Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 351, 2007 г.

Ц. Альбеверио, Я. Белопольская

СКАЧКООБРАЗНЫЕ ПРОЦЕССЫ В Q_p АССОЦИИРОВАННЫЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ПСЕВДО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

1. Введение

Развитие теории случайных процессов в евклидовом пространстве R^d позволило установить наличие глубоких связей между теорией диффузионных процессов и теорией уравнений в частных производных второго порядка, а также между теорией марковских скачкообразных процессов и теорией интегро-дифференциальных (псевдо-дифференциальных) уравнений. В частности, было показано, что решение краевых задач для таких параболических или интегро-дифференциальных уравнений можно построить в виде средних по траекториям соответствующих случайных процессов.

В последние десятилетия начала активно развиваться теория случайных процессов со значениями в локальных полях и в частности, теория случайных процессов в Q_p – поле p-адических чисел [1–3].

Развитие теории случайных процессов со значениями в Q_p происходит по различным направлениям. Поскольку Q_p не является линейным пространством над полем вещественных чисел, то при развитии теории случайных процессов возникают проблемы уже с определением основных понятий, таких, например, как понятие математического ожидания, условного математического ожидания, мартингала и т. д.

Действительно, далеко не очевидно как определить понятие математического ожидания для случайной величины $\xi \in Q_p$, поскольку Q_p не является линейным пространством над полем R. Даже если случайная величина, имеет конечный набор значений

Работа была частично поддержана грантом DFG 436 RUS 113/823 и грантом РФФИ 05-01-04002-ННИО-а.

$x_1, x_2, \ldots, {}_n$, то выражение $\sum_{k=1}^{n} x_k P\{\xi = x_k\}$ не имеет смысла, поскольку $x_k \in Q_p$, тогда как $P\{\xi = x_k\} \in R$.

Подход к определению среднего, предложенный в работе Эванса [4], состоит в следующем.

Пусть L^∞ – пространство случайных величин со значениями в Q_p, подчиняющихся оценке $||\xi||_\infty = \text{ess sup}\,|\xi| < \infty$. При этом является L^∞ линейным пространством над полем Q_p. Если мы будем отождествлять случайные величины в том и только в том случае когда они совпадают почти всюду, то

$$||\xi||_\infty = 0 \Leftrightarrow \xi = 0,$$

$$||c\xi||_\infty = |c|\,||\xi||_\infty, \quad c \in Q_p,$$

для любой пары случайных величин $\xi, \eta \in L^\infty$

$$||\xi + \eta||_\infty \leqslant ||\xi||_\infty \vee ||\eta||_\infty = mcx(||\xi||_\infty, ||\eta||_\infty).$$

Отображение $(\xi, \eta) \to ||\xi - \eta||_\infty$ определяет метрику на L^∞ и L^∞ полно в этой метрике. Таким образом L^∞ является банаховой алгеброй над полем Q_p.

Пусть $\xi \in L^\infty$ и $\varepsilon(\xi) = \inf\{c \in Q_p : ||\xi - c||_\infty\}$. Математическим ожиданием случайной величины ξ со значением в Q_p назовем подмножество множества Q_p, заданное соотношением

$$E[\xi] = \{c \in Q_p : ||\xi - c||_\infty = \varepsilon(\xi)\} = \inf\{c \in Q_p : ||\xi - c||_\infty \leqslant \varepsilon(\xi)\}.$$

При этом это множество $E[\xi]$ не пусто и представляет собой множество точек, на которых непрерывная функция $c \to ||\xi - c||_\infty$ достигает своего инфимума. На этом пути удается также ввести понятие условного математического ожидания и понятие мартингала.

Другой подход, используемый также при построении теории случайных процессов со значениями на нелинейных подмножествах линейных пространств (например, на гладких многообразиях в евклидовом пространстве [5]) можно описать следующим образом.

Введем понятие математического ожидания, условного среднего, а также основные понятия теории случайных процессов такие, как понятие семимартингала, марковского процесса и ряд других, рассматривая образы случайных величин и случайных процессов в линейных пространствах. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ со значениями в Q_p, т. е. семейство случайных величин со значениями в Q_p, зависящее от вещественного параметра t, который мы будем называть временем. При этом семимартингалом со значениями в Q_p назовем такой случайный процесс $\xi(t) \in Q_p$, что случайный процесс $f(\xi(t)$ является семимартингалом для любой измеримой ограниченной функции $f : Q_p \to R$.

Отметим еще одно направление теории случайных процессов в Q_p, в рамках которого временной параметр также считается элементом Q_p. Это направление развивается в работах [6, 7].

Поскольку локальное поле Q_p является вполне несвязным, на нем не существует нетривиальных процессов с непрерывными траекториями сли временной параметр является вещественным. Однако, если считать, что то ситуация изменяется и удается развивать теорию вполне аналогичную теории диффузионных процессов в R^d (см. [6, 7]).

В этой работе мы рассматриваем случайные процессы со значениями в Q_p с вещественным временным параметром. Важную роль в дальнейшем будет играть симметричный устойчивый случайный процесс $\zeta(t, \omega) \in Q_p$, определенный для $t \in [0, T), \omega \in \Omega$. Пусть $\mathcal{F}_t$ – поток σ-алгебр, порожденных процессом $\zeta(t)$ и $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ вероятностное пространство с фильтрацией. Траектории процесса $\zeta(t)$ являются элементами пространства $\mathrm{cadlag}(Q_p)$ – пространства функций со значениями в Q_p, непрерывных справа и имеющие пределы слева.

Существует описание всех инвариантных относительно вращения, однородных по пространству и времени процессов Леви $\xi(t)$ с независимыми приращениями на локальных полях [1, 2]. Мы будем называть такие процессы $\xi(t) \in Q_p$ процессами со скачками или скачкообразными случайными процессами. Теория стохастических уравнений для этого класса процессов была развита в монографии Кочубея [3]. При этом было показано, что можно построить случайный марковский процесс $\eta(t)$ в Q_p как решение некоторого стохастического уравнения. Как и всякий марковский процесс, $\eta(t)$ порождает эволюционное семейство отображений в пространстве измеримых ограниченных вещественных функций, заданных на фазовом пространстве, роль которого в рассматриваемоим случае играет Q_p, и можно вычислить производящий оператор этого семейства. Далее эти результаты были использованы для построения решения задачи Коши для линейных псевдодифференциальных уравнений.

В настоящей работе мы обобщаем результаты, полученные в [3]. На первом этапе мы рассматриваем стохастические уравнения в Q_p, решение $\xi(t)$ которых ассоциированы с решениями задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{p^{\alpha}-1}{1-p^{-\alpha-1}}\int\limits_{Q_p}[u(s,x+f(z))-u(s,x)]m(x,u(s,x),z)\|z\|_p dz \quad (1.1)$$

и конструируем вероятностное представление решения задачи (1.1). Затем, наряду с процессом $\xi(t)\in Q_p$ мы рассматриваем процесс $\eta(t)\in R^d$, порождающий мультипликативный операторный функционал $Z(s,t)$ от марковского процесса $\xi(t)\in Q_p$. Этот функционал определяется соотношением $Z(s,t)h=\eta(t)$, где $\eta(t)\in R^d$, $\eta(s)=h\in R^d$ – решение линейного стохастического уравнения с коэффициентами, зависящими от процесса $\xi(t)$. Это позволяет рассматривать с вероятностной точки зрения не только скалярные интегро-дифференицальные уравнения вида (1.1), но и системы таких уравнений. Соответствующие результаты для случайных скачкообразных процессов $\xi(t)\in R^d$ были получены ранее в работах [8] и [9].

Дальнейшее изложение организовано следующим образом.

Во втором параграфе мы приводим сводку основных определений и результатов из теории p-адических чисел, необходимых для наших конструкций. Здесь же приводятся результаты теории случайных процессов, ассоциированных с линейными псевдо-дифференциальными уравнениями относительно скалярных функций определенных на $R_+\times Q_p$. Более подробное изложение приведенных в этом параграфе результатов можно найти в [3]. Параграф 3 посвящен построению случайных процессов, ассоциированных с нелинейными псевдодифференциальными уравнениями. В параграфе 4 конструируются скалярные и векторные мультипликативные функционалы от марковских процессов со значениями в Q_p, которые затем используются для построения вероятностного представления решения задачи Коши для системы линейных псевдо-дифференциальных уравнений. В последнем параграфе мы рассматриваем псевдодифференциальные уравнения с нелинейным потенциалом и конструируем вероятностные представления задачи Коши для таких уравнений и систем.

2. Поле Q_p и случайные процессы со значениями в Q_p

Поле Q_p p-адических чисел

$$Q_p = \left\{ \sum_{n=-k}^{\infty} a_n p^n, \quad 0 \leqslant a_n < p \right\}$$

– это пополнение множества Q рациональных чисел относительно абсолютного значения $|x|_p$, которое определяется следующим образом. Положим $|0|_p = 0$

$$\|x\|_p = p^{-s} \quad \text{если} \quad x = p^s \frac{a}{b}$$

где $a, b, s \in Z$ – целые числа, причем a, b не делятся на p.

Заметим, что по теореме Островского существует лишь два естественных определения абсолютной величины на множестве Q – это стандартная евклидова абсолютная величина и приведенное выше определение. При этом абсолютная величина $\|\cdot\|_p$ обладает следующими свойствами:

$$\|x\|_p = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad x = 0,$$

$$\|xy\|_p = \|x\|_p \|y\|_p,$$

$$\|x + y\|_p \leqslant \max(\|x\|_p, \|y\|_p).$$

Последняя оценка называется ультраметрическим неравенством (или неархимедовым свойством) и обусловливает специфические свойства Q_p. В частности, Q_p вполне несвязно в топологии порожденной метрикой $\|x - y\|_p$, порожденной отображением $(x, y) \to \|x - y\|_p$. Стандартные подмножества такие, как шары или сферы (в метрике $\|x - y\|_p$) являются одновременно и открытыми, и замкнутыми компактами, два шара либо не пересекаются, либо один из них вложен в другой и т. д.

Поскольку в этой работе p предполагается фиксированным всюду ниже, мы иногда опускаем индекс p в обозначении абсолютной величины, т. е. используем обозначение $|x| \equiv |x|_p$ для любого $x \in Q_p$ если это не приводит к недоразумениям.

Подмножесто p-адических чисел вида

$$Z_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, \quad 0 \leqslant a_n < p$$

называется множеством p-адических целых чисел.

На множестве Q_p существует аддитивная мера dx – мера Хаара, нормализованная так, чтобы $\int\limits_{Z_p} dx = 1$. При этом отображение $x \mapsto yx$ преобразует меру dx про правилу $dx \mapsto |y|dx$.

Если $x \neq 0$ элемент из Q_p, то он обратим в Q_p. Пусть Q_p^* обозначает множество всех обратимых элементов из Q_p, при этом $Q_p = \{0\} \cup Q_p^*$. Обозначим d^*x мультипликативную меру Хаара, для которой $\int\limits_{Z_p^*} d^*x = 1$. Тогда

$$d^*x = \frac{dx}{\|x\|}\frac{p}{p-1}.$$

Стандартный аддитивный характер $e_p(x)$ на Q_p , тривиализующийся на целых p-адических числах имеет вид

$$e_p(x) = e^{-2\pi iq}, \quad x \in q + Z_p.$$

Характер $e_p(x)$ корректно определен, поскольку он зависит только от дробной части q p-адического числа x. При этом произвольный аддитивный характер на Q_p задается соотношением

$$\psi_a(x) = e_p(ax), \quad a \in Q_p.$$

Поскольку Q_p^* изоморфно произведению $p^Z = \{\|x\| : x \in Q_p^*\}$ и Z_p^*, то непрерывный характер на Q_p^* будет иметь вид $|x|^s\chi(x)$, где $\chi(x)$ – непрерывный характер конечного порядка на Z_p^* и s – целое число. Напомним, что целое число k в представлении $x = p^k u$, где $u = \sum a_n p^n \in Z_p$ называется порядком p-адического числа x. Все непрерывные мультипликативные характеры поля Q_p^* имеют вид $\|x\|^s\chi(x)$, где χ – непрерывный характер Z_p^*. Если ψ –аддитивный и χ – мультипликативный непрерывный характер, то функция

$$G(\psi,\chi) = \int\limits_{Q_p} \psi(x)\chi(x)dx$$

называется p-адичиеской гамма-функцией и представляет собой p-адический аналог классической Γ-функции $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{Q_p} \psi(x)\chi(x)dx = \int\limits_{Q_p} e_p(x)\chi(x)\|x\|_p^{\alpha}dx$$

$$= \sum_{k\in Z} \int\limits_{\{x\in Q_p, \|x\|_p = p^{-k}\}} e_p(x)\chi(x)dx,$$

где χ теперь имеет конечный порядок. При этом

$$\int\limits_{Q_p} e_p(x)\chi(x)\|x\|_p^{\alpha}dx = \frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{-\alpha-1}} = G_p(\alpha),$$

поскольку при $k<0$ интеграл представляет собой сумму вида

$$\sum_{j\in(Z/p^{-k})^*} e(-j/p^{-k}).$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – полное вероятностное пространство, Случайная величина ξ со значениями в Q_p – это измеримое отображение из Ω в поле Q_p, снабженное борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(Q_p)$. Как уже упоминалось во введении, важную роль в наших конструкциях играет симметричный устойчивый процесс $\zeta(t,\omega)\in Q_p$, определенный при $t\in[0,T), \omega\in\Omega$ анд $\mathcal{F}_t$ – поток σ-алгебр, порожденных процессом $\zeta(t)$. Траектории этого процесса непрерывны справа и имеют пределы слева. Мы будем говорить в этом случае, что процесс $\zeta(t)$ имеет cadlag-траектории. Для заданного борелевского подмножества $\Gamma\subset Q_p\backslash\{0\}$ обозначим через $\nu(t,\Gamma)$ число скачков процесса ζ, принадлежащих множеству α на интервале $[0,t)$. Если множество Γ содержится в дополнении $B_n^c = Q_p\backslash B_n$ шара $B_n = \{x\in Q_p : \|x\|_p \leqslant p^n\}$, $n\in Z$, то $\nu_\alpha(t,\Gamma)<\infty$.

В дальнейшем мы определим случайную меру ν_α, считающую число скачков процесса $\zeta(t)\in Q_p$ и используем ее для конструирования класса случайных процессов со значениями в Q_p. Интересующие нас процессы $\xi(t)\in Q_p$ будут строится как решения стохастических уравнений, содержащих стохастические интегралы по этой случайной мере. Такой подход позволяет рассмотреть скалярные случайные процессы вида $f(\xi(t))$ и вывести уравнения, описывающие скалярные функции вида $u(s,x) = E[f(\xi_{s,x}(t))]$, где $\xi_{s,x}(t)$ случайный процесс со значениями в Q_p, удовлетворяющий условию $\xi(s)=x$. Наряду с этим мы рассмотрим также векторные функции $v : Q_p \to R^d$ и векторные случайные процессы $\gamma(t) = v(\xi(t))$ и соответствующие функции $g(s,x) = E[v(\xi_{s,x}(t))]$ выведем уравнения, которым они удовлетворяют.

Случайный процесс $\xi(t)$ в Q_p называется предсказуемым если его можно представить в виде

$$\xi(t) = \xi_0 1_{t=0} + \sum_{i=0}^{n} \xi_i 1_{(T_i, T_{i+1}]}(t),$$

где $T_0 = 0 < T_1 < \cdots < T_n < T_{n+1} = T$ – неупреждающие случайные моменты времени каждая случайная величина $\xi_i = \xi(t) \in Q_p, t \in (T_i, T_{i+1}]$ ограничена и $\mathcal{F}_{T_i}$-измерима.

Пусть $\Gamma \subset Q_p$, обозначим через $\nu_\alpha(t,\Gamma)$ число скачков процесса ζ попадающих в Γ на интервале $[0,t)$. Для фиксированного Γ $\nu_\alpha(t,\Gamma)$ – это пуассоновский случайный процесс с параметром $t\pi_\alpha(\Gamma)$. Тогда $\nu_\alpha(t,\cdot)$ – это случайная целочисленная неотрицательная счетно-аддитивная мера на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(Q_p^*)$, причем случайные величины $\nu_\alpha(t,\Gamma_1)$ и $\nu_\alpha(t,\Gamma_2)$ независимы, если $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Ниже мы будем предполагать, что $E\nu_\alpha(t,\Gamma) = t\pi_\alpha(\Gamma)$, где $\alpha > 0$ и π_α – мера Леви вида

$$\pi_\alpha(dz) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} \|z\|_p^{-\alpha-1} dz = -G_p(\alpha)\|z\|_p^{-\alpha-1} dz.$$

Обозначим через $\mathcal{M}_t$ множество всех предсказуемых ступенчатых функций, таких что $f(t,z) = 0$, если $z \in B_k$, где целое число k зависит от f и через $\mathcal{N}_t$ множество всех $\mathcal{F}_t$-измеримых функций, определенных на пополнении множества $\mathcal{M}_t$ относительно нормы

$$\|f\|_{L_1} = \int_0^T \int_{Q_p} E|f(t,z)|\pi_\alpha(dz)dt.$$

Пусть $C(S, Q_p)$ обозначает пространство всех непрерывных функций со значениями в Q_p, определенных на компактном множестве $S \subset Q_p$ и пусть $D([0,T], X)$ обозначает пространство cadlag (т.е. непрерывных справа и имеющих пределы слева) функций со значениями в пространстве X, определенных на отрезке $[0,T]$. Заметим, что функции из $D([0,T], Q_p)$ представляют собой константы между скачками ввиду полной несвязности пространства Q_p.

Рассмотрим целочисленную случайную величину ζ имеющую пуассоновске распределение с параметром $a > 0$, $P\{\zeta = k\} = e^{-a}\frac{a^k}{k!.}$ Тогда можно показать, что для любого простого числа p и $\gamma \in [1, \infty)$ справедлива оценка $E\|\zeta\|_p \leqslant \frac{p^\gamma}{p^\gamma - 1} a$.

При этом если $\Delta \subset [0, T], \Gamma \in \mathcal{B}(Q_p)$, то для любого $\gamma \in [1, \infty)$, то существует такая константа $C_{p,\gamma} > 0$, что справедлива оценка

$$E[\nu_\alpha(\Delta, \Gamma)] \leqslant C_{p,\gamma} \pi_\alpha(\Delta, \Gamma).$$

Рассмотрим неслучайную функцию вида

$$f(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) z^k, \quad z \in Q_p, t \in [0, T], \quad \text{где } a_k(t) \in D([0, T], Q_p)$$

и $\lim\limits_{k \to \infty} sup_0 \|a_k(t)\|_p^{\frac{1}{k}} = 0$. При этом $f \in D([0, T], C(S_n, Q_p))$ для каждого положительного целого n, где $S_n = \{z \in Q_p : \|z\|_p = p^n\}$.

Обозначим через $I(f)$ стохастический интеграл

$$I(f) = \int_0^T \int_{Q_p} f(t, z) \nu_\alpha(dt, dz) \tag{2.2}$$

и напомним, что он определяется вначале на множествах S_n по формуле

$$I_n(f_m) = \int_0^T \int_{S_n} f_m(t, z) \nu_\alpha(dt, dz)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_m} \int_{S_n} f_{m,i}(z) \nu_\alpha(\Delta_i^{(m)}, dz),$$

где $\Delta_i^{(m)}$ – непересекающиеся интервалы $[0, T] = \sum_{i=1}^{N_m} \Delta_i^{(m)}$ и осцилляции функции f на $\Delta_i^{(m)}$ по норме не превышают величины $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Функция f_m постоянна на $\Delta_i^{(m)}$ т. е. $f_m(t, z) = f_{m,i}(z), z \in S_n, t \in \Delta_i^{(m)}$.

Теория интегрирования Q_p-значных функций, заданных на компактном множестве S_n относительно Q_p-значной меры обладает специфическими свойствами. В частности для любой целочисленной конечно аддитивной меры $q(dx)$ и непрерывной функции $f : S_n \to Q_p$ справедлива оценка

$$\|\int\limits_{S_n} f(x)q(dx)\|_p = \|I(f)\|_p \leqslant \sup_{x \in S_n} \|f(x)\|_p.$$

Из этой оценки и ультраметрического неравенства следует, что последовательность $I_{n,m} = I_n(f_m)$ фундаментальна в Q_p почти наверно и ее предел не зависит от выбора аппроксимации. Далее I_n определяется соотношением $I_n(f) = \lim\limits_{m\to\infty} I_{n,m}$ и, наконец, $I(f) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} I_n(f)$ и ряд сходится по вероятности.

Для случайной функции $f(\omega) \in Q_p$, принадлежащей $\mathcal{M}_t$, определим стохастический интеграл $I(f)$ соотношением

$$I(f) = \int\limits_0^T \int\limits_{Q_p} f(t,z)\nu_\alpha(dt,dz) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(t_k,z_j)\nu_\alpha([t_k,t_{k+1}],G_j),$$

где G_j – борелевские подмножества из Q_p, $\bigcup\limits_{j=1}^{m} G_j = Q_p$.

При этом нетрудно проверить, что существует положительная константа C, для которой справедлива следующая оценка

$$E\|I(f)\|_p \leqslant C \int\limits_0^T \int\limits_{Q_p} \|f(t,z)\|_p \pi_\alpha(dz)dt. \tag{2.3}$$

Заметим, что (2.3) означает, что

$$E\|I(f)\|_p \leqslant C\|f\|_{L_1}.$$

Рассмотрим два стохастических интеграла

$$\Psi_i(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{Q_p} F_i(t,x,z)\nu_\alpha(dt,dz), \quad i = 1,2.$$

Лемма 2.1. *Пусть $\Psi_i(t)$, $i = 1,2$ удовлетворяют условиям* **C2.1**–**C2.4**. *Тогда*

$$\Psi_1(T)\Psi_2(T) = \int\limits_0^T \Psi_1(t-)d\Psi_2(t)$$

$$\int_0^T \Psi_2(t-)d\Psi_1(t) + \int_0^T F_1(x,z)F_2(x,z)\nu(dt,dz), \qquad (2.4)$$

анд

$$d\Psi^2(t) = 2\Psi(t)d\Psi(t) + \int_{Q_p} F^2(x,z)\nu(dt,dz). \qquad (2.5)$$

Доказательство. Пусть функции F_1 и F_2 равны 1 вне некоторого шара B_k при фиксированном целом k. В этом случае мы должны проверить, что для любого подмножества $G \subset Q_p$

$$d\nu^2(t,G) = [(\nu(t,G)+1)^2 - \nu^2(t,G)]\nu(dt,G).$$

Это равенство вытекает из свойств пуассоновской меры $\nu(t,dz)$ на Q_p вполне аналогично доказательству соответствующего утверждения для случая евклидова пространства.

Далее для ступенчатых функций $F_{in}(t,x,z)$ из $\mathcal{N}_t$ получим

$$d[\Psi_{1n}(t)\Psi_{2n}(t)] = \Psi_{1n}(t)d\Psi_{2n}(t) + \Psi_{2n}(t)d\Psi_{1n}(t)$$

$$+ \int_{Q_p} F_{1n}(t,x,z)F_{2n}(t,x,z)\nu(dt,dz).$$

Наконец, переходя к пределу при $n \to \infty$ мы получим соотношения (2.4), (2.5).

Пусть $\mathcal{F}_t$ – фильтрация, порожденная пуассоновским процессом $\nu_\alpha([0,t),dy)$ и $\mathcal{X}$ обозначает банахово пространство (классов стохастически эквивалентных) Q_p-значных случайных процессов $\xi(t)$, $t \in [0,T]$ $\mathcal{F}_t$-измеримых при каждом t и непрерывных как функции на $[0,T]$ со значениями в пространстве $L^1(\Omega, Q_p)$ с нормой

$$\|\xi\|_{\mathcal{X}} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\|\xi(t)\|_p.$$

Пусть $\zeta(t)$ – описанный выше скачкообразный процесс и θ_k моменты скачков этого процесса, для которых

$$\|\zeta(\theta_k) - \zeta(\theta_k - 0)\| > p^{-n}.$$

Для заданной ступенчатой функции f_n рассмотрим случайный процесс вида

$$\xi(t) = x + \int_0^t \int_{Q_p} f_n(z)\nu_\alpha(dt, dz)$$

и заметим, что процесс $\xi(t)$ можно также записать в виде

$$\xi(t) = x + \sum_{\theta_m \leqslant t} f_n(z_m)$$

где $z_m = \zeta(\theta_m) - \zeta(\theta_m - 0)$.

Пусть $H_t(Q_p)$ обозначает множество вещественных ограниченных функций на $[0, T] \times Q_p$ удовлетворяющих условию Липшица

$$|v(t, x) - v(t, y)| \leqslant C_n^v(t)\|x - y\|_p$$

иф $x, y \in S_n$, $t \in [0, T]$ и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^v(t)p^{-n(\alpha+1)} < \infty.$$

Если константа Липшица не зависит от t то соответствующее пространство обозначим $H(Q_p)$.

Пусть $\varphi \in H_t(Q_p)$. Поскольку процесс $\xi(t)$ почти наверно обладает конечным числом скачков на интервале $[0, t]$, то приращение процесса $\varphi(\xi(t))$ представить в виде суммы соответствующих скачков. При этом мы получим

$$\varphi(\xi(t)) - \varphi(x) = \int_0^t \int_{Q_p} [\varphi(\xi(\theta - 0) + f(z)) - \varphi(\xi(\theta - 0))]\nu_\alpha(d\theta, dz).$$

Эту формулу называют формулой Ито для скачкообразного процесса $\xi(t)$.

Рассмотрим стохастическое уравнение вида

$$\xi(t) = x + \int_s^t \int_{Q_p} f(\xi(\theta), z)\nu_\alpha(d\theta, dz) \qquad (2.6)$$

и сформулируем условия, при которых уравнение (2.6) имеет единственное решение $\xi \in \mathcal{X}$ (см. [3]).

C2.1. $f(\cdot,x,z) \in D([0,T],C_b(Q_p \times S_n, L_1(\Omega,Q_p)))$ для всех $n \in Z$ где C_b – пространство непрерывных ограниченных векторных функций с нормой супремума.

C2.2. Отображение $z \to f(x,z)$ из Q_p в $L_1(\Omega,Q_p)$ непрерывно равномерно относительно $x \in Q_p$.

C2.3. $\int\limits_{Q_p} \sup\limits_{x\in Q_p} \|f(x,z)\|_p \|z\|_p^{-\alpha-1} dz < \infty$.

C2.4. Для любого $n \in Z$, существует константа $M_n > 0$ такая, что для всех $t \in [0,T], \quad x,y \in Q_p, z \in S_n$ справедлива оценка

$$\|f(x,z) - f(y,z)\|_p \leqslant M_n \|x-y\|_p \tag{2.7}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n p^{-n(\alpha+1)} \leqslant C < \infty.$$

Точнее говоря справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* **C2.1**–**C 2.4**. *Тогда существует единственное решение $\xi \in \mathcal{X}$ уравнения* (2.6).

Поскольку $f(x,z)$ – неслучайная функция, то решение $\xi(t)$ уравнения (2.6) обладает марковским свойством, т. е. для любой измеримой ограниченной вещественной функции $v(s,x)$ для $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, справедливо равенство

$$E[v(\xi(t))|\mathcal{F}_s] = E[v(\xi(t))|\xi(s)].$$

Нетрудно проверить, используя стандартные рассуждения, что соотношение

$$u(s,x) = E[\varphi(\xi_{s,x}(t))] = U(s,t)\varphi(x) \tag{2.8}$$

определяет эволюционное семейство линейных отображений $U(s,t)$ в $H(Q_p)$. Если $\varphi \in H(Q_p)$ то

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \lim_{t\to s} \frac{E\varphi(\xi_{s,x}(t)) - \varphi(x)}{t-s} =$$

$$-G_p(\alpha)\int\limits_{Q_p} [\varphi(x+f(x,z)) - \varphi(x)]\|z\|_p^{-\alpha-1} dz \tag{2.9}$$

равномерно по $x \in Q_p$. Оператор $\mathcal{A}$, определяемый соотношением (2.9) называется генератором эволюционного семейства $U(s,t)$ или генератором марковского процесса $\xi_{s,x}(t)$. Наконец, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Если выполнены условия теоремы* 2.1, *то функция*

$$u(s,x) = E[\varphi(\xi_{s,x}(T))] \tag{2.10}$$

определяет единственное решение задачи Коши

$$\frac{\partial u(s,x)}{\partial s} + \mathcal{A}u(s,x) = 0, u(T,x) = \varphi(x), \tag{2.11}$$

где оператор $\mathcal{A}(s)$ *имеет вид* (2.9).

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial u(s,x)}{\partial s} + \mathcal{A}u(s,x) + c(x)u(s,x) = 0, \quad u(T,x) = \varphi(x), \tag{2.12}$$

где $c(x)$ – ограниченная вещественная функция определенная на Q_p. Решение этого уравнение допускает представление с помощью формулы Фейнмана–Каца.

Теорема 2.3. *Пусть* $c(x)$ *ограниченная скалярная функция определенная на* Q_p. *Тогда в условиях теоремы* 2.1 *функция*

$$u(s,x) = E[e^{\int_s^T c(\xi(\tau))d\tau}\varphi(\xi_{s,x}(T))] \tag{2.13}$$

определяет единственное решение задачи Коши (2.12).

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству сответствующего факта в случае евклидова пространства и вытекает их мультипликативного свойства экспоненты $e^{\int_s^T c(\xi(\tau))d\tau}$ и марковского свойстве процесса $\xi(t)$.

3. Случайные процессы в ассоциированные с нелинейными эволюционными семействами

В предыдущем параграфе мы видели, что марковский процесс $\xi(t)$ удовлетворяющий стохастическому уравнению (2.6) порождает эволюционное семейство $U(t,s)$ линейных отображений, действующих в $H(Q_p)$. При этом функция

$$u(s,x) = U(T,s)\varphi_0(x)$$

удовлетворяет задаче Коши (2.11) для линейного псевдо-дифференциального уравнения. В этом параграфе мы обобщим эти результаты и построим случайный процесс, позволяющий получить вероятностное представление решения задачи Коши для нелинейного псевдо-дифференциального уравнения.

Для того, чтобы пояснить наш подход, напомним конструкцию случайного процесса, связанного с простейшим нелинейным параболическим уравнением (так называемым уравнением Бюргерса) в евклидовом пространстве.

Уравнением Бюргерса называют нелинейное параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Построим решение задачи Коши для этого уравнения с данными Коши вида $u(0,x) = u_0(x)$. Известно, что эту задачу Коши можно свести к некоторой стохастической задаче.

Пусть $w(t)$ – винеровский процесс с значениями в R^1 и σ – вещественное число. Рассмотрим систему стохастических уравнений

$$d\xi(\tau) = -u(t-\tau,\xi(\tau))d\tau + \sigma dw(\tau), \quad \xi(0) = x,$$

$$u(t,x) = E[u_0(\xi(t))]$$

и докажем существование ее решения такого, что функция дважды дифференцируема. Тогда можно проверить, что соотношение определяет единственное решение задачи Коши для уравнения Бюргерса [11].

Пусть $\mathcal{L}$ обозначает подпространство пространства $C(Q_p, R^1)$ непрерывных ограниченных функций $g(t,x)$, состоящее из функций, удовлетворяющих условию Липшица по аргументу $x \in Q_p$. Обозначим через $||g||_{\mathcal{L}} = sup_{x\in Q_p}|g(x)|$ норму элемента $g \in \mathcal{L}$, $\mathcal{N} = C([0,T],\mathcal{L})$ $||v||_{\mathcal{N}} = sup_{0\leqslant t\leqslant T}||v(t)||_{\mathcal{L}}$.

Наша цель состоит в том, чтобы построить случайный процесс ассоциированный со следующей задачей Коши

$$\frac{\partial u(s,x)}{\partial s} + \mathcal{A}^u u(s,x) = 0, \quad u(T,x) = \varphi(x) \tag{3.1}$$

где

$$\mathcal{A}^u v(s,x) = -G_p(\alpha)\int_{Q_p}[v(s,x+f(z)) - v(s,x)]m(x,u(s,x),z)||z||_p^{-\alpha-1}dz. \tag{3.2}$$

Для того, чтобы построить такой процесс рассмотрим следующую систему уравнений

$$\xi(t) = x + \int_s^t \int_{Q_p} f(\xi(\theta), u(\theta, \xi(\theta)), z)\nu_\alpha(d\theta, dz), \tag{3.3}$$

$$u(s,x) = E[\varphi(\xi_{s,x}(T))], \tag{3.4}$$

где $\nu_\alpha(x, v; d\theta, dz)$ – целочисленная пуассоновская мера с параметром $E\nu_\alpha(x, v; d\theta, dz) = d\theta m(x, v, z)\|z\|_p^{-\alpha-1}dz$ и докажем существование и единственность ее решения. Затем покажем, что функция $u(s, x)$ вида (3.4) удовлетворяет задаче Коши (3.1).

Для того, чтобы реализовать эту программу, рассмотрим семейство последовательных приближений вида

$$u^0(s,x) = \varphi(x), \tag{3.5}$$

$$\xi^n(t) = x + \int_s^t \int_{Q_p} f(z)\nu_\alpha(\xi^n(\theta), u^n(\theta, \xi^n(\theta)); d\theta, dz) \tag{3.6}$$

$$u^{n+1}(s,x) = E\varphi(\xi^n(T)) \tag{3.7}$$

и докажем, что последовательность пар $(\xi^n(t), u^n(s, x))$ сходится к предельной паре $(\xi(t), u(s, x))$.

При этом сходимость $\xi_n(t)$ будет пониматься в топологии пространства $\mathcal{X}$, а сходимость $u_n(s, x)$ в топологии пространства $\mathcal{N}$.

Предварительно нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты о поведении и свойствах процесса $\xi_{s,x,v}(t)$, удовлетворяющего стохастическому уравнению вида

$$\xi(t) = x + \int_s^t \int_{Q_p} f(z)\nu_\alpha(\xi(\theta), v(\theta, \xi(\theta)); d\theta, dz). \tag{3.8}$$

При этом мы будем предполагать, что $v(t, x)$ – вещественная ограниченная функция определенная на $[0, T] \times Q_p$ и удовлетворяющая условию Липшица по переменной $x \in Q_p$, так что справедливы оценки

$$|v(t,x) - v(t,y)| \leqslant L_v(t)\|x-y\|_p, \quad \sup_{x \in Q_p} |v(t,x)| \leqslant K_v(t) < \infty$$

где $L_v(t), K_v(t)$ положительные ограниченные функции заданные на отрезке $[0,T]$.

Мы будем говорить, что выполняется условие **C3.1** если справедливы следующие оценки:

$$\int\limits_{s_n} \|f(z)\|_p |m(x,v,z)-m(x_1,v_1,z)| \|z\|_p^{-\alpha-1} dz \leqslant M_n|v-v_1|+L_n\|x-x_1\|_p$$

для любых $x, x_1 \in Q_p$, $z \in S_n$, $v_1 v_1 \in R$,

$$\int\limits_{S_n} \sup_x \|f(z)\|_p |m(x,v,z)| \|z\|_p^{-\alpha-1} dz \leqslant N_n|v|,$$

где M_n зависит от $\max(|v|,|v_1|)$, N_n зависит от $|v|$ и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n p^{-n(\alpha+1)} \leqslant L < \infty, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n p^{-n(\alpha+1)} \leqslant B < \infty,$$

$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} N_n p^{-n(\alpha+1)} \leqslant B < \infty.$

Нетрудно проверить, что если выполнены оценки условия **C3.1**, то, повторяя рассуждения приведенные в [3] при доказательстве теоремы 2.1, мы докажем, что существует единственное решение $\xi \in \mathcal{X}$ уравнения (3.8).

Ниже нам понадобятся свойства этого решения и мы перейдем к изучению этих свойств.

Зафиксируем некоторое $T > 0$ обозначим через $L_g(s)$ и $K_g(s)$ минимальные константы, для которых справедливы оценки $|g(s,x)-g(s,y)| \leqslant L_g(s)\|x-y\|_p$ и $\|g(s)\|_{\mathcal{L}} \leqslant K_g(s)$ при каждом $s \in [0,T]$.

Мы будем предполагать, что функция $v(s,x)$ – это вещественная ограниченная функция на $[0,T]\times Q_p$, подчиняющаяся оценкам

$$\|v(s,\cdot)\|_{\mathcal{L}} \leqslant K_v(s) < \infty,$$

$$|v(s,x)-v(s,y)| \leqslant L_v(s)\|x-y\|,$$

где $L_v(s) < \infty$ если $s \in [0,T]$.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* **C3.1**. *Тогда решение* $\xi_{s,x,v}(t)$ *уравнения* (3.8) *удовлетворяет следующим оценкам*

$$E\|\xi_{s,x,v}(t)-\xi_{s,y,v}(t)\|_p \leqslant \|x-y\|_p \tag{3.9}$$

$$E\|\xi_{s,x,v}(t)-\xi_{s,x,v_1}(t)\|_p \leqslant e^{\int\limits_0^t [L+BL_v(\tau)]d\tau} \int\limits_0^t |K_v(\tau)-K_{v_1}(\tau)|d\tau, \quad (3.10)$$

$$\|\xi_{s,x,v}(t)-x\|_p < \infty. \quad (3.11)$$

Доказательство. Рассмотрим оператор $S^v(t,s)$ порожденный правой частью (3.8)

$$S^v(t,s)x = x + \int\limits_s^t \int\limits_{Q_p} f(z)\nu_\alpha(\xi(\theta), v(\theta,\xi(\theta)); d\theta, dz). \quad (3.12)$$

Оценки на коэффициенты в условиях **C3.1** и оценка (3.10) позволяют проверить, что если $\xi, \xi_1 \in \mathcal{X}$ то существует константа C, такая, что

$$E\|S^v(t,s)x - S^v(t,s)y\|_p \leqslant \max(\|x-y\|_p,$$

$$\int\limits_s^t \int\limits_{Q_p} \|f(z)\|_p |m(\xi(\tau), v(\tau,\xi(\tau)), z) - m(\xi_1(\tau), v(\tau,\xi_1(\tau)), z)|\pi_\alpha(d\tau, dz)) \leqslant$$

$$\max(\|x-y\|_p, \int\limits_s^t \sum_{n=-\infty}^{\infty} [L_n + M_n L_v(\tau)] E\|\xi(\tau)-\xi_1(\tau)\|_p d\tau) \leqslant$$

$$\max(\|x-y\|_p, \int\limits_s^t C[L+BL_v(\tau)] E\|\xi(\tau)-\xi_1(\tau)\|_p d\tau).$$

Следовательно, для любой константы $T > t$ получим

$$E\|S^v(t,s)\xi(x) - S^v(t,s)\xi(y)\|_p \leqslant$$

$$\max(\|x-y\|_p, \frac{[L+BL_v(T)]^n T^n}{(n-1)!}\|x-y\|_p) \leqslant \|x-y\|_p,$$

поскольку всегда можно выбрать столь большое n, чтобы

$$\frac{[L+BL_v(T)]^n T^n}{(n-1)!} < 1.$$

Далее в силу леммы Гроноулла мы получим, что

$$E||\xi_{s,x,v}(t)-\xi_{s,x,v_1}(t)||_p \leqslant$$

$$\int_0^t [L+BL_v(\tau)]E||\xi_{s,x,v}(\tau)-\xi_{s,x,v_1}(\tau)||_p + B|K_v(\tau)-K_{v_1}(\tau)|d\tau \leqslant$$

$$||x-y||_p e^{\int_s^t [L+BL_v(\tau)]d\tau} \int_s^t B|K_v(\tau)-K_{v_1}(\tau)|d\tau.$$

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия леммы 3.1 и кроме того, пусть функция φ ограничена и удовлетворяет условию Липшица так что существуют положительные константы K_0 и L_0, для которых справедливы оценки*

$$\sup_{x\in Q_p} |\phi(x)| \leqslant K_0,$$

$$|\phi(x)-\phi(y)| \leqslant L_0||x-y||_p, x, y \in S_n$$

Тогда функция $u^v(s,x) = E[\varphi(\xi_{s,x,v}(T))]$ подчиняется следующим оценкам

$$|u^v(s,x)-u^v(s,y)| \leqslant L_0||x-y||_p, \tag{3.13}$$

$$|u^v(s,x)-u^{v_1}(s,x)| \leqslant ||x-y||_p[L_0 e^{\int_s^T [L+BL_v(\tau)]d\tau} \int_s^T B|K_v(\tau)$$

$$-K_{v_1}(\tau)|d\tau]. \tag{3.14}$$

$$\sup_{x\in Q_p} |u^v(s,x)| \leqslant C < \infty. \tag{3.15}$$

Доказательство немедленно вытекает из леммы 3.1 и свойств функций φ и v.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия леммы 3.2, $f, g \in \mathcal{L}$ и функция $v(s,x)$ подчиняется оценкам*

$$||v(s)||_{\mathcal{L}} \leqslant \alpha(s)$$

и

$$|v(s,x)-v(s,y)| \leqslant \beta(s)||x-y||_p,$$

где $\alpha(s)$, $\beta(s)$ ограниченные функции на некотором отрезке $[0,T]$, $T>0$. Тогда функция $u^v(s,x)$ удовлетворяет оценкам

$$\|u^v(s)\|_{\mathcal{L}} \leqslant \alpha(s),\ |u^v(s,x)-u^v(s,y)| \leqslant \beta(s)\|x-y\|_p \text{ для } s\in[0,T]. \tag{3.16}$$

Доказательство. В условиях леммы 3.2 можно выбрать $\alpha(s)=K_0$ и показать, что $\|u(s)\|_{\mathcal{L}} \leqslant \alpha(s)$ для всех $s\in[0,T]$. Далее выбрав $\beta(s)=L_0$ нетрудно проверить справедливость второй оценки, воспользовавшись результатами леммы 3.2.

Вернемся к рассмотрению системы последовательных приближений (3.5)–(3.7) и докажем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *В условиях леммы 3.2 для всех $t\in[0,T]$ существует единственное решение $\xi(t), u(s,x)$ системы (3.3), (3.4). При этом процесс $\xi(t)$ – это марковский процесс со значениями в Q_p, а функция $u(s,x)$ - ограниченная вещественная функция, удовлетворяющая условию Липшица по $x\in Q_p$ при всех $s\in[0,T]$.*

Доказательство. Как вытекает из леммы 3.3 отображение

$$\Phi(s,x,v)=E\varphi_0(\xi_{s,x,v}(T))$$

действует в пространстве $\mathcal{L}$. Пусть

$$r^k(s,x)=|u^{k+1}(s,x)-u^k(s,x)| \text{ и } \zeta^k(s)=sup_x r^k(s,x).$$

Воспользовавшись оценками леммы 3.1, мы покажем, что $r^k(t-s,x)$ подчиняется следующей оценке

$$r^k(s,x)\leqslant$$

$$L_0\int_s^T M\|u^k(\tau)-u^{k-1}(\tau)\|^2_{\mathcal{L}}d\tau e^{\int_s^T\beta(\tau)d\tau}$$

и, следовательно выполняется неравенство вида

$$\zeta^k(s)\leqslant \delta^k\int_s^T\cdots\int_s^{\tau_2}\|u^1(\tau_1)-u^0\|d\tau_1\dots d\tau_k,$$

где $\delta = L_0 e^{A\int_s^T \beta(\tau)d\tau}$ и $A = L_{(u_k,u_{k-1})}$. Заметим, что A зависит от sup-нормы как функции $u_k(s)$, так и функции $u_{k-1}(s)$, однако эти нормы ограничены для всех $s \in [0,T]$ в силу оценок леммы 3.3.

Поскольку u^k равномерно ограничены константой K_0 и

$$\|u^1(s,\cdot) - u^0(\cdot)\|_{\mathcal{L}} \leqslant \mathrm{const} < \infty,$$

мы приходим к оценке

$$\|u^k(s) - u^{k-1}(s)\|_{\mathcal{L}} \leqslant \frac{N^k}{k!}\,\mathrm{const}$$

где $N = T\delta$. Таким образом, для всех $s \in [0,T)$ семейство функций $u^k(s,\cdot)$ равномерно сходится к предельной функции $u(s,\cdot)$. При этом, как нетрудно проверить, $u(s,x)$ удовлетворяет условию Липшица по x. Действительно, в силу леммы 3.3 для каждого $s \in [0,T]$ оценка

$$|u^k(s,x) - u^k(s,y)| \leqslant L_0\|x-y\|_p$$

выполняется равномерно по k и следовательно, она справедлива и для предельной функции.

Для доказательства единственности решения системы (3.3), (3.4) предположим обратное. Пусть существует пара решений $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ этой системы с одинаковыми начальными условиями $u_1(0,x) = u_2(0,x) = u_0(x)$. Как следует из леммы 2.3 существует константа C

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{L}} \leqslant C\int_0^t \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{\mathcal{L}} d\tau$$

и в силу леммы Гронуолла мы получим равенство $\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{L}} = 0$.

Наконец, напомним, что стохастическое уравнение (3.3) с коэффициентом $f_u(x,z) \equiv f(x,u(s,x),z)$, удовлетворяющим условию Липшица, обладает единственным решением $\xi(t)$ таким, что $\xi(s) = x$. Таким образом единственность решения системы (3.3), (3.4). доказана.

Вернемся теперь к задаче Коши (3.1).

Процесс $\xi(t)$ удовлетворяющий уравнению (3.3) – это марковский процесс со значениями в Q_p.

Генератор этого марковского процесса (и генератор эволюционного семейства $U^u(s,T)\varphi(x) = E\varphi(\xi^u_{s,x}(T))$, порожденного этим процессом) имеет вид

$$\mathcal{A}^u\varphi(x) = \lim_{T\to s} \frac{E\varphi(\xi^u_{s,x}(T)) - \varphi(x)}{T-s} =$$

$$-G_p(\alpha)\int_{Q_p}[\varphi(x+f(z)) - \varphi(x)]m(x,u(s,x),z)\|z\|_p^{-\alpha-1}dz \qquad (3.17)$$

При этом из теорем 2.1 и 3.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* **C3.1**. *Тогда существует единственное решение задачи Коши* (3.1) *на отрезке* $[0,T]$ *и справедливо представление* (3.3), *где случайный процесс* $\xi(t)$ – *это решение уравнения* (3.3).

4. Случайные процессы, ассоциированные с линейными системами интегро-дифференциальных уравнений

В теории стохастических уравнение в евклидовом пространстве развита теория мультипликативных функционалов от марковских процессов. При этом простейший мультипликативный функционал – это вещественный случайный процесс вида

$$\eta(t) = e^{\int_s^t c(\xi(\tau))d\tau}$$

позволяющий построить с помощью формулы Фейнмана–Каца вероятностное представление решения задачи Коши для линейного псевдо-дифференциального уравнения (2.12).

Мы опишем в этом параграфе более общий класс мультипликативных функционалов от марковских Q_p-значных процессов.

Рассмотрим линейное стохастическое уравнение в R^d, коэффициенты которого зависят от процесса $\xi(t)$ со значениями в Q_p, рассмотренного в параграфе 1. Пусть $\zeta(t)$ – двухкомпонентный процесс $\zeta(t) = (\xi(t),\eta(t))$, $\xi(t)\in Q_p, \eta(t)\in R^d$. Используем этот процесс для построения эволюционного семейства линейных отображений, действующих в пространстве вещественных функций заданных на $[0,T]\times R^d\times Q_p$, а также для построения семейства линейных отображений действующих в пространстве вещественных функций заданных на $[0,T]\times Q_p$.

Пусть $\phi(x) \in R^d$ – ограниченная функция, определенная на пространстве Q_p и $h \in R^d$. Обозначим через $\Phi(x,h)$ вещественную функцию, определенную на $R^d \times Q_p$ и имеющую вид

$$\Phi(x,h) = \langle h, \phi(x) \rangle,$$

где $\langle h, \phi \rangle$ обозначает скалярное произведение в R^d.

Рассмотрим систему стохастических уравнений

$$d\xi(t) = \int_{Q_p} f(\xi(t), z)\nu_\alpha(dt, dz), \quad \xi(s) = x \tag{4.1}$$

$$d\eta = c^*(\xi(t))\eta(t)dt + \int_{Q_p} \gamma^*(\xi(t), z)\eta(t)\nu_\alpha(dt, dz), \quad \eta(s) = h \tag{4.2}$$

где c^* обозначает транспонированную матрицу, а $c(x), \gamma(x,z) \in R^d \times R^d$ – непрерывные ограниченные матричнозначные функции, заданные на Q_p и $Q_p \times Q_p$ соответственно. При этом $\eta(t) \in R^d$ – скачкообразный процесс со значениями в R^d.

Существование и единственность решения системы (4.1), (4.2) следует непосредственно из результатов параграфа 1 и общих результатов о существовании решений стохастических уравнений. Марковские свойства процесса $\zeta(t)$ также устанавливаются с помощью стандартных рассуждений. Заметим, что при этом процесс $\eta(t) \in R^d$ не является марковским процессом.

Зададим функцию $N(s,x,h)$ соотношением

$$N(s,x,h) = E[\Phi(\xi_{s,x}(T), \eta_{s,h}(T))]$$

и выведем уравнение, которому удовлетворяет эта функция. После этого определим функцию $g(s,x) \in R^d$ с помощью соотношения $N(s,x,h) = \langle h, g(s,x) \rangle$.

Пусть M^d обозначает пространство $d \times d$ матриц и $B(\Omega, M^d)$ обозначает пространство случайных величин со значениями в M^d. Обозначим через $\|h\|$ норму вектора $h \in R^d$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что выполнены следующие условия.

C4.1. $\gamma \in C_b(Q_p \times S_n, M^d)$ для любого $n \in Z$, пространству непрерывных ограниченных матричных функций с равномерной нормой.

C4.2. Существуют положительная константа C такая, что

$$\int\limits_{Q_p} \sup_{x\in Q_p} \|\gamma(x,z)h\|_p \|z\|^{-\alpha-1} dz < C\|h\|$$

для любого $h \in R^d$.

C4.3. Для каждого $n \in Z$, существует константа $L_n > 0$ такая, что для всех $x, y \in Q_p, z \in S_n$ (где $S_n = \{x \in Q_p : \|x\|_p = p^n\}$) выполняется оценка

$$\|\gamma(x,z)h - \gamma(y,z)h\| \leqslant K_n \|x-y\|_p \|h\| \tag{4.3}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n p^{-n(\alpha+1)} \leqslant C < \infty.$$

Нетрудно проверить, что если выполняются условия **C2.1**–**C2.4**, **C4.1**–**C 4.4** то выполняются также и условия теоремы 2.1 для коэффициентов стохастического уравнения относительно процесса $\zeta(t) = (\xi(t), \eta(t))$, что гарантирует существование и единственность решения системы (4.1), (4.2).

При этом справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* **C2.1**–**C2.4** *и* **C 4.1**–**C 4.4**. *Тогда существует единственное решение системы* (4.1), (4.2). *При этом процесс $\eta(t)$ удовлетворяющий* (4.2), *подчиняется оценке*

$$E\|\eta(t)\| \leqslant e^{C(t-s)}\|h\|$$

и определяет мультиплоикативный матричный функционал $Z(t,s)$ от марковского процесса $\xi(t) \in Q_p$ по формуле $\eta(t) = Z(t,s)h$, так что $Z(t,s)h = Z(t,\tau)Z(\tau,s)h$.

Доказательство. Как уже упоминалось выше, существование и единственность решения системы (4.1), (4.2) вытекают из теоремы 1.1. Эволюционные свойства стохастического семейства $z(t,s)$ являются следствием единственности решения уравнения (4.2).

Рассмотрим векторную функцию $g(s,x)$ вида

$$g(s,x) = EZ^*(s,T)\phi(\xi(T)) \tag{4.4}$$

где $Z^*(s,T)$ – отображение, двойственное к $Z(s,T)$, такое что

$$\langle Z(T,s)h, \phi(x)\rangle = \langle h, Z^*(s,T)\phi(x)\rangle.$$

Определим отображение $U(s,T)$, действующее в пространстве $B([0,T]\times Q_p; R^d)$ ограниченных векторнозначных функций заданных на $[0,T]\times Q_p$ по формуле

$$U(s,T)\phi(x) = E[Z^*(s,T)\phi(\xi(T))] = u(s,x). \tag{4.5}$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Тогда семейство* $U(s,T)$ *вида* (4.5) *представляет собой эволюционное семейство ограниченных линейных отображений, действующих в пространстве* $B([0,T]\times Q_p; R^d)$. *Генератор этого эволюционного семейства имеет вид*

$$\mathcal{A}_1\phi(x) = \lim_{T\to s}\frac{EZ^*(s,T)\phi(\xi(T)) - \phi(x)}{T-s} =$$

$$c(x)\phi(x) - G_p(\alpha)[\int\limits_{Q_p}\gamma(x,z)\phi(x+f(x,z))\|z\|_p^{-\alpha-1}dz+$$

$$\int\limits_{Q_p}[\phi(x+f(x,z)) - \phi(x)]\|z\|_p^{-\alpha-1}dz]. \tag{4.6}$$

Доказательство. Отметим прежде всего что отображение $U(s,t)$ заданное соотношением

$$\langle h, U(s,t)\phi(x)\rangle = E_{s,x,h}\langle \eta(t), \phi(\xi(t))\rangle$$

обладает эволюционным свойством и представляет собой семейство линейных отображений, действующих в пространстве ограниченных функций со значениями в R^{d_1}, заданных на $[0,T]\times Q_p$. Действительно, поскольку в силу единственности решения стохастического уравнения (4.2) имеет место равенство $\eta(t) = Z(t,s)h = Z(t,\tau)Z(\tau,s)h$, то

$$\langle Z(t,s)h, \phi(x)\rangle = \langle h, Z^*(s,\tau)Z^*(\tau,t)\phi(x)\rangle.$$

Используя далее свойства условных средних и марковское свойство процесса $\xi(t)\in Q_p$, удовлетворяющего (4.1), мы получим

$$E\langle Z(t,s)h, \phi(\xi(t))\rangle = \langle h, EZ^*(s,t)\phi(\xi(t))\rangle \tag{4.7}$$

$$= \langle h, E_{s,x} Z^*(s,\tau) E_{\tau,\xi(\tau)} Z^*(\tau,t)\phi(\xi(\tau))\rangle = \langle h, E_{s,x} u(\tau,\xi(\tau))\rangle =$$

$$\langle h, E_{s,x}[U(\tau,t)\phi](\xi(\tau))\rangle = \langle h, U(s,\tau)U(\tau,t)\phi(x)\rangle.$$

Вычислим $[U(s,s+\Delta s) - I]\phi(x)$,

$$[U(s,s+\Delta s) - I]\phi(x) =$$

$$E[(Z^*(s,s+\Delta s) - I)\phi(\xi(s+\Delta s))] + E[\phi(\xi(s+\Delta s)) - \phi(s,x)] =$$

$$E[\left[\int_s^{s+\Delta s} c(\tau,\xi(\tau))d\tau + \int_s^{s+\Delta s}\int_{Q_p} \gamma(\tau,\xi(\tau),z)\nu_\alpha(d\tau,dz)\right]\{\phi(x)+$$

$$\int_s^{s+\Delta s}\int_{Q_p}[\phi(\xi(\tau)+f(\tau,\xi(\tau),z)) - \phi(\xi(\tau))]\nu_\alpha(d\tau,dz)\}]+$$

$$E[\int_s^{s+\Delta s}\int_{Q_p}[\phi(\xi(\tau)+f(\tau,\xi(\tau),z)) - \phi(\xi(\tau))]\nu_\alpha(d\tau,dz)] = \kappa_1 + \kappa_2. \quad (4.8)$$

Наконец, для того, чтобы вычислить генератор семейства $U(s,t)$ разделим полученное выражение на $t-s$ и перейдем к пределу при $t \to s$. В результате мы получим

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{[U(s,s+\Delta s) - I]\phi(x)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\Delta s}$$

где

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\kappa_1}{\Delta s} = c(x)\phi(x) + \int_{Q_p}\gamma(x,z)\phi(x+f(x,z))\pi_\alpha(dz)$$

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\kappa_2}{\Delta s} = \int_{Q_p}[\phi(x+f(x,z)) - \phi(x)]\pi_\alpha(dz)$$

и, следовательно, справедливо соотношение (4.7).

Теперь мы можем вывести уравнение, которому удовлетворяет функция $u(s,x)$ вида (4.5).

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда функция* $g(s,x)$ *заданная соотношением* (4.4) *задает единственное решение задачи Коши*

$$\frac{\partial g(s,x)}{\partial s}+c(x)g(s,x)-G_p(\alpha)\int\limits_{Q_p}[\gamma(x,z)[g(s,x+f(x,z))]]\|z\|_p^{-\alpha-1}dz-$$

$$-G_p(\alpha)\int\limits_{Q_p}[g(s,x+f(x,z))-g(s,x)]]\|z\|_p^{-\alpha-1}dz=0, \qquad (4.9)$$

$$g(T,x)=\phi(x).$$

Q_p-аналог уравнения КПП

В этом параграфе мы воспользуемся результатами двух предыдущих параграфов, чтобы построить вероятностное представление решение следующей задачи Коши

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}=-G_p(\alpha)\int\limits_{Q_p}[v(t,x+f(x,z))$$

$$-v(t,x)]]\|z\|_p^{-\alpha-1}dz+c(x,v(t,x))v(t,x),$$

$$v(0,x)=v_0(x). \qquad (5.1)$$

Напомним что в евклидовом случае, если $x\in R^d, f(t,x)\in R^1, t\in[0,T]$ вероятностный подход к изучению решения задачи Коши для нелинейного параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\Delta u+c(u)u, \quad u(0)=u_0(x) \qquad (5.2)$$

называемого уравнением КПП (уравнением Колмогорова–Петровского–Пискунова) был развит Фрейдлиным [10] и обобщен в работах Далецкого и Белопольсской [11, 12] на широкий класс уравнений и систем. Из результатов этих работ следует, что задачу Коши (5.2) можно свести к следующему интегральному уравнению

$$u(t,x)=E\left[e^{\int\limits_0^t c(w_x(\tau),u(t-\tau,w_x(\tau)))d\tau}u_0(w_x(t))\right], \qquad (5.3)$$

где $w_x(t) = x + \sigma w(t)$, $w(t) \in R^d$ – винеровский процесс и σ - фиксированная константа. При этом если $c(x,v)$ – ограниченная функция по x с полиномиальным ростом по v, обладающая двумя ограниченными непрерывными производными по x и v, то решение уравнения (5.3) определяет классическое (C^2-гладкое по x) решение задачи (5.2).

Мы получим аналогичный результат для случая $x \in Q_p$, $v(t,x) \in R^1$. Предположим, что $g(s,x)$ – ограниченная вещественная функция, определенная на $[0,T] \times Q_p$, а вещественная функция $c(x,g)$ заданная на $Q_p \times R^1$ удовлетворяет условиям

$$|c(x,g| \leqslant K[1+|g|^r]$$

$$|c(x,g) - c(y,\tilde{g})| \leqslant L\|x-y\|_p + M(g,\tilde{g})|g-\tilde{g}|$$

где K, L – абсолютные положительные константы и $M(g,\tilde{g}) < \infty$ зависит от $max(g,\tilde{g})$, $g,\tilde{g} \in R^{1}$'. Мы будем говорить в этом случае, что выполняется условие **C4.1**.

Для того, чтобы редуцировать решение задачи (5.1) к решению стохастической задачи, рассмотрим стохастическое уравнение

$$d\xi(\tau) = \int\limits_{Q_p} f(\xi(\tau),z)\nu_\alpha(d\tau,dz), \quad \xi(0) = x \in Q_p, \tag{5.4}$$

и функцию $v_s(t,x)$ вида

$$v(t,x) = E_{s,x}[e^{\int_0^t c(\xi(\tau),v(t-\tau,\xi(\tau)))d\tau} v_0(\xi(t))] \tag{5.5}$$

Аналогично тому, как это было сделано в параграфе 2 нам нужно вначале получить ряд априорных оценок.

Рассмотрим для этого вспомогательное соотношение

$$u^g(t,x) = E_{s,x}[e^{\int_0^t c(\xi(\tau),g(t-\tau,\xi(\tau)))d\tau} v_0(\xi(t))] \tag{5.6}$$

и предположим, что вещественная функция $g(t,x)$ заданная на $[0,T] \times Q_p$ удовлетворяет оценкам

$$\sup_{x \in Q_p} |g(t,x)| \leqslant K_g(s), \quad |g(s,x) - g(s,y| \leqslant L_g(s)\|x-y\|_p,$$

где $K_g(s)$, $L_g(s)$ – ограниченные положительные скалярные функции, заданные на $[0,T]$.

Лемма 5.1. *Пусть выполнены условия* **C2.1–C 2.4** *и* **C4.1**. *Тогда процесс* $\eta(t) = e^{\int_0^t c(\xi(\tau), g(t-\tau, \xi(\tau)))d\tau}$, *удовлетворяет оценкам*

$$E[\eta(t)] \leqslant e^{\int\limits_0^t K[1+K_g(t-\tau)]d\tau} \tag{5.7}$$

$$E|\eta_x(t) - \eta_y(t)| \leqslant e^{\int\limits_0^t K[1+K_g(t-\tau)]d\tau}[1$$

$$+ \int\limits_0^t [L + ML_g(t-\tau)]d\tau]\|x-y\|_p. \tag{5.8}$$

Доказательство леммы основано на стандартных оценках с учетом неравенств в условии **C4.1**.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия* **C2.1–C2.4** *и* **C4.1**, *а вещественная функция* $v_0(x), x \in Q_p$ *удовлетворяет оценкам*

$$\sup_{x \in Q_p} |v_0(x)| \leqslant K_0, \quad |v_0(x) - v_0(y)| \leqslant L_0\|x-y\|_p.$$

Тогда функция $u^g(t,x)$ *вида* (5.6) *подчиняется оценкам*

$$\sup_{x \in Q_p} |u^g(t,x)| \leqslant K_0 e^{\int_0^t K[1+K_g^r(t-\tau)]d\tau}$$

$$\|u^g(t,x) - u^g(t,y)| \leqslant [L_0 e^{\int\limits_0^t L[1+M(t-\tau)]d\tau} +$$

$$K_0 e^{\int\limits_0^t [1+K_g^r(t-\tau)]d\tau} \int\limits_0^t [L + ML_g(t-\tau)]d\tau]\|x-y\|_p$$

Доказательство. Доказательство первой оценки вытекает непосредственно из условий леммы. Пусть $\eta_x(t) = e^{\int\limits_0^t c(\xi_x(\tau), g(t-\tau, \xi_x(\tau)))}$. Очевидно, процесс $\eta_x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\eta_x(t) = 1 + \int\limits_0^t c(\xi_x(\tau), g(t-\tau, \xi_x(\tau))\eta_x(\tau)d\tau.$$

При этом

$$|u^g(t,x) - u^g(t,y)| = E|\eta_x(t)v_0(\xi_x(t)) - \eta_y(t)v_0(\xi_y(t))| \leqslant$$

$$E|\eta_x(t)-\eta_y(t)||v_0(\xi_x(t))|+E|\eta_y(t)|v_0(\xi_x(t))-v_0(\xi_y(t))|\leqslant$$

$$[L_0 e^{\int\limits_0^t [L+ML_g(t-\tau)]d\tau}+K_0 e^{\int\limits_0^t K[1+K_g(t-\tau)]d\tau}]\|x-y\|_p.$$

Лемма 5.2. *Пусть выполнены условия леммы* 5.1. *Тогда существуют положительные функции* $\alpha(t),\beta(t)$ *такие, что если*

$$\sup_{x\in Q_p}|g(t,x)|\leqslant\alpha(t)\quad \text{и}\quad |g(t,x)-g(t,y)\leqslant\beta(t)\|x-y\|_p$$

на некотором отрезке $[0,T]$, *то существует отрезок* $[0,T_1]$, $T_1\leqslant T$, *на котором справедлива оценка*

$$\sup_{x\in Q_p}|u^g(t,x)|\leqslant\alpha(t)$$

и

$$|u^g(t,x)-u^g(t,y)\leqslant\beta(t)\|x-y\|_p,\quad \forall t\in[0,T_1].$$

Доказательство. Выберем в качестве функции $\alpha(t)$ решение следующего интегрального уравнения

$$\alpha(t-s)=K_0 e^{\int_s^t [K+K\alpha(t-\tau)]d\tau}. \tag{5.9}$$

Нетрудно проверить, что если $\sup\limits_{x\in Q_p}|g(t,x)|\leqslant\alpha(t)$, то $\sup\limits_{x\in Q_p}|u^g(t,x)|$ $\leqslant\alpha(t)$. Поскольку функция $\alpha(t)$, удовлетворяющая интегральному уравнению (5.7), удовлетворяет также обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\alpha(t-s)}{ds}=-K[1+\alpha(t-s)]\alpha(t-s),\quad \alpha(0)=K_0, \tag{5.10}$$

можно найти ее явный вид. Действительно, нетрудно проверить, что функция

$$\alpha(t)=\frac{K_0Ke^{Kt}}{K+K_0-K_0e^{Kt}} \tag{5.11}$$

удовлетворяет уравнению (5.10). При этом функция $\alpha(t)$ вида (5.11) ограничена на отрезке $[0,T_1]$, где T_1 подчиняется оценке

$$T_1<\frac{1}{K}\ln[1+\frac{K}{K_0}]. \tag{5.12}$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, получим, что в качестве функции $\beta(t)$ можно выбрать решение интегрального уравнения вида

$$\beta(t-s) = \tilde{K}_0 + L_0 e^{\int_s^t [L_1 + M\beta(t-\tau)]d\tau} \tag{5.13}$$

где $\tilde{K}_0 = K_0 e^{\int_0^t [K_0 + \alpha(t-\tau)]d\tau}$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\beta(t) = \frac{(L_1\beta_0)e^{L_1 t}}{L_1 + M\beta_0 - M\beta_0 e^{L_1 t}}, \tag{5.14}$$

где $\beta_0 = \tilde{K}_0 + L_0$.

Нетрудно проверить, что функция $\beta(t)$ вида (5.5) ограничена на интервале

$$T_2 < \frac{1}{L_1}\ln[1 + \frac{L_1}{M\beta_0}]. \tag{5.15}$$

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* **С1.1–С 1.4** *и* **С4.1**. *Тогда существует константа* $T_3 = \min(T_1, T_2)$ *такая, что для всех* $t \in [0, T_3]$ *существует единственное решение системы* (5.4), 5.5). *При этом функция* $v_s(t,x)$ *заданная соотношением* (5.5) *при* $s = 0$ *удовлетворяет уравнению* (5.1) *и представляет собой единственное решение этого уравнения.*

Доказательство. Условия теоремы гарантируют существование единственного решения $\xi(t)$ стохастического уравнения (5.4). Рассмотрим далее интегральное уравнение (5.5) и покажем, что существует единственное решение этого уравнения. Построим для этого систему последвательных приближений вида

$$v_s^0(t,x) = v_0(x), \tag{5.16}$$

$$v_s^{n+1}(t,x) = E_{s,x}[e^{\int\limits_s^t c(\xi(\tau), v_s^n(t-\tau,\xi(\tau)))d\tau} v_0(\xi(t))]. \tag{5.17}$$

Вначале оценим выражение $\kappa^n(s) = \sup_{x\in Q_p} |v_s^n(t,x)|$. Используя рассуждения, аналогичные тем, что были проведены в предыдущем параграфе, докажем справедливость следующих оценок

$$\kappa_s^{n+1}(t) \leqslant K_0 e^{\int\limits_0^t K[1+(\kappa_s^n)^r(t-\tau)]d\tau},$$

из которых вытекает, что для функции $\alpha(t-s)$ вида (5.9) выполняется оценка $\sup\limits_x |v_0^n(t,x)| < \alpha(t)$.

Пусть $\zeta^n(t-s)$ – функция, удовлетворяющая неравенству

$$|v_s^n(t,x) - v_s^n(t,y)| \leqslant \zeta^n(t-s)\|x-y\|_p.$$

Из леммы 5.2 следует, что функция $\beta(t)$ вида (5.14) мажорирует $\zeta^n(t)$ на интервале $[0,T_3]$, т. е. справедлива оценка $\zeta^n(t) \leqslant \beta(t)$ для $t \in [0,T_3]$, где $T_3 < \min[T_1,T_2]$, а T_1 и T_2 подчиняются оценкам (5.12), (5.15).

Наконец, из приведенных выше неравенств следует, что семейство $v_s^n(t,x)$ равномерно относительно $x \in Q_p$ сходится к предельной функции $v_s(t,x)$ на интервале $[0,T_3]$, где $T_3 < \min(T_1,T_2)$.

Для того, чтобы завершить доказательство теоремы 5.1 остается лишь проверить, что функция $v(t,x)$ определяемая соотношением (5.5) удовлетворяет задаче Коши (5.1). Но как только функция $v(t,x)$ построена и доказано, что она удовлетворяет описанным выше условия, мы немедленно попадаем в ситуацию, рассмотренную в параграфе 2 и применение теоремы 2.3 завершает доказательство теоремы 5.1.

Литература

1. S. Albeverio, W. Karwowski, *A random walk on p-adic numbers*, Stoch. Proc. Appl. **53**(1994) 1–22.
2. K. Yasuda *Additive processes on local fields.* J. Math. Sci. Univ Tokyo **3** (1996) 629-654.
3. A. Kochubei, Pseudo-differential equations and stochastics over non-archimedian fields. Marcel Dekker Inc.
4. S. Evans, T. Lidman, *Expectation, Conditional Expectation and Martingales in Local Fields* Electronic Journal of Probability. Vol. 12(2007) Paper 17.
5. R.W.R. Darling, *Convergence of martingales on a Riemannian manifold.* Publ. R. I. M. S., Kyoto University, t. 19, (1983) 753-763.
6. А. Х. Бикулов, И. В. Волович, *p-адическое броуновское движение*, Изв. РАН. Сер. матем., 1997, 61:3, 75Ц90.
7. K. Kamizono, *p-adic Brownian Motion over Q_p.* Презентация докладов международной конференции "p-adicmathphys2007".
8. Ya. Belopolskaya, *On stochastic equations with unbounded coefficients for jump processes*, Lecture Notes in Control and information Theory, **25** (1980), 243–254.
9. Ya. Belopolskaya, *Systems of quasilinear integro-differential equations and Markov processes associated with them*, Probabilistic distributions in infinite dimensional spaces. Nauk. Dumka, (1978) p. 5-21.
10. M. Freidlin *Functional integration and partial differential equations.* Princeton Univ. Press 1985.
11. Я. Белопольская, Ю. Далецкий, *Исследование задачи Коши для систем квазилинейных Иуравнений с помощью марковских процессов* . Изв. ВУЗ Математика. N 12 (1978) 6-17.

12. Ya. I. Belopolskaya, Yu. L. Dalecky, *Stochastic equations and differential geometry*. Kluwer (1990).

Albeverio C., Belopolskaya Ya. Jump processes in Q_p associated with nonlinear pseudo-differential equations.

We consider stochastic differential equations in the space Q_p of $p-$adic numbers which associated with nonlinear pseudo-differential equations and systems of such equations. To this end we construct both scalar and matrix valued multiplicative functionals of Q_p-valued Markov processes and derive the probabilistic representations of the Cauchy problem solutions for nonlinear pseudo-differential equations and systems which extend the Feynman–Kac formula.

Институт прикладной математики
Боннского Университета,

С.-Петербургский государственный
архитектурно-строительный
университет

E-mail: yana@yana.abu.spb.ru

Поступило 6 декабря 2007 г.