Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

С. А. Вавилов, К. Ю. Ермоленко

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПРОБЛЕМЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ В СТАТИСТИКЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ

Введение

Одна из задач непараметрического оценивания в статистике случайных процессов может быть сформулирована следующим образом. Имеется реализация $\tilde{x}_t$ для $t \in [0,T]$ случайного процесса x_t, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx_t = c_t x_t dt + \sigma_t x_t dW_t, \tag{1}$$

где в общем случае коэффициент диффузии, или волатильности (volatility), $\sigma_t = \sigma(t,\omega)$, а также коэффициент сноса $c_t = c(t,\omega)$ являются неизвестными измеримыми случайными функциями времени, W_t – стандартный винеровский процесс. На основе известной реализации $\tilde{x}_t$ требуется восстановить следующую функцию времени

$$J(t) = \int\limits_0^t \tilde{\sigma}_s^2 ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

известную под названием интегральной волатильности (integrated volatility), без использования промежуточной стадии вычисления собственно волатильности $\tilde{\sigma}_s$ внутри рассматриваемого временного интервала. Помимо чисто теоретического интереса данная задача имеет и большое прикладное значение, поскольку проблема вычисления интегральной волатильности финансовых активов является одной из важных составляющих задач финансового инжиниринга. Дело в том, что оценка инвестиционных проектов на основе метода реальных опционов с использованием формул Блэка–Шоулза и определение, так называемых, справедливых цен финансовых опционов в современных условиях немыслимо без количественного анализа интегральных волатильностей соответствующих активов. В связи с вышесказанным неудивительно, что проблеме вычисления интегральной волатильности посвящена обширная литература, включающая в себя, как оригинальные статьи (см., например, Barndorf–Nielsen, Shephard, 2002), так и подробные обзоры (см., например, Anderson, Bollerslev, Diebold, 2002). В результате проведенных исследований в рамках весьма общих предположений была доказана сходимость по вероятности последовательности некоторых сумм, известных под названием квадратической вариации (quadratic variance, кроме того в англоязычной литературе используется термин realized variance), определяемых на основе статистических данных $\tilde{x}_{t_i}$, $i = 1, \ldots, n$, к значению интегральной волатильности

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\ln \frac{\tilde{x}_{t_i}}{\tilde{x}_{t_{i-1}}} \right)^2 \to \int_0^t \tilde{\sigma}_s^2 ds \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тем не менее, в ряде недавних публикаций [Zhang, Mykland, Ait-Sakhalia, 2005; Zhang, 2006] было показано, что указанный алгоритм оценивания интегральной волатильности не является робастным по отношению к различного рода ошибкам, возникающим при получении информации о статистических данных. В частности, в случае, когда случайный процесс x_t моделирует изменение цены высоколиквидного актива, из-за наличия разности между ценой спроса и предложения (bid-ask spread) фактически наблюдаются не значения $\tilde{x}_{t_i}$, а их зашумленные аналоги $\tilde{y}_{t_i} = \tilde{x}_{t_i} + \tilde{\varepsilon}_{t_i}$. Отсутствие робастности заключается в том, что в этой ситуации, вообще говоря, квадратическая вариация перестает быть состоятельной оценкой для интегральной волатильности. Интересно отметить, что указанный теоретический вывод подтверждается и многочисленными статистическими данными о динамике цен высоколиквидных активов. В этой связи проблема построения состоятельной оценки для интегральной волатильности при наличии зашумленных статистических данных представляется весьма актуальной.

В упомянутых выше работах разработаны алгоритмы решения данной задачи на основе своеобразной процедуры разбиения исходных статистических данных в группу непересекающихся подмножеств, при этом количество таких подмножеств растет медленнее, по сравнению с ростом количества наблюдений. К каждому из упомянутых подмножеств применяется определенная процедура статистической обработки данных, связанная с построением соответствующей квадратической вариации с последующим использованием процесса усреднения по всем рассматриваемым подмножествам. Состоятельность построенной таким образом оценки доказывается в предположении, что ошибки ε_{t_i} представляют собой одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от процесса x_t с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями, при этом накладывается дополнительное ограничение об отделимости коэффициента волатильности σ_t от нуля. В данной работе предлагается метод оценивания интегральной волатильности, основанный на принципиально других соображениях. В рассмотрение вводится интегральное уравнение, решение которого определяет значение интегральной волатильности. Указанное интегральное уравнение представляет собой типичную некорректную задачу математической физики, решаемую стандартными методами функционального анализа. Как следствие в предлагаемом подходе рассматриваются другие исходные предположения по сравнению с вышеупомянутыми работами, в частности, здесь не накладываются ограничения, связанные с характером распределения указанных ошибок. При этом разумеется, что предлагаемый подход также привносит определенные ограничения, порожденные спецификой применяемого метода. К сожалению, независимо от используемого подхода, проверка соответствующих исходных предположений, по крайней мере, в задачах финансового инжиниринга, представляется весьма проблематичной. Тем не менее, появляется реальная возможность сравнить результаты получаемых численных значений искомой величины как следствие применения двух принципиально различных подходов. Понятно, что в случае их совпадения существенно повышается достоверность того, что построенная оценка интегральной волатильности соответствует действительности.

Вспомогательные утверждения

Введем в рассмотрение виртуальный портфель, содержащий активы одного вида, при этом цена актива удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (1). Зададим стоимость портфеля следующим образом

$$f_t = a_t x_t + m_t, \tag{3}$$

где $a_t = a(t,\omega)$ – измеримая случайная функция, определяющая количество данного актива, $m_t = m(t,\omega)$ – измеримая случайная функция, отвечающая определенному денежному эквиваленту, смысл которого будет дан ниже.

Предполагая наличие у f_t стохастического дифференциала df_t, будем исходить из стратегии управления, определяемой на каждый момент времени t соотношением

$$df_t = a_t dx_t + l(t, x_t)dt, \tag{4}$$

где dx_1 определяется правой частью уравнения (1).

Второе слагаемое в зависимости (4) будем интерпретировать как инвестированный и освоенный системой управления за время dt денежный поток, при этом $l(t, x_t) \geqslant 0$. Поэтому $l(t, x_t)$ имеет смысл регулятора изменения количества осваиваемых системой управления наличных денег, поступающих в качестве инвестиций, и выступает в роли управляющей функции.

Применяя к левой и правой части равенства (3) операцию вычисления стохастического дифференциала, подразумевающую существование стохастических дифференциалов da_t и dm_t, получим соотношение

$$df_t = a_t dx_t + x_t da_t + dx_t da_t + dm_t,$$

которое, учитывая формулу (4), можно переписать следующим образом

$$dm_t = -x_{t+dt} da_t + l(t, x_t)dt,$$

где по определению $x_{t+dt} := x_t + dx_t$, или в интегральной форме

$$m_t = -\int_0^t x_{\tau+d\tau} da_\tau + \int_0^t l(\tau, x_\tau)d\tau. \tag{5}$$

Разобьем промежуток $[0,t]$ на n частей. Стохастический интеграл в правой части формулы (5) будем понимать как предел последовательности следующих сумм, сходящейся в среднеквадратическом

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_{t_i}(a_{t_i} - a_{t_{i-1}}).$$

Первое слагаемое в формуле (5), взятое со знаком минус, характеризует стоимость активов с учетом осуществленных торговых операций. В дальнейшем указанную величину для краткости будем называть себестоимостью портфеля.

Таким образом, величина m_t, взятая со знаком минус, соответствует разности между себестоимостью портфеля и количеством наличных денег, инвестированных в портфель.

На начальный момент времени будем считать портфель пустым, т.е. не содержащим ни активов, ни наличных денег.

Прибыль $\tilde{p}_t$ при наблюдаемом значении цены $\tilde{x}_t$ определим как разность между текущей стоимостью активов и себестоимостью портфеля, т.е.

$$\tilde{p}_t = \tilde{a}_t \tilde{x}_t - \int\limits_0^t \tilde{x}_{\tau + d\tau} \, d\tilde{a}_\tau. \tag{6}$$

С учетом формул (4), (5) последняя зависимость эквивалентна соотношению

$$\tilde{p}_t = \tilde{f}_t - \int\limits_0^t l(\tau, \tilde{x}_\tau) d\tau, \tag{7}$$

где $\tilde{f}_t$ соответствует стоимости портфеля при наблюдаемом значении цены.

Будем исходить из того, что на всем временном интервале $[0, T]$ наблюдаемая цена актива $\tilde{x}_t$ удовлетворяет соотношению $0 < a < \tilde{x}_t < b < +\infty$. В дальнейшем для удобства вычислений нормируем цену актива относительно значения a и выберем соответствующий ценовой коридор в виде интервала $(1, \beta)$, где фиксированное значение $\beta = \frac{b}{a} > 1$.

Поставим задачу определения собственной функции $\varphi(x)$, отвечающей первому собственному числу λ_1 следующей задачи Штурма–Лиувилля

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{\lambda_1^2}{x^2}\varphi = 0, \tag{8}$$

$$\varphi(1) = \varphi'(\beta) = 0. \tag{9}$$

Лемма. *Единственное решение задачи (8)–(9) определяется функцией* $\varphi(x) = \sqrt{x}\sin(b \ln x)$, *где* b *является минимальным строго положительным корнем уравнения*

$$\operatorname{tg}(b \ln \beta) = -2b, \tag{10}$$

при этом $\lambda_1^2 = b^2 + \frac{1}{4}$.

Доказательство. Известно, что общее решение уравнения (8) имеет следующий вид [Камке, 1971]

$$\varphi(x) = c_1\sqrt{x}\sin(b\ln x) + c_2\sqrt{x}\cos(b\ln x), \tag{11}$$

где $\lambda_1^2 = b^2 + \frac{1}{4}$. Исходя из соотношения (11), с учетом граничных условий (9), получим относительно b уравнение (10).

Введем в рассмотрение новую переменную $z = b\ln\beta$ и перепишем уравнение (10) следующим образом

$$\operatorname{tg}(z) = -\frac{2z}{\ln\beta}. \tag{12}$$

Графическое решение по определению наименьшего строго положительного корня трансцендентного уравнения (12) представлено на рис. 1. ■

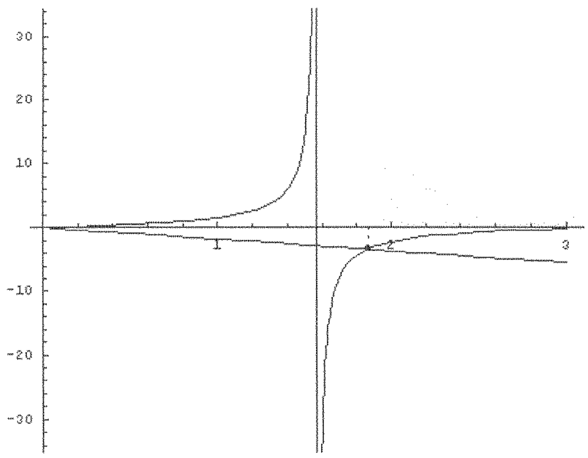

Рис. 1. Графическое решение трансцендентного уравнения.

Отметим, что выбор именно первого собственного числа задачи Штурма– Лиувилля (8), (9) как нетрудно убедиться, обеспечивает отличие от нуля соответствующей собственной функции внутри ценового коридора $(1,\beta)$.

Выберем величину a_t из соотношения (3) на основе зависимости

$$a_t = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} \cdot \frac{d\varphi(x_t)}{dx_t}. \tag{13}$$

Разобьем временной интервал $[0, T]$ на n частей следующим образом $0 = T_0 < T_1 < \ldots < T_n = T$. . Введем в рассмотрение последовательность ступенчатых функций

$$\tilde{g}_n(t) = \tilde{a}_{T_j} \tilde{x}_{T_j} - \sum_{i=1}^{j} \tilde{x}_{T_i} (\tilde{a}_{T_i} - \tilde{a}_{T_{i-1}}), \tag{14}$$

для $t \in (T_{j-1}, T_j]$, при этом

$$\tilde{a}_t = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} \cdot \frac{d\varphi(x_t)}{dx_t}\bigg|_{x_t = \tilde{x}_t}. \tag{15}$$

Основной результат

Теорема. *Пусть на временном промежутке $[0, T]$, где $T > 0$ выполняются следующие условия:*

1. *Случайный процесс x_t удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (1), при этом допускается, что волатильность σ_t является случайной функцией времени, т. е. $\sigma_t = \sigma(t, \omega)$, но не зависит от процесса x_t.*

2. *Последовательность функций $\tilde{g}_n(t)$, определяемая зависимостью (14), сходится в норме пространства $L_2[0, T]$, при этом соответствующую предельную функцию из пространства $L_2[0, T]$ обозначим через $\tilde{g}(t)$.*

Тогда функция $\nu(t) = e^{\frac{1}{2}\lambda_1^2 \int_0^t \tilde{\sigma}_s^2 ds} - 1$, где $t \in [0, T]$, удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int\limits_0^t \nu(\tau) d\tau - \chi(t)\nu(t) = h(t), \tag{16}$$

где $\chi(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} \cdot \varphi(\tilde{x}_t) - \tilde{g}(t)$, $h(t) = \chi(t) - t$.

Доказательство. Будем искать неизвестную функцию f_t из соотношения (3) в виде $f_t = f(t, x_t)$, где x_t удовлетворяет уравнению (1). Применяя к функции $f(t, x_t)$ формулу Ито и сравнивая ее с соотношением (4), получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 x_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^2} = l(t, x_t), \tag{17}$$

$$a_t = \frac{\partial f}{\partial x_t}. \tag{18}$$

Представим функцию $l(t, x_t)$ из соотношения (4) в виде

$$l(t, x_t) = r(t)\varphi(x_t). \tag{19}$$

Структура функции $r(t)$ будет определена ниже.

Поскольку на начальный момент управления $t = 0$ портфель предполагается пустым, то

$$f(0, x_t) = 0. \tag{20}$$

Кроме того, зададим следующие граничные условия

$$\frac{\partial f}{\partial x_t} \to 0 \quad \text{при} \quad x_t \to \beta, \tag{21}$$

$$f(t, x_t) \to 0 \quad \text{при} \quad x_t \to 1. \tag{22}$$

В силу соотношения (18) выполнение граничного условия (21) означает, что система управления занимает длинную позицию, т.е. $a_t \geqslant 0$, и стремится полностью избавиться от активов, если цена приближается к верхней границе соответствующего ценового коридора $(1, \beta)$.

Суть граничного условия (22) заключается в том, что при стремлении цены актива к нижней границе полосы чувствительности высвобождающиеся в результате осуществляемых продаж наличные деньги вкладываются в приобретение активов, а именно, $\tilde{a}_t \to -\frac{\tilde{m}_t}{\tilde{x}_t}$, при $\tilde{x}_t \to 1$, что в силу соотношения (3) в точности соответствует выполнению граничного условия (22).

Учитывая соотношение (19), будем искать решение смешанной задачи (17), (20), (21), (22) в виде

$$f(t, x_t) = K(t)\varphi(x_t),$$

где $K(t)$ – неизвестная функция.

В результате несложных преобразований окончательно получим
$$f(t,x_t)=\int\limits_0^t e^{\frac{1}{2}\lambda_1^2\int\limits_\tau^t \sigma_s^2 ds}\, r(\tau)d\tau\cdot\varphi(x_t). \tag{23}$$

Исходя, из зависимостей (18), (23), число активов в портфеле определяется следующим соотношением
$$\tilde a_t=\left(\frac{\partial f}{\partial x_t}\right)_{x_t=\tilde x_t}=\int\limits_0^t e^{\frac{1}{2}\lambda_1^2\int\limits_\tau^t \tilde\sigma_s^2 ds}\cdot r(\tau)d\tau\cdot\frac{d\varphi(x_t)}{dx_t}\bigg|_{x_t=\tilde x_t}. \tag{24}$$

Разобьем отрезок $[0,T]$ на n частей точками деления $0=T_0<T_1<\ldots<T_n=T$.

Определим функцию $r(\tau)$ как предел поточечно сходящейся последовательности функций $r_n(\tau)$, задаваемой следующим образом
$$r_n(\tau)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2\int\limits_\tau^{T_i}\tilde\sigma_s^2 ds}}{\varphi(\tilde x_\tau)}, \tag{25}$$
когда $\tau\in(T_{i-1},T_i]$.

Подставляя в соотношение (24) вместо $r(\tau)$ последовательность функций $r_n(\tau)$, определяемую зависимостью (25), получим
$$\tilde a^n_{T_j}=\sum_{i=1}^{j}\int\limits_{T_{i-1}}^{T_i}\frac{d\tau}{\varphi(\tilde x_\tau)}\cdot\frac{d\varphi(x_t)}{dx_t}\bigg|_{x_t=\tilde x_{T_j}},$$
или
$$\tilde a^n_{T_j}=\int\limits_0^{T_j}\frac{d\tau}{\varphi(\tilde x_\tau)}\cdot\frac{d\varphi(x_t)}{dx_t}\bigg|_{x_t=\tilde x_{T_j}}.$$

Осуществляя предельный переход при $n\to\infty$ и условии равномерного дробления, окончательно получим формулу (15), определяющую непрерывное распределение количества активов во времени, при наблюдаемом значении цены $\tilde x_t$.

Существенно, что в результате сделанных преобразований количество актива, определяемое формулой (15), на каждый момент времени $t\in[0,T]$ не зависит явно ни от значений c_t, ни от значений волатильности σ_t в уравнении (1). Аналогичным образом, подставляя формулы (19), (23) в соотношение (7) и осуществляя предельный переход, исходя из последовательности (25), получим формулу, определяющую прибыль, соответствующую наблюдаемым значениям цены $\tilde{x}_t$, на момент времени t

$$\tilde{p}_t = \int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} \cdot \varphi(\tilde{x}_t) - \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 \int_\tau^t \tilde{\sigma}_s^2 ds} d\tau. \tag{26}$$

Приравнивая правые части соотношений (6) и (7), и, исходя из зависимостей (14), (15), (26), получим интегральное уравнение (16). ■

Замечание 1. Отметим, что второе условие Теоремы обеспечивает существование стохастического интеграла в правой части формулы (6). С другой стороны, исходя из формулы Ито, стохастический интеграл в правой части соотношения (5) может быть представлен в виде суммы римановского интеграла, определенного вдоль траекторий случайного процесса x_t и интеграла Ито:

$$\int_0^t x_{\tau+d\tau} da_\tau = \int_0^t \psi_1(\tau, x_\tau) d\tau + \int_0^t \psi_2(\tau, x_\tau) dW_\tau,$$

где ψ_1, ψ_2 – гладкие функции, определяемые зависимостью $a_t = a(t, x_t)$ в силу формулы (13).

Поэтому гарантировать существование стохастического интеграла в зависимости (5) можно, исходя из стандартных достаточных условий существования соответствующих интегралов в виде ограничений либо на сам процесс x_t, либо на коэффициенты c_t и σ_t стохастического дифференциального уравнения (1). Нетрудно показать, исходя из теоремы Фубини и неравенства Чебышева, что существование определенного выше стохастического интеграла $\int_0^t x_{\tau+d\tau} da_\tau$ при $t \in [0, T]$ гарантирует сходимость последовательности (14) в норме пространства $L_2[0, T]$ почти наверное.

Замечание 2. Отметим, что в результате сделанных преобразований обеспечено выполнение условия $\nu(0) = 0$. ■

Полученное интегральное уравнение (16) представляет собой типичную некорректную задачу, поскольку функции $\chi(t)$ и $h(t)$

являются недифференцируемыми в силу недифференцируемости траекторий винеровского процесса и функции $\tilde{g}(t)$.

Искомая функция $\nu(t)$ для уравнения (16) ищется в пространстве $L_2[0,T]$ на множестве функций ограниченной вариации M, которое в силу второй теоремы Хелли [Колмогоров, Фомин, 1989] является компактным множеством, обеспечивая, тем самым, ограниченность обратного оператора A^{-1} для оператора A, соответствующего левой части уравнения (16)

$$A\nu = \int\limits_0^t \nu(\tau)d\tau - \chi(t)\nu(t).$$

Существование обратного оператора A^{-1} обеспечивается легкопроверяемой тривиальностью ядра оператора A.

Таким образом, в силу известных результатов [Тихонов, Арсенин, 1986] обратная задача (16) имеет единственное квазирешение.

Напомним, что элемент $\tilde{\nu} \in M$ называется квазирешением уравнения (16), если выполняется следующее соотношение

$$\rho_{L_2}(A\tilde{\nu}, h) = \inf_{\nu \in M} \rho_{L_2}(A\nu, h).$$

В силу того, что функции $\chi(t)$ и $h(t)$ в метрике L_2 сколь угодно точно могут быть приближены дифференцируемыми функциями, понятно, что указанный выше инфимум может быть сделан сколь угодно малым.

В свою очередь, интегральная волатильность на промежутке $[0,T]$ выражается через зависимость $\nu(t)$ следующим образом

$$\int\limits_0^t \tilde{\sigma}_s^2 ds = \frac{2}{\lambda_1^2} \ln[\nu(t)+1], \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{27}$$

Заметим, что сведение исходной проблемы к рассмотрению некорректной задачи делает ее решение устойчивым по отношению к различного рода ошибкам, например, присутствию аномальных статистических данных. Существенно отметить, что численное решение полученного интегрального уравнения (16) на основе вариационного подхода является робастным по отношению к малым возмущениям функций $\chi(t)$ и $h(t)$ в норме $L_2[0,T]$.

Литература

1. T. G. Andersen, T. Bollerslev, and F. X. Diebold, *Parametric and nonparametric measurement of volatility*. Handbook of Financial Econometrics. Amsterdam: North Holland (2002).
2. O. E. Barndorf-Nielsen and N. Shephard, *Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models*. — J. R. Statist. Soc. **64**, No. 2 (2002), 253–280.
3. L. Zhang, P. A. Mykland, and Y. Ait-Sakhalia, *A tale of two time scales: determining integrated volatility with noisy high-frequency data*. — J. Amer. Stat. Ass. **100**, No. 472 (2005), 1394–1411.
4. L. Zhang, *Efficient estimation of stochastic volatility using noisy observations: a multi- scale approach*. — Bernoulli, **12**, No. 6 (2006), 1019–1044.
5. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. Наука, М. (1971).
6. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*. Наука, М. (1989).
7. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*. Наука, М. (1986).

Vavilov S. A., Ermolenko K. Yu. On the method of non-parametric evaluation in statistics of random processes on the basis of ill-posed problem approach.

The problem to evaluate integrated volatility on the basis of the observable realization of the stochastic process corresponding to geometrical Brownian motion is considered. In one line with theoretical interest the urgency of the problem inquest is stipulated also by the fact that calculation of integrated volatility for different financial assets is the inseparable part of financial engineering topics. In the present paper the new approach to tackle the problem of integrated volatility evaluation is proposed. The integral equation to provide the calculation of integrated volatility is derived. The solving of this integral equation turns out to be a standard ill-posed problem of mathematical physics. The main idea of the original problem reduction to the ill- posed problem is to make its solution robust towards the presence of anomalous statistical data, for instance, generated by the market microstructure effect such as the bid-ask spread existence.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: svavilov@mail.wplus.net

Поступило 1 ноября 2007 г.