Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ СКАЧКООБРАЗНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

1. Для броуновского движения распределение времени пребывания процесса выше некоторого уровня было найдено П. Леви [1]. Это – знаменитый закон арксинуса. Для общих интегральных функционалов от броуновского движения задача о вычислении распределений функционалов была решена М. Кацем [2], [3]. Для процессов с независимыми приращениями интегродифференциальное уравнение для преобразования Фурье интегрального функционала получено А. В. Скороходом в монографии [4].

С вычислениями распределений времени пребывания процесса выше или ниже некоторого уровня тесно связаны вычисления распределений инфимума и супремума процесса. Явные формулы для распределения супремума процесса, являющегося суммой броуновского процесса с линейным сносом и сложного пуассоновского с экспоненциально распределенными скачками, получил Э. Мордецкий в [5]. В [6] выведены формулы для совместного распределения инфимума и супремума для такого процесса. В [7] получены результаты, позволяющие вычислять совместные распределения интегральных функционалов, и функционалов инфимума и супремума от однородных скачкообразных диффузионных процессов достаточно общего вида. Такие процессы находят широкое применение в теории разорения, финансовой и страховой математике.

В настоящей работе рассматривается один из простейших представителей класса скачкообразных диффузий, который явля-

Настоящая работа частично поддерживалась грантом РФФИ 05-01-00911 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

ется суммой броуновского движения и сложного пуассоновского процесса с экспоненциально распределенными скачками. На основе результа из [6] для такого процесса, выводится явная формула для преобразования Лапласа распределения времени пребывания выше некоторого уровня.

Пусть $N(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона с параметром λ_1. Он может быть представлен в виде

$$N(t) = \max\Big\{l : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\},$$

где τ_k, $k = 1, 2, \ldots$, – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ_1 случайные величины, $\mathbf{P}(\tau_k \geqslant t) = e^{-\lambda_1 t}$.

Пусть Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от процесса N. Наиболее интересной диффузией со скачками является *скачкообразное броуновское движение*. Это – однородный процесс с независимыми приращениями, определяемый равенством

$$J(t) := W(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \qquad W(0) = x,$$

где $W(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс броуновского движения, не зависящий от процесса N и величин Y_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Для получения явных формул ограничимся симметрично распределенными случайными величинами Y_k с плотностью

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}(Y_1 < y) = \frac{\eta}{2} e^{-|y|\eta}, \qquad \eta > 0.$$

Рассматривается функционал $\int\limits_0^t \mathbb{1}_{[r,\infty)}(J(s))ds$, который описывает время пребывания скачкообразного диффузионного процесса J выше уровня r. Для неотрицательных функционалов проще вычислять их преобразование Лапласа, чем сами распределения. Кроме того, вместо фиксированного момента времени t сначала необходимо рассмотреть случайный момент τ, не зависящий от процесса $\{J(s), s \geq 0\}$ и экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$. Этот момент отвечает применению преобразованию Лапласа по времени. Применяя преобразование Лапласа по времени, мы избегаем рассмотрения уравнений в частных производных.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание по процессу J при условии $J(0)=x$.

Наша задача заключается в вычислении преобразования Лапласа распределения времени пребывания процесса J выше уровня r до момента τ, т.е. функции

$$Q(x) := \mathbf{E}_x \exp\Big(-\gamma \int_0^\tau \mathbb{I}_{[r,\infty)}(J(s))ds\Big). \tag{1.1}$$

Для процесса броуновского движения W выражение для такой функции хорошо известно (см., например, [8], часть II, формула 1.1.4.1):

$$\mathbf{E}_x e^{-\gamma\int_0^\tau \mathbb{I}_{[r,\infty)}(W(s))ds} = \Big(1 - \frac{\gamma\, e^{-(r-x)\sqrt{2\lambda}}}{\sqrt{\lambda+\gamma}(\sqrt{\lambda+\gamma}+\sqrt{\lambda})}\Big)\mathbb{I}_{(-\infty,r]}(x) + \\ + \Big(\frac{\lambda}{\lambda+\gamma} + \frac{\gamma\sqrt{\lambda}\, e^{-(x-r)\sqrt{2\lambda+2\gamma}}}{(\lambda+\gamma)(\sqrt{\lambda+\gamma}+\sqrt{\lambda})}\Big)\mathbb{I}_{(r,\infty)}(x). \tag{1.2}$$

Следующий результат дает аналог этой формулы для скачкообразного броуновского движения J.

Теорема 1.1. *Справедлива следующая формула*

$$\mathbf{E}_x e^{-\gamma\int_0^\tau \mathbb{I}_{[r,\infty)}(J(s))ds} = \Big(1 - \frac{\gamma\beta_1\beta_2\alpha_2(\alpha_1^2-\eta^2)e^{-\alpha_1(r-x)}}{(\lambda+\gamma)\eta^2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1+\alpha_1)(\beta_2+\alpha_1)} - \\ - \frac{\gamma\beta_1\beta_2\alpha_1(\eta^2-\alpha_2^2)e^{-\alpha_2(r-x)}}{(\lambda+\gamma)\eta^2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_2+\alpha_2)(\beta_1+\alpha_2)}\Big)\mathbb{I}_{(-\infty,r]}(x) + \\ + \Big(\frac{\lambda}{\lambda+\gamma} + \frac{\gamma\alpha_1\alpha_2\beta_2(\beta_1^2-\eta^2)e^{-\beta_1(x-r)}}{(\lambda+\gamma)\eta^2(\beta_1-\beta_2)(\beta_1+\alpha_1)(\beta_1+\alpha_2)} + \\ + \frac{\gamma\alpha_1\alpha_2\beta_1(\eta^2-\beta_2^2)e^{-\beta_2(x-r)}}{(\lambda+\gamma)\eta^2(\beta_1-\beta_2)(\beta_2+\alpha_1)(\beta_2+\alpha_2)}\Big)\mathbb{I}_{(r,\infty)}(x), \tag{1.3}$$

где, при $k=1,2$,

$$\alpha_k = \sqrt{\lambda+\lambda_1+\tfrac{\eta^2}{2} - (-1)^k\big((\lambda+\lambda_1+\tfrac{\eta^2}{2})^2 - 2\lambda\eta^2\big)^{1/2}}, \tag{1.4}$$

$$\beta_k = \sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma+\tfrac{\eta^2}{2} - (-1)^k\big((\lambda+\lambda_1+\gamma+\tfrac{\eta^2}{2})^2 - 2(\lambda+\gamma)\eta^2\big)^{1/2}}. \tag{1.5}$$

Замечание 1.1. Несложно убедиться в справедливости следующих соотношений: $0 < \alpha_2 < \eta < \alpha_1$, $0 < \beta_2 < \eta < \beta_1$.

Замечание 1.2. Очевидно, что

$$\mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) < r\Big) = \lim_{\gamma\to\infty} \mathbf{E}_x e^{-\gamma\int\limits_0^\tau \mathbf{1}_{[r,\infty)}(J(s))ds},$$

и из (1.3) следует, что при $x \leqslant r$

$$\mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) < r\Big) = 1 - \frac{\alpha_2(\alpha_1-\eta)e^{-\alpha_1(r-x)}}{\eta(\alpha_1-\alpha_2)} - \frac{\alpha_1(\eta-\alpha_2)e^{-\alpha_2(r-x)}}{\eta(\alpha_1-\alpha_2)}$$

(частный случай формулы (15) из [5], см. также формулу (3.15) из [6]).

Действительно, при $\gamma \to \infty$

$$\beta_k^2 \sim \sqrt{\gamma}\Big(1 + \frac{\lambda+\lambda_1+\eta^2/2}{\gamma} - (-1)^k\big(1 + \frac{\lambda+\lambda_1-\eta^2/2}{\gamma}\big)\Big)^{1/2}, \qquad k = 1,2.$$

Следовательно, $\beta_1 \sim \sqrt{2\gamma}$, $\beta_2 \sim \eta$.

Выражение для совместного распределения инфимума и супремума процесса J получено в [6], формула (4.15).

Замечание 1.3. Ясно, что при $\lambda_1 \to 0$ имеет место сходимость $\tau_1 \to \infty$ по вероятности. Поэтому до момента времени τ у процесса предельного для J никаких скачков не происходит, и он просто совпадает с процессом броуновского движения. Таким образом, в этом предельном случае формула (1.3) превращается в выражение (1.2).

Действительно, в этом случае

$$\alpha_k^2 \to \lambda + \frac{\eta^2}{2} - (-1)^k\big|\lambda - \frac{\eta^2}{2}\big|, \qquad k = 1,2,$$

$$\beta_k^2 \to \lambda + \gamma + \frac{\eta^2}{2} - (-1)^k\big|\lambda + \gamma - \frac{\eta^2}{2}\big|, \qquad k = 1,2.$$

Тем самым, при $\eta^2/2 < \lambda$,

$$\alpha_1 \to \sqrt{2\lambda}, \quad \alpha_2 \to \eta, \quad \beta_1 \to \sqrt{2\lambda+2\gamma}, \quad \eta_2 \to \eta,$$

при $\lambda \leqslant \eta^2/2 \leqslant \lambda+\gamma$,

$$\alpha_1 \to \eta, \quad \alpha_2 \to \sqrt{2\lambda}, \quad \beta_1 \to \sqrt{2\lambda+2\gamma}, \quad \eta_2 \to \eta,$$

при $\lambda+\gamma<\eta^2/2$,

$$\alpha_1\to\eta,\quad \alpha_2\to\sqrt{2\lambda},\quad \beta_1\to\eta,\quad \eta_2\to\sqrt{2\lambda+2\gamma}.$$

Подставив эти предельные выражения в (1.3), получим (1.2).

Замечание 1.4. При $\eta\to\infty$ величины Y_k, $k=1,2,\ldots$, сходятся к нулю по вероятности. Поэтому в пределе у процесса J никаких скачков нет, и он является процессом броуновского движения. Следовательно, и в этом предельном случае формула (1.3) превращается в выражение (1.2).

Действительно, в этом случае при $\eta\to\infty$

$$\alpha_k^2\sim\eta\Big(\frac12+\frac{\lambda+\lambda_1}{\eta^2}-\frac{(-1)^k}{2}\big(1-\frac{2\lambda}{\eta^2}+\frac{2\lambda_1}{\eta^2}\big)\Big)^{1/2},\qquad k=1,2.$$

Следовательно, $\alpha_1\sim\eta$, $\alpha_2\sim\sqrt{2\lambda}$. Аналогично, $\beta_1\sim\eta$, $\beta_2\sim\sqrt{2\lambda+2\gamma}$. Используя эти асимптотики в (1.3), получим (1.2).

Следующая теорема (см. [7], теорема 2.1, $a=-\infty$, $b=\infty$) является ключевой для вычисления функционалов от скачкообразного диффузионного процесса J.

Теорема 1.2. *Пусть $\Phi(x)$ и $f(x)$, $x\in\mathbf{R}$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f(x)\geqslant 0$, а функция $\Phi(x)$ ограничена. Тогда функция*

$$Q(x)=\mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J(s))ds\Big)\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q(x)=M(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}G_{z-Y_1}(x)Q(z)dz, \tag{1.6}$$

где $M(x)$ является единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac12 M''(x)-(\lambda+\lambda_1+f(x))M(x)=-\lambda\Phi(x),\qquad x\in\mathbf{R}, \tag{1.7}$$

а $G_z(x)$ является единственным ограниченным непрерывным решением задачи

$$\frac12 G''(x)-(\lambda+\lambda_1+f(x))G(x)=0,\qquad x\in\mathbf{R}/\{z\}, \tag{1.8}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda_1. \tag{1.9}$$

Замечание 1.5. Функция $Q(x)$ является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q(x) = M(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\mathbf{E}Q(z+Y_1)dz. \tag{1.10}$$

Это утверждение является простым следствием замены переменной в интеграле.

Замечание 1.6. Решение дифференциальные уравнения вида

$$\frac{1}{2}\sigma^2 U''(x) + \mu U(x) - h(x)U(x) = -q(x), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{1.11}$$

где $h(x)$ и $q(x)$ – кусочно непрерывные функции, понимается следующим образом: на интервалах непрерывности функций h и q оно удовлетворяет (1.11), а в точках разрыва функций h и q решение и его первая производная полагаются непрерывными.

Замечание 1.7. Если в дополнение к уравнению (1.11) налагается условие на скачок первой производной вида

$$U'(z+) - U'(z-) = -2\lambda, \qquad z \in \mathbf{R}, \tag{1.12}$$

то при $x \neq z$ решение понимается согласно замечанию 1.6, а в точке z наряду с (1.12) налагается условие непрерывности решения.

2. Для вычисления функции $Q(x)$, определенной формулой (1.1), применим теорему 1.2, в которой полагаем $\Phi(x) = 1$, $f(x) = \gamma \mathbb{I}_{[r,\infty)}(x)$, $\gamma > 0$. Требуется найти функцию $Q(x)$, которая является решением уравнения (1.10), где функция $M(x)$ – единственное ограниченное решение уравнения

$$\frac{1}{2}M''(x) - (\lambda + \lambda_1 + \gamma \mathbb{I}_{[r,\infty)}(x))M(x) = -\lambda, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{2.1}$$

а функция $G_z(x)$ – единственное ограниченное непрерывное решение задачи

$$\frac{1}{2}G''(x) - (\lambda + \lambda_1 + \gamma \mathbb{I}_{[r,\infty)}(x))G(x) = 0, \qquad x \neq z, \tag{2.2}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda_1. \tag{2.3}$$

Общее решение уравнения (1.10) будем искать в виде

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{2}A_k e^{\alpha_k(x-r)}\mathbb{I}_{(-\infty,r]}(x)+\sum_{k=0}^{2}B_k e^{\beta_k(r-x)}\mathbb{I}_{(r,\infty)}(x), \qquad (2.4)$$

где, в силу ограниченности решения, полагаем $\alpha_0=0<\alpha_2<\alpha_1$, $\beta_0=0<\beta_2<\beta_1$. Так как из условий теоремы следует, что решение единственно, то если удастся однозначным образом найти коэффициенты A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, α_1, β_1, α_2, β_2, то это и будет являться решением поставленной задачи. Вычислять эти коэффициенты будем методом подстановки решения (2.4) в уравнение (1.10).

Вычислим функцию $M(x)$. Единственное ограниченное непрерывное решение уравнения (2.2) ищем в виде

$$M(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}-\Big(\dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}-D_0\Big)e^{(x-r)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}}, & x\le r,\\ \dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\gamma}-\Big(\dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\gamma}-D_0\Big)e^{-(x-r)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1+\gamma)}}, & x\ge r.\end{cases} \qquad (2.5)$$

Непрерывность производной влечет

$$-\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}-D_0\Big)=\sqrt{2(\lambda+\lambda_1+\gamma)}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\gamma}-D_0\Big),$$

и, следовательно,

$$D_0=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}+\sqrt{\lambda+\lambda_1}}\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda+\lambda_1}}\Big)=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}\sqrt{\lambda+\lambda_1}}.$$

Поскольку $Q(x)$ является решением уравнения (1.10), то нужно вычислить $\mathbf{E}Q(z+Y_1)$.

Функция $Q(x)$ представляется в виде (2.4), поэтому она состоит из двух типов слагаемых, для каждого из которых проведем отдельные вычисления. Для слагаемых второй группы имеем

$$E\{\mathbb{I}_{[r,\infty)}(z+Y_1)e^{-\beta(z+Y_1)}\}=\frac{\eta}{2}e^{-\beta z}\int\limits_{r-z}^{\infty}e^{-y\beta-|y|\eta}dy.$$

При $z<r$

$$\frac{\eta}{2}e^{-\beta z}\int\limits_{r-z}^{\infty}e^{-y\beta-|y|\eta}dy=\frac{\eta}{2}e^{-\beta z}\int\limits_{r-z}^{\infty}e^{-y(\beta+\eta)}dy=\frac{\eta e^{-(\beta+\eta)r}}{2(\beta+\eta)}e^{\eta z}.$$

При $z > r$

$$\frac{\eta}{2}e^{-\beta z}\int\limits_{r-z}^{\infty} e^{-y\beta-|y|\eta}dy = \frac{\eta}{2}e^{-\beta z}\Big(\int\limits_{r-z}^{0} e^{-y(\beta-\eta)}dy + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-y(\beta+\eta)}dy\Big) =$$

$$= \frac{\eta}{2}e^{-\beta z}\Big(\frac{2\eta}{\eta^2-\beta^2} + \frac{1}{\beta-\eta}e^{(z-r)(\beta-\eta)}\Big) = \frac{\eta^2}{\eta^2-\beta^2}e^{-\beta z} + \frac{\eta e^{(\eta-\beta)r}}{2(\beta-\eta)}e^{-\eta z}.$$

В результате получаем

$$\mathbf{E}\{\mathbb{1}_{[r,\infty)}(z+Y_1)e^{-\beta(z+Y_1)}\} = \frac{\eta e^{-(\beta+\eta)r}}{2(\beta+\eta)}e^{\eta z}\,\mathbb{1}_{(-\infty,r)}(z)$$

$$+\Big(\frac{\eta^2}{\eta^2-\beta^2}e^{-\beta z} + \frac{\eta e^{(\eta-\beta)r}}{2(\beta-\eta)}e^{-\eta z}\Big)\mathbb{1}_{[r,\infty)}(z).$$

Для слагаемых первой группы воспользуемся свойством симметрии (Y_1 с $-Y_1$ одинаково распределены). Тогда

$$\mathbf{E}\{\mathbb{1}_{(-\infty,r)}(z+Y_1)e^{\alpha(z+Y_1)}\} = \mathbf{E}\{\mathbb{1}_{(-\infty,r)}(z-Y_1)e^{\alpha(z-Y_1)}\} =$$

$$= E\{\mathbb{1}_{(-r,\infty)}(-z+Y_1)e^{-\alpha(-z+Y_1)}\} =$$

$$= \frac{\eta e^{(\eta+\alpha)r}}{2(\eta+\alpha)}e^{-\eta z}\,\mathbb{1}_{(r,\infty)}(z) + \Big(\frac{\eta^2}{\eta^2-\alpha^2}e^{\alpha z} + \frac{\eta e^{(\alpha-\eta)r}}{2(\alpha-\eta)}e^{\eta r}\Big)\mathbb{1}_{(-\infty,r]}(z).$$

Теперь вычислим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\mathbf{E}Q(z+Y_1)\,dz. \tag{2.6}$$

Из вида $Q(x)$ следует, что нам остается для произвольного $\rho > 0$ вычислить два интеграла:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)e^{-\rho z}\,\mathbb{1}_{[r,\infty)}(z)dz =: M_+(x),\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)e^{\rho z}\,\mathbb{1}_{(-\infty,r]}(z)dz =: M_-(x).$$

В силу (2.2) и (2.3), $G_z(x)$ является функцией Грина, поэтому $M_+(x)$ может быть найдено как единственное непрерывное ограниченное решение следующего неоднородного дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{2}M_+''(x) - (\lambda+\lambda_1+\gamma\,\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x))M_+(x) = -\lambda_1 e^{-x\rho}\,\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x).$$

С учетом непрерывности функции $M_+(x)$ решение ищем в виде

$$M_+(x)=\begin{cases} \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\gamma-\rho^2/2}D_+^\rho e^{-\rho r+(x-r)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}}, & x\le r,\\ \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\gamma-\rho^2/2}\Big(e^{-\rho x}-e^{-\rho r}(1-D_+^\rho)e^{(r-x)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1+\gamma)}}\Big), & x\ge r. \end{cases}$$

Воспользуемся тем, что $M'_+(x)$ непрерывна в точке r, тогда найдем

$$D_+^\rho=\frac{\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}-\rho/\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}+\sqrt{\lambda+\lambda_1}}.$$

Аналогично вычислим $M_-(x)$ как единственное непрерывное ограниченное решение уравнения

$$\frac{1}{2}M''_-(x)-(\lambda+\lambda_1+\gamma\mathbb{I}_{[r,\infty)}(x))M_-(x)=-\lambda_1 e^{x\rho}\mathbb{I}_{(-\infty,r]}(x).$$

С учетом непрерывности $M_-(x)$ в точке r имеем

$$M_-(x)=\begin{cases} \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1-\rho^2/2}\Big(e^{\rho x}-e^{\rho r}(1-D_-^\rho)e^{(x-r)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}}\Big), & x\le r,\\ \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1-\rho^2/2}D_-^\rho e^{\rho r+(r-x)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1+\gamma)}}, & x\ge r. \end{cases}$$

Из непрерывности $M'_-(x)$ в точке r следует

$$D_-^\rho=\frac{\sqrt{\lambda+\lambda_1}-\rho/\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}+\sqrt{\lambda+\lambda_1}}.$$

Обозначим $\Delta_\gamma^\rho:=\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\gamma-\rho^2/2}$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_z(x) EQ(z+Y_1)dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \Big\{ \frac{A_k\eta^2}{\eta^2-\alpha_k^2}\Delta_0^{\alpha_k}\big(e^{\alpha_k(x-r)} - (1-D_-^{\alpha_k})e^{(x-r)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}}\big)\ \mathbb{1}_{(-\infty,r]}(x) +$$
$$+ \frac{A_k\eta^2}{\eta^2-\alpha_k^2}\Delta_0^{\alpha_k} D_-^{\alpha_k} e^{(r-x)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1+\gamma)}}\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x) +$$
$$+ \frac{A_k\eta}{2(\alpha_k-\eta)}\Delta_0^{\eta}\big(e^{\eta(x-r)} - (1-D_-^{\eta})e^{(x-r)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}}\big)\mathbb{1}_{(-\infty,r]}(x) +$$
$$+ \frac{A_k\eta}{2(\alpha_k-\eta)}\Delta_0^{\eta} D_-^{\eta} e^{(r-x)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1+\gamma)}}\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x) +$$
$$+ \frac{A_k\eta}{2(\alpha_k+\eta)}\Delta_\gamma^{\eta} D_+^{\eta} e^{(x-r)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}}\mathbb{1}_{(-\infty,r)}(x) +$$
$$+ \frac{A_k\eta}{2(\alpha_k+\eta)}\Delta_\gamma^{\eta}\big(e^{\eta(r-x)} - (1-D_+^{\eta})e^{(r-x)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1+\gamma)}}\big)\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x) +$$
$$+ \frac{B_k\eta}{2(\beta_k+\eta)}\Delta_0^{\eta}\big(e^{\eta(x-r)} - (1-D_-^{\eta})e^{(x-r)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}}\big)\mathbb{1}_{(-\infty,r)}(x) +$$
$$+ \frac{B_k\eta}{2(\beta_k+\eta)}\Delta_0^{\eta} D_-^{\eta} e^{(r-x)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1+\gamma)}}\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x) +$$
$$+ \frac{B_k\eta^2}{\eta^2-\beta_k^2}\Delta_\gamma^{\beta_k} D_+^{\beta_k} e^{(x-r)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}}\mathbb{1}_{(-\infty,r]}(x) +$$
$$+ \frac{B_k\eta^2}{\eta^2-\beta_k^2}\Delta_\gamma^{\beta_k}\big(e^{\beta_k(r-x)} - (1-D_+^{\beta_k})e^{(r-x)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1+\gamma)}}\big)\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x) +$$
$$+ \frac{B_k\eta}{2(\beta_k-\eta)}\Delta_\gamma^{\eta} D_+^{\eta} e^{(r-x)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}}\mathbb{1}_{(-\infty,r]}(x) +$$
$$+ \frac{B_k\eta}{2(\beta_k-\eta)}\Delta_\gamma^{\eta}(e^{\eta(r-x)} - (1-D_+^{\eta})e^{(r-x)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1+\gamma)}}\big)\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)\Big\}.$$

Подставляя (2.5) и полученное выше выражение для (2.6) в уравнение (1.10), получаем равенство, в котором приравниваем коэффициенты при множителях

$$e^{\alpha_k(x-r)},\ e^{\beta_k(r-x)},\ e^{(x-r)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}},\ e^{\eta(x-r)},\ e^{\eta(r-x)},\ e^{(r-x)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1+\gamma)}}.$$

Это позволит нам вычислить коэффициенты A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, α_1, α_2, β_1, β_2.

При постоянных множителях ($\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$) выполняются

равенства

$$A_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1} + A_0\Delta_0^0, \qquad B_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\gamma} + B_0\Delta_\gamma^0,$$

где $\Delta_0^0 = \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}$, $\Delta_\gamma^0 = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\gamma}$, следовательно, $A_0 = 1$, $B_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\gamma}$.

Приравняем коэффициенты при $e^{\alpha_k(x-r)}$, $k \neq 0$. Из равенства $A_k = \frac{A_k\eta^2}{\eta^2-\alpha_k^2}\Delta_0^{\alpha_k}$ получаем $\frac{\eta^2}{\eta^2-\alpha_k^2}\Delta_0^{\alpha_k} = 1$. Так как $\Delta_0^{\alpha_k} = \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1-\alpha_k^2/2}$, то $\lambda = \frac{\alpha_k^2}{2} + \frac{\lambda_1\alpha_k^2}{\eta^2-\alpha_k^2}$. Таким образом, параметры α_1 и α_2 являются положительными корнями уравнения

$$\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\lambda_1\alpha^2}{\eta^2-\alpha^2} = \lambda. \tag{2.7}$$

Решая уравнение, находим, что α_1, α_2 выражаются формулой (1.4).

Аналогично предыдущему, приравниваем коэффициенты при $e^{\beta_k(r-x)}$, $k \neq 0$. Получаем $B_k = B_k\frac{\eta^2}{\eta^2-\beta_k^2}\Delta_\gamma^{\beta_k}$, и, следовательно, $\frac{\eta^2}{\eta^2-\beta_k^2}\Delta_\gamma^{\beta_k} = 1$. Так как $\Delta_\gamma^{\beta_k} = \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\gamma-\beta_k^2/2}$, то $\lambda+\gamma = \frac{\lambda_1\beta_k^2}{\eta^2-\beta_k^2} + \frac{\beta_k^2}{2}$. Таким образом, параметры β_1 и β_2 являются положительными корнями уравнения

$$\frac{\beta^2}{2} + \frac{\lambda_1\beta^2}{\eta^2-\beta^2} = \lambda+\gamma. \tag{2.8}$$

Решая это уравнение, находим, что β_1, β_2 выражаются формулой (1.5).

При $e^{\eta(x-r)}$ суммарный коэффициент должен быть равен нулю, поэтому

$$\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{A_k}{\alpha_k-\eta} + \frac{B_k}{\beta_k+\eta}\right) = 0. \tag{2.9}$$

Приравниваем к нулю коэффициент при $e^{\eta(r-x)}$. В результате имеем

$$\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{A_k}{\alpha_k+\eta} + \frac{B_k}{\beta_k-\eta}\right) = 0. \tag{2.10}$$

Приравниваем к нулю коэффициент при $e^{(x-r)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}}$, используя равенства (2.9), (2.10) и учитывая, что $\frac{\eta^2}{\eta^2-\beta_k^2}\Delta_\gamma^{\beta_k}=1$, $\frac{\eta^2}{\eta^2-\alpha_k^2}\Delta_0^{\alpha_k}=1$, $k=1,2$. Имеем

$$D_0-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}-\Big(\Delta_0^0(1-D_-^0)+A_1(1-D_-^{\alpha_1})+A_2(1-D_-^{\alpha_2})\Big)+$$
$$+\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\gamma}\Delta_\gamma^0 D_+^0+B_1D_+^{\beta_1}+B_2D_+^{\beta_2}\Big)=0. \qquad (2.11)$$

Приравниваем к нулю коэффициент при $e^{(r-x)\sqrt{2(\lambda+\lambda_1+\gamma)}}$. Аналогично предыдущему случаю, получаем

$$D_0-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\gamma}+\Delta_0^0D_-^0+A_1D_-^{\alpha_1}+A_2D_-^{\alpha_2}-$$
$$-\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\gamma}\Delta_\gamma^0(1-D_+^0)+B_1(1-D_+^{\beta_1})+B_2(1-D_+^{\beta_2})\Big)=0. \qquad (2.12)$$

Таким образом, мы получили алгебраическую систему из четырех линейных уравнений (2.9)–(2.12) относительно коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2. Преобразуем уравнения этой системы. Свободный член уравнения (2.11) имеет вид

$$\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}-D_0+\Delta_0^0(1-D_-^0)-\frac{\lambda}{\lambda+\gamma}\Delta_\gamma^0D_+^0=\frac{\gamma\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}}{(\lambda+\gamma)(\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}+\sqrt{\lambda+\lambda_1})}.$$

Тогда уравнение (2.11) перепишется в виде

$$\sum_{k=1}^{2}A_k(D_-^{\alpha_k}-1)+\sum_{k=1}^{2}B_kD_+^{\beta_k}=\frac{\gamma\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}}{(\lambda+\gamma)(\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}+\sqrt{\lambda+\lambda_1})}. \qquad (2.13)$$

Свободный член уравнения (2.12) имеет вид

$$\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\gamma}-D_0-\Delta_0^0D_-^0+\frac{\lambda\Delta_\gamma^0}{\lambda+\gamma}(1-D_+^0)=-\frac{\gamma\sqrt{\lambda+\lambda_1}}{(\lambda+\gamma)(\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}+\sqrt{\lambda+\lambda_1})}.$$

Уравнение (2.12) перепишется в виде

$$\sum_{k=1}^{2}A_kD_-^{\alpha_k}+\sum_{k=1}^{2}B_k(D_+^{\beta_k}-1)=-\frac{\gamma\sqrt{\lambda+\lambda_1}}{(\lambda+\gamma)(\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}+\sqrt{\lambda+\lambda_1})}. \qquad (2.14)$$

Из (2.14) вычтем (2.13). В результате получим

$$A_1+A_2-B_1-B_2+\frac{\gamma}{\lambda+\gamma}=0. \qquad (2.15)$$

Равенство (2.15), ввиду представления (2.4), характеризует непрерывность функции $Q(x)$ в точке r. Это согласуется с тем, что решение уравнения (1.10) должно быть непрерывным.

Домножим обе части равенств (2.13), (2.14) на $\sqrt{\lambda+\lambda_1}$ и на $\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}$ соответственно и сложим их. В результате имеем

$$\sum_{k=1}^{2} A_k\left((D_-^{\alpha_1}-1)\sqrt{\lambda+\lambda_1}+D_-^{\alpha_1}\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{2} B_k\left(D_+^{\beta_k}\sqrt{\lambda+\lambda_1}+(D_+^{\beta_k}-1)\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}\right)=0.$$

Подставим $D_+^{\beta_k}=\frac{\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}-\beta_k/\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}+\sqrt{\lambda+\lambda_1}}$ и $D_-^{\alpha_k}=\frac{\sqrt{\lambda+\lambda_1}-\alpha_k/\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda+\lambda_1+\gamma}+\sqrt{\lambda+\lambda_1}}$. Тогда получим

$$\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\beta_1B_1+\beta_2B_2=0. \tag{2.16}$$

Равенство (2.16), ввиду представления (2.4), характеризует непрерывность производной функции $Q(x)$ в точке r. Это согласуется с тем, что решение уравнения (1.10) должно иметь непрерывную производную. Принимая во внимание то, что $A_0=1$, $B_0=\frac{\lambda}{\lambda+\gamma}$, уравнения (2.9) и (2.10) перепишем в виде

$$\frac{A_1}{\alpha_1-\eta}+\frac{A_2}{\alpha_2-\eta}+\frac{B_1}{\beta_1+\eta}+\frac{B_2}{\beta_2+\eta}=\frac{\gamma}{\eta(\lambda+\gamma)}, \tag{2.17}$$

$$\frac{A_1}{\alpha_1+\eta}+\frac{A_2}{\alpha_2+\eta}+\frac{B_1}{\beta_1-\eta}+\frac{B_2}{\beta_2-\eta}=-\frac{\gamma}{\eta(\lambda+\gamma)}. \tag{2.18}$$

Сделаем замену переменных: $A_k=\frac{\gamma(\eta^2-\alpha_k^2)}{\lambda+\gamma}\widetilde{A}_k$, $B_k=\frac{\gamma(\eta^2-\beta_k^2)}{\lambda+\gamma}\widetilde{B}_k$, $k=0,1,2$. Тогда представление (2.4) для $Q(x)$ перепишется в следующем виде

$$Q(x)=\left(1+\widetilde{A}_1\frac{\gamma(\eta^2-\alpha_1^2)}{\lambda+\gamma}e^{\alpha_1(x-r)}+\widetilde{A}_2\frac{\gamma(\eta^2-\alpha_2^2)}{\lambda+\gamma}e^{\alpha_2(x-r)}\right)\mathbb{I}_{(-\infty,r]}(x)+$$

$$+\left(\frac{\gamma}{\lambda+\gamma}+\widetilde{B}_1\frac{\gamma(\eta^2-\beta_1^2)}{\lambda+\gamma}e^{-\beta_1(x-r)}+\widetilde{B}_2\frac{\gamma(\eta^2-\beta_2^2)}{\lambda+\gamma}e^{-\beta_2(x-r)}\right)\mathbb{I}_{[r,\infty)}(x).$$

Система (2.15)–(2.18) преобразуется к виду:

$$\widetilde{A}_1(\eta^2-\alpha_1^2)+\widetilde{A}_2(\eta^2-\alpha_2^2)-\widetilde{B}_1(\eta^2-\beta_1^2)-\widetilde{B}_1(\eta^2-\beta_2^2)+1=0, \tag{2.19}$$

$$\widetilde{A}_1\alpha_1(\eta^2-\alpha_1^2)+\widetilde{A}_2\alpha_2(\eta^2-\alpha_2^2)+\widetilde{B}_1\beta_1(\eta^2-\beta_1^2)+\widetilde{B}_1\beta_2(\eta^2-\beta_2^2)=0, \tag{2.20}$$

$$\widetilde{A}_1(\eta+\alpha_1)+\widetilde{A}_2(\eta+\alpha_2)-\widetilde{B}_1(\eta-\beta_1)-\widetilde{B}_2(\eta-\beta_2)=-\frac{1}{\eta}, \tag{2.21}$$

$$\widetilde{A}_1(\eta-\alpha_1)+\widetilde{A}_2(\eta-\alpha_2)-\widetilde{B}_1(\eta+\beta_1)-\widetilde{B}_2(\eta+\beta_2)=-\frac{1}{\eta}. \tag{2.22}$$

Сложим равенства (2.21) и (2.22). Тогда получим

$$\widetilde{A}_1+\widetilde{A}_2-\widetilde{B}_1-\widetilde{B}_2+\frac{1}{\eta^2}=0.$$

Вычтем из (2.21) равенство (2.22). В результате получим

$$\alpha_1\widetilde{A}_1+\alpha_2\widetilde{A}_2+\beta_1\widetilde{B}_1+\beta_2\widetilde{B}_2=0.$$

Используем эти равенства в (2.19), (2.20). В итоге имеем систему

$$\widetilde{A}_1+\widetilde{A}_2-\widetilde{B}_1-\widetilde{B}_2=-\frac{1}{\eta^2}, \tag{2.23}$$

$$\alpha_1\widetilde{A}_1+\alpha_2\widetilde{A}_2+\beta_1\widetilde{B}_1+\beta_2\widetilde{B}_2=0, \tag{2.24}$$

$$\alpha_1^2\widetilde{A}_1+\alpha_2^2\widetilde{A}_2-\beta_1^2\widetilde{B}_1-\beta_2^2\widetilde{B}_2=0, \tag{2.25}$$

$$\alpha_1^3\widetilde{A}_1+\alpha_2^3\widetilde{A}_2+\beta_1^3\widetilde{B}_1+\beta_2^3\widetilde{B}_2=0. \tag{2.26}$$

Эту систему несложно решить и, тем самым, найти коэффициенты $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$. Исключим коэффициенты $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$, тогда получим систему из двух уравнений

$$(\beta_1+\alpha_1)(\beta_1+\alpha_2)\widetilde{B}_1+(\beta_2+\alpha_1)(\beta_2+\alpha_2)\widetilde{B}_2=\frac{\alpha_1\alpha_2}{\eta^2},$$

$$\beta_1(\beta_1+\alpha_1)(\beta_1+\alpha_2)\widetilde{B}_1+\beta_2(\beta_2+\alpha_1)(\beta_2+\alpha_2)\widetilde{B}_2=0.$$

Решая эту простую систему, находим

$$(\beta_1+\alpha_1)(\beta_1+\alpha_2)\widetilde{B}_1=-\frac{\alpha_1\alpha_2\beta_2}{\eta^2(\beta_1-\beta_2)}.$$

$$(\beta_2+\alpha_1)(\beta_2+\alpha_2)\widetilde{B}_2=\frac{\alpha_1\alpha_2\beta_1}{\eta^2(\beta_1-\beta_2)}.$$

Отсюда получаем

$$\widetilde{B}_1=-\frac{\alpha_1\alpha_2\beta_2}{\eta^2(\beta_1-\beta_2)(\beta_1+\alpha_1)(\beta_1+\alpha_2)},$$

$$\widetilde{B}_2=\frac{\alpha_1\alpha_2\beta_1}{\eta^2(\beta_1-\beta_2)(\beta_2+\alpha_1)(\beta_2+\alpha_2)}.$$

Поскольку система алгебраических уравнений (2.23)–(2.26) сохраняет вид при замене $\alpha_k\mapsto\beta_k$, $A_k\mapsto B_k$, $-\frac{1}{\eta^2}\mapsto\frac{1}{\eta^2}$, то очевидно, что

$$\widetilde{A}_1=\frac{\beta_1\beta_2\alpha_2}{\eta^2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1+\alpha_1)(\beta_2+\alpha_1)},$$

$$\widetilde{A}_2=-\frac{\beta_1\beta_2\alpha_1}{\eta^2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1+\alpha_2)(\beta_2+\alpha_2)}.$$

Таким образом, получаем искомый результат – формулу (1.3).

Литература

1. Lévy P., *Sur certains processus stochatiques homogènes.* — Compositio Math. **7** no. 2 (1939), 283–339.
2. Kac M., *On distribution of certain Wiener functionals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65** no. 1 (1949), 1–13.
3. Kac M., *On some connections between probability theory and differential and integral equations.* Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. Probab. (1951), pp. 189–215.
4. Скороход А. В., *Случайные процессы с независимыми приращениями.* М., Наука, 1964.
5. Mordecki E., *Ruin probabilities for Lévy processes with mixed exponential negative jumps.* — Теория вероятн. и ее примен. **48**, № 1 (2003), 188–194.
6. Бородин А. Н., *Распределение функционалов от некоторых процессов с независимыми приращениями.* — Вестник СПбГУ. Сер. 1. № 4 (2005), 7–20.
7. Бородин А. Н., *Распределение функционалов от скачкообразного диффузионного процесса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **328** (2005), 27–41.
8. Borodin A.N., Salminen P., *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae.* Second edition, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2002.

Borodin A. N. On distributions of passage times of Brownian motion with jumps.

Brownian motion with jumps that is the sum of Brownian motion and compound Poisson process is considered. It is assumed that the distribution of jumps is symmetric exponential. The formula for the Laplace

transform of the distribution of time spend by Brownian motion with jumps upper than some level is obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 1 декабря 2007 г.