Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

А. Ю. Зайцев

ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ СИЛЬНОЙ ГАУССОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

1. Введение

Цель этой статьи – вывести новые оценки точности сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых одинаково распределенных $\mathbf{R}^d$-значных случайных векторов ξ_j с конечными моментами $\mathbf{E}\,H\,(\|\xi_1\|) < \infty$, где $H\,(x)$ – монотонная функция, растущая не медленнее, чем $x^{2+\delta}$ и не быстрее, чем e^{cx} (см. теоремы 2–4 ниже). Мы получим обобщения и уточнения результатов У. Айнмаля [11]. В работе [11] он получил многомерные результаты об оптимальной точности сильной гауссовской аппроксимации бесконечных последовательностей сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов с $\mathbf{E}\,H\,(\|\xi_1\|) < \infty$ где H – монотонная функция, растущая не медленнее, чем $x^{3+\delta}$ и не быстрее, чем $e^{c\sqrt{x}}$. В настоящей статье, опираясь на результаты [25], мы получим результаты для функций H, которые могут расти быстрее, чем $e^{c\sqrt{x}}$.

Будет рассматриваться задача о построении на одном вероятностном пространстве последовательности независимых случайных векторов $X_1, \dots, X_n$ (с заданными распределениями) и соответствующей последовательности независимых гауссовских случайных векторов $Y_1, \dots, Y_n$ таким образом, чтобы величина

$$\Delta(X,Y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left\| \sum_{i=1}^{k} X_i - \sum_{i=1}^{k} Y_i \right\|$$

была бы по возможности мала с достаточно большой вероятно-

Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-00911, НШ 4222.2006.1 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

стью. Именно к этой задаче сводится оценивание точности сильной аппроксимации в принципе инвариантности.

Точность сильной аппроксимации в одномерном принципе инвариантности изучалась многими авторами (см., например, работы Ю. В. Прохорова [17], А. В. Скорохода [23], А. А. Боровкова [3], М. Черге и П. Ревеса [6] и библиографию в книге М. Черге и П. Ревеса [7] и статьях Ш. Черге и П. Холла [8], П. Майора [15], А. А. Боровкова и А. И. Саханенко [4, 5] и Киман Шао [22]). Я. Комлош, П. Майор и Г. Тушнади (КМТ) [14] предложили новый метод диадической аппроксимации и получили оптимальную точность сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. А. И. Саханенко [18] обобщил и существенно уточнил результаты КМТ в случае неодинаково распределенных случайных величин. Затем, в работе [19], А. И. Саханенко использовал результат [18] для получения оптимальных оценок точности сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых случайных величин ξ_j с конечными моментами вида $\mathbf{E}\,H\left(|\xi_j|\right)$, где $H\left(x\right)$ – монотонная функция, растущая не медленнее, чем x^2 и не быстрее, чем e^{cx}. Наиболее законченные результаты были получены в случае $H\left(x\right) = x^{\gamma}$, $\gamma \geqslant 2$. Следует упомянуть недавние результаты А. И. Саханенко [21], который уточнил результаты [19], сформулировав оценки в терминах урезанных моментов.

Многомерные оценки точности сильной аппроксимации в принципе инвариантности можно найти в работах В. В. Городецкого [13], И. Беркеша и У. Филиппа [1], У. Филиппа [16], Э. Бергера [2], У. Айнмаля [9, 10] и А. И. Саханенко [20]. Большинство из упомянутых работ содержат результаты для случая $H\left(x\right) = x^{\gamma}$ при достаточно малых значениях $\gamma \geqslant 2$ или оценки расстояния Леви–Прохорова и ему подобных величин. Оценивание расстояния Леви–Прохорова (вместе с теоремой Штрассена–Дадли) дает возможность получать утверждения о сильной аппроксимации для конкретных значений аргумента z (см. Теорему 4). Это означает, что вероятностное пространство зависит от этого z. В недавней работе автора [28] можно найти многомерные аналоги несколько ослабленных вариантов результатов А. И. Саханенко [19], которые справедливы для широких интервалов значений z одновременно. В настоящей статье мы расширим эти интервалы, когда слагаемые одинаково распределены, во многих случаях до всей вещественной оси.

Айнмаль [11] получил оптимальные результаты для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов с $\mathbf{E}\, H\left(\|\xi_1\|\right) < \infty$ для некоторых функций H с вероятностным пространством, зависяшим от z. В частности, он получил оценки с оптимальной точностью в случае $H\left(x\right) = x^\gamma$, $\gamma > 3$. Случай $2 < \gamma \leqslant 3$ был исследован ранее Бергером [2], см. также работу А. И. Саханенко [20]. Следуя КМТ [14] и Саханенко [19], Айнмаль [11] построил доказательство на основе своего же результата для векторов с конечными экспоненциальными моментами. Этот результат содержал лишний логарифмический множитель в соответствующих неравенствах. Автор [25, 26] устранил логарифмический множитель из результата У. Айнмаля [11] и получил многомерные аналоги результатов КМТ и Саханенко. В совместном препринте Ф. Гетце и автора [12] в случае $H\left(x\right) = x^\gamma$, $\gamma > 2$, были получены новые результаты, которые обобщают и усиливают соответствующие результаты Айнмаля [11].

Ниже нам потребуются некоторые обозначения. Распределения случайных векторов ξ будут обозначаться $\mathcal{L}(\xi)$. В дальнейшем $\log^* b = \max\left\{1, \log b\right\}$ при $b > 0$. Мы будем обозначать символом $\mathbb{I}$ тождественный оператор в $\mathbf{R}^d$.

Пусть $\mathcal{A}_d(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, $d \in \mathbf{N}$, – класс d-мерных распределений, введенный в работе автора [24], см. также [25–27]. Класс $\mathcal{A}_d(\tau)$ (с фиксированным $\tau \geqslant 0$) состоит из d-мерных распределений F, для которых функция $\varphi(z) = \varphi(F, z) = \log \int_{\mathbf{R}^d} e^{\langle z, x\rangle} F\{dx\}$ $(\varphi(0) = 0)$ определена и аналитична при $\|z\|\,\tau < 1$, $z \in \mathbf{C}^d$, и $\left|d_u d_v^2\, \varphi(z)\right| \leqslant \|u\|\tau \left\langle \mathbb{D} v, v\right\rangle$ для всех $u, v \in \mathbf{R}^d$ и $\|z\|\,\tau < 1$, где $\mathbb{D} = \operatorname{cov} F$ – ковариационный оператор, соответствующий F, а $d_u\varphi$ – производная функции φ в направлении u. Ниже мы будем также использовать обозначение $\operatorname{cov}\xi = \operatorname{cov}\mathcal{L}(\xi)$. Нам потребуются простейшие свойства классов $\mathcal{A}_d(\tau)$, перечисленные в [27].

Доказательства результатов настоящей работы основаны на следующей Теореме 1, доказанной автором в [25].

Теорема 1. *Пусть $\tau \geqslant 1$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые случайные векторы с $\mathcal{L}(\xi_j) \in \mathcal{A}_d(\tau)$, $\mathbf{E}\,\xi_j = 0$, $\operatorname{cov}\xi_j = \mathbb{I}$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых случайных векторов $X_1, \ldots, X_n$ и последовательность независимых гауссовских случайных векторов $Y_1, \ldots, Y_n$ таким образом, что $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi_j)$, $\mathbf{E}\, Y_j = 0$, $\operatorname{cov} Y_j = \mathbb{I}$,*

$j = 1, \ldots, n$, и

$$\mathbf{E}\,\exp\left(a_1\,\Delta(X,Y)/\tau\right) \leqslant \exp\left(a_2\,\log^*\left(n/\tau^2\right)\right),$$

где a_1, a_2 – положительные величины, зависящие только от d.

Теорема 1 позволила устранить логарифмический множитель из результата У. Айнмаля [11] и получить многомерный аналог результата КМТ [14] для векторов с конечными экспоненциальными моментами. В работе [26] автор обобщил Теорему 1 на случай неодинаково распределенных слагаемых.

Пусть $\mathcal{G}(u)$, $u \geqslant 0$, – класс таких положительных функций $G(\,\cdot\,)$, что функции $G(x)$ и $x/\log G(x)$ не убывают при $x > u$. Например, функции $G(x) = x^\gamma$, $\gamma > 0$, и $\exp\left(\lambda x^\beta\right)$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\lambda > 0$, принадлежат $\mathcal{G}(e)$ и $\mathcal{G}(0)$ соответственно (см. [19]).

Для неотрицательных δ и x_0 введем класс $\mathcal{H}(\delta, x_0)$ таких неотрицательных неубывающих функций $H : [0,\infty) \to \mathbf{R}^1$, что функции $H(x)/x^{2+\delta} \underset{x\to\infty}{\to} \infty$ и $x/\log H(x)$ не убывают при $x \geqslant x_0$.

Пусть $H \in \mathcal{H}(\delta, x_0)$ и $H^{-1}(\,\cdot\,)$ – обратная функция для H. Тогда функция $H^{-1}(y)/y^{1/(2+\delta)}$ не возрастает при $y \geqslant H(x_0)$. Более того,

$$x^{2+\delta} H(x_0)/x_0^{2+\delta} \leqslant H(x) \leqslant \exp\left(x\,\log H(x_0)/x_0\right), \quad \text{при } x \geqslant x_0. \tag{1.1}$$

Для произвольного случайного вектора ξ мы будем обозначать $\xi^{[u]}$ его срезку на уровне $u > 0$:

$$\xi^{[u]} = \begin{cases} \xi, & \text{если } \|\xi\| \leqslant u, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Положим

$$\xi^{(u)} = \xi - \xi^{[u]}, \quad \xi^{\{u\}} = \xi^{[u]} - \mathbf{E}\,\xi^{[u]}. \tag{1.3}$$

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы 2–4.

Теорема 2. *Пусть $x_0 > 0$, $0 < \delta < 1/2$ и $n \in \mathbf{N}$. Пусть случайный вектор ξ имеет $\mathbf{E}\,\xi = 0$, $\operatorname{cov}\xi = \mathbb{I}$ и*

$$L_H \overset{\text{def}}{=} n\,\mathbf{E}\,H\left(\|\xi\|\right) < \infty, \tag{1.4}$$

где $H \in \mathcal{H}(\delta, x_0)$. Пусть

$$u \geqslant H^{-1}(L_H) \tag{1.5}$$

и $G(\,\cdot\,) \in \mathcal{G}(u)$, *где* $H^{-1}(\,\cdot\,)$ – *обратная функция для* $H(\,\cdot\,)$, *а*

$$G(x) = H(x)/L_H. \tag{1.6}$$

Тогда существует такое n_0, *что для любого* $n \geqslant n_0$ *можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов* $X, X_1, \ldots, X_n$ *и соответствующую последовательность независимых гауссовских случайных векторов* $Y, Y_1, \ldots, Y_n$ *таким образом, что* $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\xi)$, $\mathbf{E}\, Y = 0$, $\operatorname{cov} Y = \mathbb{I}$ *и*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\Delta(X,Y) > x + x_1 + x_2 + A(u)\right) &\\ \leqslant 2\,\exp\left(-n\,x_2^2/32\,B^4(u)\right) &+ \exp\left(-\ \frac{a_3\,x_1\,\log H(u)}{u}\right) \\ &+ \mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} \|\xi_j\| > z\right) + e\,G^{1-x/z}(z)/G(u), \end{aligned}$$

где

$$B^2(u) \stackrel{\text{def}}{=} n\,\mathbf{E}\,\big\|\xi^{(u)}\big\|^2 \leqslant u^2, \tag{1.7}$$

$$A(u) \stackrel{\text{def}}{=} n\,\big\|\,\mathbf{E}\,\xi^{[u]}\big\| = n\,\big\|\,\mathbf{E}\,\xi^{(u)}\big\|, \tag{1.8}$$

если $x \geqslant z \geqslant u$, $x_1 > a_4\, u$ *и* $x_2 > c_0\,B^2(u)\sqrt{d}/\sqrt{n}$, *где* a_3, a_4 *и* n_0 – *положительные величины, зависящие только от* d, $\mathcal{L}(\xi)$ *и от функции* $H(\,\cdot\,)$, *а* c_0 – *абсолютная постоянная.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 при*

$$u = C_1\,H^{-1}(C_2\,L_H), \tag{1.9}$$

где $C_1 \geqslant 1$ *и* $C_2 \geqslant 1$ – *некоторые положительные постоянные. Тогда утверждение теоремы 2 справедливо для любого* $n \geqslant 1$ *с*

$$\mathbf{P}\left(\Delta(X,Y) > a_5\,z\right) \leqslant \ \frac{a_6\,n}{H(z)}\,, \tag{1.10}$$

для любого $z > 0$, *где* a_5 *и* a_6 – *положительные величины, зависящие только от* C_1, C_2, d, $\mathcal{L}(\xi)$ *и от функции* $H(\,\cdot\,)$.

Теорема 4. *Пусть случайный вектор* ξ *и функция* H *удовлетворяют условиям теоремы 2, за исключением условий* $G(\,\cdot\,) \in \mathcal{G}(u)$ *и* (1.5). *Тогда, для любого* $z > 0$, *можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов* $X, X_1, \ldots, X_n$ *и последовательность независимых гауссовских случайных векторов*

$Y, Y_1, \dots, Y_n$ *таким образом, что* $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\xi)$, $\mathbf{E}\, Y = 0$, $\operatorname{cov} Y = \mathbb{I}$, *и*

$$\mathbf{P}\,\big(\Delta(X,Y) > a_7\, z\big) \leqslant \frac{a_8\, n}{H(z)}, \tag{1.11}$$

где a_7, a_8 *– положительные величины, зависящие только от* d, $\mathcal{L}(\xi)$ *и от функции* $H(\,\cdot\,)$.

Легко видеть, что утверждения теорем 3 и 4 остаются справедливыми без предположения $\operatorname{cov}\xi = \mathbb{I}$.

Теорема 4 является обобщением теоремы 4 из работы У. Айнмаля [11], доказавшего то же утверждение для функций H из класса $\widetilde{\mathcal{H}}(\delta, x_0)$ таких неотрицательных неубывающих функций H, что функции $H(x)/x^{3+\delta}$ и $\sqrt{x}/\log H(x)$ не убывают при $x \geqslant x_0$. Ясно, что существуют функции, которые принадлежат $\mathcal{H}(\delta, x_0)$ и не принадлежат $\widetilde{\mathcal{H}}(\delta, x_0)$. В качестве примера можно привести функции $H(x) = x^\gamma$, $2 < \gamma \leqslant 3$, и $H(x) = \exp\big(\lambda x^\beta\big)$, $1/2 < \beta \leqslant 1$, $\lambda > 0$.

Утверждение теоремы 3 гораздо сильнее утверждения теоремы 4, поскольку (1.10) выполняется при всех $z > 0$ одновременно на одном и том же вероятностном пространстве, в то время как в теореме 4 вероятностное пространство зависит от z и (1.11) может не выполняться для иных значений z. С другой стороны, в теореме 3 предполагается выполнение условия $G(\,\cdot\,) \in \mathcal{G}(u)$ с u из (1.9). Существуют функции, которые удовлетворяют условиям Теоремы 4 и для которых условие $G(\,\cdot\,) \in \mathcal{G}(u)$ не выполняется при u из (1.9). В качестве примера можно привести функции, которые ведут себя как $\exp\big(\lambda x\big)$, $\lambda > 0$, на некоторых интервалах значений аргумента x. Заметим, впрочем, что утверждение теоремы 3 при $H(x) \equiv \exp\big(\lambda x\big)$ легко выводится из теоремы 1.

Пример функций H, удовлетворяющих условию $G(\,\cdot\,) \in \mathcal{G}(u)$ с u из (1.9), содержится в работе автора [28]. Пусть H – такая неотрицательная функция, что $H(0) = 0$, функция $H(x)/x^2$ не убывает, а функция $H(x)/x^\lambda$ не возрастает при некотором $\lambda > 2$. Тогда при доказательстве следствия 2 в [28] было показано, что $G(\,\cdot\,) \in \mathcal{G}(u)$ при $u = H^{-1}(e^\lambda L_H)$. В частности, можно рассмотреть $H(x) = x^\gamma$, $\gamma > 2$. Таким образом, Теорема 3 позволяет устранить логарифмические ограничения на значения z из формулировок следствий 2 и 3 работы автора [28] в случае одинаково распределенных слагаемых. Заметим, что в недавнем совместном препринте Ф. Гетце и автора [12], содержится даже более сильное утверждение в случае $H(x) = x^\gamma$, $\gamma > 2$. Показано, что существует конструкция, для которой $\mathbf{E}\,(\Delta(X,Y))^\gamma \leqslant c(d,\gamma)\,n\,\mathbf{E}\,H\,(\|\xi\|)$. При этом в [12] рассматривается случай неодинаково распределенных слагаемых.

Еще один пример дает функция $H(x) = \exp\bigl(\lambda\,x^\beta\bigr)$, $0 < \beta < 1$. В этом случае $G(\,\cdot\,) \in \mathcal{G}(u)$ при $u = (1-\beta)^{-1/\beta}\,H^{-1}(L_H)$. Ясно, что список примеров может быть продолжен.

Теорему 2 можно рассматривать как аналог теоремы 4 из статьи А. И. Саханенко [19] и теоремы 2 из [28]. Ее доказательство представляет собой модифицированный вариант соответствующих доказательств из [19] и [28]. Основное различие состоит в том, что мы пользуемся тем, что распределения урезанных векторов принадлежат классам $\mathcal{A}_d(\tau)$ с параметром τ, который существенно меньше уровня урезания u. Близкая идея использовалась У. Айнмалем в [11]. В полном объеме доказательство из работы Саханенко [19] обобщить пока не удалось из-за технических сложностей, возникающих в многомерном случае.

2. Доказательства

Символами $c, c_1, c_2, \ldots$ мы будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от d, $\mathcal{L}(\xi)$ и от функции $H(\,\cdot\,)$ фигурирующей в условиях теоремы 2. Запись $A \ll B$ будет означать, что существует такая c, что $A \leqslant c\,B$.

Пусть ξ – случайный вектор, удовлетворяющий условиям теоремы 2, а $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – его независимые копии. Пусть векторы $\xi^{[u]}, \xi^{(u)}, \xi^{\{u\}}$, $u > 0$, определены соотношениями (1.2) и (1.3). Ясно, что $\mathbf{E}\,\xi^{(u)} + \mathbf{E}\,\xi^{[u]} = \mathbf{E}\,\xi = 0$, и, следовательно, $\bigl\|\mathbf{E}\,\xi^{(u)}\bigr\| = \bigl\|\mathbf{E}\,\xi^{[u]}\bigr\| \leqslant \mathbf{E}\,\bigl\|\xi^{(u)}\bigr\|$. Легко видеть, что

$$2\,\mathbf{E}\,\bigl\langle \xi^{(u)}, v\bigr\rangle^2 \geqslant \mathbf{D}\,\bigl\langle \xi, v\bigr\rangle - \mathbf{D}\,\bigl\langle \xi^{[u]}, v\bigr\rangle \geqslant \mathbf{E}\,\bigl\langle \xi^{(u)}, v\bigr\rangle^2 \qquad (2.1)$$

при всех $v \in \mathbf{R}^d$ (см., например, неравенство (2.4) в [28]).

Рассмотрим независимые одинаково распределенные гауссовские случайные векторы $\eta^{\{u\}}, \eta_1^{\{u\}}, \ldots, \eta_n^{\{u\}}$ с

$$\mathbf{E}\,\eta^{\{u\}} = 0, \quad \operatorname{cov}\eta^{\{u\}} = \operatorname{cov}\xi^{\{u\}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{D}_u.$$

Согласно (2.1), при всех $v \in \mathbf{R}^d$

$$2\,\mathbf{E}\,\bigl\langle \xi^{(u)}, v\bigr\rangle^2 \geqslant \bigl\langle v, v\bigr\rangle - \bigl\langle \mathbb{D}_u\,v, v\bigr\rangle \geqslant \mathbf{E}\,\bigl\langle \xi^{(u)}, v\bigr\rangle^2. \qquad (2.2)$$

Таким образом, операторы $\mathbb{I}-\mathbb{D}_u$ и $\mathbb{I}-\mathbb{D}_u^{1/2}$ положительно определены. Пусть $s_1^2, s_2^2, \dots, s_d^2$ – собственные числа оператора $\mathbb{D}_u$. Согласно (2.2),

$$0 \leqslant 1 - s_j^2 \leqslant 2\,\mathbf{E}\left\|\xi^{(u)}\right\|^2, \qquad j = 1, \dots, d. \tag{2.3}$$

Собственные числа оператора $\mathbb{I}-\mathbb{D}_u^{1/2}$ равны $1 - s_j$.

Обозначим $\eta_j = \mathbb{D}_u^{-1/2}\,\eta_j^{\{u\}}$ и $\eta_j^{(u)} = \eta_j - \eta_j^{\{u\}}$. Ясно, что

$$\mathbf{E}\,\eta_j = 0, \quad \operatorname{cov}\eta_j = \mathbb{I}, \quad \eta_j^{(u)} = \left(\mathbb{I}-\mathbb{D}_u^{1/2}\right)\eta_j.$$

Используя стандартное средство доказательства теорем о сильной аппроксимации – Лемму А из работы Беркеша и Филиппа [1], мы можем взять ξ_j в качестве X_j и η_j в качестве Y_j в доказательстве теоремы 2, выбирая ниже специальным образом совместное распределение $\{\xi_j^{\{u\}}\}$ и $\{\eta_j^{\{u\}}\}$.

Ковариационный оператор суммы $\sum_{j=1}^n \eta_j^{(u)}$ равен $n\left(\mathbb{I}-\mathbb{D}_u^{1/2}\right)^2$. Пусть σ_u^2 – его максимальное собственное число. Пусть величина $B^2(u)$ определена равенством (1.7). Согласно (1.7) и (2.3),

$$\sigma_u^2 = n \max_j (1 - s_j)^2 \leqslant 4\,B^4(u)/n. \tag{2.4}$$

Пусть $W, W_1, \dots, W_d$ – независимые одинаково распределенные стандартные нормальные случайные величины. Используя традиционные методы получения экспоненциальных неравенств, легко показать, что существует такая абсолютная постоянная c, что для любых $x > c\,\sigma_u\sqrt{d}$,

$$\mathbf{P}\left(\Big\|\sum_{j=1}^n \eta_j^{(u)}\Big\| > x\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\sigma_u^2 \sum_{k=1}^d W_j^2 > x^2\right) \leqslant \exp\left(-x^2/8\sigma_u^2\right). \tag{2.5}$$

Достаточно заметить, что $\mathbf{E}\,e^{hW^2} = (1-2h)^{-1/2}$ при $0 < h < 1/2$ и применить экспоненциальное неравенство Чебыщева, выбирая $h = 1/6$.

Положим

$$\Delta = \Delta(\xi, \eta), \quad \Delta^{\{u\}} = \Delta\big(\xi^{\{u\}}, \eta^{\{u\}}\big), \quad \Delta_u = \Delta\big(\xi - \mathbf{E}\,\xi^{[u]}, \eta^{\{u\}}\big). \tag{2.6}$$

Легко видеть, что

$$\Delta \leqslant \Delta_u + \delta_u + A(u), \tag{2.7}$$

где величина $A(u)$ определена в (1.8), а

$$\delta_u = \Delta(\eta, \eta^{\{u\}}). \tag{2.8}$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $H \in \mathcal{H}(\delta, x_0)$, $x \geqslant z \geqslant u$ и $x_1 \geqslant 0$. Положим $Z_j = \|\xi_j^{[z]} - \xi_j^{[u]}\| = \|\xi_j^{(z)} - \xi_j^{(u)}\|$. Ясно, что

$$Z_j = \begin{cases} \|\xi_j\|, & \text{если } u < \|\xi_j\| \leqslant z, \\ 0, & \text{в противном случае}, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2.9}$$

Согласно (1.3), (2.6) и (2.9), мы имеем

$$\Delta_u \leqslant \Delta^{\{u\}} + \sum_{j=1}^n \|\xi_j^{(u)}\| \leqslant \Delta^{\{u\}} + \sum_{j=1}^n \|\xi_j^{(z)}\| + \sum_{j=1}^n Z_j. \tag{2.10}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\Delta_u > x + x_1\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\Delta^{\{u\}} > x_1\right) + \mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|\xi_j\| > z\right) + \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^n Z_j > x\right). \tag{2.11}$$

Ясно, что в силу неравенства Чебыщева, если функция $H(x)/x^2$ не убывает при $x \geqslant x_0$, то при всех $y \geqslant x_0$

$$\mathbf{P}\left(\|\xi_j\| > y\right) \leqslant \mathbf{E}\left\|\xi^{(y)}\right\|/y \leqslant \mathbf{E}\left\|\xi^{(y)}\right\|^2/y^2 \leqslant \frac{\mathbf{E}\, H(\|\xi\|)}{H(y)}, \tag{2.12}$$

что равносильно неравенстам

$$n\,\mathbf{P}\left(\|\xi_j\| > y\right) \leqslant A(y)/y \leqslant B^2(y)/y^2 \leqslant \frac{L_H}{H(y)} = 1/G(y). \tag{2.13}$$

Повторяя доказательство формулы (2.16) из доказательства леммы 1 из [28], см. также Теорему 3 в [19], мы можем показать, что

$$\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^n Z_j > x\right) \leqslant e\, G^{1-x/z}(z)/G(u), \tag{2.14}$$

если $G(\,\cdot\,) \in \mathcal{G}(u)$. Согласно неравенстам (2.7), (2.11) и (2.14), при всех $x_1, x_2 \geqslant 0$ и $x \geqslant z \geqslant u$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\Delta > x + x_1 + x_2 + A(u)\right) \leqslant{} & \mathbf{P}\left(\delta_u > x_2\right) + \mathbf{P}\left(\Delta^{\{u\}} > x_1\right) \\ & + \mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|\xi_j\| > z\right) \\ & + e\, G^{1-x/z}(z)/G(u). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Используя неравенство Леви и учитывая, что $\eta_j - \eta_j^{\{u\}} = \eta_j^{(u)}$, мы получаем

$$\mathbf{P}\left(\delta_u > x_2\right) = \mathbf{P}\Big(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Big\| \sum_{j=1}^{k} \big(\eta_j - \eta_j^{\{u\}}\big) \Big\| > x_2\Big)$$
$$\leqslant 2\,\mathbf{P}\Big(\Big\| \sum_{j=1}^{n} \eta_j^{(u)} \Big\| > x_2\Big). \tag{2.16}$$

В силу (2.4), (2.5) и (2.16), мы имеем

$$\mathbf{P}\left(\delta_u > x_2\right) \leqslant 2 \exp\left(-n\, x_2^2/32\, B^4(u)\right) \tag{2.17}$$

при всех $x_2 > c_0\, B(u)\sqrt{d}$, где c_0 – абсолютная постоянная. Согласно определению класса $\mathcal{H}(\delta, x_0)$, существует такое $y_0 \geqslant x_0$, что

$$H(y_0) > 1 \quad \text{и} \quad H(t) > t^{2+\delta} \qquad \text{при } t \geqslant y_0. \tag{2.18}$$

Пусть $u \geqslant H^{-1}(L_H)$ и

$$w_0 = \frac{u}{\log H(u)}\,. \tag{2.19}$$

Ясно, что

$$H(u) \geqslant L_H = n\,\mathbf{E}\,H\big(\|\xi\|\big) \to \infty \qquad \text{при } n \to \infty. \tag{2.20}$$

Следовательно, при $n \geqslant n_0$ с достаточно большим n_0 в условиях теоремы 2 мы имеем:

$$\begin{gathered} u \geqslant y_0, \quad w_0 \geqslant \frac{y_0}{\log H(y_0)}\,, \qquad \frac{\big(u\,\mathbf{E}\,H(\|\xi\|)\big)^2}{(H(u))^{3/2}} \leqslant 1, \\ \log H(u) \geqslant \frac{1}{2}\log n \end{gathered} \tag{2.21}$$

и, согласно (2.12), (2.20), (2.21) и неравенству Чебыщева,

$$\big\|\mathbf{E}\,\xi^{(u)}\big\| \leqslant \frac{u\,\mathbf{E}\,H(\|\xi\|)}{H(u)} \leqslant 1 \tag{2.22}$$

и

$$\mathbf{E}\,\big\|\xi^{(u)}\big\|^2 \leqslant \frac{u^2\,\mathbf{E}\,H(\|\xi\|)}{H(u)} \leqslant \frac{1}{4}\,. \tag{2.23}$$

Из неравенств (2.2) и (2.23) следует, что при $n \geqslant n_0$ и при всех $v \in \mathbf{R}^d$

$$\frac{1}{2}\,\big\langle v, v\big\rangle \leqslant \big\langle \mathbb{D}_u\, v, v\big\rangle \leqslant \frac{5}{4}\,\big\langle v, v\big\rangle. \tag{2.24}$$

Пусть

$$w = c_1\, w_0, \tag{2.25}$$

где c_1 будет выбираться достаточно большим. Тогда, выбирая $c_1 \geqslant (\log H(y_0))/y_0$, мы получаем $w \geqslant 1$. Ниже мы будем оценивать

$$\mathbf{E}\,\big\|\xi^{\{u\}}\big\|^3 \exp\big(\big\|\xi^{\{u\}}\big\|/w\big) \ll w\,\mathbf{E}\,\big\|\xi^{\{u\}}\big\|^2 \exp\big(2\,\big\|\xi^{\{u\}}\big\|/w\big). \tag{2.26}$$

Представим математическое ожидание в правой части (2.26) в виде

$$\mathbf{E}\,\big\|\xi^{\{u\}}\big\|^2 \exp\big(2\,\big\|\xi^{\{u\}}\big\|/w\big) = I_1 + I_2 + I_3, \tag{2.27}$$

где

$$I_1 = \mathbf{E}\,\big\|\xi^{\{u\}}\big\|^2 \exp\big(2\,\big\|\xi^{\{u\}}\big\|/w\big)\,\mathbf{1}\big\{\|\xi\| < y_0\big\}, \tag{2.28}$$

$$I_2 = \mathbf{E}\,\big\|\xi^{\{u\}}\big\|^2 \exp\big(2\,\big\|\xi^{\{u\}}\big\|/w\big)\,\mathbf{1}\big\{y_0 \leqslant \|\xi\| \leqslant u\big\}, \tag{2.29}$$

и

$$I_3 = \mathbf{E}\,\big\|\xi^{\{u\}}\big\|^2 \exp\big(2\,\big\|\xi^{\{u\}}\big\|/w\big)\,\mathbf{1}\big\{\|\xi\| > u\big\}. \tag{2.30}$$

Обозначение $\mathbf{1}\{A\}$ используется здесь для индикаторной функции события A. Учитывая соотношения (1.2), (2.22), (2.24), (2.28), (2.30) и $w \geqslant 1$, мы получаем $\xi^{\{u\}} = \xi^{[u]} - \mathbf{E}\,\xi^{[u]} = \xi^{[u]} + \mathbf{E}\,\xi^{(u)}$,

$$I_1 \ll \mathbf{E}\,\big\|\xi^{\{u\}}\big\|^2 \ll d \tag{2.31}$$

и

$$I_3 = \big\|\mathbf{E}\,\xi^{(u)}\big\|^2 \exp\big(2\,\big\|\mathbf{E}\,\xi^{(u)}\big\|/w\big)\,\mathbf{P}\big(\big\|\xi\big\| > u\big) \ll 1. \tag{2.32}$$

Более того, согласно (1.2), (1.3), (2.22) и (2.29),

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathbf{E}\,\big\|\,\xi + \mathbf{E}\,\xi^{(u)}\big\|^2 \exp\big(2\,\big\|\,\xi + \mathbf{E}\,\xi^{(u)}\big\|/w\big)\,\mathbf{1}\big\{y_0 \leqslant \|\xi\| \leqslant u\big\} \\ &\ll I_4 + I_5, \end{aligned} \tag{2.33}$$

где

$$I_4 = \|\mathbf{E}\,\xi^{(u)}\|^2\, \exp\big(2u/w\big), \tag{2.34}$$

$$I_5 = \mathbf{E}\,\|\xi\|^2\, \exp\big(2\,\|\xi\|/w\big)\,\mathbf{1}\big\{y_0 \leqslant \|\xi\| \leqslant u\big\}. \tag{2.35}$$

Далее, согласно (2.19), (2.21), (2.22), (2.25) и (2.34) и выбирая $c_1 \geqslant 4$, мы получаем

$$I_4 \leqslant \frac{\big(u\,\mathbf{E}\,H(\|\xi\|)\big)^2}{(H(u))^{3/2}} \leqslant 1, \tag{2.36}$$

если $n \geqslant n_0$ достаточно велико. Используя (2.18), (2.19), (2.25) и то, что $H \in \mathcal{H}(\delta, x_0) \subset \mathcal{H}(\delta, y_0)$, мы имеем

$$\begin{aligned} I_5 &\leqslant \mathbf{E}\, \|\xi\|^2 \exp\left(2 \log H(\|\xi\|)/c_1\right) \mathbf{1}\{y_0 \leqslant \|\xi\| \leqslant u\} \\ &\leqslant \mathbf{E}\, \|\xi\|^2 \left(H(\|\xi\|)\right)^{2/c_1} \mathbf{1}\{y_0 \leqslant \|\xi\|\} \leqslant \mathbf{E}\, H(\|\xi\|), \end{aligned} \tag{2.37}$$

если $c_1 \geqslant 2\,(2+\delta)/\delta$. Собирая в одно место оценки (2.26), (2.27), (2.31)–(2.33), (2.36) и (2.37), получаем

$$\mathbf{E}\, \big\|\xi^{\{u\}}\big\|^3 \exp\left(\big\|\xi^{\{u\}}\big\|/w\right) \ll w. \tag{2.38}$$

Согласно (2.38), мы имеем при $m = 3, 4, \ldots$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\, \big\|\xi^{\{u\}}\big\|^m &\leqslant (m-3)!\, w^{m-3}\, \mathbf{E}\, \big\|\xi^{\{u\}}\big\|^3 \exp\left(\big\|\xi^{\{u\}}\big\|/w\right) \\ &\ll m!\, w^{m-2}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

В силу (2.24), неравенство (2.39) справедливо при $m = 2, 3, \ldots$.

Покажем, что $\mathcal{L}\big(\xi^{\{u\}}\big) \in \mathcal{A}_d(c_2\, w)$, где постоянная c_2 будет выбираться настолько большой, насколько это будет необходимо для справедливости проводимых ниже рассуждений. Заметим, что в работе автора [28] использовалось тривиальное соотношение $\mathcal{L}\big(\xi_j^{\{u\}}\big) \in \mathcal{A}_d(c_3\, u)$ с абсолютной постоянной c_3. Чтобы упростить формулы, обозначим $\zeta = \xi^{\{u\}}$. Пусть $z \in \mathbf{C}^d$, $\|z\|\, c_2\, w \leqslant 1$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Напомним, что $w \geqslant 1$. Выбирая c_2 достаточно большой, и используя (2.24), (2.25) и (2.39), мы обеспечим справедливость соотношений

$$\langle \mathbb{D}_u\, x, x\rangle + \langle \mathbb{D}_u\, y, y\rangle \leqslant 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 2\, \|z\|^2 \leqslant 1, \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned} \big|\mathbf{E}\, e^{\langle z,\zeta\rangle} - 1\big| &= \Big|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\, \mathbf{E}\, \langle z, \zeta\rangle^m\Big| \\ &\leqslant \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2^m}{m!} \Big(\mathbf{E}\, \big|\langle x, \zeta\rangle\big|^m + \mathbf{E}\, \big|\langle y, \zeta\rangle\big|^m\Big) \\ &\leqslant c_4 \sum_{m=2}^{\infty} 2^m \Big(\big(\|x\| w\big)^{m-2} + \big(\|y\| w\big)^{m-2}\Big)\, \|z\|^2 \\ &\leqslant 16\, c_4\, \|z\|^2 \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} \leqslant \big|\mathbf{E}\, e^{\langle z,\zeta\rangle}\big| \leqslant \frac{3}{2}\,. \tag{2.41}$$

Выбирая c_2 достаточно большой, разлагая в ряд экспоненту и используя (2.39), мы видим, что

$$\mathbf{E}\,\langle\zeta,v\rangle^2 e^{2|\langle\zeta,x\rangle|} \ll \|v\|^2 \qquad \text{при всех} \quad v\in\mathbf{R}^d. \tag{2.42}$$

Дифференцируя функцию $\varphi(V,z)$ с $V=\mathcal{L}\big(\xi^{\{u\}}\big)$ (см. (1.4)), мы получаем

$$\begin{aligned} d_u d_v^2\,\varphi(V,z) = {} & \frac{\mathbf{E}\,\langle\zeta,u\rangle\langle\zeta,v\rangle^2 e^{\langle z,\zeta\rangle}\,\mathbf{E}\,e^{\langle z,\zeta\rangle} - \mathbf{E}\,\langle\zeta,v\rangle^2 e^{\langle z,\zeta\rangle}\,\mathbf{E}\,\langle\zeta,u\rangle\,e^{\langle z,\zeta\rangle}}{\big(\mathbf{E}\,e^{\langle z,\zeta\rangle}\big)^2} \\ & - \frac{2\,\mathbf{E}\,\langle\zeta,v\rangle\,e^{\langle z,\zeta\rangle}}{\mathbf{E}\,e^{\langle z,\zeta\rangle}}\cdot\frac{\mathbf{E}\,\langle\zeta,u\rangle\langle\zeta,v\rangle\,e^{\langle z,\zeta\rangle}\,\mathbf{E}\,e^{\langle z,\zeta\rangle} - \mathbf{E}\,\langle\zeta,v\rangle\,e^{\langle z,\zeta\rangle}\,\mathbf{E}\,\langle\zeta,u\rangle\,e^{\langle z,\zeta\rangle}}{\big(\mathbf{E}\,e^{\langle z,\zeta\rangle}\big)^2}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Используя (2.24), (2.25), (2.38), (2.40)–(2.43), и неравенство Гельдера, мы имеем

$$\begin{aligned} \big|d_u d_v^2\,\varphi(V,z)\big| &\leqslant c_5\,\Big(\big(\mathbf{E}\,\langle\zeta,u\rangle^2\langle\zeta,v\rangle^2\,\mathbf{E}\,\langle\zeta,v\rangle^2 e^{2\langle\zeta,x\rangle}\big)^{1/2} \\ &\qquad + \big(\mathbf{E}\,\langle\zeta,v\rangle^2 + \mathbf{E}\,\langle\zeta,v\rangle^2 e^{2\langle\zeta,x\rangle}\big)\big(\mathbf{E}\,\langle\zeta,u\rangle^2 e^{2\langle\zeta,x\rangle}\big)^{1/2}\Big) \\ &\leqslant c_6\,\|u\|\,w\,\|v\|^2 \leqslant c_2\,w\,\|u\|\,\big\langle\mathbb{D}^{\{u\}}\,v,v\big\rangle, \end{aligned} \tag{2.44}$$

если величина c_2 выбрана достаточно большой. Отсюда следует, что $\mathcal{L}\big(\xi^{\{u\}}\big)\in\mathcal{A}_d(\tau)$ с $\tau=c_2\,w\geqslant 1$.

Используя (2.24), (2.25) и свойства классов $\mathcal{A}_d(\tau)$, мы видим, что $1/2\leqslant\big\|\mathbb{D}_u^{-1/2}\big\|\leqslant 2$ и

$$\mathcal{L}\big(\mathbb{D}_u^{-1/2}\,\xi^{\{u\}}\big)\in\mathcal{A}_d\big(\big\|\mathbb{D}_u^{-1/2}\big\|\,c_2\,w\big)\subset\mathcal{A}_d(c_7\,w_0),$$

для некоторого $c_7\geqslant 1$. Согласно Теореме 1 (применяемой к векторам $\big\{\mathbb{D}_u^{-1/2}\,\xi_j^{\{u\}}\big\}$), существует такая конструкция, что совместное распределение $\big\{\xi_j^{\{u\}}\big\}$ и $\big\{\eta_j^{\{u\}}\big\}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{E}\,\exp\Big(\frac{c_8\,\Delta^{\{u\}}}{w_0}\Big) = \mathbf{E}\,\exp\Big(\frac{c_8\,\Delta^{\{u\}}\,\log H(u)}{u}\Big) \leqslant \exp\big(c_9\,\log^*(n/\tau^2)\big), \tag{2.45}$$

где c_8 и c_9 – положительные величины, зависящие только от d, $\mathcal{L}(\xi)$ и $H(\,\cdot\,)$. Согласно (2.45) и неравенству Чебыщева,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\,\big(\Delta^{\{u\}}\geqslant x_1\big) &\leqslant \exp\Big(c_9\,\log^*(n/\tau^2) - \frac{c_8\,x_1\,\log H(u)}{u}\Big) \\ &\leqslant \exp\Big(-\frac{c_8\,x_1\,\log H(u)}{2\,u}\Big), \end{aligned} \tag{2.46}$$

если
$$c_9 \log^*(n/\tau^2) < \frac{c_8\, x_1 \log H(u)}{2\,u}. \tag{2.47}$$
Заметим, что, в соответствии с (2.21), для справедливости (2.47) достаточно предположить, что $x_1 > 4\,u\,c_9/c_8$, если $n \geqslant n_0$ достаточно велико.

Используя соотношения (2.15), (2.17) и (2.46), мы получаем при $x \geqslant z \geqslant u$, $x_1 > 4\,u\,c_9/c_8$ и $x_2 > c_0\,B^2(u)\sqrt{d}/\sqrt{n}$,
$$\mathbf{P}\left(\Delta > x + x_1 + x_2 + A(u)\right) \leqslant 2\,\exp\bigl(-n\,x_2^2/32\,B^4(u)\bigr)$$
$$+\exp\Bigl(-\frac{c_8\,x_1 \log H(u)}{2\,u}\Bigr) + \mathbf{P}\bigl(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|\xi_j\| > z\bigr) + e\,G^{1-x/z}(z)/G(u),$$
если $n \geqslant n_0$ достаточно велико. Доказана теорема 2. $\square$

Доказательство теоремы 3. Пусть $z < u$. Тогда
$$H(z/C_1) \leqslant H(u/C_1) = C_2\,L_H, \tag{2.48}$$
поскольку функция H не убывает.

Предположим теперь, что $z \geqslant u$. Условие (1.5) теоремы 2 очевидным образом выполнено. Применим теорему 2 в случае, когда
$$x_1 = (a_4 + a_3^{-1})\,z, \quad x_2 = c_0\sqrt{d}\,z \quad \text{и} \quad u \leqslant z \leqslant x = 2\,z. \tag{2.49}$$
Согласно (1.2), (1.3), (1.5), (1.7), (1.8) и (2.13), мы имеем
$$A(u)/u \leqslant B^2(u)/u^2 \leqslant L_H/H(u) \leqslant 1, \tag{2.50}$$
$$\mathbf{P}\bigl(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|\xi_j\| > z\bigr) \leqslant n\,\mathbf{P}\left(\|\xi\| > z\right) \leqslant L_H/H(z). \tag{2.51}$$
Положим $c_{10} = 3 + c_0\sqrt{d} + a_4 + a_3^{-1}$. Согласно теореме 2 и соотношениям (1.5), (1.6), (1.9), (2.49) и (2.50),
$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\Delta > c_{10}\,z\right) &\leqslant \mathbf{P}\left(\Delta > x + x_1 + x_2 + A(u)\right)\\ &\leqslant 2\,\exp\Bigl(-\frac{c_0^2\,d\,n\,z^2\,H^2(u)}{32\,u^4\,L_H^2}\Bigr) + \exp\Bigl(-\frac{z\log H(u)}{u}\Bigr)\\ &+ \mathbf{P}\bigl(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|\xi_j\| > z\bigr) + e/G(z).\end{aligned} \tag{2.52}$$
По аналогии с (2.21), можно показать, что при $n \geqslant N_0$ с достаточно большим N_0 в условиях теоремы 3 мы имеем $C_2\,L_H \geqslant H(x_0)$,
$$\log H(u) \leqslant C_1\,\log(C_2\,L_H) \leqslant 2\,C_1\,\log n$$

и

$$u^2 = (C_1\, H^{-1}(C_2\, L_H))^2 \leqslant c_{11}\, n^{2/(2+\delta)} \leqslant c_0^2\, d\, n/32 \log H(u). \qquad (2.53)$$

Следовательно, согласно (2.50) и (2.53),

$$\exp\Big(-\ \frac{c_0^2\, d\, n\, z^2\, H^2(u)}{32\, u^4\, L_H^2}\Big) \leqslant \exp\Big(-\ \frac{z\, \log H(u)}{u}\Big). \qquad (2.54)$$

Если $z \geqslant u$, то

$$\exp\Big(-\ \frac{z\, \log H(u)}{u}\Big) \leqslant \exp\big(-\log H(z)\big) = \frac{1}{H(z)}. \qquad (2.55)$$

Теперь при $n \geqslant N_0$, утверждение теоремы 3 следует из (1.6), (2.48), (2.51), (2.52), (2.54) и (2.55).

Утверждение теоремы 3 остается справедливым при $n < N_0$. Действительно, если $n < N_0$, то при любом построении $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_n$ с требуемыми распределениями мы имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(\Delta(X, Y) > z\big) &\leqslant N_0\, \mathbf{P}\big(X > z/2\, N_0\big) + N_0\, \mathbf{P}\big(Y > z/2\, N_0\big)\\ &\leqslant \frac{N_0}{H(z/2\, N_0)} + N_0 \exp\big(-c_{13}\, (z/N_0)^2\big) \leqslant \frac{c_{14}}{H(c_{15} z)}\end{aligned}$$

(см. (1.1)). Доказана теорема 3. □

Доказательство теоремы 4. Доказательство почти буквально повторяет доказательство теоремы 3. Единственное отличие состоит в том, что мы не можем использовать неравенство (2.14), для которого требуется выполнение условия $G(\cdot) \in \mathcal{G}(u)$ с u из (1.9). Поэтому мы можем применять неравенство (2.10) только при $x = z = u$. В этом случае $Z_j = 0$ и последнее слагаемое в (2.11) равно нулю. Следует также использовать (1.1) и заменить (2.53) на

$$u^2/H(u) \leqslant c_{15}\, \big(H(u)\big)^{-\delta/(2+\delta)} \leqslant c_0^2\, d\, n/32\, L_H\, \log H(u)$$

при достаточно больших $n \geqslant N_0$ и $u \geqslant u_0$, где $u_0 = H^{-1}(L_H)$. Случай $u < u_0$ тривиален. □

Литература

1. I. Berkes, W. Philipp, *Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors.* — Ann. Probab. **7** (1979), 29–54.
2. E. Berger, *Fast sichere Approximation von Partialsummen unabhängiger und stationärer ergodischer Folgen von Zufallsvectoren.* Dissertation, Universität Göttingen.
3. А. А. Боровков, *О скорости сходимости в принципе инвариантности.* — Теория вероятн. и ее примен. **18** (1973), 217–234.
4. A. A. Borovkov and A. I. Sakhanenko, *On the rate of convergence in invariance principle.* — Lect. Notes Math. **1021** (1981), 59–66.
5. А. А. Боровков, А. И. Саханенко, *Оценки скорости сходимости в принципе инвариантности для банаховых пространств.* — Теория вероятн. и ее примен. **25** (1980), 721–731.
6. M. Csörgő, P. Révész, *A new method to prove Strassen type laws of invariance principle.* I; II. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **31** (1975), 255–259; 261–269.
7. M. Csörgő, P. Révész, *Strong approximations in probability and statistics.* New York, Academic Press, 1981.
8. S. Csörgő, P. Hall, *The Komlós–Major–Tusnády approximations and their applications.* — Austral. J. Statist. **26** no. 2 (1984), 189–218.
9. U. Einmahl, *A useful estimate in the multidimensional invariance principle.* — Probab. Theor. Rel. Fields **76** no. 1 (1987), 81–101.
10. U. Einmahl, *Strong invariance principles for partial sums of independent random vectors.* — Ann. Probab. **15** (1987), 1419–1440.
11. U. Einmahl, *Extensions of results of Komlós, Major and Tusnády to the multivariate case.* — J. Multivar. Anal. **28** (1989), 20–68.
12. F. Götze and A. Yu. Zaitsev, *Bounds for the rate of strong approximation in the multidimensional invariance principle.* Preprint SFB 701 no. 07-057, Bielefeld, Bielefeld University.
13. В. В. Городецкий, *О скорости сходимости в многомерном принципе инвариантности.* — Теория вероятн. и ее примен. **20** (1975), 642–649.
14. J. Komlós, P. Major, G. Tusnády, *An approximation of partial sums of independent RV'-s and the sample DF.* I; II. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **32** (1975), 111–131; **34** (1976), 34–58.
15. P. Major, *On the invariance principle for sums of independent identically distributed random variables.* — J. Multivar. Anal. **8** (1978), 487–517.
16. W. Philipp, *Almost sure invariance principles for sums of B-valued random variables.* — Lect. Notes in Math. **709** (1979), 171–193.
17. Ю. В. Прохоров, *Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.* — Теория вероятн. и ее примен. **1** (1956), 177–238.
18. А. И. Саханенко, *Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами.* — В кн.: Труды инст. матем. СО АН СССР. т. 3, Новосибирск, Наука, 1984, с. 4–49.

19. А. И. Саханенко, *Оценки в принципе инвариантности.* — В кн.: Труды инст. матем. СО АН СССР. т. 5, Новосибирск, Наука, 1985, с. 27–44.
20. A. I. Sakhanenko, *A new way to obtain estimates in the invariance principle.* High dimensional probability, II (Seattle, 1999), Progr. Probab., 47. Boston, Birkhäuser Boston, 2000, pp. 223–245.
21. А. И. Саханенко, *Оценки в принципе инвариантности в терминах срезанных степенных моментов.* — Сибирский матем. журн. **47**, № 6 (2006), 1355–1371.
22. Qi-Man Shao, *Strong approximation theorems for independent random variables and their applications.* — J. Multivar. Anal. **52** no. 1 (1995), 107–130.
23. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов.* Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1961.
24. А. Ю. Зайцев, *Оценки расстояния Леви–Прохорова в многомерной центральной предельной теореме для случайных величин с конечными экспоненциальными моментами.* — Теория вероятн. и ее примен. **31** (1986), 246–265.
25. A. Yu. Zaitsev, *Multidimensional version of the results of Komlós, Major and Tusnády for vectors with finite exponential moments.* — ESAIM : Probability and Statistics **2** (1998), 41–108.
26. A. Yu. Zaitsev, *Multidimensional version of the results of Sakhanenko in the invariance principle for vectors with finite exponential moments.* I; II; III. — Теория вероятн. и ее примен. **45** (2000), 718–738; **46** (2001), 535–561; 744–769.
27. A. Yu. Zaitsev, *Estimates for the strong approximation in multidimensional Central Limit Theorem.* — В кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Bejing 2002. Vol. III. Invited Lectures. 2002, с. 107–116.
28. А. Ю. Зайцев, *Оценки точности сильной аппроксимации в многомерном принципе инвариантности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **339** (2006), 37–53.

Zaitsev A. Yu. Estimates for the rate of strong Gaussian approximation for the sums of i.i.d. multidimensional random vectors

The aim of this paper is to derive new optimal bounds for the rate of strong Gaussian approximation of sums of i.i.d. $\mathbf{R}^d$-valued random variables ξ_j having finite moments of the form $\mathbf{E}\,H\big(\|\xi_j\|\big)$, where $H(x)$ is a monotone function growing not slower than x^2 and not faster than e^{cx}. We obtain some generalization and improvements of the results of U. Einmahl (1989).

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 14 декабря 2007 г.