Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

А. Н. Бородин

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СКАЧКООБРАЗНЫХ ДИФФУЗИЙ

1. Скачкообразная диффузия. В работе изучается некоторый класс скачкообразных диффузий. Крайними представителями этого класса являются с одной стороны однородные диффузионные процессы, а с другой – процесс Пуассона с переменной интенсивностью. Скачкообразные диффузии, как будет показано, обладают многими хорошими свойствами, унаследованными как от классических диффузионных процессов, так и от пуассоновских. Этот класс замкнут относительно композиций с обратимыми дважды непрерывно дифференцируемыми функциями. Специальная случайная замена времени снова приводит к скачкообразным диффузиям (аналог теоремы П. Леви, [1]). Для процессов из рассматриваемого класса справедлив результат о преобразовании меры, аналогичный преобразованию Гирсанова [2] для классических диффузий. Важной особенностью этого класса также является и то, что для него удается получить результаты, позволяющие вычислять распределения некоторых функционалов от скачкообразных диффузий.

Для диффузий без скачков результаты, позволяющие вычислять распределения интегральных функционалов, были получены в классических работах М. Каца [3] и [4]. Для процессов с независимыми приращениями задачи о преобразовании меры процесса и задачи о вычислении распределений функционалов были изучены в монографии А. В. Скорохода [5].

Пусть $N(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона с параметром 1. Процесс

Настоящая работа частично поддерживалась грантом РФФИ 05-01-00911 и Программой фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики".

$N(t)$ может быть представлен в следующем виде

$$N(t) = \max\Big\{l : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\},$$

где τ_k, $k = 1, 2, \dots$, – независимые экспоненциально распределенные с параметром 1 случайные величины, $\mathbf{P}(\tau_k \geqslant t) = e^{-t}$.

Пусть Y_k, $k = 1, 2, \dots$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от процесса N. Предположим, что броуновское движение W не зависит от величин τ_k и Y_k, $k = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим однородную диффузию X. Такая диффузия является решением стохастического дифференциального уравнения: с вероятностью единица для любых $s \leqslant t \leqslant T$

$$X(t) = X(s) + \int_s^t \mu(X(u))\,du + \int_s^t \sigma(X(u))\,dW(u), \tag{1.1}$$

где функции $\mu(x)$, $\sigma(x)$ удовлетворяют условию Липшица, $\sigma(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$ и $X(0) = x$.

Для неотрицательной кусочно непрерывной функции h момент

$$\varkappa_1 := \min\Big\{s : \int_0^s h(X(v))\,dv > \tau_1\Big\}$$

является моментом обратным к интегральному функционалу от диффузии X.

Обобщенная скачкообразная диффузия, обозначим ее J, определяется рекуррентно следующим образом. Пусть $\rho(x, y)$ – некоторая измеримая функция. Для $0 \leqslant t \leqslant \varkappa_1$ полагаем $J(t) = X(t)$, где X – решение уравнения (1.1). Для $l = 1, 2, \dots$ процесс J является решением стохастического дифференциального уравнения

$$J(t) = \rho\big(J(\varkappa_l -), Y_l\big) + \int_{\varkappa_l}^t \mu(J(u))\,du + \int_{\varkappa_l}^t \sigma(J(u))\,dW(u)$$

на промежутке времени $\varkappa_l \leqslant t < \varkappa_{l+1}$, где

$$\varkappa_{l+1} := \min\Big\{s \geqslant \varkappa_l : \int_{\varkappa_l}^s h(J(v))\,dv > \tau_{l+1}\Big\},$$

и τ_k, $k=1,2,\ldots$, являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром 1.

В каждый момент $\varkappa_l$ скачкообразная диффузия J начинается заново как обычная диффузия X из точки $\rho\big(J(\varkappa_l-),Y_l\big)$. Механизм возникновения моментов скачков заключается в следующем. После очередного скачка рассмотрим некоторую выделенную траекторию диффузии. Поскольку скачкообразная диффузия в моменты скачков начинается заново, то можно рассматривать ее от начального момента времени 0. Согласно определению момента $\varkappa_1$, для любого фиксированного t событие $\{\varkappa_1>t\}$ наступает тогда и только тогда, когда $\Big\{\int\limits_0^t h(X(v))\,dv \leqslant \tau\Big\}$. В этом случае

$$\mathbf{P}(\varkappa_1>t|X(\cdot))=\mathbf{P}\Big(\int\limits_0^t h(X(v))\,dv\leqslant\tau\Big|X(\cdot)\Big)=\exp\Big(-\int\limits_0^t h(X(v))\,dv\Big). \tag{1.2}$$

Разобьем интервал времени $[0,t]$ на малые интервалы времени Δ, устремляя в дальнейшем их длину к нулю. Пусть независимо на каждом из интервалов $[k\Delta,(k+1)\Delta)$ может наступить момент скачка с вероятностью $h(X(k\Delta))\Delta$. Тогда для фиксированной траектории диффузии в пределе при $\Delta\to 0$ момент первого наступления скачка $\varkappa_\Delta$, задаваемого таким образом, совпадает по распределению с моментом $\varkappa_1$. Действительно, для момента первого наступления скачка $\varkappa_\Delta$, имеем

$$\mathbf{P}(\varkappa_\Delta>t|X(\cdot))\approx\prod_{k=1}^{[t/\Delta]}\big(1-h(X(k\Delta))\Delta\big)\approx$$

$$\approx\exp\Big(-\sum_{k=1}^{[t/\Delta]}h(X(k\Delta))\Delta\Big)\approx\exp\Big(-\int\limits_0^t h(X(v))\,dv\Big).$$

Таким образом, если положение диффузии определено к моменту времени t, то в последующий бесконечно малый интервал времени $[t,t+dt)$ скачок наступает с вероятностью $h(J(t))\,dt$ независимо от того, когда был предыдущий скачок. Это обстоятельство влечет наличие марковского свойства у так определенных скачкообразных диффузий.

Скачкообразная диффузия J характеризуется следующими параметрами: коэффициентами диффузии $\mu(x)$, $\sigma(x)$, функцией скачка $\rho(x,y)$, и случайными величинами Y_k, $k=1,2,\dots$, определяющими величины скачков, а также функцией $h(x)$, задающей шкалу времени.

Заметим, что $\varkappa_l=\sum\limits_{k=1}^{l}\tau_k$ при $h\equiv 1$. Выбрав $h(x)\equiv\lambda_1$, мы получаем диффузию, имеющую скачки через промежутки времени $\tilde\tau_k$, $k=1,2,\dots$, которые являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром λ_1.

Отметим, что процесс $C(t)=\max\{l:\varkappa_l\leqslant t\}$, $t\geqslant 0$, подобно процессу Пуассона, считает число скачков к моменту времени t, совершенных диффузией J, и $dC(t)$ равняется единице или нулю в зависимости от того принадлежит $\varkappa_l$ интервалу $[t,t+dt)$ для некоторого $l=1,2,\dots$, или нет.

Нетрудно понять, что

$$C(t)=N(A(t)),\tag{1.3}$$

где $A(t):=\int\limits_0^t h(J(v))\,dv$. Действительно, из определения моментов $\varkappa_l$ следует, что $\int\limits_{\varkappa_l}^{\varkappa_{l+1}} h(J(v))\,dv=\tau_{l+1}$, или, что $\int\limits_0^{\varkappa_l} h(J(v))\,dv=\sum\limits_{k=1}^{l}\tau_k$. Поэтому

$$C(t)=\max\{l:A(\varkappa_l)\leqslant A(t)\}=\max\Big\{l:\sum_{k=1}^{l}\tau_k\leqslant A(t)\Big\}=N(A(t)).$$

Диффузия J является решением уравнения

$$\begin{aligned}dJ(t)&=\mu(J(t))\,dt+\sigma(J(t))\,dW(t)+\\&\quad+\big(\rho\big(J(t-),Y_{C(t)}\big)-J(t-)\big)dC(t),\qquad J(0)=x.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Пусть $G(x)$, $x\in\mathbf{R}$, – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Справедливо следующее обобщение формулы Ито

$$\begin{aligned}dG(J(t))&=G'(J(t))(\mu(J(t))\,dt+\sigma(J(t))\,dW(t))+\frac{\sigma^2(J(t))}{2}G''(J(t))\,dt+\\&\quad+\big(G(\rho\big(J(t-),Y_{C(t)}\big))-G(J(t-))\big)\,dC(t).\end{aligned}\tag{1.5}$$

Особое значение имеет результат действия математического ожидания на формулу Ито. Хорошо известно, что математическое ожидание стохастического интеграла равно нулю. Далее (см. (2.1)) будет доказана формула для математического ожидания от скачкообразной составляющей формулы (1.5). В результате получим, что

$$d\mathbf{E}_x G(J(t)) = \mathbf{E}_x\{G'(J(t))\mu(J(t))\}\,dt + \frac{1}{2}\mathbf{E}_x\{\sigma^2(J(t))G''(J(t))\}\,dt + \\ + \mathbf{E}_x\big\{h(J(t))\big(G(\rho(J(t),Y)) - G(J(t))\big)\big\}\,dt, \qquad (1.6)$$

где Y – случайная величина, не зависящая от процесса J и распределенная как Y_1.

Важную роль для многих исследований, связанных с обобщенными скачкообразными диффузиями, играет результат, доказанный в [6]. Он позволяет вычислять распределения интегральных функционалов, и функционалов инфимума и супремума от обобщенных скачкообразных диффузий. Этот результат базируется на решениях обыкновенных дифференциальных уравнениях второго порядка с кусочно непрерывными коэффициентами. Следующие замечания касаются решений таких уравнений.

Замечание 1.1. Пусть функции $\mu(x)$, $\sigma(x)$ удовлетворяют условию Липшица, $\sigma(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Решение дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}U''(x) + \mu(x)U(x) - h(x)U(x) = -q(x), \quad x \in (a,b), \qquad (1.7)$$

где $h(x)$ и $q(x)$ – кусочно непрерывные функции понимается следующим образом: на интервалах непрерывности функций h и q оно удовлетворяет (1.7), а в точках разрыва функций h и q решение и его первая производная полагаются непрерывными.

Замечание 1.2. Если в дополнение к уравнению (1.7) налагается условие на скачок первой производной вида

$$U'(z+) - U'(z-) = -2\lambda, \qquad z \in (a,b), \qquad (1.8)$$

то при $x \neq z$ решение понимается согласно замечанию 1.1, а в точке z наряду с (1.8) налагается условие непрерывности решения.

Замечание 1.3. Если a и b конечны, то задаются граничные условия в этих точках, а если, либо $a = -\infty$, либо $b = \infty$, то соответствующее граничное условие заменяется на условие ограниченности функции $U(x)$ при $x \to -\infty$ или $x \to \infty$.

Для неотрицательных функций $h(x)$ и ограниченных $q(x)$ удовлетворяющие этим требованиям решения являются единственными.

Рассмотрим интегральный функционал $A(t) := \int\limits_0^t f(J(s))\,ds$ и функционалы инфимума и супремума $\inf\limits_{0\le s\le t} J(s)$, $\sup\limits_{0\le s\le t} J(s)$.

Пусть τ – не зависящий от процесса $\{J(s),\ s\ge 0\}$ экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание по процессу J при условии $J(0)=x$. В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi;\,A\} := \mathbf{E}\{\xi\mathbb{I}_A\}$.

Теорема 1.1. *Пусть $\Phi(x)$, $f(x)$ и $h(x)$, $x\in[a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Пусть $q(x,y)$ – измеримая функция. Предположим, что $f\geqslant 0$, $h\geqslant 0$ и $\sup\limits_{x\in[a,b]}\mathbf{E}e^{q(x,Y_1)}\leqslant 1$. Тогда функция*

$$Q(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J(s))\,ds + \int\limits_{[0,\tau]} q\big(J(s-),Y_{C(s)}\big)\,dC(s)\Big);$$

$$a\leqslant \inf_{0\le s\le\tau} J(s),\ \sup_{0\le s\le\tau} J(s)\leqslant b\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q(x) = M(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\,\mathbf{E}\big\{e^{q(z,Y_1)}Q(\rho(z,Y_1))\big\}\,dz, \tag{1.7}$$

где $M(x)$, $x\in(a,b)$, – единственное решение задачи

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}M''(x) + \mu(x)M'(x) - (\lambda + h(x) + f(x))M(x) = -\lambda\Phi(x), \tag{1.8}$$

$$M(a)=0, \qquad M(b)=0, \tag{1.9}$$

и $G_z(x)$, $x\in(a,b)$, – единственное решение задачи

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}G''(x) + \mu(x)G'(x) - (\lambda + h(x) + f(x))G(x) = 0, \quad x\neq z, \tag{1.10}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2h(z)/\sigma^2(z), \tag{1.11}$$

$$G(a)=0, \qquad G(b)=0. \tag{1.12}$$

Полагаем $M(x)=0$, $G_z(x)=0$ *для* $x,z\notin(a,b)$.

Замечание 1.4. Функция $Q(x)$, $x\in(a,b)$, является единственным решением следующего интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)Q''(x)+\mu(x)Q'(x)-(\lambda+h(x)+f(x))Q(x)=$$
$$=-\lambda\Phi(x)-h(x)\mathbf{E}\big\{e^{q(x,Y_1)}Q(\rho(x,Y_1))\big\}, \tag{1.13}$$

с граничными условиями

$$Q(a)=0, \qquad Q(b)=0. \tag{1.14}$$

Если $a=-\infty$ или $b=\infty$, то предполагаем, что $\Phi(x)$ и $h(x)$, $x\in\mathbf{R}$, – ограниченые функции. Тогда Q – единственное ограниченное решение (1.13) на всей прямой.

Действительно, $G_z(x)$ – функция Грина, поэтому для произвольной функции $R(x)$, $x\in[a,b]$, функция

$$U(x):=\int_{-\infty}^{\infty}G_z(x)\,R(z)\,dz \tag{1.15}$$

является при $x\in(a,b)$ единственным решением задачи

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}U''(x)+\mu(x)U'(x)-(\lambda+h(x)+f(x))U(x)=-h(x)R(x),$$
$$U(a)=0, \qquad U(b)=0.$$

Из (1.7) имеем

$$Q(x)=M(x)+U(x) \tag{1.16}$$

для $R(x)=\mathbf{E}\big\{e^{q(x,Y_1)}Q(\rho(x,Y_1))\big\}$. Сумма функций M и U удовлетворяет задаче (1.13), (1.14).

2. Математическое ожидание интегралов по процессу C. Докажем формулу: для произвольной измеримой ограниченной функции $q(x,y)$

$$\mathbf{E}_x\int_{[0,t]}q(J(s-),Y_{C(s)})\,dC(s)=\int_0^t\mathbf{E}_x\big\{h(J(s))m((J(s))\big\}\,ds, \tag{2.1}$$

где $m(x) = \mathbf{E}q(x, Y_1)$. Можно считать $q(x,y)$ неотрицательной функцией. Положим

$$Q_\gamma(x) := \mathbf{E}_x \exp\Big(-\gamma \int\limits_{[0,\tau]} q(J(s-), Y_{C(s)})\, dC(s)\Big).$$

Согласно теореме 1.1 с $\Phi(x) \equiv 1$, $f(x) \equiv 0$, $a = -\infty$, $b = \infty$, функция $Q_\gamma(x)$, $x \in \mathbf{R}$, является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q_\gamma(x) = M(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\, \mathbf{E}\{e^{-\gamma q(z,Y_1)} Q_\gamma(\rho(z, Y_1))\}\, dz, \tag{2.2}$$

где $M(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – единственное ограниченное решение уравнения

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} M''(x) + \mu(x) M'(x) - (\lambda + h(x)) M(x) = -\lambda, \tag{2.3}$$

и $G_z(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – единственное ограниченное решение задачи

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} G''(x) + \mu(x) G'(x) - (\lambda + h(x)) G(x) = 0, \quad x \neq z, \tag{2.4}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2h(z)/\sigma^2(z). \tag{2.5}$$

Очевидно, что

$$\mathbf{E}_x \int\limits_{[0,\tau]} q(J(s-), Y_{C(s)})\, dC(s) = -\frac{d}{d\gamma} Q_\gamma(x)\Big|_{\gamma=0}.$$

Поскольку $Q_0(x) = 1$, то дифференцируя (2.2) по γ и полагая $\gamma = 0$, получаем, что функция $I(x) := \frac{d}{d\gamma} Q_\gamma(x)\Big|_{\gamma=0}$ является единственным ограниченным решением уравнения

$$I(x) = \widetilde{M}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\, \mathbf{E}\{I(\rho(z, Y_1))\}\, dz, \tag{2.6}$$

где $\widetilde{M}(x) := -\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\, \mathbf{E}q(z, Y_1)\, dz = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\, m(z)\, dz$, $x \in \mathbf{R}$, – единственное ограниченное решение уравнения

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} \widetilde{M}''(x) + \mu(x) \widetilde{M}'(x) - (\lambda + h(x)) \widetilde{M}(x) = h(x) m(x). \tag{2.7}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $G_z(x)$ является функцией Грина, т. е. является решением уравнения (2.7), когда вместо $-m(x)$ выступает дельта-функция Дирака. Мы снова можем воспользоваться теоремой 1.1 уже при $\Phi(x) = -\frac{1}{\lambda}h(x)m(x)$, $f(x) \equiv 0$, $q(x,y) \equiv 0$, $a = -\infty$, $b = \infty$. Согласно этому результату, функция

$$\tilde{I}(x) := -\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_x\{h(J(\tau))m(J(\tau))\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения (2.6). Таким образом, мы доказали, что $I(x) = \tilde{I}(x)$, т. е.

$$\mathbf{E}_x \int\limits_{[0,\tau]} q(J(s-), Y_{C(s)})\, dC(s) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_x\{h(J(\tau))m(J(\tau))\}.$$

Обращая преобразование Лапласа по λ, получаем (2.1).

3. Распределения функционалов от скачкообразных диффузий, остановленных в момент, обратный к интегральному функционалу. Рассмотрим проблему вычисления распределений функционалов от скачкообразных диффузий, остановленных в *момент, обратный к интегральному функционалу*. Этот момент определяется формулой

$$\nu(t) := \min\Big\{s : \int\limits_0^s g(J(v))\, dv > t\Big\},$$

где g – неотрицательная функция. Отметим, что $\nu(0)$ может не равняться нулю.

Следующий результат является ключевым для решения задачи вычисления распределений функционалов от скачкообразных диффузий, остановленных в момент, обратный к интегральному функционалу. Положим $\nu = \nu(\tau)$, где τ – не зависящий от процесса $\{J(s),\ s \geq 0\}$, экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$, случайный момент.

Теорема 3.1. *Пусть $\Phi(x)$, $f(x)$, $h(x)$ и $g(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$, $h(x) \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$. Пусть $q(x,y)$ – такая измеримая функция, что* $\sup\limits_{x\in[a,b]} \mathbf{E}e^{q(x,Y_1)} \leqslant 1$.

Тогда функция

$$V(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\nu))\exp\Big(-\int_0^{\nu} f(J(s))\,ds + \int_{[0,\nu]} q\big(J(s-),Y_{C(s)}\big)\,dC(s)\Big);$$

$$a \leqslant \inf_{0\le s\le \nu} J(s),\ \sup_{0\le s\le\nu} J(s) \leqslant b\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$V(x) = M(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\,\mathbf{E}\big\{e^{q(z,Y_1)}V(\rho(z,Y_1))\big\}\,dz, \tag{3.1}$$

где $M(x)$, $x\in(a,b)$, *является единственным решением задачи*

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}M''(x) + \mu(x)M'(x) - (\lambda g(x) + h(x) + f(x))M(x) = -\lambda g(x)\Phi(x), \tag{3.2}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 0, \tag{3.3}$$

а $G_z(x)$, $x\in(a,b)$ *– единственное решение задачи*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)G''(x) + \mu(x)G'(x) - (\lambda g(x) + h(x) + f(x))G(x) = 0, \quad x\ne z, \tag{3.4}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2h(z)/\sigma^2(z), \tag{3.5}$$

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0. \tag{3.6}$$

Полагаем $M(x) = 0$, $G_z(x) = 0$ *для* $x, z \notin (a,b)$.

Замечание 3.1. Функция $V(x)$, $x\in(a,b)$, является единственным решением уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)V''(x) + \mu(x)V'(x) - (\lambda g(x) + h(x) + f(x))V(x) =$$

$$= -\lambda g(x)\Phi(x) - h(x)\mathbf{E}\big\{e^{q(z,Y_1)}V(\rho(x,Y_1))\big\} \tag{3.7}$$

с граничными условиями

$$V(a) = 0, \qquad V(b) = 0. \tag{3.8}$$

Если $a = -\infty$ или $b = \infty$, тогда V – единственное ограниченное решение (3.7).

Замечание 3.2. При $g \equiv 1$ этот результат превращается в теорему 1.1.

Доказательство теоремы 3.1. Чтобы упростить формулы, мы докажем этот результат для случая $a = -\infty$, $b = \infty$. Предположим сначала, что f и h – ограниченные непрерывные функции, а Φ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией с ограниченными производными.

Для произвольного $\widetilde{\lambda} > 0$ положим

$$\eta_{\widetilde{\lambda}}(s) := \Phi(J(s)) \exp\Big(-\int_0^s \big(\widetilde{\lambda} + f(J(v))\big)\,dv + \int_{[0,s]} q\big(J(v-), Y_{C(v)}\big)\,dC(v)\Big). \tag{3.9}$$

Применяя аналог формулы Ито (1.5), имеем

$$\eta_{\widetilde{\lambda}}(t) - \eta_{\widetilde{\lambda}}(0) = \int_{[0,t]} \exp\Big(-\int_0^s \big(\widetilde{\lambda} + f(J(v))\big)\,dv + \int_{[0,s]} q\big(J(v-), Y_{C(v)}\big)\,dC(v)\Big) \times$$

$$\times\Big[\Phi'(J(s))\sigma(J(t))\,dW(s) + \Phi'(J(s))\mu(J(s))\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\sigma^2(J(s))\Phi''(J(s))\,ds - \big(\widetilde{\lambda} + f(J(s))\big)\Phi(J(s))\,ds +$$

$$+\big(\Phi\big(\rho\big(J(s-), Y_{C(s)}\big)\big)e^{q(J(s-),Y_{C(s)})} - \Phi(J(s-))\big)\,dC(s)\Big].$$

Поскольку g – неотрицательная функция, то $\int_0^s g(J(v))\,dv$, $s \geqslant 0$, – возрастающая функция. Это влечет, что для любых $s \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$

$$\mathbb{I}_{[0,\nu(t)]}(s) = \mathbb{I}_{[0,t]}\Big(\int_0^s g(J(v))\,dv\Big).$$

Так как математическое ожидание стохастических интегралов равняется нулю, а ожидание интеграла по $dC(s)$ дает множитель $h(J(s))$ (см. формулу (2.1)), получаем

$$\mathbf{E}_x \eta_{\widetilde{\lambda}}(\nu(t)) - \Phi(x) = \mathbf{E}_x \int_0^\infty \mathbb{I}_{[0,t]}\Big(\int_0^s g(J(v))\,dv\Big) \exp\Big(-\int_0^s \big(\widetilde{\lambda} + f(J(v))\big)\,dv\Big)$$

$$\times \exp\Big(\int\limits_{[0,s]} q\big(J(v-),Y_{C(v)}\big)\,dC(v)\Big)\Big[\frac{1}{2}\sigma^2(J(s))\varPhi''(J(s))+$$

$$+\mu(J(s))\varPhi'(J(s))-\big(\widetilde{\lambda}+f(J(s))\big)\varPhi(J(s))+$$

$$+h(J(s))\big(\mathbf{E}_Y\big\{\varPhi(\rho(J(s),Y))e^{q(J(s),Y)}\big\}-\varPhi(J(s))\big)\Big]\,ds,$$

где $\mathbf{E}_Y$ обозначает математическое ожидание только относительно случайной переменной Y, распределенной как Y_1 и не зависящей от процесса J.

Вычисляя по переменной t преобразование Лапласа с параметром $\lambda>0$ от обеих частей этого равенства, получаем

$$\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}_x\eta_{\widetilde{\lambda}}(\nu(t))\,dt-\varPhi(x)=\mathbf{E}_x\int\limits_0^\infty e^{-\widetilde{\lambda}s}\exp\Big(-\int\limits_0^s\big(\lambda g(J(v))+f(J(v))\big)\,dv\Big)$$

$$\times \exp\Big(\int\limits_{[0,s]} q\big(J(v-),Y_{C(v)}\big)\,dC(v)\Big)\Big[\frac{1}{2}\sigma^2(J(s))\varPhi''(J(s))+$$

$$+\mu(J(s))\varPhi'(J(s))-\big(\widetilde{\lambda}+f(J(s))\big)\varPhi(J(s))+$$

$$+h(J(s))\big(\mathbf{E}_Y\big\{\varPhi(\rho(J(s),Y))e^{q(J(s),Y)}\big\}-\varPhi(J(s))\big)\Big]\,ds. \qquad (3.10)$$

Наряду с моментом τ рассмотрим не зависящий от скачкообразной диффузии J экспоненциально распределенный случайный момент $\widetilde{\tau}$, для которого $\mathbf{P}(\widetilde{\tau}>s)=e^{-\widetilde{\lambda}s}$. Применяя теорему Фубини, мы можем представить равенство (3.10) в следующем виде:

$$\mathbf{E}_x\eta_{\widetilde{\lambda}}(\nu(\tau))-\varPhi(x)=\frac{1}{\widetilde{\lambda}}\mathbf{E}_x\Big\{\Big[\frac{1}{2}\sigma^2(J(\widetilde{\tau}))\varPhi''(J(\widetilde{\tau}))+$$

$$+\mu(J(\widetilde{\tau}))\varPhi'(J(s))-\big(\widetilde{\lambda}+f(J(\widetilde{\tau}))\big)\varPhi(J(\widetilde{\tau}))+$$

$$+h(J(\widetilde{\tau}))\big(\mathbf{E}_Y\big\{\varPhi(\rho(J(\widetilde{\tau}),Y))e^{q(J(\widetilde{\tau}),Y)}\big\}-\varPhi(J(\widetilde{\tau}))\big)\Big]\times$$

$$\times\exp\Big(-\int\limits_{[0,\widetilde{\tau}]}\big[\big(\lambda g(J(v))+f(J(v))\big)\,dv-q\big(J(v-),Y_{C(v)}\big)dC(v)\big]\Big)\Big\}.$$

Для математического ожидания в правой части этого равенства применяем теорему 1.1 в варианте, представленном формулой (1.13) с заменой τ на $\widetilde{\tau}$ и λ на $\widetilde{\lambda}$. В результате имеем, что функция

$$\widetilde{Q}(x) := \mathbf{E}_x \eta_{\widetilde{\lambda}}(\nu(\tau)) - \Phi(x)$$

является единственным ограниченным решением интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}\widetilde{Q}''(x) + \mu(x)\widetilde{Q}'(x) - (\widetilde{\lambda} + h(x) + \lambda g(x) + f(x))\widetilde{Q}(x) = -\frac{\sigma^2(x)}{2}\Phi''(x)$$

$$-\mu(x)\Phi'(x) + (\widetilde{\lambda} + f(x))\Phi(x) - h(x)\big(\mathbf{E}\big\{\Phi(\rho(x,Y_1))e^{q(x,Y_1)}\big\} - \Phi(x)\big) -$$

$$-h(x)\mathbf{E}\big\{e^{q(x,Y_1)}\widetilde{Q}(\rho(x,Y_1))\big\}.$$

Тогда функция $V_{\widetilde{\lambda}}(x) := \mathbf{E}_x \eta_{\widetilde{\lambda}}(\nu(\tau)) = \widetilde{Q}(x) + \Phi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}V''_{\widetilde{\lambda}}(x) + \mu(x)V'_{\widetilde{\lambda}}(x) - (\widetilde{\lambda} + h(x) + \lambda g(x) + f(x))V_{\widetilde{\lambda}}(x) =$$

$$= -\lambda g(x)\Phi(x) - h(x)\mathbf{E}\big\{e^{q(x,Y_1)}V_{\widetilde{\lambda}}(\rho(x,Y_1))\big\}, \qquad x \in \mathbf{R}. \qquad (3.11)$$

Из (3.9) имеем

$$V(x) = \lim_{\widetilde{\lambda}\downarrow 0} \mathbf{E}_x \eta_{\widetilde{\lambda}}(\nu(\tau)) = \lim_{\widetilde{\lambda}\downarrow 0} V_{\widetilde{\lambda}}(x).$$

Переходя к пределу в (3.11) при $\widetilde{\lambda} \downarrow 0$, получаем, что V удовлетворяет (3.7) или уравнению (3.1). Таким образом, теорема доказана для ограниченных непрерывных f и дважды непрерывно дифференцируемых функций Φ с ограниченными производными.

Неотрицательная кусочно непрерывная функция f может быть приближена такой последовательностью непрерывных функций $\{f_n\}$, что $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Произвольная ограниченная кусочно непрерывная функция Φ может быть приближена последовательностью $\{\Phi_n\}$ равномерно ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций с ограниченными производными. Применяя метод предельной аппроксимации, описанный при доказательстве теоремы 2.2 гл. 2 из [7], мы можем доказать, что V – единственное ограниченное решение (3.1) при предположениях теоремы 3.1. $\square$

4. Случайная замена времени. Путь скачкообразная диффузия $J(t)$, $t \geq 0$, задается параметрами $\bigl(\mu(x), \sigma(x), \rho(x,y), \{Y_k\}, h(x)\bigr)$, т. е. определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} dJ(t) = \mu(J(t))\,dt + \sigma(J(t))\,dW(t) + \\ + \bigl(\rho\bigl(J(t-), Y_{C(t)}\bigr) - J(t-)\bigr)\,dC(t), \qquad J(0) = x, \end{aligned} \tag{4.1}$$

с $\sigma(x) > 0$ и пространством состояний $\mathbf{R}$. Пусть $g(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – дважды непрерывно дифференцируемая функция с $g'(x) \neq 0$, и, тем самым, обратная функция $g^{-1}(x)$, $x \in g(\mathbf{R})$, хорошо определена. Рассмотрим интегральный функционал

$$A_t := \int_0^t \bigl(g'(J(s))\sigma(J(s))\bigr)^2\,ds, \qquad t \in [0,\infty),$$

как функцию верхнего предела, и определим процесс обратный к нему

$$a_t := \min\bigl\{s : A_s > t\bigr\}, \qquad t \in [0,\infty).$$

Поскольку A_t строго возрастает, то $\alpha_0 = 0$.

Теорема 4.1. *Процесс $\widetilde{J}(t)$, определяемый формулой*

$$\widetilde{J}(t) = g\bigl(J(a_t)\bigr), \qquad t \in [0,\infty), \tag{4.2}$$

является скачкообразной диффузией, задаваемой параметрами $\bigl(\tilde{\mu}(x), 1, \tilde{\rho}(x,y), \{Y_k\}, \tilde{h}(x)\bigr)$, где $\tilde{\mu}(x) = D(g^{-1}(x))$,

$$D(x) = \frac{g''(x)}{2(g'(x))^2} + \frac{\mu(x)}{g'(x)\sigma^2(x)}, \tag{4.3}$$

$$\tilde{\rho}(x,y) = g(\rho(g^{-1}(x),y)), \qquad \tilde{h}(x) = \frac{h(g^{-1}(x))}{(g'(g^{-1}(x))\sigma(g^{-1}(x)))^2}, \tag{4.4}$$

то есть $\widetilde{J}(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} d\widetilde{J}(t) = d\widetilde{W}(t) + \tilde{\mu}(\widetilde{J}(t))\,dt + \bigl(\tilde{\rho}\bigl(\widetilde{J}(t-), Y_{\widetilde{C}(t)}\bigr) - \widetilde{J}(t-)\bigr)\,d\widetilde{C}(t), \\ \widetilde{J}(0) = g(x). \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $\widetilde{W}(t)$ – *броуновское движение, а* $\widetilde{C}(t) = \max\{l : \widetilde{\varkappa}_l \leqslant t\}$ *для*

$$\varkappa_l = \min\Big\{s \geqslant 0 : \int\limits_0^s \tilde{h}(\widetilde{J}(v))\,dv > \sum_{k=1}^{l} \tau_k\Big\},$$

или

$$\widetilde{C}(t) = N\Big(\int\limits_0^t \tilde{h}(\widetilde{J}(v))\,dv\Big).$$

Действительно, по формуле Ито (1.5) имеем

$$g(J(u)) - g(x) = \int\limits_0^u g'(J(s))\sigma(J(s))\,dW(s) + \int\limits_0^u g'(J(s))\mu(J(s))\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^u \frac{g''(J(s))\sigma^2(J(s))}{2}\,ds + \int\limits_{[0,u]} \big(g(\rho(J(s-), Y_{C(s)})) - g(J(s-))\big)\,dC(s).$$

Заменяя u на a_t, получаем

$$\widetilde{J}(t) - \widetilde{J}(0) =$$

$$= \int\limits_0^{a_t} g'(J(s))\sigma(J(s))\,dW(s) + \int\limits_0^{a_t} \big(g'(J(s))\sigma(J(s))\big)^2 D(J(s))\,ds +$$

$$+ \int\limits_{[0,a_t]} \big(g(\rho(J(s-), Y_{C(s)})) - g(J(s-))\big)\,dC(s).$$

Поскольку a_t является обратной к A_t и $A'_t = \big(g'(J(t)\sigma(J(t))\big)^2$, мы имеем

$$a'_t = \frac{1}{A'_{a_t}} = \frac{1}{\big(g'(J(a_t)\sigma(J(a_t))\big)^2}. \tag{4.6}$$

По теореме Леви, процесс

$$\widetilde{W}(t) := \int\limits_0^{a_t} g'(J(s))\sigma(J(s))\,dW(s), \qquad t \in [0, \infty),$$

является броуновским движением. В результате имеем

$$\widetilde{J}(t)-\widetilde{J}(0)=\widetilde{W}(t)+\int_0^t \bigl(g'(J(a_s))\sigma(J(a_s))\bigr)^2 D(J(a_s))\,da_s+$$

$$+\int_{[0,t]} \bigl(g(\rho(J(\alpha_s-),Y_{C(\alpha_s)}))-g(J(\alpha_s-))\bigr)\,dC(\alpha_s)=$$

$$=\widetilde{W}(t)+\int_0^t \tilde{\mu}(\widetilde{J}(s))\,ds+\int_{[0,t]} \bigl(\tilde{\rho}(\widetilde{J}(s-),Y_{\widetilde{C}(s)}))-\widetilde{J}(s-)\bigr)\,d\widetilde{C}(s),$$

где полагаем $\widetilde{C}(s):=C(\alpha_s)$.

Нам достаточно установить, что $\widetilde{C}(s)=N(\widetilde{A}(t))$, где $\widetilde{A}(t)=\int_0^t \tilde{h}(\widetilde{J}(v))\,dv$, или, что $\widetilde{A}(t):=A(\alpha_t)$. Действительно,

$$A(\alpha_t)=\int_0^{a_t} h(J(v))\,dv=\int_0^t h(J(a_s))\,da_s=$$

$$=\int_0^t \frac{h(J(a_s))}{\bigl(g'(J(a_s)\sigma(J(a_s))\bigr)^2}\,ds=\int_0^t \tilde{h}(\widetilde{J}(s))\,ds=\widetilde{A}(t). \qquad \square$$

Можно обосновать утверждение теоремы 4.1 о том, что преобразование (4.2) приводит к скачкообразной диффузии с соответствующими параметрами иначе, с помощью теоремы 3.1, а точнее ее варианта в виде замечания 3.1. Согласно этому замечанию, справедлив следующий результат.

Пусть $\Phi(x)$, $f(x)$ – непрерывные функции, $\Phi(x)$ ограничена, а $f(x)$ неотрицательна. Тогда функция

$$V(x):=\mathbf{E}_x\Bigl\{\Phi(J(a_\tau))\exp\Bigl(-\int_0^{a_\tau} f(J(s)\,ds\Bigr)\Bigr\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}V''(x)+\mu(x)V'(x)-\bigl(\lambda\bigl(g'(x)\sigma(x)\bigr)^2+h(x)+f(x)\bigr)V(x)=$$

$$= -\lambda\big(g'(x)\sigma(x)\big)^2\Phi(x) - h(x)\mathbf{E}V(\rho(x,Y_1)). \tag{4.7}$$

Делая замену переменной

$$Q(x) := V(g^{-1}(x)), \tag{4.8}$$

получаем, что функция $Q(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}Q''(x) + D(g^{-1}(x))Q'(x) - \Big(\lambda + \frac{h(g^{-1}(x)) + f(g^{-1}(x))}{\big(g'(g^{-1}(x))\sigma(g^{-1}(x))\big)^2}\Big)Q(x) =$$

$$= -\lambda\Phi(g^{-1}(x)) - \frac{h(g^{-1}(x))}{\big(g'(g^{-1}(x))\sigma(g^{-1}(x))\big)^2}\mathbf{E}Q(g(\rho(g^{-1}(x),Y_1))),$$

или, в новых обозначениях,

$$\frac{1}{2}Q''(x) + \tilde{\mu}(x)Q'(x) - \Big(\lambda + \tilde{h}(x) + \frac{f(g^{-1}(x))}{\big(g'(g^{-1}(x))\sigma(g^{-1}(x))\big)^2}\Big)Q(x) =$$

$$= -\lambda\Phi(g^{-1}(x)) - \tilde{h}(x)\mathbf{E}Q(\tilde{\rho}(x,Y_1)). \tag{4.9}$$

Согласно замечанию 3.1, решение (4.9) имеет следующее вероятностное представление

$$Q(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(g^{-1}(\widetilde{J}(\tau)))\exp\Big(-\int_0^\tau \frac{f(g^{-1}(\widetilde{J}(s))}{\big(g'(g^{-1}(\widetilde{J}(s))\sigma(g^{-1}(\widetilde{J}(s))\big)^2}\,ds\Big)\Big\},$$

где диффузия $\widetilde{J}(t)$ определяется параметрами $\big(\tilde{\mu}(x), 1, \tilde{\rho}(x,y), \{Y_k\}, \tilde{h}(x)\big)$. Для того, чтобы понять связь между процессами $J(t)$ и $\widetilde{J}(t)$, трансформируем функцию $V(x)$ следующим образом:

$$V(g^{-1}(x)) := \mathbf{E}_{g^{-1}(x)}\Big\{\Phi(J(a_\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(J(a_s)\,da_s\Big)\Big\}$$

$$= \mathbf{E}_{g^{-1}(x)}\Big\{\Phi(J(a_\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau \frac{f(J(a_s)}{\big(g'(J(a_s)\sigma(J(a_s)\big)^2}\,ds\Big)\Big\}.$$

Сравнивая полученные для обеих частей равенства (4.8) выражения через математические ожидания от соответствующих величин и принимая во внимание произвольность функций Φ и f, можно сделать вывод, что процессы $J(a_t)$ и $g^{-1}(\widetilde{J}(t))$, где диффузия $\widetilde{J}(t)$ определяется формулой (4.5) для некоторого броуновского движения $\widetilde{W}$, идентичны. Заметим, что при доказательстве теоремы 4.1, при использовании результата Леви, мы получили нечто большее, а именно соотношение $J(a_t) = g^{-1}(\widetilde{J}(t))$. Однако при изучении распределений функционалов явное равенство не столь важно, достаточно совпадения конечномерных распределений.

5. Преобразование меры. Рассмотрим две однородные диффузии

$$dX_l(t) = \sigma(X_l(t))dW(t) + \mu_l(X_l(t))dt, \qquad X_l(0) = x, \qquad l = 1, 2,$$

и две последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $Y_k^{(l)}$ с абсолютно непрерывными распределениями $\frac{dF_2(y)}{dF_1(y)} = p(y)$. Пусть J_l, $l = 1, 2$, – две обобщенные скачкообразные диффузии, определенные по X_l, $Y_k^{(l)}$, $l = 1, 2$, с одинаковой функцией $\rho(x, y)$ и по функциям $h_l(x)$, задающим шкалу времени для каждой из диффузий. Процесс, который считает число скачков, совершенных диффузией J_l к моменту времени t, обозначим C_l.

Тогда для любого измеримого ограниченного функционала $\wp(X(s), 0 \leqslant s \leqslant t)$ на $D[0, t]$ – пространстве функций без разрывов второго рода –

$$\mathbf{E}\wp(J_2(s), 0 \leqslant s \leqslant t) = \mathbf{E}\big\{\wp(J_1(s), 0 \leqslant s \leqslant t)\Theta(t)\big\}, \tag{5.1}$$

где

$$\Theta(t) = \prod_{k=1}^{C_1(t)} p(Y_k^{(1)}) \times$$
$$\times \exp\Big(- \int_0^t \big(h_2(J_1(s)) - h_1(J_1(s))\big)\, ds + \int_{[0,t]} \ln \frac{h_2(J_1(s-))}{h_1(J_1(s-))} dC_1(s)\Big) \times$$
$$\times \exp\Big(\int_0^t \frac{\mu_2(J_1(s)) - \mu_1(J_1(s))}{\sigma(J_1(s))}\, dW(s) - \int_0^t \frac{(\mu_2(J_1(s)) - \mu_1(J_1(s)))^2}{2\sigma^2(J_1(s))}\, ds\Big). \tag{5.2}$$

Используя формулу стохастического дифференцирования (1.5), можно переписать эту производную без стохастического интеграла.

Положим

$$\delta(x) := \frac{1}{\sigma^2(x)}(\mu_2(x) - \mu_1(x)), \qquad \Delta(x) := \int\limits_0^x \delta(y)\,dy.$$

Предположим, что δ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда с вероятностью единица

$$\Theta(t) = e^{\Delta(J_1(t))-\Delta(J_1(0))} \exp\Big(-\int\limits_0^t \big(h_2(J_1(s)) - h_1(J_1(s))\big)\,ds\Big)$$

$$\times \exp\Big(-\int\limits_0^t \frac{\mu_2^2(J_1(s)) - \mu_1^2(J_1(s))}{2\sigma^2(J_1(s))}\,ds - \int\limits_0^t \frac{\sigma^2(J_1(s))}{2}\delta'(J_1(s))\,ds -$$

$$-\int\limits_{[0,t]} \Big(\Delta\big(\rho\big(J_1(s-), Y^{(1)}_{C_1(s)}\big)\big) - \Delta(J_1(s-)) - \ln\frac{h_2(J_1(s-))}{h_1(J_1(s-))}\Big)\,dC_1(s)\Big)$$

$$\times \prod_{k=1}^{C_1(t)} p(Y_k^{(1)}). \tag{5.3}$$

Утверждение, задаваемое формулой (5.1), эквивалентно следующему: для экспоненциально распределенного с произвольным параметром $\lambda > 0$ случайного момента времени τ, не зависящего от процессов J_l, $l = 1, 2$, выполняется равенство

$$\mathbf{E}_x\,\wp(J_2(s), 0 \leqslant s \leqslant \tau) = \mathbf{E}_x\big\{\wp(J_1(s), 0 \leqslant s \leqslant \tau)\,\Theta(\tau)\big\}. \tag{5.4}$$

Мы докажем (5.4) для функционалов интегрального типа и функционалов, задающих положение диффузии со скачками в момент времени τ, используя теорему 1.1. Речь идет о функционалах

$$\wp(J_1(s), 0 \leqslant s \leqslant \tau) = \varPhi(J_1(\tau)) \exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J_1(s))\,ds\Big).$$

В силу марковости процессов J_l, $l = 1, 2$, функционалы, задающие положение диффузии со скачками, однозначно определяют меру процесса.

Для выбранного функционала $\wp$ рассмотрим функцию

$$Q(x) := \mathbf{E}_x\big\{\wp(J_1(s), 0\leqslant s\leqslant\tau)\Theta(\tau)\big\}.$$

Пусть $\Delta(x)$, $x\in\mathbf{R}$, ограничена, и

$$\mathbf{E}\big\{e^{-\Delta(\rho(x,Y_1^{(2)}))}\big\} = \mathbf{E}\big\{p(Y_1^{(1)})e^{-\Delta(\rho(x,Y_1^{(1)}))}\big\} \leqslant e^{-\Delta(x)-\ln\frac{h_2(x)}{h_1(x)}}.$$

Поскольку

$$\prod_{k=1}^{C_1(\tau)} p(Y_k^{(1)}) = \exp\Big(\int\limits_{[0,\tau]} \ln p\big(Y_{C_1(s)}^{(1)}\big)\,dC_1(s)\Big),$$

то, согласно теореме 1.1, $a=-\infty$, $b=\infty$, функция

$$Q(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J_1(\tau))e^{\Delta(J_1(\tau))}\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J_1(s))\,ds$$

$$-\int\limits_0^\tau\Big(h_2(J_1(s))-h_1(J_1(s))-\frac{\mu_2^2(J_1(s))-\mu_1^2(J_1(s))}{2\sigma^2(J_1(s))}-\frac{\sigma^2(J_1(s))}{2}\delta'(J_1(s))\Big)\,ds$$

$$-\int\limits_{[0,\tau]}\Big(\Delta\big(\rho\big(J_1(s-),Y_{C_1(s)}^{(1)}\big)\big)-\Delta(J_1(s-))-\ln p\big(Y_{C_1(s)}^{(1)}\big)$$

$$-\ln\frac{h_2(J_1(s-))}{h_1(J_1(s-))}\Big)\,dC_1(s)\Big)\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q(x) = M(x)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)e^{\Delta(z)}\,\frac{h_2(z)}{h_1(z)}\,\mathbf{E}\{p(Y_1^{(1)})e^{-\Delta(\rho(z,Y_1^{(1)}))}Q(\rho(z,Y_1^{(1)}))\}\,dz, \quad (5.5)$$

где $M(x)$ – единственное решение задачи

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}M''(x)+\mu_1(x)M'(x)-\Big(\lambda+h_1(x)+f(x)+h_2(x)-h_1(x)$$

$$+\frac{1}{2\sigma^2(x)}(\mu_2^2(x)-\mu_1^2(x))+\frac{\sigma^2(x)}{2}\delta'(x)\Big)M(x) = -\lambda\varPhi(x)e^{\Delta(x)}, \quad (5.6)$$

и $G_z(x)$ – единственное непрерывное решение задачи

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}G''(x)+\mu_1(x)G'(x)-\Big(\lambda+h_1(x)+f(x)+h_2(x)-h_1(x)+$$
$$+\frac{1}{2\sigma^2(x)}(\mu_2^2(x)-\mu_2^2(x))+\frac{\sigma^2(x)}{2}\delta'(x)\Big)D(x)=0,\qquad x\neq z, \tag{5.7}$$
$$G'(z+0)-G'(z-0)=-2h_1(z)/\sigma^2(z). \tag{5.8}$$

Делая замену $\widetilde{M}(x):=e^{-\Delta(x)}M(x)$ и $\widetilde{G}_z(x):=e^{-\Delta(x)}G_z(x)e^{\Delta(z)}\frac{h_2(z)}{h_1(z)}$, получаем, что эти функции удовлетворяют задачам

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}\widetilde{M}''(x)+\mu_2(x)\widetilde{M}'(x)-(\lambda+h_2(x)+f(x))\widetilde{M}(x)=-\lambda\Phi(x), \tag{5.9}$$

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}\widetilde{G}''(x)+\mu_2(x)\widetilde{G}'(x)-(\lambda+h_2(x)+f(x))\widetilde{G}(x)=0,\qquad x\neq z, \tag{5.10}$$
$$\widetilde{G}'(z+0)-\widetilde{G}'(z-0)=-2h_2(z)/\sigma^2(z). \tag{5.11}$$

Из (5.5) следует, что $\widetilde{Q}(x):=e^{-\Delta(x)}Q(x)$ – решение уравнения

$$\widetilde{Q}(x)=\widetilde{M}(x)+\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{G}_z(x)\,\mathbf{E}\{\widetilde{Q}(\rho(z,Y_1^{(2)}))\}\,dz. \tag{5.12}$$

Тогда, снова по теореме 1.1,

$$\widetilde{Q}(x):=\mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J_2(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(J_2(s))\,ds\Big)\Big\}. \tag{5.13}$$

Принимая во внимание определения функций $Q(x)$ и $\Theta(t)$, имеем

$$\mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J_2(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(J_2(s))\,ds\Big)\Big\}=$$
$$=\mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J_1(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(J_1(s))\,ds\Big)\Theta(\tau)\Big\}.$$

Это доказывает (5.4).

Литература

1. Lévy P., *Sur certains processus stochatiques homogènes.* — Compositio Math. **7** no. 2 (1939), 283–339.
2. *Гирсанов И. В., О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры.* — Теория вероятн. и ее примен. **5**, № 2 (1960), 314–330.
3. Кас М., *On distribution of certain Wiener functionals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65** no. 1 (1949), 1–13.
4. Кас М., *On some connections between probability theory and differential and integral equations.* Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. Probab. (1951), pp. 189–215.
5. Скороход А. В., *Случайные процессы с независимыми приращениями.* М., Наука, 1964.
6. *Бородин А. Н., Распределение функционалов от скачкообразных диффузий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **339** (2005), 15–36.

Borodin A. N. Transformations of diffusions with jumps.

The paper deals with some transformations of diffusions with jumps. We consider the class of diffusions with jumps which is closed with respect to the composition with invertable twice continuously differentiable functions. The special randon time change leads again to the diffusion with jumps. The result concerning a transformation of the measure is valid to this class of diffusions with jumps.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 15 декабря 2005 г.