Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

Д. А. Аникеева

НЕСИНГУЛЯРНЫЕ ПРЕБРАЗОВАНИЯ ОДНОГО КЛАСССА СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ

1. Введение

Рассмотрим одномерный процесс Леви $\xi(t), t \in [0,1]$ – мера Леви γ_0 которого имеет вид

$$\gamma_0(dx) = \frac{dx}{|x|^{1+\alpha} e^{|x|}} (\sigma_+ \mathbf{1}(0,\infty)(x) + \sigma_- \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)), \qquad (1)$$

(Здесь и далее через $\mathbf{1}_A$ обозначается индикаторная функция множества A, $\sigma_+, \sigma_- \geqslant 0$, $\alpha \in (0,2)$). Процессы Леви такого класса называются усеченными устойчивыми процессами (tempering stable process). Они интересны тем, что совмещают в себе одновременно как свойства устойчивого процесса, так и свойства винеровского процесса. Именно, на коротких временных интервалах поведение траекторий этих процессов похоже на поведение $\alpha-$устойчивого процесса Леви, тогда как на больших временных интервалах эти процессы хорошо аппроксимируются винеровским процессом. Подробнее о свойствах усеченных устойчивых процессов см. [10].

В работе [7] для $\alpha-$устойчивых процессов Леви была построена группа несингулярных преобразований пространства Скорохода $\mathbb{D}[0,1]$. В настоящей работе будет показано, что мера, порожденная усеченным устойчивым процессом, также будет квазиинвантной относительно действия этой группы.

Для описания данного класса процессов мы будем использовать представление Леви–Хинчина ([6, 3]). Именно,

$$\xi(t) = at + \int\limits_0^t \int\limits_{0<|x|\leqslant 1} x\widetilde{\nu}(ds,dx) + \int\limits_0^t \int\limits_{|x|>1} x\nu(ds,dx). \qquad (2)$$

В этом представлении $\nu(ds,dx)-$ пуассоновская случайная мера на $[0,1]\times\mathbb{R}$ с интенсивностью вида

$$dt\gamma_0(dx) = dt\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}e^{|x|}}(\sigma_+\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)+\sigma_-\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)), \quad \sigma_+,\sigma_- \geqslant 0, \quad (3)$$

а $\widetilde{\nu}(dt,dx) = \nu(dt,dx) - \mathbb{E}\nu(dt,dx)-$ соответствующая центрированная мера. Первое слагаемое в (2) определяет положительные скачки, второе – отрицательные.

В качестве вероятностного пространства для пуассоновской случайной меры мы выберем пространство ее реализаций т.е. пространство конфигураций на множестве G, где $G=[0,1]\times\mathbb{R}$. На этом пространстве конфигураций мы рассмотрим пуассоновскую меру P с интенсивностью вида (3).

Распределение процесса ξ в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$ можно рассматривать как образ пуассоновской меры на пространстве конфигураций под действием отображения, задаваемого (2). Поэтому, следуя [7], мы сначала рассмотрим преобразования пространства конфигураций $\mathcal{X}(G)$, где множество G имеет вид прямого произведения $G=S\times\mathbb{R}$, S – полное сепарабельное метрическое пространство. Про интенсивность Π пуассоновской меры мы предполагаем, что она имеет вид $\Pi(d\theta,dx) = \pi(d\theta)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}e^{|x|}}$, где π – конечная мера на S. Всюду далее число $\alpha\in(0,2)$ будет предполагаться фиксированным.

Мы будем рассматривать преобразования F пространства конфигураций, порожденные преобразованиями $f: G\to G$, так что конфигурация X состоящая из точек вида $\overline{x}, \overline{x}=(\theta,x), \overline{x}\in X$ под действием этого преобразования переходит в конфигурацию $Y=F(X)$, состоящую из точек вида $f(\overline{x})$, $\overline{x}\in X$ т.е.

$$F(X) = \{f(\overline{x})\}_{\overline{x}\in X}. \quad (4)$$

Под действием преобразования (5) пуассоновская мера с интенсивностью Π переходит в пуассоновскую же меру с интенсивностью Πf^{-1}.

2. Полугруппа несингулярных преобразований

Рассмотрим сначала случай, когда пространство G имеет вид прямого произведения $G=S\times(0,\infty)$, где S – полное сепарабельное метрическое пространство (такой вид пространства удобен для описания процесса $\xi(t)$ со скачками одного знака). На этом пространстве мы рассмотрим пуассоновскую меру P с интенсивностью Π вида

$$\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta)\gamma_0(dx) = \pi(d\theta)\frac{dx}{x^{1+\alpha}e^x},\ \theta \in S,\ x \in (0,\infty),$$

где π - конечная мера на S, $\alpha \in (0,2)$.

Обозначим через $L^+(S)$ множество всех борелевских неотрицательных функций на S, а через $L_1^+(S,\pi)$, $L_1^+(S,\pi) \subset L^+(S)$ обозначим его подмножество, состоящее из всех интегрируемых по мере π функций.

Опишем теперь полугруппу преобразований пространства конфигураций, рассмотренную в [7]. Для $t \geqslant 0$ обозначим через T_t отображение $[0,\infty)$ в $[0,\infty)$ вида

$$T_t(x) = \frac{x}{(1+\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}. \tag{5}$$

Заметим, что T_0 – тождественное отображение. Нетрудно показать (см.[7]), что для любых $s,t \in [0,\infty)$

$$T_{t+s} = T_t \circ T_s. \tag{6}$$

Для $f \in L^+(S,\pi)$ определим преобразование $\tau_f : G \to G$ пространства G в себя, полагая

$$\tau_f(\theta,x) = (\theta, T_{f(\theta)}(x)). \tag{7}$$

Заметим, что если $f \equiv 0$, то τ_f тождественное преобразование, а из (6) немедленно вытекает, что для любых $f,g \in L^+(S,\pi)$

$$\tau_{f+g} = \tau_f \circ \tau_g. \tag{(8)}$$

Теперь, используя полугруппу преобразований τ_f, $f \in L^+(S)$, построим порожденную ею полугруппу преобразований Φ_f, $f \in L^+(S)$ пространства конфигураций $\mathcal{X}(S\times(0,\infty))$ в себя. В соответствии с (4), всякая конфигурация X, состоящая из точек вида (θ,x), $\theta \in S, x \in (0,\infty)$ под действием преобразования Φ_f переходит в конфигурацию Y, состоящую из точек вида $\tau_f(\theta,x) = (\theta, T_{f(\theta)}(x))$, т.е.

$$\Phi_f(X) = Y = \{(\theta, T_{f(\theta)}(x))\}. \tag{9}$$

Из (6) и (7) следует, что для всех $f,g \in L^+(S)$

$$\Phi_{f+g} = \Phi_f \circ \Phi_g. \tag{10}$$

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 1. 1. *Для любого* $f \in L_1^+(S,\pi)$ *мера* $P\Phi_f^{-1}$ *абсолютно непрерывна относительно* P.

2. *Для любой функции* $f \in L^+(S)$ *такой, что* $\int_S f d\pi = \infty$ *меры* $P\Phi_f^{-1}$ *и* P *взаимно ортогональны.*

Доказательство. Для фиксированного $t \geqslant 0$ вычислим меру $\gamma_0 T_t^{-1}$ – образ меры γ_0 под действием отображения T_t. Заметим прежде всего, что функция $T_t(x)$ строго возрастает и $T_t(\infty) = \frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}$. Далее, имеем

$$\gamma_0 T_t^{-1}(dx) = \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^{\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}}} \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}]}(x).$$

Последнее равенство показывает, что мера $\gamma_0 T_t^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно γ_0, причем плотность $\psi(t,x) = \frac{\gamma_0 T_t^{-1}}{\gamma_0}(x)$ равна

$$\psi(t,x) = e^{x - \frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}} \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}]}(x). \tag{11}$$

Далее, через $U(t)$ обозначим величину

$$U(t) = \int_0^\infty |\psi(x,t) - \psi(0,t)| \gamma_0(dx) = \int_0^\infty |\psi(x,t) - 1| \gamma_0(dx).$$

Лемма 1. *Для любого* $t \geqslant 0$

$$U(t) = t. \tag{12}$$

Доказательство. Имеем

$$U(t) = \int_0^{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}} \left(1 - e^{x - \frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}}\right) \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x} + \int_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^\infty \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x}. \tag{13}$$

Обозначим первый интеграл в (13) через $V(t)$. Нетрудно показать, что $V(0+) = \lim_{t\to 0+} V(t) = 0$ и значит

$$V(t) = \int_0^t V'(\tau) d\tau.$$

Далее, имеем

$$V'(t) = -e^{-\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}} + \int\limits_0^{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}} \left(\frac{e^{-\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}}}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1+1/\alpha}} \right) dx.$$

Сделав в последнем интеграле замену переменных

$$y = \frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}},$$

получим

$$V(t) = \int\limits_0^t \left(-e^{-\frac{1}{(\alpha\tau)^{1/\alpha}}} + 1 \right) d\tau =$$

$$-\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{(\alpha\tau)^{1/\alpha}}} d\tau + t = -\int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x} + t.$$

Теперь, используя (13), получаем утверждение леммы. □

Пусть функция $f(\theta) \in L^+(S)$, а Φ_f – преобразование, определяемое (9). Мера $P\Phi_f^{-1}$ является пуассоновской мерой с интенсивностью ΠF_f^{-1}. Из (9) следует, что мера ΠF_f^{-1} абсолютно непрерывна относительно Π, причем

$$\frac{d\Pi F_f^{-1}}{d\Pi}(\theta, x) = \psi(f(\theta), x).$$

Теперь для доказательства теоремы мы воспользуемся результатом Скорохода (см. [2]). Мера $P\Phi_f^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно меры P, если конечен интеграл

$$\int\limits_S \pi(d\theta) \int\limits_0^\infty |\sqrt{\psi(x, f(\theta))} - 1|^2 \gamma_0(dx), \tag{14}$$

и ортогональна мере P в противном случае.

Предположим сначала, что $f(\theta) \in L_1^+(S, \pi)$. В этом случае сходимость интеграла (14) следует из неравенства $(x \geqslant 0)$

$$(\sqrt{x} - 1)^2 \leqslant |x - 1| \tag{15}$$

и леммы 1.

Пусть теперь $\int_S f d\pi = \infty$. Для $t > 1$ имеем

$$\int_0^\infty |\sqrt{\psi(x,t)} - 1|^2 \gamma_0(dx) \geqslant \int_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^\infty \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x} \geqslant$$

$$\int_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\frac{1}{\alpha^{1/\alpha}}} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x} \geqslant e^{-\frac{1}{\alpha^{1/\alpha}}} \int_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\frac{1}{\alpha^{1/\alpha}}} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = e^{-\frac{1}{\alpha^{1/\alpha}}}(t-1). \tag{16}$$

Используя (16) получаем, что для тех $\theta \in S$, для которых $f(\theta) > 1$, справедливо неравенство

$$\int_0^\infty |\sqrt{\psi(x, f(\theta))} - 1|^2 \gamma_0(dx) \geqslant e^{-\frac{1}{\alpha^{1/\alpha}}}(f(\theta) - 1).$$

Последнее неравенство и условие $\int_S f d\pi = \infty$ влекут за собой расходимость интеграла (14). □

3. Группа несингулярных преобразований

Рассмотрим теперь случай, когда $G = S \times \overline{\mathbb{R}}$, где S – полное сепарабельное метрическое пространство, а $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. На этом пространстве мы рассмотрим пуассоновскую меру P с интенсивностью Π вида

$$\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta)\gamma_0(dx) = \pi(d\theta)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha} e^{|x|}}(\sigma_+ \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) + \sigma_- \mathbf{1}_{(-\infty,0]}(x)), \tag{17}$$

где $\pi(d\theta)$– конечная мера на S, а σ_+, σ_- – положительные константы.

Обозначим через $L(S)$ множество всех измеримых функций на S, а через $L_1(S,\pi)$, $L_1(S,\pi) \subset L(S)$ обозначим его подмножество, состоящее из всех интегрируемых по мере π функций.

Опишем теперь группу преобразований пространства $\mathcal{X}(G)$ рассмотренную в [7].

Для $t \in \mathbb{R}$ обозначим через T_t отображение $\overline{\mathbb{R}}$ в $\overline{\mathbb{R}}$ задаваемое формулой

$$T_t(x) = \frac{x}{(1 + \alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}. \tag{18}$$

В формуле (18) мы предполагаем (и этого соглашения мы будем в дальнейшем придерживаться), что функции x^α и $x^{1/\alpha}$ продолжены на отрицательную полуось нечетным образом (а функции $x^{1+\alpha}$ и $x^{1+1/\alpha}$ соответственно четным). Положим также $T_t(\infty) = (\alpha t)^{-1/\alpha}$.

Заметим, что T_0 – тождественное отображение и для любых $s, t \in (-\infty, \infty)$
$$T_{t+s} = T_t \circ T_s. \tag{19}$$

Для $f \in L(S)$ определим преобразование $\tau_f : G \to G$ пространства G в себя, полагая
$$\tau_f(\theta, x) = (\theta, T_{f(\theta)}(x)). \tag{20}$$

Из (19) немедленно вытекает, что для любых $f, g \in L(S)$
$$\tau_{f+g} = \tau_f \circ \tau_g. \tag{21}$$

Теперь, используя группу преобразований τ_f, $f \in L(S)$, построим порожденную ею группу преобразований Φ_f, $f \in L(S)$ пространства конфигураций $\mathcal{X}(S \times \overline{\mathbb{R}})$ в себя. В соответствии с (4), всякая конфигурация X, состоящая из точек вида (θ, x), $\theta \in S, x \in \overline{\mathbb{R}}$ под действием преобразования Φ_f переходит в конфигурацию Y, состоящую из точек вида $\tau_f(\theta, x) = (\theta, T_{f(\theta)}(x))$, т.е.
$$\Phi_f(X) = Y = \{(\theta, T_{f(\theta)}(x))\}. \tag{22}$$

Из (19) и (20) следует, что для всех $f, g \in L(S)$
$$\Phi_{f+g} = \Phi_f \circ \Phi_g. \tag{23}$$

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2. 1. *Для любого* $f \in L_1(S, \pi)$ *меры* $P\Phi_f^{-1}$ *и* P *эквивалентны.*

2. *Если* $\sigma_+ \neq \sigma_-$, *то для любой функции* $f \in L(S)$ *такой, что* $\int_S |f| d\pi = \infty$ *меры* $P\Phi_f^{-1}$ *и* P *взаимно ортогональны.*

Доказательство. Вычислим сначала при фиксированном $t \in \mathbb{R}$ меру $\gamma_0 T_t^{-1}$. Имеем
$$\gamma_0 T_t^{-1}(dx) = \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^{\left|\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}\right|}}$$

$$\times\left(\sigma_+\mathbf{1}_{[0,\infty)}\left(\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}\right)+\sigma_-\mathbf{1}_{(-\infty,0]}\left(\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}\right)\right). \quad (26)$$

Рассмотрим теперь отдельно случаи $t > 0$ и $t < 0$. Нетрудно показать, что для $t > 0$

$$\gamma_0 T_t^{-1}(dx) = \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^{\left|\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}\right|}}$$

$$\times\left(\sigma_+\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}]}(x)+\sigma_-\left(\mathbf{1}_{(-\infty,0]}(x)+\mathbf{1}_{[\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}},\infty)}(x)\right)\right),$$

и, соответственно,

$$\psi(t,x)=\frac{d\gamma_0 T_t^{-1}}{d\gamma_0}(x)=e^{x-\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}}\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}]}(x)+$$

$$e^{-x+\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}}\mathbf{1}_{(-\infty,0]}(x)+\frac{\sigma_-}{\sigma_+}e^{x+\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}}\mathbf{1}_{[\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}},\infty)}(x).$$

В случае, когда $t < 0$ мы имеем

$$\gamma_0 T_t^{-1}(dx) = \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^{\left|\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}\right|}}$$

$$\times\left(\sigma_+\left(\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)+\mathbf{1}_{(-\infty,\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}]}(x)\right)+\sigma_-\mathbf{1}_{[\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}},0]}(x)\right),$$

и

$$\psi(t,x)=\frac{d\gamma_0 T_t^{-1}}{d\gamma_0}(x)=e^{x-\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$$

$$+\frac{\sigma_+}{\sigma_-}e^{-x-\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}}\mathbf{1}_{(-\infty,\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}]}(x)+e^{-x+\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}}\mathbf{1}_{[\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}},0]}(x)$$

Далее, обозначим $U(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,t)-1|\gamma_0(dx)$.

Лемма 2. *Для любого* $t\in\mathbb{R}\quad U(t)\leqslant C|t|$, *где* C – *некоторая константа.*

Доказательство. Мы ограничимся случаем $t > 0$, для отрицательных t доказательство вполне аналогично. Имеем

$$U(t)=\int\limits_{-\infty}^{0}\left(1-e^{-x+\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}e^{-x}}$$

$$+\int\limits_0^{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}} \left(1-e^{x-\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}e^x}$$

$$+\frac{\sigma_-}{\sigma_+}\int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \left|e^{x+\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}}-\frac{\sigma_+}{\sigma_-}\right|\frac{dx}{x^{1+\alpha}e^x}.$$

Обозначим первое, второе и третье слагаемое в последней сумме через $P(t)$, $V(t)$ и $W(t)$ соответственно. Таким образом

$$U(t)=P(t)+V(t)+Q(t). \tag{27}$$

Оценим сначала $P(t)$. Нетрудно показать, что $P(0+)=0$ и, соответственно,

$$P(t)=\int\limits_0^t P'(\tau)d\tau. \tag{28}$$

Далее,

$$P'(t)=\int\limits_{-\infty}^0 \frac{e^{\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}}}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1+1/\alpha}}dx=\int\limits_{-\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^0 e^y\,dy=1-e^{-\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}.$$

Подставляя выражение для P' в (28), получаем

$$P(t)=\int\limits_0^t\left(1-e^{-\frac{1}{(\alpha\tau)^{1/\alpha}}}\right)d\tau=t-\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{(\alpha\tau)^{1/\alpha}}}d\tau=t-\int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}e^x}.$$

Второе слагаемое $V(t)$ было сосчитано при доказательстве леммы 1. Именно

$$V(t)=P(t)=t-\int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}e^x}. \tag{29}$$

Рассмотрим теперь последнее слагаемое $W(t)$. Для него мы можем воспользоваться следующей оценкой

$$W(t) = \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \left| \frac{\sigma_-}{\sigma_+} e^{x + \frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}} - 1 \right| \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x}$$

$$\leqslant \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{\sigma_-}{\sigma_+} e^{x + \frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x} + \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x}$$

$$= \frac{\sigma_-}{\sigma_+} \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} e^{\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} + \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x}. \tag{30}$$

Покажем теперь, что

$$\int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} e^{\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x}. \tag{31}$$

Действительно, пусть

$$Q(t) = \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} e^{\frac{x}{(1-\alpha t x^\alpha)^{1/\alpha}}} \frac{dx}{x^{1+\alpha}}.$$

Тогда

$$Q(t) = \int\limits_0^t Q'(\tau) d\tau = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\frac{1}{(\alpha \tau)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{(1-\alpha \tau x^\alpha)^{1/\alpha}}}}{(1-\alpha \tau x^\alpha)^{1+1/\alpha}} dx =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{(\alpha \tau)^{1/\alpha}}} e^y dy = \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{(\alpha \tau)^{1/\alpha}}} d\tau = \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x}. \tag{32}$$

Формула (31) таким образом доказана.

Подставляя (31) в (30) получаем

$$W(t) \leqslant \frac{\sigma_-}{\sigma_+} \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x} + \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x} = \left(\frac{\sigma_-}{\sigma_+} + 1\right) \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x}. \tag{33}$$

Используя (33) и (29) получаем следующую оценку величины $U(t)$

$$U(t) \leqslant 2t - 2 \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x} + \left(\frac{\sigma_-}{\sigma_+} + 1\right) \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x} =$$

$$= 2t + (\frac{\sigma_-}{\sigma_+} - 1) \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x} < \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = t.$$

$\square$

Пусть функция $f(\theta) \in L(S)$, а Φ_f – преобразование, определяемое (22). Мера $P\Phi_f^{-1}$ является пуассоновской мерой с интенсивностью ΠF_f^{-1}. Из (20) следует, что мера ΠF_f^{-1} абсолютно непрерывна относительно Π, причем

$$\frac{d\Pi F_f^{-1}}{d\Pi}(\theta, x) = \psi(f(\theta), x).$$

Теперь мы снова воспользуемся результатом Скорохода (см. [2]). Мера $P\Phi_f^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно меры P если конечен интеграл

$$\int\limits_S \pi_0(d\theta) \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\sqrt{\psi(x, f(\theta))} - 1|^2 \gamma_0(dx), \tag{34}$$

и ортогональна мере P в противном случае.

Предположим сначала, что $f(\theta) \in L_1(S, \pi)$. В этом случае сходимость интеграла (34) следует из неравенства (15) и леммы 2. Более того, так как функция $\psi(f(\theta), x)$ отлична от нуля для $\Pi-$почти всех (θ, x), то из сходимости интеграла (34) следует также и взаимная абсолютная непрерывность мер $P\Phi_f^{-1}$ и P.

Пусть теперь $\sigma_+ \neq \sigma_-$ и $\int_{S_0} |f| d\pi = \infty$. Из расходимости интеграла $\int_{S_0} |f| d\pi$ вытекает расходимость хотя бы одного из двух интегралов $\int_{\{f>1\}} |f| d\pi$ или $\int_{\{f<-1\}} |f| d\pi$. Для определенности предположим, что расходится первый из двух интегралов.

Для $t > 1$ имеем

$$U(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\sqrt{\psi(x,t)} - 1|^2 \gamma_0(dx)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \left| e^{\frac{x}{2}(-1+\frac{1}{(1-\alpha t x^{\alpha})^{1/\alpha}})} - 1 \right|^2 \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^{-x}}$$

$$+ \int\limits_{0}^{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}} \left| e^{\frac{x}{2}(1-\frac{1}{(1-\alpha t x^{\alpha})^{1/\alpha}})} - 1 \right|^2 \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^{x}}$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{(\alpha t)^{1/\alpha}}}^{\infty} \left| \frac{\sigma_-}{\sigma_+} e^{\frac{x}{2}(1+\frac{1}{(1-\alpha t x^{\alpha})^{1/\alpha}})} - 1 \right|^2 \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^{x}}. \tag{35}$$

Из (35) следует, что для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$, справедлива оценка

$$U(t) \geqslant \int\limits_{\frac{1}{(\alpha(1-\varepsilon_1)t)^{1/\alpha}}}^{\frac{1}{(\alpha(1-\varepsilon_2)t)^{1/\alpha}}} \left| \frac{\sigma_-}{\sigma_+} e^{\frac{x}{2}(1+\frac{1}{(1-\alpha t x^{\alpha})^{1/\alpha}})} - 1 \right|^2 \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^{x}}. \tag{36}$$

Выбирая в (36) $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ в случае $\frac{\sigma_-}{\sigma_+} < 1$ и $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}, \varepsilon_2 = \frac{3}{4}$ в случае $\frac{\sigma_-}{\sigma_+} > 1$, получаем оценку

$$U(t) \geqslant Ct.$$

Из последней оценки и расходимости интеграла $\int_{\{f>1\}}|f|d\pi$ следует расходимость интеграла (34) и, соответственно, ортогональность мер.

$\square$

4. Преобразование траекторий усеченных устойчивых процессов

Рассмотрим сначала случай одностороннего процесса. Для определенности предположим, что процесс имеет скачки только положительного знака, т.е. $\sigma_- = 0$.

Рассмотрим пространство конфигураций $\mathcal{X}(G)$ на множестве G вида $G = [0,1] \times (0, \infty)$. На этом пространстве мы рассмотрим пуассоновскую меру P с интенсивностью $\Pi = \lambda \times \gamma_0$, где λ – мера Лебега, а $\gamma_0(dx) = \frac{dx}{x^{1+\alpha} e^x}$.

В соответствии с (2) на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}(G), P)$ процесс ξ может быть задан как

$$\xi(t,X) = at + (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\sum_{\substack{(s,x)\in X,\\ s\leqslant t,\varepsilon\leqslant x\leqslant 1}} x - t\int_{\varepsilon}^{1} x\gamma_0(dx)\Bigg) + \sum_{\substack{(s,x)\in X,\\ s\leqslant t, 1<x<\infty}} x. \quad (37)$$

Суммирование в этих формулах проводится по точкам (s,x) конфигурации $X \in \mathcal{X}$. Отображение $\mathcal{X} \to \mathbb{D}[0,1]$, задаваемое (37), сопоставляющее конфигурации траекторию случайного процесса, будем обозначать через Ξ, так что

$$\Xi(X) = \xi(\cdot, X).$$

Отметим очевидный факт, что различные конфигурации порождают различные траектории случайного процесса: при $X_1 \neq X_2$

$$\Xi(X_1) \neq \Xi(X_2). \quad (38)$$

Через $\mathcal{P}_\xi$ будем обозначать меру, порожденную процессом ξ в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$ т.е.

$$\mathcal{P}_\xi = P\Xi^{-1}. \quad (39)$$

Для каждой функции $z \in \mathbb{D}[0,1]$ через Δz будем обозначать функцию

$$\Delta z(t) = z(t) - z(t-0), t \in [0,1].$$

Далее, пусть функция $f \in L_1^+[0,1]$. С помощью функции f мы определим преобразование $\Psi_f : \mathbb{D}[0,1] \to \mathbb{D}[0,1]$, полагая

$$[\Psi_f(z)](t) = z(t) + \sum_{s \leqslant t} \left(T_{f(s)}(\Delta z(s)) - \Delta z(s) \right), \tag{40}$$

где $T_t, t \geqslant 0$ – полугруппа преобразований (5).

Рассмотрим полугруппу преобразований $\Phi_f, f \in L_1^+([0,1],\lambda)$ пространства конфигураций $\mathcal{X}(G)$, $G = [0,1] \times (0,\infty)$ в себя, задаваемое (10). Из (10),(38) и (40) немедленно следует, что

$$\Psi_f \circ \Xi = \Xi \circ \Phi_f. \tag{41}$$

Соотношение (41) показывает, что Ψ_f определено почти всюду по мере $\mathcal{P}_\xi$. Кроме того, из (7) вытекает, что для любых $f, g \in L_1^+([0,1],\lambda)$

$$\Psi_{f+g} = \Psi_f \circ \Psi_g.$$

Теорема 3. *Для любого* $f \in L_1^+([0,1],\lambda)$

$$\mathcal{P}_\xi \Psi_f^{-1} \ll \mathcal{P}_\xi.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 и (41)

$$P\Phi_f^{-1} \ll P,$$

следовательно,

$$P(\Phi_f^{-1})\Xi^{-1} \ll P\Xi^{-1}. \tag{42}$$

Правая часть (42) равна $\mathcal{P}_\xi$, а левая часть

$$P(\Phi_f^{-1})\Xi^{-1} = P(\Xi \circ \Phi_f)^{-1} = P(\Psi_f \circ \Xi)^{-1} = (P\Xi^{-1})\Psi_f^{-1} = \mathcal{P}_\xi \Psi_f^{-1}.$$

□

Рассмотрим теперь случай, когда процесс ξ не является односторонним, т.е. $\sigma_+ > 0$ и $\sigma_- > 0$.

На пространстве конфигураций $\mathcal{X}([0,1] \times \overline{\mathbb{R}})$ рассмотрим пуассоновскую меру P с интенсивностью $\Pi(dt, dx) = dt\gamma_0(dx)$.

В соответствии с (2) на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}([0,1] \times \overline{\mathbb{R}}), P)$ усеченный устойчивый процесс $\xi(t)$ может быть задан как

$$\xi(t, X) = at + (L_2) \lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg(\sum_{\substack{(s,x) \in X, \\ s \leqslant t, \varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1}} x - t \int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1} x\gamma_0(dx) \Bigg) + \sum_{\substack{(s,x) \in X, \\ s \leqslant t, |x| > 1}} x. \tag{43}$$

Далее, рассмотрим группу $T_t, t \in (-\infty, \infty)$ определяемую (18) и соответствующую ей группу $\widetilde{\Phi}_f$, (в данном случае f пробегает множество $L_1([0,1],\lambda)$) преобразований пространства конфигураций $\mathcal{X}([0,1] \times \overline{\mathbb{R}})$. Аналогично тому, как это делалось выше, с помощью группы $\widetilde{\Phi}_f$ и отображения Ξ (задаваемого (43)) определим группу $\widetilde{\Psi}_f$, преобразований пространства $\mathbb{D}[0,1]$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\widetilde{\Psi}_f \circ \Xi = \Xi \circ \widetilde{\Phi}_f.$$

Легко проверить, что преобразование $\widetilde{\Psi}_f$ может быть задано формулой

$$[\widetilde{\Psi}_f(z)](t) = z(t) + \sum_{\substack{s \leqslant t, \\ T_{f(s)}(\Delta z(s)) \neq \infty}} (T_{f(s)}(\Delta z(s)) - \Delta z(s)). \tag{44}$$

Теорема 4. *Для любой функции $f \in L_1([0,1],\lambda)$ преобразование $\widetilde{\Psi}_f$ определено на множестве $\mathcal{P}_\xi$—полной меры, причем меры $\mathcal{P}_\xi \widetilde{\Psi}_f^{-1}$ и $\mathcal{P}_\xi$ взаимно абсолютно непрерывны.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 2.

Литература

1. Y. Takahashi, *Absolute continuity of Poisson random fields.* — Publ. Res. Inst. Math. Sci. **26** (1990), 629–649.
2. J. Kerstan, K. Mattes, and J. Mecke, *Infinite divisible point processes.* Akademie-Verlag, Berlin (1978).
3. W. Linde, *Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces.* Leipzig: Teubner (1983).
4. А. В. Скороход, *О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам* И. — Теория Вероятн. и ее примен. ИИ (1957), 629–649.
5. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов.* Изд-во Киевского ун-та (1961).
6. А. В. Скороход, *Стохастические процессы с независимыми приращениями.* Наука, М. (1986).
7. Н. В. Смородина, *Инвариантные и квазиинвариантные преобразования мер, отвечающих устойчивым процессам с независимыми приращениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **339** (2006), с. 135–150.
8. J. F. C. Kingman, *Poisson Processes.* Oxford (1993).
9. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Наука, М. (1977).
10. J. Rosiński, *Tempering stable processes.* Preprint, August 2004.

Anikeeva D. A. The nonsingular transformations of the tempering stable Lévy processes.

Let $\xi(t), t \in [0, 1]$ be a tempering stable process. By $\mathcal{P}_\xi$ we denote the law of ξ in the Skorokhod space $\mathbb{D}[0, 1]$. For the measure $\mathcal{P}_\xi$ we construct the group of nonsingular transformations of $\mathbb{D}[0, 1]$.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 1 ноября 2007 г.