Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

М. С. Ермаков

О СЕМИПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВЫВОДАХ В ЗОНЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ

1. Введение

Принятие решений в доверительном оценивании и проверке гипотез базируется на задании событий имеющих малые вероятности. Так в доверительном оценивании доверительные множества задаются с уровнем доверия $1-\alpha$, где стандартные значения $\alpha = 0.1; 0.05, 0.01$. В проверке гипотез малые вероятности имеют ошибки первого рода. Как показывают оценки скорости сходимости, непосредственное применение Центральной Предельной Теоремы не дает желаемой точности аппроксимации для определения границ доверительного интервала в доверительном оценивании и критических значений в проверке гипотез (см. [4, 5, 11]). В тоже время при применении теорем о вероятностях умеренных уклонений точность аппроксимации получается вполне удовлетворительной (см. [4, 5, 11]).

В зоне действия Центральной Предельной Теоремы анализ качества статистических выводов основан на хорошо известных границах асимптотической эффективности. Это нижние границы асимптотической эффективности Гайека–Ле Кама [13, 20] в статистическом оценивании и эффективности по Питману в теории проверки гипотез. В зоне вероятностей больших уклонений качество статистических критериев и оценок обычно анализируется на основе асимптотических эффективностей по Бахадуру [1]. Вычисление асимптотических эффективностей по Бахадуру обычно представляет собой довольно тяжелую задачу и часто заменяется нахождением локальных эффективностей по Бахадуру, которые при довольно общих условиях регулярности совпадают с мерами эффективности, действующими в зоне Центральной Предельной Теоремы (см. [26, 18, 19, 11, 15]). Наиболее общие условия, при которых нижние границы асимптотической эффективности Гайека–Ле Кама в оценивании и эффективности по Питману в проверке гипотез переносятся на зону вероятностей умеренных уклонений, были указаны в [11]. Данные результаты были получены как для логарифмической так и точной асимптотик вероятностей умеренных уклонений статистических оценок и критериев.

Цель настоящей работы перенести данные результаты на постановку задачи семипараметрического оценивания и проверки гипотез. Хотя техника переноса результатов в зоне действия Центральной Предельной Теоремы хорошо известна и стала стандартной (см. [21, 17, 2, 24]), в зоне вероятностей умеренных уклонений возникают дополнительные условия и их интерпретация в семипараметрической постановке представляет определенный интерес.

Поскольку меры асимптотической эффективности в задачах проверки гипотез имеют в зоне вероятностей умеренных уклонений довольно непривычное задание (см. [11]) приведем их интерпретацию в случае задачи проверки гипотез о параметре сдвига нормального распределения.

Пусть дана выборка независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \dots, X_n$, имеющих нормальное распределение $EX_1 = \theta$, $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2$. Необходимо проверить гипотезу $H_0 : \theta = 0$ против альтернативы $H_1 : \theta = u_n, u_n > 0$. Для любого критерия K обозначим $\alpha(K)$ и $\beta(K)$ его вероятности ошибок первого и второго рода соответственно. Обозначим $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\{-\frac{t^2}{2}\}\, dt$. Определим обратную функцию $\Phi^{(-1)}(t)$ к $\Phi(x)$ задаваемую уравнением $\Phi(x) = t$. Согласно Лемме Неймана–Пирсона наиболее мощный критерий L задается тестовой статистикой $\sqrt{n}\sigma^{-1}\overline{X}$. Как нетрудно видеть для него справедливо следующее тождество

$$\Phi^{(-1)}(\alpha(L)) + \Phi^{(-1)}(\beta(L)) = -n^{1/2} u_n \sigma^{-1} \tag{1.1}$$

и следовательно для любой последовательности критериев K_n

$$(n u_n^2 \sigma^{-2})^{-1/2} (\Phi^{(-1)}(\alpha(K_n)) + \Phi^{(-1)}(\beta(K_n))) \geqslant -1 \tag{1.2}$$

и, как показано в [11], для любого параметрического семейства распределений P_θ, $\theta \in R^1$, для которого существует конечное информационное количество Фишера $I(\theta)$, $\theta \in R^1$ для любой последовательности критериев K_n проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$

против альтернатив $H_n : \theta = \theta_0 + u_n, u_n \to 0, nu_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$ имеет место

$$\liminf_{n\to\infty} (nu_n^2 I(\theta_0))^{-1/2}(\Phi^{(-1)}(\alpha(K_n)) + \Phi^{(-1)}(\beta(K_n))) \geqslant -1, \quad (1.3)$$

если $\alpha(K_n) < c < 1$ или $\beta(K_n) < c < 1$ для всех n.

Если $\alpha(K_n) < c < 1$ и $\beta(K_n) < c < 1$, то (1.3) может быть задано в более простой форме

$$\limsup_{n\to\infty} (nu_n^2 I(\theta_0))^{-1/2}(|2\ln\alpha(K_n)|^{1/2} + |2\ln\beta(K_n)|^{1/2}) \leqslant 1. \quad (1.4)$$

Таким образом (1.3), (1.4) дают удобное задание нижних границ для логарифмических асимптотик вероятностей ошибок первого и второго рода.

Аналог (1.3) дающий нижнюю границу для точной асимптотики вероятностей ошибок первого и второго рода имеет следующий вид

$$\liminf_{n\to\infty} (nu_n^2 I(\theta_0))^{1/2}\{n^{1/2}u_n I^{1/2} + \\ + \Phi^{-1}(\alpha(K_n)) + \Phi^{-1}(\beta(K_n))\} \geqslant 0. \quad (1.5)$$

Он доказан при несколько более жестких условиях, чем существование конечного информационного количества Фишера (см. [11]).

Последовательности критериев K_n, для которых в (1.3) (соответственно (1.5)) достигается равенство назовем эффективными в смысле логарифмической (соответственно точной) асимптотики вероятностей умеренных уклонений. Сокращенно мы будем называть их соответственно MD (moderate deviation) и SMD (strong moderate deviation) эффективностями. Аналогичной терминологии будем придерживаться и для нижних границ логарифмической и точной асимптотики статистических оценок (см. [11]).

Мы рассматриваем задачи семипараметрических статистических выводов как задачи статистических выводов о значении функционала заданного на подмножестве Γ множества всех вероятностных мер. Поскольку любая статистическая оценка и тестовая статистика допускает представление, как функционал от эмпирической меры, то задача статистических выводов обычно допускает интерпретацию в терминах данного функционала, в результате чего постановка задачи часто приобретает более общий и удобный вид. Данный подход к теории статистических выводов был предложен Чарльзом Стейном [23], однако приобрел популярность после работы Левита [21], получив дальнейшее развитие в большом числе публикаций (см. [25, 2, 3] и ссылки в них).

В зоне действия Центральной Предельной Теоремы методика доказательства нижних границ асимптотической эффективности в семипараметрическом оценивании хорошо известна. По существу доказательство основано на довольно простой редукции на к получению нижних границ в соответствующих параметрических задачах оценивания. Поскольку в параметрической постановке задачи предположения, при которых справедливы нижние границы для логарифмических асимптотик в зоне умеренных уклонений ничем не отличаются от предположений в зоне нормальной аппроксимации мы просто осуществим перенос результатов в этой ситуации на зону умеренных уклонений без каких-либо принципиальных изменений. Несколько сложнее ситуация в теории семипараметрических выводов для нижних границ точных асимптотик вероятностей умеренных уклонений. В этом случае результаты получены при дополнительных условиях и они в семипараметрической постановке допускают различные интерпретации. Две таких интерпретации мы приведем в данной работе. Естественно идея доказательства нижних границ здесь также основана на той же самой редукции к задачам параметрического оценивания.

Процедура редукции к задачам параметрического оценивания следующая. На множестве Γ строится последовательность наименее благоприятных семейств параметрических распределений и нижние границы асимптотической эффективности параметрических статистических выводов для них оказываются нижними границами асимптотической эффективности для данного функционала. Наименее благоприятные семейства распределений задаются проекцией производной по Гато функционала на множество допустимых направлений, в которых может изменяться параметрическое семейство.

Общие методы доказательства, показывающие что данные нижние границы асимптотической эффективности в зоне умеренных уклонений достигаются, предложены нами в [12] и разобраны на примере функционалов соответствующих L и M статистикам.

Результаты сформулированы для случая k независимых выборок имеющих вообще говоря разные вероятностные меры, поскольку такая постановка довольно часто встречается в теории проверки гипотез, например для проверки гипотезы об однородности. Обозначим Λ множество всех вероятностных мер на σ-алгебре Б борелевских множеств множества S. Пусть даны k выборок независимых случайных величин $X_{j1},\ldots,X_{jn_j}$, имеющих вероятностные меры $P_j \in \Lambda$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Предположим, что имеется априорная информация, что $P = P_1 \times \ldots \times P_k \in \Gamma \subseteq \Lambda^k$. Обозначим $n = n_1 + \ldots + n_k$ и предположим, что $n_j/n \to \nu_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$, при $n \to \infty$. Для данного функционала $T : \Gamma \to R^1$ мы рассматриваем следующие задачи статистических выводов. Задача оценивания состоит в оценивании значения функционала $T(P)$ если известно, что $P \in \Gamma$. задача проверки гипотезы состоит в проверке гипотезы, что $P \in \Gamma_t = \Gamma_t(T) = \{P : T(P) = t,\, P \in \Gamma\}$ против альтернатив $P \in \Gamma_t(T, u_n) = \{P : T(P) - t > u_n,\ P \in \Gamma\}$, $u_n > 0$. Для любого критерия K обозначим соответственно $\alpha(K,P)$, $P \in \Gamma_t$ и $\beta(K,P)$, $P \in \Gamma_t(T,u_n)$ его вероятности ошибок первого и второго рода.

2. MD асимптотическая эффективность

Введем стандартную терминологию (см.[24, 25, 2, 3]). Для фиксированного $P = P_1 \times \ldots \times P_k \in \Gamma$ обозначим $\Pi(\Gamma,P)$ множество всех отображений $\Psi : u \to P_u$ интервала $(0,\delta)$ в Γ для которых существуют функции $\varphi_\Psi(x_1,\ldots,x_k) = (\varphi_1(x_1),\ldots,\varphi_k(x_k))$, $\varphi_j \in L_2(P_j)$, $1 \leqslant j \leqslant k$, удовлетворяющие следующим требованиям

$$\sum_{j=1}^{k} \int_S [(dP^c_{ju}/dP_j)^{1/2} - 1 - u\varphi_j]^2 dP_j = o(u^2), \qquad P^s_{ju}(S) = o(u^2) \quad (2.1)$$

для $u \to 0$. Здесь P^c_{ju} и P^s_{ju}, $1 \leqslant j \leqslant k$, обозначают соответственно абсолютно непрерывную и сингулярные компоненты вероятностных мер P_{ju} относительно P_j. Обозначим $\Delta(\Gamma,P)$ множество всех функций φ_Ψ, $\Psi \in \Pi(\Gamma,P)$, удовлетворяющих (2.1) и определим множество $\overline{\Delta}(\Gamma,P)$ как замыкание в $L_2(P)$ множества $\Delta(\Gamma,P)$. Зададим линейное пространство $L(\Gamma,P)$ как замыкание в $L_2(P)$ линейного пространства, порожденного функциями $\varphi_\Psi \in \Delta(\Gamma,P)$. Линейное пространство $L(\Gamma,P)$ может быть интерпретировано как касательное пространство к Γ в точке P в метрике Хеллингера. Для задач статистических выводов производная функционала T в точке P определяется как элемент пространства $L(\Gamma, P)$.

Скажем, что $\tau_P \in L(\Gamma, P)$ является градиентом T на Γ в точке $P \in \Gamma$ если имеет место

$$T(P_u) - T(P) = uE[\tau_P'(X_1)\varphi_\Psi(X_1)] + o(u), \quad u \downarrow 0 \tag{2.2}$$

для всех $\Psi \in \Pi(\Gamma, P)$. Здесь $\tau_P'\varphi_\Psi$ обозначает скалярное произведение $\tau_P = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ и φ_Ψ анд $X_1 = (X_{11}, \dots, X_{k1})$.

Информация Фишера функционала T на множестве Γ в точке P равна $I(\Gamma, P) = (4\nu_1 E\tau_1^2(X_{11}) + \ldots + 4\nu_k E\tau_k^2(X_{k1}))^{-1}$.

Обозначим $I(\Gamma_t) = \sup\{I(\Gamma, P) : P \in \Gamma_t\}$.

Сделаем следующее предположение.

E. Для всех $P \in \Gamma_t$ существует градиент τ_P функционала T на Γ и $\tau_P \in \overline{\Delta}(\Gamma, P)$.

Для любой последовательности критериев K_n обозначим

$$\alpha(K_n) = \sup\{\alpha(K_n, P) : P \in \Gamma_t\}$$

и

$$\beta(K_n, u_n) = \sup\{\beta(K_n, P) : P \in \Gamma_t(T, u_n)\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* E. *Пусть* $u_n \to 0$, $nu_n^2 \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для любой последовательности критериев* K_n, *удовлетворяющей*

$$(nu_n^2)^{-1/2} \mid \Phi^{(-1)}(\alpha(K_n)) \mid \leqslant C \tag{2.3}$$

или

$$(nu_n^2)^{-1/2} \mid \Phi^{(-1)}(\beta(K_n, u_n)) \mid \leqslant C, \tag{2.4}$$

выполнено

$$\liminf_{n\to\infty} (nu_n^2 I(\Gamma_t))^{-1/2}(\Phi^{(-1)}(\alpha(K_n)) + \\ + \Phi^{(-1)}(\beta(K_n, u_n))) \geqslant -1. \tag{2.5}$$

Замечание 3.1. Легко видеть, что аналогичный результат справедлив и для множеств альтернатив $\Gamma_t^s(T, u_n) = \{P : |T(P) - t| > u_n, P \in \Gamma\}$, если последовательность критериев K_n удовлетворяет (2.3) или (2.4).

Следствие 3.1. *Пусть выполнено условие* E *и пусть* $u_n = u$. *Тогда для любых последовательностей критериев* K_{nu} *таких, что* $\alpha(K_{nu}) < C < 1$ *и* $\beta(K_{nu}) < C < 1$, *имеет место*

$$\limsup_{u\to 0}\limsup_{n\to\infty}(nu^2 I(\Gamma_t))^{-1/2}(\mid 2\log\alpha(K_{nu})\mid^{1/2} + \mid 2\log\beta(K_{nu},u)\mid^{1/2}) \leqslant 1. \tag{2.6}$$

Отметим, что нижние границы для локальных асимптотических эффективностей по Бахадуру [1], Ходжесу-Леману [14] и Чернову [6] являются частными случаями (2.6), в то время как нижняя граница для эффективности по Калленбергу [16] следует из (2.5).

Нижняя граница для логарифмической асимптотики вероятностей умеренных уклонений статистических оценок дана в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* E. *Пусть* $u_n \to 0$, $nu_n^2 \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для любой последовательности оценок* $\widehat{\theta}_n$

$$\liminf_{\delta\to 0}\liminf_{n\to\infty}\sup_{P\in U(\delta,t)}(nu_n^2 I(\Gamma_t))^{-1}\log P(|\widehat{\theta}_n - T(P)| > u_n) \geqslant -1. \tag{2.7}$$

Здесь $U(\delta,t) = \{P : |T(P)-t| < \delta,\ P\in\Gamma\}$.

Доказательства теорем т1 и 2 опущены. Они следуют непосредственно из теорем 2.2 и 2.5 в [11], используя те же самые аргументы, что и при доказательстве традиционных нижних границ семипараметрического оценивания и проверки гипотез (см. [17, 21, 9]).

Скажем, что последовательность критериев K_n удовлетворяющих (2.3) (соответственно последовательность оценок $\widehat{\theta}_n$) являются асимптотически эффективными в смысле логарифмической асимптотики вероятностей умеренных уклонений, если в (2.5) (соответственно (2.7)) достигается равенство. Чтобы упростить терминологию, мы будем называть такие оценки и критерии MD-асимптотически эффективными.

3. SLD асимптотическая эффективность. Стандартный подход

В данном разделе результаты имеют форму традиционную для нижних границ асимптотического семипараметрического оценивания. В следующем разделе эти же результаты будут даны в более нестандартной геометрической форме и будут основываться на расстоянии Хеллингера.

Зафиксируем $0 < \gamma \leqslant 1$. Определим пространство $L_{2+\gamma}(P)$, $P = P_1 \times \ldots \times P_k$ имеющее норму

$$||\zeta||_{2+\gamma}^{2+\gamma} = \sum_{j=1}^{k} \int_S |\zeta_j|^{2+\gamma} dP_j$$

где $\zeta(x_1, \ldots, x_k) = (\zeta_1(x_1), \ldots, \zeta_k(x_k))$.

Зафиксируем $C > 0$ и зададим множество $\Pi_C(\Gamma, P)$, $P \in \Gamma$, всех отображений $\Phi : u \to P_u$ из интервала $(0, \delta)$ в Γ, для которых существует функция

$$\varphi_\Psi(x_1, \ldots, x_k) = (\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_k(x_k)) \in L_{2+\gamma}(P), \quad ||\varphi_\Psi||_{2+\gamma} < C$$

такая, что

$$\int_S ((P_{ju}^c/dP_j)^{1/2} - 1 - u\varphi_j)^2 dP_j < Cu^{2+\gamma}, \quad P_{ju}^s(S) < Cu^{2+\gamma}, \quad (3.1)$$

$$\left| \int_S ((P_{ju}^c/dP_j)^{1/2} - 1)^2 dP_j - u^2 \int_S \varphi_j^2 dP_j \right| < Cu^{2+\gamma} \qquad (3.2)$$

для всех $1 \leqslant j \leqslant k$.

Обозначим $\Delta_C(\Gamma, P)$ множество всех функций φ_Ψ, $\Psi \in \Pi_C(\Gamma, P)$, заданных таким образом и определим множество $\overline{\Delta}_C(\Gamma, P)$ как замыкание в $L_{2+\gamma}(P)$ множества $\Delta_C(\Gamma, P)$.

Сделаем следующие предположения

D. $u_n^2 \max\{|n_j - n\nu_j| : 1 \leqslant j \leqslant k\} \to 0$ при $n \to \infty$.

E1. Существует C такое, что $\tau_P = (\tau_1, \ldots, \tau_k) \in \overline{\Delta}_C(\Gamma, P)$ для всех $P \in \Gamma_t$.

Здесь τ_P обозначает градиент T на Γ в точке P.

E2. Существует C_1 такое, что

$$|T(P_u) - T(P) - uE[\tau\prime_P(X_1)\varphi(X_1)]| < C_1|u|^{1+\gamma}$$

для всех $\Phi \in \Pi_C(\Gamma, P)$ и всех $P \in \Gamma_t$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* D, E1 *и* , E2. *Пусть* $u_n > Cn^{-1/2}$, $nu_n^{2+\gamma} \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для любой последовательности критериев* K_n *удовлетворяющих* (3.3) *или* (3.4)

$$\liminf_{n\to\infty}(nu_n^2 I(\Gamma_t))^{1/2}((nu_n^2 I(\Gamma_t))^{1/2} + \Phi^{-1}(\alpha(K_n))+ \Phi^{-1}(\beta(K_n, u_n))) \geqslant 0. \quad (3.3)$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* D, E1, E2 *и пусть* $nu_n^2 \to \infty$, $nu_n^{2+\gamma} \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для любой последовательности оценок* $\widehat{\theta}_n$

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{P\in U(C_n u_n, t)} \frac{P(|\widehat{\theta}_n - T(P)| > u_n)}{2\Phi(-n^{-1/2}u_n I^{1/2}(\Gamma_t))} \geqslant 1. \quad (3.4)$$

для любой последовательности $C_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

Основная идея доказательств теорем 3 и 4 та же самая, что и доказательств теорем 1, 2. Пусть $\Psi_n : u \to P_{nu}$, $\Psi_n \in \Pi_C(\Gamma, P)$ последовательность отображений такая, что $||\varphi_n - \tau_P||_{2+\gamma} < Cu_n^\gamma$, $\varphi_n = \varphi_{\Phi_n}$. Тогда как вытекает из замечания 2.7 в [11]

$$\sup_{|\theta|<C_n u_n} \frac{P_{n\theta}(|\widehat{\theta}_n - \theta| > u_n)}{2\Phi(-2n^{1/2}u_n E^{1/2}\varphi_n^2(X_1))} \geqslant 1 + \delta_n(C_n) \quad (3.5)$$

где $\delta_n(C_n) \to 0$ при $n \to \infty$ для любой последовательности $C_n \to \infty$ при $n \to \infty$, причем $\delta_n(C_n)$ не зависит от последовательности отображений $\Psi_n \in \Pi_C(\Gamma, P)$. Из этого следует (3.4). Доказательство теоремы 3 проводится таким же образом.

4. SLD асимптотическая эффективность. Геометрический подход

Зафиксируем $0 < \gamma \leqslant 1$. Для любых вероятностных мер $P_1 = P_{11} \times \ldots \times P_{1k}$, $P_2 = P_{21} \times \ldots \times P_{2k} \in \Lambda^k$ обозначим

$$\rho_{\gamma\nu}(P_1, P_2) = \sum_{j=1}^{k} \nu_j \left(\int_S ((dP_{1j}/dQ_j)^{1/(2+\gamma)} - (dP_{2j}/dQ_j)^{1/(2+\gamma)})^{2+\gamma} dQ \right)^{1/(2+\gamma)}$$

где $Q_j = \frac{1}{2}(P_{1j} + P_{2j})$. Положим $\rho_\nu(P_1, P_2) = \rho_{0\nu}(P_1, P_2)$. Для любого $C > 0$ определим функцию

$$R(t, u, C) = \inf\{\rho_\nu(P_1, P_2) : P_1 \in \Gamma_t, P_2 \in \Gamma_{t+u}, \rho_{\gamma\nu}(P_1, P_2) < Cu\}. \quad (4.1)$$

Если вероятностные меры $P_1 \in \Gamma_t$, $P_2 \in \Gamma_{t+u}$ такие, что $\rho_\gamma(P_1,P_2) < Cu$ не существует, то положим $R(t,u,C) = 0$. Для любых C, C_n обозначим $R_{C_n}(t,u,C) = \sup\{R(\theta,u,C) : |\theta - t| < C_n u\}$.

Сделаем следующее предположение.

E3. Найдутся $A > 0$, $a > 0$ такие,что $R(t,u,A) > au$, для всех u, $0 < u < u_0$.

Заметим, что в условии **E3** не делаются каких-нибудь непосредственных предположений о функционале T. Существенную роль играет только геометрическая структура множеств Γ_{t+u} построенных по функционалу T. Наиболее близкой к данным результатам в этом смысле является работа [7].

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* D *и* E3*. Пусть* $u_n > Cn^{-1/2}$, $nu_n^{2+\gamma} \to 0$ *при* $n \to \infty$*. Тогда для любой последовательности критериев* K_n *удовлетворяющих* (3.3)

$$\liminf_{n\to\infty}(4nR^2(t,u_n,C))^{1/2}((nR^2(t,u_n,C))^{1/2}+ \\ + \Phi^{(-1)}(\alpha_n(K_n)) + \Phi^{(-1)}(\beta(K_n,u_n)))) \geqslant 0 \quad (4.2)$$

для всех $C > A$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* D *и* E3*. Пусть* $nu_n^2 \to \infty$, $nu_n^{2+\gamma} \to 0$ *при* $n \to \infty$*. Тогда для любой последовательности оценок* $\widehat{\theta}_n$

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{P\in U(C_n u_n,t)} \frac{P(|\widehat{\theta_n} - T(P)| > u_n)}{2\Phi(-2n^{1/2}R_{C_n}(t,u_n,C))} \geqslant 1 \qquad (4.3)$$

для всех последовательностей $C_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *и* $C > A$.

Доказательства теорем 5, 6 основаны на том же самом принципе, что и доказательство теорем 3, 4 и опускаются. Равномерная сходимость остаточного члена в соответствующей версии (3.5) обеспечивается здесь условием $\rho_\gamma(P_1,P_2) < Cu$ в (4.1).

Скажем, что последовательность критериев K_n, удовлетворяющих (2.3), (соответственно оценок $\widehat{\theta}_n$) является асимптотически эффективной в смысле сильной асимптотики вероятностей умеренных уклонений (SLD-асимптотически эффективной), если выполнено (3.1) или (4.2) (соответственно (3.4) или (4.3)).

Литература

1. R. R. Bahadur, *Asymptotic efficiency of tests and estimates.* — Sankhya. **22** (1960), 229–252.
2. P. Bickel, C. Klaassen, Y. Ritov, J. A Wellner, *Efficient and adaptive estimation for the semiparametric models.* John Hopkins University Press, Baltimore (1993).
3. P. J. Bickel, J Kwon J. *Inference for semiparametric models: some questions and an answer.* — Statistica Sinica. **11** (1993), 863–960.
4. А. А. Боровков, А. А. Могульский, *Большие уклонения и проверка статистических гипотез.* — Труды Института Математики Российской Акад. Наук, Сибирское Отделение, Новосибирск, Наука, 1992.
5. А. А. Боровков, А. А. Могульский, *Большие уклонения и статистический принцип инвариантности.* — Теория вероятн. и ее примен. **37** (1992), 11–18.
6. H. Chernooff, *A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on sums of observations.* — Ann. Math. Statist. **23** (1952), 493–507.
7. D. L. Donoho, R. C. Liu, *Geometrizing rates of convergence.* I. — Technical Report. **137**, Dept. Statistics, Univ. California, Berkeley (1987).
8. M. S. Ermakov, *Asymptotic minimaxity of usual goodness of fit tests.* — Probability Theory and Mathematical Statistics. in: Proc. of the 5th Vilnius Conf. Grigelionis et al. Vilnius, VSP/Mokslas **1** (1991), pp. 323–331.
9. M. S. Ermakov, *On asymptotic minimaxity of rank tests.* — Statist. Probab. Lett. **15** (1992), 191–196.
10. М. С. Ермаков, *Большие уклонения эмпирических мер и проверка гипотез.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **207** (1993), 37–60.
11. М. С. Ермаков, *Асимптотически эффективные статистические выводы для вероятностей умеренных уклонений.* — Теория вероятностей и ее применения **48** (2003), 676–700.
12. M. S. Ermakov, *Importance sampling for simulation of moderate deviations of statistics.* — Statistics and Decision (to appear (2008)).
13. J. Hajek, *Local asymptotic minimax and admisibility in estimation.* — in: Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab. Los Angelos, California Univ. Press. **1** (1972), pp. 175–194.
14. J. L. Hodges, E. L. Lehmann, *On some nonparametric competitors of the t-test.* — Ann. Math. Statist. **27** (1956), 324–335.
15. I. A. Ibragimov, R. Z. Khasminskii, *Asymptotically normal families of distributions and efficient estimation.* — Ann. Statist. **19** (1991), 1681–1721.
16. W. C. M. Kallenberg, *Intermediate efficiency, theory and examples.* — Ann. Statist. **11** (1983), 170–182.
17. Yu. A. Koshevnik, B. Ya. Levit, *О непараметрическом аналоге информационной матрицы.* — Теория вероятностей и применения **21** (1976), 738–753.
18. S. Kourauklis, *On the relation between Hodges–Lehman efficiency and Pitman efficiency.* — Canad. J. Statist. **17**, (1989), 311–318.
19. S. Kourauklis, *A relation between the Chernoff index and the Pitman efficiency.* — Statist. Probab. Lett. **9** (1990), 391–395.

20. L. Le Cam, *Asymptotic methods in statistical decision theory.* Springer-Verlag, NY (1986).
21. B. Ya. Levit, *On optimality of some statistical estimates.* — in: Proc. Prague Sympos. on Asymptotic Statist. Prague **2** (1974), pp. 215–238.
22. M. Radavichius, *From asymptotic efficiency in minimax sense to Bahadur efficiency – New Trends in Probab. and Statist.* V. Sazonov and T. Shervashidze (Eds), Vilnius, VSP/Mokslas **1** (1991), 629–635.
23. Ch. Stein, *Efficient nonparametric testing and estimation.* in: Third Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab. Berkeley, Univ. California Press. **1** (1956), pp. 187–195.
24. A. W. van der Vaart, *On differentiable functionals.* — Ann. Statist. **19** (1991), 178–204.
25. A. W. van der Vaart, *Asymptotic Statistics.* Cambridge University Press (1998).
26. H. S. Wieand, *A condition under which the Pitman and Bahadur approaches to efficiency coincide.* — Ann. Statist. **4** (1976), 1003–1011.

Ermakov M. S. On semiparametric inference in moderate deviation zone.

In [11], we show that Hajek–Le Cam lower bound for asymptotic efficiency in estimation and lower bound for Pitman efficiency in hypothesis testing can be extended on moderate deviation zone if weak additional assumptions hold. In this paper, we present a version of these results in the semiparametric form.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 8 ноября 2007 г.