}s + \frac{\gamma}{2}\frac{\rho}{n}(n-k-2i)s^2, \quad (4.1)$$

где $M_J^{(R)}$ и $M_J^{(L)}$ обозначают общие массы частиц, находящихся справа и слева от J соответственно, а $\bar{v}_{(i,i+k]}(s) := k^{-1}\sum_{j=i+1}^{i+k} v_j(s)$ – средняя начальная скорость. Заметим, что $s \mapsto \overline{x}^*_J(s)$ представляет траекторию центра тяжести блока J (если не брать в счет соударения с внешними частицами). Более точно, имеем следующее.

Утверждение 4.1. *Пусть блок J свободен справа к моменту времени t. Тогда*

$$\overline{x}_J(s) \geqslant \overline{x}^*_J(s), \quad s \in [0, t].$$

Аналогично, если блок J свободен слева к моменту времени t, тогда

$$\overline{x}_J(s) \leqslant \overline{x}^*_J(s), \quad s \in [0,t].$$

Доказательство Утверждения 4.1 очевидно, и здесь опущено. Его непосредственное следствие:

Следствие 4.2. *Пусть блок J свободен к моменту времени t. Тогда*

$$\overline{x}_J(s) = \overline{x}^*_J(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Определим *время сбора t^{cl}_J блока* как тот момент времени, с которого все частицы в блоке J находятся в общем кластере. Можно выразить t^{cl}_J через случайные величины типа $\overline{x}^*_A$; $A \subset \{1,2,\ldots,n\}$. Для этого введем для каждой частицы j момент времени t^{cl}_j, в который она сталкивается с соседней частицей $j+1$. Ясно, что для $J=(i,i+k]$, имеем

$$t^{cl}_J = \max_{0<r<k} t^{cl}_{i+r}. \tag{4.2}$$

С другой стороны, введем для каждой тройки $\alpha < j < \beta$ квадратичную функцию

$$Q_{\alpha,j,\beta}(s) := \overline{x}^*_{(\alpha,j]}(s) - \overline{x}^*_{(j,\beta]}(s).$$

Известно, что

$$Q_{\alpha,j,\beta}(0) \leqslant x_j(0) - x_{j+1}(0) < 0.$$

Более того, старший коэффициент квадратичной функции по (4.1) положителен и равен

$$\frac{\gamma}{2}\frac{\rho}{n}\left[(n-j)-(n-\beta)+j-\alpha)\right] = \frac{\gamma}{2}\frac{\rho}{n}(\beta-\alpha) > 0.$$

Поэтому существует единственный момент $\tau^*_{\alpha,j,\beta} > 0$ такой, что

$$Q_{\alpha,j,\beta}(\tau^*_{\alpha,j,\beta}) = 0.$$

С точки зрения механики $\tau^*_{\alpha,j,\beta}$ – время, в которое встретятся траектории центров тяжести блоков $(\alpha,j]$ и $(j,\beta]$, если не брать в расчет соударения с внешними частицами. Значение $\tau^*_{\alpha,j,\beta}$ имеет явное выражение через коэффициенты полинома $Q_{i,j,\beta}$ в терминах начальных положений, скоростей и масс частиц. Стоит заметить, что для любого $t>0$,

$$t \geqslant \tau^*_{\alpha,j,\beta} \;\Leftrightarrow\; Q_{\alpha,j,\beta}(t) \geqslant 0. \tag{4.3}$$

Оказывается, верно следующее.

Утверждение 4.2. *Для любого* $j < n$ *имеем*

$$t_j^{cl} = \min_{\alpha<j,\ \beta>j} \tau^*_{\alpha,j,\beta}. \tag{4.4}$$

Доказательство этого утверждения можно найти в [6].

При оценке времени сбора блока иногда более удобно иметь дело с более простыми выражениями. Например, из (4.2) и (4.4) следует, что для $J := (i, i+k]$:

$$t_J^{cl} \leqslant \max_{0<r<k} \tau^*_{\alpha,i+r,\beta}\ , \quad \forall\, \alpha \leqslant i,\ \forall\, \beta \geqslant i+k. \tag{4.5}$$

В частности, если взять $\alpha = i$ и $\beta = i + k$, получим

$$t_J^{cl} \leqslant \max_{0<r<k} \tau^*_{i,i+r,i+k}. \tag{4.6}$$

Заметим, что выражение справа зависит только от начальных данных частиц в блоке.

Рассмотрим ситуацию, когда в (4.6) имеется равенство.

Утверждение 4.4. *Если блок* $J = (i, i+k]$ *свободен к моменту его сбора* t_J^{cl}, *тогда*

$$t_J^{cl} = \max_{0<r<k} \tau^*_{i,i+r,i+k}. \tag{4.7}$$

Доказательство этого утверждения можно также найти в [6].

Рассмотрим блок $J := (i, i+k]$. Обозначим τ_j единственное положительное решение уравнения

$$\bar{x}^*_{(i,i+j]}(\tau) = \bar{x}^*_{(i+j,i+k]}(\tau). \tag{4.8}$$

Положим

$$\mathcal{T}(i, i+k) = \max_{1\leqslant j<k} \tau_j .$$

Из Утверждения 4.4 следует, что если блок $(i, i+k]$ был свободен до момента своего коллапса, то $\mathcal{T}(i, i+k)$ как раз и равно моменту коллапса $t^{\mathrm{cl}}_{(i,i+k]}$. Нам также потребуется* частичный максимум

$$\mathcal{T}(i, i+k, \varepsilon) = \max_{\varepsilon k\leqslant j\leqslant(1-\varepsilon)k} \tau_j . \tag{4.9}$$

Из Утверждения 4.3 известно, что всегда

$$\mathcal{T}(i, i+k, \varepsilon) \geqslant t^{\mathrm{cl}}_{(i+\varepsilon k,i+(1-\varepsilon)k]}. \tag{4.10}$$

Возможная разница между левой и правой частями может возникать из-за соударений частиц блока с частицами, находящимися слева от i или справа от $i+k$, так как эти соударения могут способствовать более раннему коллапсу блока.

С другой стороны, решая квадратное уравнение (4.8), мы получим формулу

$$\tau_j = f(y_j),$$

где

$$y_j = \frac{n(\bar{v}_{(i,i+j]} - \bar{v}_{(i+j,i+k]})}{\gamma\rho\ k}$$

и

$$f(y) = \sqrt{y^2 + T_*^2} - y,$$

а $\bar{v}_{(i,i+k]}(s) := k^{-1}\sum_{j=i+1}^{i+k} v_j(s)$ – средняя начальная скорость и $T_* = (\gamma\rho)^{-1/2}$ имеет смысл критического времени системы. Из формулы $f(0) = T_*$, в частности, следует, что при нулевых начальных скоростях $\mathcal{T}(i, i+k) = T_*$ для любого блока $(i, i+k]$, то есть все блоки коллапсируют одновременно в момент T_*.

Отметим, что f является положительной убывающей функцией, так что значения обратной функции $f^{-1}(t)$ корректно определены при всех положительных t.

Используя монотонность f и все предыдущие обозначения мы получим

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(i, i+k) &= \max_j \tau_j = \max_j f(y_j) = f\left(\min_j y_j\right) \\ &= f\left(\frac{n}{\gamma\rho\ k}\min_j\left[\bar{v}_{(i,i+j]} - \bar{v}_{(i+j,i+k]}\right]\right).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Аналогично,

$$\mathcal{T}(i, i+k, \varepsilon) = f\left(\frac{n}{\gamma\rho\ k}\min_{\varepsilon k\leqslant j\leqslant(1-\varepsilon)k}\left[\bar{v}_{(i,i+j]} - \bar{v}_{(i+j,i+k]}\right]\right). \tag{4.12}$$

4.2. Нижняя оценка размера кластера

Перейдем теперь к рассмотрению систем со случайными начальными скоростями. Фиксируем $\varepsilon > 0, k \leqslant n$ и положим $d = [n/k]$; тогда блоки $I_l = (lk, (l+1)k]$ корректно определены при $0 \leqslant l < d$. Обозначим $\mathcal{T}_l = \mathcal{T}(lk, (l+1)k, \varepsilon)$ величины, введенные в (4.9), и отметим, что $\mathcal{T}_l$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Поэтому, используя (4.10) и (4.12), мы получим

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{L_n(t) \leqslant (1-2\varepsilon)k\right\} \leqslant \mathbb{P}\left\{\min_{0\leqslant l<d} t^{\mathrm{cl}}_{((l+\varepsilon)k,(l+1-\varepsilon)k]} \geqslant t\right\}\\
&\leqslant \mathbb{P}\left\{\min_{0\leqslant l<d} \mathcal{T}(lk,(l+1)k,\varepsilon) \geqslant t\right\}\\
&= \mathbb{P}\left\{\mathcal{T}(0,k,\varepsilon) \geqslant t\right\}^d\\
&\leqslant \exp\left\{-d\ \mathbb{P}\left\{\mathcal{T}(0,k,\varepsilon) < t\right\}\right\}\\
&= \exp\left\{-d\ \mathbb{P}\left\{f\left(\frac{n}{\gamma\rho\ k}\min_{\varepsilon k\leqslant j\leqslant(1-\varepsilon)k}\left[\bar v_{(0,j]} - \bar v_{(j,k]}\right]\right) < t\right\}\right\}\\
&= \exp\left\{-d\ \mathbb{P}\left\{\min_{\varepsilon k\leqslant j\leqslant(1-\varepsilon)k}\left[\bar v_{(0,j]} - \bar v_{(j,k]}\right] > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ k}{n}\right\}\right\}\\
&:= \exp\left\{-d\ P(k,n,t,\varepsilon)\right\}. \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

При $k = n$ из тех же соображений имеем еще более простую оценку

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{L_n(t) \leqslant (1-2\varepsilon)k\right\} &\leqslant \mathbb{P}\left\{t^{\mathrm{cl}}_{(\varepsilon n,(1-\varepsilon)n]} \geqslant t\right\}\\
&= 1 - \mathbb{P}\left\{\mathcal{T}(0,n,\varepsilon) < t\right\}\\
&= 1 - P(n,n,t,\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Введём в рассмотрение случайное блуждание $S_j = \sum_{i=1}^{j} u_i$. Тогда

$$
\bar v_{(0,j]} - \bar v_{(j,k]} = \frac{S_j}{j} - \frac{S_k - S_j}{k-j} = \frac{kS_j - jS_k}{j(k-j)}.
$$

Находим

$$
P(k,n,t,\varepsilon) = \mathbb{P}\left\{\min_{\varepsilon k\leqslant j\leqslant(1-\varepsilon)k}\frac{kS_j - jS_k}{j(k-j)} > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ k}{n}\right\}
$$

$$
= \mathbb{P}\left\{S_j - j\frac{S_j}{k} > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ k^2}{n}\frac{j}{k}(1-\frac{j}{k});\ \varepsilon k \leqslant j \leqslant (1-\varepsilon)k\right\}.
$$

Получается, что при $f^{-1}(t) \geqslant 0$ верно

$$
P(k,n,t,\varepsilon) \geqslant \mathbb{P}\left\{S_j - j\frac{S_j}{k} > f^{-1}(t)\,\frac{\gamma\rho\ k^2}{4n};\ \varepsilon k \leqslant j \leqslant (1-\varepsilon)k\right\}, \quad (4.14)
$$

а при $f^{-1}(t) \leqslant 0$ верно

$$P(k,n,t,\varepsilon) \geqslant \mathbb{P}\left\{S_j - j\frac{S_j}{k} > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\,\rho\,\varepsilon\ k^2}{n};\ \varepsilon k \leqslant j \leqslant (1-\varepsilon)k\right\}.$$

4.3. Верхняя оценка размера кластера

Рассмотрим еще один способ получения верхних оценок размеров кластера, который предложен в работе [12]. Пусть $L_n(t) \geqslant k$. Рассмотрим первый по времени возникновения кластер размера не менее k, скажем, $J = (i, i+\kappa]$, появившийся до момента t. Его размер κ удовлетворяет неравенствам $k \leqslant \kappa < 2k$. Напомним, что блок J был свободен до момента своего коллапса. Поэтому

$$\mathcal{T}(i, i+\kappa) = t_J^{\mathrm{cl}} \leqslant t.$$

Используя формулу (4.11), видим, что это неравенство эквивалентно соотношению

$$\min_{1\leqslant j<\kappa}\left[\bar v_{(i,i+j]} - \bar v_{(i+j,i+\kappa]}\right] > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ \kappa}{n},$$

что равносильно

$$\min_{1\leqslant j<\kappa}\left[\frac{S_{i+j}-S_i}{j} - \frac{S_{i+\kappa}-S_{i+j}}{\kappa-j}\right] > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ \kappa}{n}.$$

Пусть, для простоты записи, κ четно. Тогда, полагая $j = \kappa/2$, имеем

$$\frac{2(S_{i+j}-S_i)}{\kappa} - \frac{2(S_{i+\kappa}-S_{i+j})}{\kappa} > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ \kappa}{n},$$

следовательно,

$$(S_{i+j}-S_i) - (S_{i+\kappa}-S_{i+j}) > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ \kappa^2}{2n}.$$

В случае верхних оценок нас интересует только зона $t < T_*$, в которой верно неравенство $f^{-1}(t) > 0$, так что

$$\max\left[|S_{i+j}-S_i|;|S_{i+2j}-S_{i+j}|\right] > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ \kappa^2}{4n}\ \geqslant f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ k^2}{4n},$$

и мы можем заключить, что

$$\{L_n(t) \geqslant k\} \subset \bigcup_{i\leqslant n}\left\{\max_{j\leqslant k}|S_{i+j}-S_i| > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ k^2}{4n}\right\}$$

$$\subset \bigcup_{0\leqslant l<n/k}\left\{\max_{j\leqslant 2k}|S_{lk+j}-S_{lk}| > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ k^2}{8\,n}\right\}\ .$$

Следовательно, при $t < T_*$ мы получаем оценку для вероятностей

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{L_n(t) \geqslant k\right\} \leqslant & \frac{n}{k}\ \mathbb{P}\left\{\max_{j\leqslant 2k}|S_j| > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ k^2}{8\,n}\right\} \\ = & \frac{n}{k}\ \mathbb{P}\left\{\max_{j\leqslant 2k}\frac{|S_j|}{(2k)^{1/2}} > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ k^{3/2}}{2^{7/2}\,n}\right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

5. Доказательства

5.1. Доказательство теоремы 3.1

Фиксируем $t < T_*$. Докажем, что последовательность $\xi_n = \frac{L_n(t)}{n^{\frac{1+p}{2p}}}$ асимптотически отделена от нуля по вероятности. Фиксируем $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $\mu > 0$ и выберем натуральные числа $k = k_n$ так, что $k_n \sim \mu n^{\frac{1+p}{2p}}$. При $t < T_*$ верно $f^{-1}(t) \geqslant 0$, и мы можем воспользоваться оценками (4.13) и (4.14). Получим

$$\mathbb{P}\left\{L_n(t) \leqslant (1-2\varepsilon)k\right\} \leqslant \exp\left\{-d\ P(k,n,t,\varepsilon)\right\},$$
$$\text{где}\quad d = [n/k] \sim \mu^{-1} n^{\frac{p-1}{2p}} \quad (5.1)$$

и

$$P(k,n,t,\varepsilon) \geqslant P := \mathbb{P}\left\{S_j - j\frac{S_k}{k} > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ k^2}{4n}\,;\ \varepsilon k \leqslant j \leqslant (1-\varepsilon)k\right\}.$$

Чтобы оценить P снизу, заметим, что для выполнения события $\left\{S_j - j\frac{S_k}{k} > f^{-1}(t)\frac{\gamma\rho k^2}{4n}\right\}$ при всех $\varepsilon k \leqslant j \leqslant (1-\varepsilon)k$ достаточно одного большого скачка в момент времени i, где $i \leq \varepsilon k$, с последующим незначительным изменением S_j до момента $(1-\varepsilon)k$, а именно:

$$\begin{aligned}P \geq \sum_{i=1}^{\varepsilon k}\mathbb{P}\Bigg\{&|u_i - \frac{j}{k}u_i| \geq \frac{f^{-1}(t)\gamma\rho}{2}\frac{k^2}{n};\\ &\max_{i\leq j\leq(1-\varepsilon)k}|S_j - u_i - \frac{j}{k}(S_k - u_i)| \leq \frac{f^{-1}(t)\gamma\rho}{4}\frac{k^2}{n}\Bigg\}\\ &\geq \varepsilon k\mathbb{P}\left\{\varepsilon|u| \geq 2\tilde{c}\frac{k^2}{n}\right\}\mathbb{P}\left\{\max_{i\leq j\leq k}|S_j - u_i| \leq \tilde{c}\frac{k^2}{n}\right\},\end{aligned}$$
$$\text{где}\quad \tilde{c} = \frac{f^{-1}(t)\gamma\rho}{4}. \quad (5.2)$$

По предположению теоремы (3.3) первый множитель оценивается снизу следующим образом:

$$\mathbb{P}\left\{\varepsilon|u| \geq 2\tilde{c}\frac{k^2}{n}\right\} \geq c\left(\frac{k^2}{\varepsilon n}\right)^{-p}.$$

Чтобы оценить снизу второй множитель, воспользуемся принципом инвариантности (см. например [10, глава 2]), который говорит о том, что нормированный процесс частных сумм S_j сходится к винеровскому процессу W, в частности

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\max_{j\leq k}\frac{|S_j|}{\sqrt{k}} \leq r\right\} = \mathbb{P}\left\{\max_{0\leq t\leq 1}|W(t)| \leq r\right\} \to 1 \quad \text{при} \quad r\to\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}\left\{\max_{j\leq k}|S_j| \leq a_k\sqrt{k}\right\} = 1, \quad \text{при условии, что } \frac{a_k}{\sqrt{k}} \to \infty.$$

Получаем, что второй множитель в (5.2) будет стремиться к 1, при условии $\frac{k^2}{n} \gg \sqrt{k}$, то есть при $n \ll k^{\frac{3}{2}} \asymp n^{\frac{3+3p}{4p}}$, а это выполняется при $p < 3$.

Получаем общую оценку для P

$$\begin{aligned} P &\geq \varepsilon ck\left(\frac{k^2}{\varepsilon n}\right)^{-p} \\ &= c\varepsilon^{1+p}k^{1-2p}n^p = c\varepsilon^{1+p}\mu^{1-2p}n^{(1-2p)\frac{1+p}{2p}+p} = c\varepsilon^{1+p}\mu^{1-2p}n^{\frac{1-p}{2p}}. \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку для P в (5.1), имеем

$$\mathbb{P}\left\{L_n(t) \leqslant (1-2\varepsilon)k\right\} \leqslant \exp\left\{-dc\varepsilon^{1+p}\mu^{1-2p}n^{\frac{1-p}{2p}}\right\}$$

$$= \exp\left\{-c\varepsilon^{1+p}\mu^{-1}n^{\frac{p-1}{2p}}\mu^{1-2p}n^{\frac{1-p}{2p}}\right\} = \exp\left\{-c\varepsilon^{1+p}\mu^{-2p}\right\}.$$

Устремляя μ к нулю, получаем

$$\lim_{\mu\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{L_n(t) \leqslant (1-2\varepsilon)k\right\} = 0,$$

откуда и следует, что последовательность ξ_n асимптотически отделена от нуля по вероятности.

5.2. Доказательство теоремы 3.2

Для любого блока $J = (i, i+k]$ имеем начальное положение барицентра

$$\overline{x}_J(0) = \frac{1}{k}\sum_{j=i+1}^{i+k} x_j(0) = \frac{1}{k}\sum_{j=i+1}^{i+k} \frac{j}{n} = \frac{2i+k+1}{2n}.$$

Пусть

$$\overline{u}_J := \frac{1}{k}\sum_{j=i+1}^{i+k} u_j$$

обозначает среднее значение начальных скоростей. Тогда формула (4.1) принимает вид

$$\overline{x}_J^*(s) = \frac{2i+k+1}{2n} + \overline{u}_J s + \gamma\frac{\rho}{n}(n-k-2i)\frac{s^2}{2},$$

и (4.3) переходит в следующее соотношение

$$\tau^*_{\alpha,j,\beta} \leqslant t \;\Leftrightarrow\; \overline{u}_{(\alpha,j]} - \overline{u}_{(j,\beta]} \geqslant \frac{(\beta-\alpha)(1-\gamma\rho t^2)}{2nt}. \tag{5.3}$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1/3)$ и k – целое положительное число. Рассмотрим $J_\ell = [(\ell+\varepsilon)k, (\ell+1-\varepsilon)k] \cap \mathbb{Z}$. Согласно (4.5) для любого ℓ если существуют $\alpha < (\ell+\varepsilon)k$ и $\beta > (\ell+1-\varepsilon)k$ такие, что $\max_{j\in J_\ell} \tau^*_{\alpha,j,\beta} \leqslant t$, то все частицы блока J_ℓ принадлежат общему кластеру на момент времени t. Применим это к $\alpha = \ell k$ и $\beta = (\ell+1)k$, и видим, что в силу (5.3), условие

$$\min_{j\in J_\ell}\left(\overline{u}_{(\ell k,j]} - \overline{u}_{(j,(\ell+1)k]}\right) \geqslant \frac{k(1-\gamma\rho t^2)}{2nt}$$

гарантирует единый кластер к моменту времени t из блока J_ℓ. Таким образом имеем

$$\mathbb{P}\left\{L_n(t) < (1-2\varepsilon)k\right\} \leqslant (1-P_1)^\nu \leqslant \exp\{-\nu P_1\}, \tag{5.4}$$

где $\nu := \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ означает число блоков и

$$P_1 := \mathbb{P}\left\{\min_{j\in J_0}\left(\overline{u}_{(0,j]} - \overline{u}_{(j,k]}\right) \geqslant \frac{k(1-\gamma\rho t^2)}{2nt}\right\}.$$

Выразим средние скорости через случайное блуждание

$$S_j := \sum_{i=1}^{j} u_j, \quad j \geqslant 0.$$

Тогда $\overline{u}_{(0,j]} - \overline{u}_{(j,k]} = \frac{kS_j - jS_k}{j(k-j)}$ и таким образом

$$P_1 = \mathbb{P}\left\{k^{-1/2}\left(S_j - \frac{j}{k}S_k\right) \geqslant \frac{k^{3/2}(1-\gamma\rho t^2)}{2nt}\,\frac{j}{k}\left(1-\frac{j}{k}\right),\right.$$
$$\left.\varepsilon \leqslant \frac{j}{k} \leqslant 1-\varepsilon\right\}.$$

Определим k, полагая

$$k = k_n \sim (1-4\varepsilon)^{2/3}\delta_1(t)n^{2/3}(\log n)^{1/3},$$

где $\delta_1(t) := \left(\frac{2t}{1-\gamma\rho t^2}\right)^2$. Заметим, что по определению $\delta_1(t)$, $\frac{k^{3/2}(1-\gamma\rho t^2)}{2nt} \sim (1-4\varepsilon)\delta_1(\log n)^{1/2}$. Соответственно, для всех больших n,

$$P_1 \geqslant \mathbb{P}\left\{k^{-1/2}\left(S_j - \frac{j}{k}S_k\right) \geqslant (1-3\varepsilon)\frac{j}{k}\left(1-\frac{j}{k}\right)\delta_1(\log n)^{1/2},\right.$$
$$\left.\varepsilon \leqslant \frac{j}{k} \leqslant 1-\varepsilon\right\}.$$

Мы можем приблизить случайные величины S_j винеровским процессом W.

Итак, мы имеем

$$P_1 \geqslant \mathbb{P}\left\{k^{-1/2}\left(W(j) - \frac{j}{k}W(k)\right) \geqslant (1-\varepsilon)\frac{j}{k}\left(1-\frac{j}{k}\right)\delta_1(\log n)^{1/2},\right.$$
$$\left.k^{-1/2}|W(j)-S_j| \leqslant \varepsilon\frac{j}{k}\left(1-\frac{j}{k}\right)\delta_1(\log n)^{1/2}, \varepsilon \leqslant \frac{j}{k} \leqslant 1-\varepsilon\right\}$$
$$\geqslant \mathbb{P}\left\{k^{-1/2}\left(W(ks) - sW(k)\right) \geqslant (1-\varepsilon)s(1-s)\delta_1(\log n)^{1/2}, \varepsilon \leqslant s \leqslant 1-\varepsilon,\right.$$
$$\left.k^{-1/2}\max_{1\leqslant j\leqslant k}|W(j)-S_j| \leqslant \varepsilon^2(1-\varepsilon)\delta_1(\log n)^{1/2}\right\}.$$

Так как $s \mapsto k^{-1/2}W(ks)$, $s \geqslant 0$, также винеровский процесс, мы получаем $P_1 \geqslant P_2 - P_3$, где

$$P_2 := \mathbb{P}\left\{W(s) - sW(1) \geqslant (1-\varepsilon)s(1-s)\delta_1(\log n)^{1/2},\ \varepsilon \leqslant s \leqslant 1-\varepsilon\right\},$$

$$P_3 := \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant k} |W(j) - S_j| \geqslant \varepsilon^2(1-\varepsilon)k^{1/2}\delta_1(\log n)^{1/2}\right\}.$$

Чтобы оценить P_2, мы применим функциональный принцип больших уклонений (см. например, [13, глава 12, теорема 6]) к броуновскому мосту $\overset{\circ}{W}(s) = W(s) - sW(1)$:

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^2}\log \mathbb{P}\left\{W(s) - sW(1) \geqslant R\,s(1-s), \varepsilon \leqslant s \leqslant 1-\varepsilon\right\} \geqslant -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-2s)^2 ds = -\frac{1}{6}.$$

Получим

$$P_2 \geqslant \exp\left\{-\frac{1}{6}\left(\varepsilon^2(1-\varepsilon)\delta_1\right)^2 \log n\right\} = n^{-\frac{1}{6}\left(\varepsilon^2(1-\varepsilon)\delta_1\right)^2}.$$

Теперь покажем, что P_3 незначительно по сравнению с P_2. Мы можем применить оценку Саханенко (см. [15]), которая утверждает, что при условии конечных p-моментов,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant k} |W_j - S_j| \geqslant r\right\} \leqslant \frac{C\,k}{r^p}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r > 0,$$

где $C > 0$ некая константа.

Действительно,

$$P_3 \leqslant \frac{ck}{k^{p/2}(\log n)^{p/2}} = \frac{ck^{1-p/2}}{(\log n)^{p/2}} \asymp n^{\frac{2-p}{3}}(\log n)^{(1-\frac{p}{2})/3-\frac{p}{2}}.$$

Выбирая $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, p)$ достаточно малым, можно добиться, чтобы $P_2 \gg P_3$ и чтобы

$$\nu P_1 \asymp \frac{n}{k}\,P_1 \asymp \frac{n^{1/3}}{(\log n)^{1/3}}\,P_2.$$

Выражение справа стремится к бесконечности. В силу (5.4) мы получаем:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L_n(t)}{n^{2/3}(\log n)^{1/3}} \geqslant (1-2\varepsilon)(1-4\varepsilon)^{2/3}\delta_1(t) \quad \text{по вероятности.}$$

Таким образом теорема доказана, так как ε может быть выбрано сколь угодно малым.

5.3. Доказательство теоремы 3.3

Введем

$$(\xi_n) := \begin{cases} \dfrac{L_n(t)}{n^{\frac{p+1}{2p}}} & \text{при} \quad 2 \le p < 3 \\ \dfrac{L_n(t)}{n^{2/3}(\log n)^{1/3}} & \text{при} \quad 3 = p. \end{cases}$$

Зафиксируем $t < T_*$. Докажем, что для этого t последовательность (ξ_n) асимптотически ограничена по вероятности. Фиксируем $\mu > 0$ и положим $k = k_n \sim \mu n^{\omega}$.

Прежде, чем применять основную оценку (4.15), напомним обобщенное неравенство Колмогорова для максимумов сумм независимых величин (см. например [16, стр. 35]) Оно говорит, что если x удовлетворяет соотношению

$$\mathbb{P}\left\{|S_k - S_j| > x\right\} \leqslant \frac{1}{2}\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \tag{5.5}$$

то при всех $M > 0$ верно

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant k} |S_j| > M + x\right\} \leqslant 2\mathbb{P}\left\{|S_k| > M\right\}.$$

Выберем такое $r > 0$, что

$$\max_{1\leqslant j\leqslant k} \mathbb{P}\left\{\frac{|S_j|}{k^{1/2}} > r\right\} < \frac{1}{2}$$

(это возможно в силу центральной предельной теоремы, справедливой при $2 \le p$). Положим $x = rk^{1/2}$. Тогда для любого $j \leqslant k$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{|S_k - S_j| > x\right\} =& \mathbb{P}\left\{|S_k - S_j| > rk^{1/2}\right\} = \mathbb{P}\left\{|S_{k-j}| > rk^{1/2}\right\} \\ \leqslant& \mathbb{P}\left\{|S_{k-j}| > r(k-j)^{1/2}\right\} < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

и условие (5.5) выполнено. Поэтому для любого $M > 0$ справедливо

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{|S_j|}{k^{1/2}} > M + r\right\} \leqslant 2\mathbb{P}\left\{\frac{|S_k|}{k^{1/2}} > M\right\}.$$

Вспомним, что r – положительная постоянная, независящая от n. Следовательно, начиная с некоторого n_0 для любого $n > n_0$ верно

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{|S_j|}{k^{1/2}} > f^{-1}(t)\frac{\gamma\rho\ k^{3/2}}{2^{7/2}n}\right\}$$

$$\leqslant \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{|S_j|}{k^{1/2}} > \frac{1}{2}f^{-1}(t)\frac{\gamma\rho\ k^{3/2}}{2^{5}n} + r\right\}$$

$$\leqslant 2\mathbb{P}\left\{\frac{|S_k|}{k^{1/2}} > f^{-1}(t)\frac{\gamma\rho\ k^{3/2}}{2^{6}\,n}\right\}. \tag{5.6}$$

Теперь мы можем применить оценку С. В. Нагаева из [14]. Заменяя в (5.6) k на $2k$, получаем из (4.15)

$$\mathbb{P}\left\{L_n(t) \geqslant k\right\} \leqslant \frac{n}{k}\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant 2k}\frac{|S_j|}{(2k)^{1/2}} > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ k^{3/2}}{2^{7/2}\,n}\right\}$$

$$\leqslant \frac{2n}{k}\mathbb{P}\left\{\frac{|S_{2k}|}{(2k)^{1/2}} > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ (2k)^{3/2}}{2^{6}\,n}\right\}$$

$$= \frac{2n}{k}\mathbb{P}\left\{\frac{|S_{2k}|}{(2k)^{1/2}} > f^{-1}(t)\ \frac{\gamma\rho\ k^{3/2}}{2^{9/2}\,n}\right\}$$

$$\leqslant \frac{n}{k}C_{\alpha,p}\left[k^{1-p/2}\mathbb{E}|u_i|^p y^{-p} + \exp\{-\alpha y^2/2\}\right], \tag{5.7}$$

где $y = f^{-1}(t)\frac{\gamma\rho\ k^{3/2}}{2^{9/2}\,n}$, $\alpha \in (0,1)$, $C_{\alpha,p} > 0$ – положительная константа, зависящая только от α и p.

Первое слагаемое в (5.7) с точностью до константы имеет вид

$$\frac{n}{k}\frac{k^{(1-\frac{p}{2})}n^p}{k^{\frac{3}{2}p}} = n^{p+1}k^{-2p}.$$

Что касается второго слагаемого в (5.7), то оно имеет вид

$$\frac{n}{k}\exp\left(-c\frac{k^3}{n^2}\right).$$

Теперь рассмотрим отдельно два случая.

а) $2 \le p < 3$, $k = k(n) = \mu n^{\frac{p+1}{2p}}$. Тогда первое слагаемое будет мало при больших μ:

$$n^{p+1}k^{-2p} = n^{p+1}\mu^{-2p}n^{-\frac{p+1}{2p}2p} = \mu^{-2p}.$$

Второе слагаемое будет стремится к нулю при любом фиксированном μ, так как $\frac{p+1}{2p} > \frac{2}{3}$:

$$\frac{n}{k}\exp\left(-c\frac{k^3}{n^2}\right) = \mu^{-1}n^{1-\frac{p+1}{2p}}\exp\left(-c\mu^3 n^{3(\frac{p+1}{2p})-2}\right) =$$
$$= \mu^{-1}n^{\frac{p-1}{2p}}\exp\left(-c\mu^3 n^{\frac{3-p}{2p}}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to 0.$$

Поэтому

$$\lim_{\mu\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\{L_n(t) > \mu n^{\frac{p+1}{2p}}\} = 0.$$

б) $p = 3$, $k = k(n) = \mu n^{2/3}(\log n)^{1/3}$. Тогда первое слагаемое будет стремится к нулю при любом фиксированном μ:

$$n^{p+1}k^{-2p} = n^4\mu^{-6}\left(n^{2/3}\log n\right)^{-6} = \mu^{-6}(\log n)^{-6} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to 0.$$

Второе слагаемое будет стремиться к нулю при $n \to 0$ *для всех достаточно больших* μ:

$$\frac{n}{k}\exp\left(-c\frac{k^3}{n^2}\right) = \frac{n^{1/3}}{\mu(\log n)^{1/3}}\exp\left(-c\mu^3\log n\right) \to 0$$
$$\text{при} \quad n \to 0, \quad \text{если} \quad c\mu^3 \ge 1/3.$$

Итак, отношение ξ_n асимптотически ограничено по вероятности. □

Я выражаю благодарность своему научному руководителю Лифшицу Михаилу Анатольевичу за помощь в работе над статьёй.

Литература

1. J. C. Bonvin, Ph. A. Martin, J. Piasecki, X. Zotos, *Statistics of mass aggregation in a self-gravitating one-dimensional gas.* — J. Statist. Phys. **91** (1998) 177–197.
2. A. Dermoune, *Probabilistic interpretation of sticky particle model.* — Ann. Probab. **27** (1999) 1357–1367.
3. A. Dermoune, *Sticky particle model and propagation of chaos.* — Nonlinear Anal. Ser. A **45** (2001) 529–541.
4. E. W. Rykov, Yu. G. Sinai, *Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics.* — Comm. Math. Phys. **177** (1996), 349–380.
5. C. Giraud, *Clustering in a self-gravitating one-dimensional gas at zero temperature.* — J. Statist. Phys. **105** (2001), 585–604.
6. M. A. Lifshits, Z. Shi, *Aggregation rates in one-dimensional stochastic systems with adhesion and gravitation.* — Ann.Probab. **33** (2005), 725–752.
7. Ph. A. Martin, J. Piasecki, *Aggregation dynamics in a self-gravitating one-dimensional gas.* — J. Statist. Phys. **84** (1996), 837–857.
8. S. F. Shandarin, Ya. B. Zeldovich, *The large-scale structure of the universe: turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium.*— Rev. Modern Physics **61** (1989) 185–220.
9. Ya. B. Zeldovich, *Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations.* — Astronom. Astrophys. **5** (1970), 84–89.
10. П. Биллингсли, *Сходимоцть вероятностных мер.* Наука, М., 1977.
11. В. В. Высоцкий, *Энергия и кластеры в системах неупругих притягивающихся частиц.* — Теория вероятн. и ее примен. **50** (2005) 241—265.
12. Л. В. Куоза, М. А., Лифшиц, *Агрегация в одномерной модели газа с устойчивыми начальными данными.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **311** (2004), 161–178.
13. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции.* — ТВ и МС, Киев, 1995.
14. С. В. Нагаев, *Некоторые уточнения вероятностных и моментных неравенств.* — Теория вероятн. и ее примен. **42** (1997), 832–838.
15. А. И. Саханенко, *Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами.* — Труды Ин-та Математики СО АН СССР **3** (1984), 4–49.
16. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* 2-е изд. Наука, М., 1986.
17. Т. Суидан, *Одномерный гравитационно взаимодейстеующий газ и выпуклая миноранта броуновского движения.* — Успехи матем. наук, **56** No. 4 (2001), 73–96.

Zakharova V. F. Aggregation rates in one-dimensional stochastic gas model with finite polynomial moments of particle speeds.

We consider one-dimensional system of auto-gravitating sticky particles with random initial speeds and describe the process of aggregation in terms of the largest cluster size L_n at any fixed time prior to the critical time. We study the asymptotic behavior of L_n for the warm gas, i.e., for a system of particles with nonzero initial speeds $v_i(0) = u_i$, where (u_i) is a family of i.i.d. random variables with mean zero, unit variance and finite p-th moment $E(|u_i|^p) < \infty$, $p \geq 2$, and obtain sharp lower and upper bounds for $L_n(t)$.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: areliz@rambler.ru

Поступило 8 ноября 2007 г.