Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 350, 2007 г.

О. М. Фоменко

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ДЗЕТА-ФУНКЦИЕЙ ДЕДЕКИНДА

В настоящей работе уточняются известные результаты о средних значениях дзета-функции Дедекинда кубического поля и числе целых идеалов заданной нормы этого поля.

§1

Настоящий параграф носит подготовительный характер. По поводу приведенных ниже результатов см. [1, 2]. Рассмотрим группу S_3. Элементы группы S_3 распадаются на три класса сопряженности C_1 : (1); C_2 : $(1,2,3),(3,2,1)$; C_3 : $(1,2),(2,3),(3.1)$. Таким образом, имеются три простых характера: одномерные ψ_1 (главный характер), ψ_2 (другой характер, определяемый множеством C_2) и двумерный характер ψ_3. S_3 – это группа Галуа неабелева расширения K_6 степени 6 поля $\mathbb{Q}$, причем K_6 является нормальным замыканием кубического поля K_3 над $\mathbb{Q}$, задаваемого полиномом $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ дискриминанта D. При этом поля $K_2=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ и K_3 являются промежуточными расширениями, неподвижными относительного действия подгрупп A_3 и $\{(1),(1,2)\}$ соответственно. Расширения $K_2/\mathbb{Q}$, K_6/K_2 и K_6/K_3 являются абелевыми. Для дзета-функций Дедекинда (определение см. в §2) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\zeta_{K_6}(s) &= L_{\psi_1}L_{\psi_2}L_{\psi_3}^2,\\
\zeta_{K_2}(s) &= L_{\psi_1}L_{\psi_2},\\
\zeta_{K_3}(s) &= L_{\psi_1}L_{\psi_3},\\
\zeta(s) &= L_{\psi_1},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{\psi_2} &= L(s,\psi_2,K_6/\mathbb{Q}) = L(s,\chi,K_2/\mathbb{Q}),\\
L_{\psi_3} &= L(s,\psi_3,K_6/\mathbb{Q}) = L(s,\chi',K_6/K_2).
\end{aligned}$$

Здесь во втором столбце стоят L-функции Артина, а в третьем – L-функции с характерами Гекке (точнее, $\chi(*) = (D/*)$).

Ниже предполагаем:

$$K_2, K_3, K_6 \quad \text{– указанные выше поля и} \quad D < 0, \tag{$*$}$$

$\varepsilon > 0$ означает любое фиксированное число.

Можно дать другое истолкование функции L_{ψ_3} [3]. Пусть $\rho : S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ – неприводимое двумерное представление. Тогда ρ порождает каспидальное представление π группы $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Пусть

$$L(s,\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}.$$

В частности, если ρ нечетно, т.е. $D < 0$, то $L(s,\pi) = L(s,F)$, где F – голоморфная примитивная параболическая форма веса 1 относительно $\Gamma_0(|D|)$,

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n, \quad q = e^{2\pi i z}.$$

Как обычно, $L(s,\pi)$ обозначает L-функцию представления π, $L(s,F)$ – L-функцию Гекке формы F. Таким образом, $L_{\psi_3} = L(s,F)$,

$$\zeta_{K_3}(s) = \zeta(s) L(s,F). \tag{1}$$

Формулу (1) мы будем использовать ниже.

§2

В настоящем параграфе уточняются известные результаты, связанные с поведением дзета-функции Дедекинда кубического поля K_3 в критической полосе. Пусть K_n – поле алгебраических чисел над $\mathbb{Q}$ степени n. Дзета-функция Дедекинда поля K_n задается посредством равенства

$$\zeta_{K_n}(s) = \sum_{\mathfrak{a}}{}' (N\mathfrak{a})^{-s},$$

где суммирование идет по всем ненулевым целым идеалам в K_n. Если r_1 – число вещественных сопряженных поля K_n и $2r_2$ – число мнимых сопряженных, Δ – дискриминант поля K_n, то функциональное уравнение для $\zeta_{K_n}(s)$ может быть записано в виде

$$\xi(s) = \xi(1-s),$$

где

$$\xi(s) = \Gamma^{r_1}\left(\frac{1}{2}s\right)\Gamma^{r_2}(s)B^{-s}\zeta_{K_n}(s)$$

с

$$B = 2^{r_2}\pi^{n/2}(|\Delta|)^{-1/2}.$$

Дзета-функция Дедекинда имеет простой полюс в точке $s = 1$ с вычетом

$$\operatorname*{res}_{s=1}\zeta_{K_n}(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}hR}{w\sqrt{|\Delta|}},$$

где h – число классов поля, R – регулятор поля и w – число корней из единицы в поле. Пусть $s = \sigma + it$. Критической полосой для $\zeta_{K_n}(s)$ является полоса в комплексной плоскости $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, критической прямой – прямая $s = 1/2 + it$.

Как доказали Р. М. Кауфман [4, 5] и Хис-Браун [6],

$$\zeta_{K_n}\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll t^{(n/6)+\varepsilon} \quad (t \geqslant 1). \tag{2}$$

Оценивалось также среднее квадратичное

$$\int_1^T \left|\zeta_{K_n}(\sigma + it)\right|^2 dt, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1 \quad (\text{см. [7, 8]}).$$

Оценка сверху, полученная в [7], в случае поля K_3 и критической прямой приобретает вид

$$\int_1^T \left|\zeta_{K_3}\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt \ll T^{3/2}\log^3 T.$$

Пусть $\sigma(K_n)$ – нижняя грань таких σ, что

$$\int_1^T \left|\zeta_{K_n}(\sigma + it)\right|^2 dt \ll T^{1+\varepsilon}.$$

В [7, 8] было показано, что

$$\sigma(K_n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}.$$

Следующая теорема улучшает перечисленные результаты в случае поля K_3.

Теорема 1. *В случае поля K_3 имеем:*

$$1)\qquad \zeta_{K_3}\Big(\frac{1}{2}+it\Big) \ll t^{\frac{301}{615}+\varepsilon} \quad (r \geqslant 1);$$

$$2)\qquad \int\limits_1^T \Big|\zeta_{K_3}\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\Big|^2\,dt \ll T^{\frac{5}{4}+\varepsilon};$$

$$3)\qquad \sigma(K_3) \leqslant \frac{5}{8}.$$

Доказательство утверждения 1) сразу следует из известных оценок ($t \geqslant 1$)

$$\zeta\Big(\frac{1}{2}+it\Big) \ll t^{\frac{32}{205}+\varepsilon} \quad ([9]),$$

$$L\Big(\frac{1}{2}+it, F\Big) \ll t^{\frac{1}{3}+\varepsilon} \quad ([10]).$$

Переходим к доказательству утверждения 2). Сначала получим оценку

$$\int\limits_1^T \Big|L\Big(\frac{1}{2}+it, F\Big)\Big|^4\,dt \ll T^{\frac{3}{2}+\varepsilon}. \tag{3}$$

Используем следующие известные результаты

$$\int\limits_1^T \Big|L\Big(\frac{1}{2}+it, F\Big)\Big|^2\,dt \sim CT\log T, \tag{4}$$

$$\int\limits_1^T \Big|L\Big(\frac{1}{2}+it, F\Big)\Big|^6\,dt \ll T^{2+\varepsilon}; \tag{5}$$

см. соответственно [11, 12].

По поводу (5) заметим, что первоначально эта оценка была получена Ютилой для голоморфной параболической формы $F(z)$четного веса относительно полной модулярной группы. Перенос (5) на наш случай требует лишь некоторых технических изменений в доказательстве.

В силу (4), (5) имеем

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_1^T \left|L\Big(\frac{1}{2}+it,F\Big)\right|^4 dt \leqslant \\
&\leqslant \bigg\{\int\limits_1^T \left|L\Big(\frac{1}{2}+it,F\Big)\right|^2 dt\bigg\}^{1/2} \bigg\{\int\limits_1^T \left|L\Big(\frac{1}{2}+it,F\Big)\right|^6 dt\bigg\}^{1/2} \ll \\
&\ll (T\log T)^{1/2}(T^{2+\varepsilon})^{1/2} \ll T^{\frac{3}{2}+\varepsilon},
\end{aligned}
$$

и требуемая оценка доказана.

Напомним теперь классический результат Ингама [13]:

$$
\int\limits_1^T \left|\zeta\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\right|^4 dt \sim \frac{T\log^4 T}{2\pi^2}.
$$

Используя (3) и эту асимптотику, получаем

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_1^T \left|\zeta_{K_3}\Big(\frac{1}{2}+it,F\Big)\right|^2 dt = \int\limits_1^T \left|\zeta\Big(\frac{1}{2}+it\Big)L\Big(\frac{1}{2}+it,F\Big)\right|^2 dt \leqslant \\
&\leqslant \bigg\{\int\limits_1^T \left|\zeta\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\right|^4 dt\bigg\}^{1/2} \bigg\{\int\limits_1^T \left|L\Big(\frac{1}{2}+it,F\Big)\right|^4 dt\bigg\}^{1/2} \ll \\
&\ll (T\log^4 T)^{1/2}(T^{3/2+\varepsilon})^{1/2} \ll T^{\frac{5}{4}+\varepsilon},
\end{aligned}
$$

и утверждение 2) доказано.

Для доказательства утверждения 3) используем неравенства

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_1^T \left|\zeta(\sigma+it)\right|^4 dt \ll T \quad \Big(\sigma > \frac{1}{2}\Big), \\
&\int\limits_1^T \left|L(\sigma+it,F)\right|^4 dt \ll T^{1+\varepsilon} \quad \Big(\sigma \geqslant \frac{5}{8}\Big).
\end{aligned}
$$

Последнее неравенство принадлежит Ивичу [14], который доказал его в случае голоморфной параболической формы F четного веса относительно полной модулярной группы; это доказательство переносится на наш случай.

Применяя, как и выше, неравенство Коши, получаем требуемое утверждение.

Для полноты, приведем еще один факт (ср. [8]), являющийся непосредственным следствием общего результаты Мацумото [15, теорема 2].

Предложение 1. *Для* $\frac{1}{2} < \sigma \leqslant 1$

$$\int_1^T \left|\zeta_{K_3}(\sigma + it)\right|^2 dt = c(\sigma)T + O\left(T^{3(1-\sigma)+\varepsilon}\right).$$

Для доказательства представим $\zeta_{K_3}(s)$ в виде (см. §3)

$$\zeta_{K_3}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} M(m) m^{-s}. \tag{6}$$

Рассмотрим разложение

$$\sum_{m \leqslant x}{}' M(m) = Ax + R(x),$$

где $A > 0$ – постоянная и при $\frac{1}{3} < \sigma_1 < 1$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \zeta_{K_3}(s) \frac{x^s}{s}\, ds.$$

Пусть β – нижняя грань чисел b, для которых

$$\int_X^{2X} |R(x)|^2 dx \ll X^{1+2b+\varepsilon}.$$

По теореме 2 [15], для $\max\left\{\beta, \frac{1}{2}\right\} < \sigma \leqslant 1$

$$\int_1^T \left|\zeta_{K_3}(\sigma + it)\right|^2 dt = c(\sigma)T + O\left(T^{2(1-\sigma)/(1-\beta_1)+\varepsilon}\right),$$

где $\beta_1 = \max\{\beta, 0\}$. Доказано [16], что $\beta \leqslant \frac{1}{3}$. Отсюда следует справедливость предложения.

§3

Рассмотрим представление (6), в котором фигурирует функция $M(m)$, количество целых идеалов поля K_3 нормы m (это же обозначение сохраним для любого поля K_n). В настоящем параграфе приводятся новые факты о распределении значений этой функции. Отметим, что функция $M(m)$ мультипликативна.

Из разложения (1) легко выводится формула

$$M(m) = \sum_{d|m} a(d),$$

где $a(d)$ – d-ый коэффициент Фурье формы F. В частности,

$$M(p) = 1 + a(p).$$

Пользуясь результатами работы [17], легко вычислить значения $M(p)$. А именно, имеет место следующее

Предложение 2. *Рассмотрим поле K_3. Тогда $M(p) = 1$, если $(-D/p) = -1$. Если $(-D/p) = 1$, то $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ в K_2; в этом случае $M(p) = 3$, если $\mathfrak{p}$ вполне распадается в K_6, и $M(p) = 0$, если $\mathfrak{p}$ остается простым в K_6.*

Асимптотика для любого поля K_n

$$\sum_{m \leqslant x} M(m) = cx + O\big(x^{1-2/(n+1)}\big)$$

является классическрй (Ландау).

Переходим к задаче о среднем квадратичном значении функции $M(m)$, которую впервые рассмотрели Чандрасекхаран и Нарасимхан в [7]; эта работа была продолжена Чандрасекхараном и Гудом в [8]. В работе [7] был доказан следующий результат: для любого поля K_n справедлива оценка

$$\sum_{m \leqslant x} M(m)^2 \ll x\big(\log x\big)^{n-1}.$$

Если K_n – нормальное поле, то справедлива асимптотика [8] ($l \geqslant 2$ целое)

$$\sum_{m \leqslant x} M(m)^l = xP(\log x) + O\big(x^{1-2n^{-l}+\varepsilon}\big),$$

где P – полином степени $n^{l-1} - 1$.

Получим асимптотику в случае поля K_3 (которое не является нормальным).

Теорема 2. *Для поля K_3 справедливо соотношение*

$$\sum_{m\leqslant x} M(m)^2 = C_1 x\log x + C_2 x + O\big(x^{\frac{9}{11}+\varepsilon}\big),$$

где $C_1>0$ и C_2 – константы.

Для доказательства разложим функцию

$$T(s)=\sum_{m=1}^{\infty} M(m)^2 m^{-s}$$

в эйлеровское произведение:

$$T(s)=\prod_p \big(1+M(p)^2p^{-s}+M(p^2)^2p^{-2s}+M(p^3)^2p^{-3s}+\cdots\big).$$

Сравнивая его с эйлеровским произведением произведения L-функций

$$\zeta(s)L(s,F)^2\,L(s,F\times F),$$

мы на основании формулы

$$M(p)^2=1+2a(p)+a(p)^2$$

имеем ($\sigma>\frac{1}{2}$)

$$T(s)=\zeta(s)L(s,F)^2L(s,F\times F)\cdot B(s), \tag{7}$$

где $L(s,F\times F)$ – L-функция свертки Ранкина–Сельберга формы F с собой [18],

$$B(s)=\prod_p(1+A_2p^{-2s}+A_3p^{-3s}+\cdots).$$

Пользуясь (7), легко показать, что $T(s)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\sigma>\frac{1}{2}$ с единственной особенностью там – полюсом второго порядка в точке $s=1$, поскольку функции $\zeta(s)$ и $L(s,F\times F)$ имеют особенности – у каждой простой полюс в точке $s=1$, а $L(1,F)\neq 0$, $B(1)\neq 0$. Известно, что на полупрямой $t\geqslant 1$

$$\zeta\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\ll t^{\frac{1}{6}+\varepsilon},$$
$$L\Big(\frac{1}{2}+it,F\Big)\ll t^{\frac{1}{3}+\varepsilon},$$
$$L\Big(\frac{1}{2}+it,F\times F\Big)\ll t^{\frac{11}{12}+\varepsilon},\quad [19].$$

Поэтому по свойству выпуклости в полосе $\frac{1}{2}+\varepsilon \leqslant \sigma \leqslant 1+\varepsilon$ при $|t| \to \infty$ справедлива оценка роста

$$T(s) \ll \big(|t|+1\big)^{\frac{7}{2}(1-\sigma)+4\varepsilon}. \tag{8}$$

По хорошо известной формуле обращения для рядов Дирихле, имеем

$$\sum_{m\leqslant x} M(m)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT} T(s)\frac{x^s}{s}\,ds + O\Big(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\Big).$$

Перенося отрезок интегрирования на прямую $\sigma = \frac{1}{2}+\varepsilon$ и производя необходимые вычисления с помощью оценки (8), получаем

$$\sum_{m\leqslant x} M(m)^2 = C_1 x\log x + C_2 x + O\big(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}T^{\frac{7}{4}+\varepsilon} + x^{1+\varepsilon}/T\big).$$

Полагая $T = x^{\frac{2}{11}}$, доказываем теорему 2.

В случае нормального поля K_n после работ [4–6] можно легко улучшить (при $n \geqslant 4$) асимптотику Чандрасекхарана и Гуда. Для простоты ограничимся случаем $l=2$.

Теорема 3. *Для нормального поля K_n справедливо соотношение*

$$\sum_{m\leqslant x} M(m)^2 = xP_n(\log x) + O\big(x^{1-\frac{3}{n^2+6}+\varepsilon}\big),$$

где P_n – полином степени $n-1$.

Пусть $T(s)$ сохраняет прежний смысл:

$$T(s) = \sum_{m=1}^{\infty} M(m)^2 n^{-s}.$$

Рассмотрим разложение(см. [7])

$$T(s) = \zeta_{K_n}^n(s)U(s), \tag{9}$$

где $U(s)$ – ряд Дирихле, абсолютно сходящийся для $\sigma > \frac{1}{2}$. По результату (2), на полупрямой $t \geqslant 1$

$$\zeta_{K_n}^n\Big(\frac{1}{2}+it\Big) \ll t^{\frac{n^2}{6}+\varepsilon}.$$

Исходя из (9), показываем, что $T(s)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\sigma > \frac{1}{2}$ с единственной особенностью там – полюсом порядка n в точке $s = 1$. В полосе $\frac{1}{2} + \varepsilon \leqslant \sigma \leqslant 1 + \varepsilon$ при $|t| \to \infty$ справедлива оценка роста

$$T(s) \ll \big(|t| + 1\big)^{\frac{n^2(1-\sigma)}{3} + \frac{n^2}{2}\varepsilon}. \tag{10}$$

Пользуясь формулой обращения для рядов Дирихле и оценкой (10), доказываем теорему 3.

В случае поля K_3 мы также можем трактовать сумму $\sum\limits_{m \leqslant x} M(m)^3$.

Теорема 4. *Для поля* K_3 *справедливо воотношение*

$$\sum_{m \leqslant x} M(m)^3 = xP_5(\log x) + O\big(x^{73/79+\varepsilon}\big),$$

где P_5 *– полином степени* 4.

Доказательство начинаем с обозначения

$$T^{(3)}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} M(m)^3 m^{-s}.$$

Имеет место формула

$$M(p)^3 = 1 + 3a(p) + 3a(p)^2 + a(p)^3. \tag{11}$$

На основании (11) в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$ справедливо соотношение

$$T^{(3)}(s) = \zeta(s) L(s, F)^3 L(s, F \times F)^3 R^{(3)}(s) B'(s),$$

где (ср. [20, 21])

$$R^{(3)}(s) = L(s, F)^2 L(s, \mathrm{sym}^3 F) \cdot \prod_p K(s);$$

здесь

$$B'(s) = \prod_p (1 + A_2' p^{-2s} + A_3' p^{-3s} + \cdots),$$

$L(s, \mathrm{sym}^3 F)$ – L-функция симметрического куба формы F (см. [22, 23]),

$$K(s) = 1 + N_2 p^{-2s} + \cdots + N_6 p^{-6s}.$$

Следовательно,

$$T^{(3)}(s) = \zeta(s)L(s,F)^5 L(s, F\times F)^3 L(s, \mathrm{sym}^3 F)B''(s), \tag{12}$$

где

$$B''(s) = \prod_p (1 + A_2'' p^{-2s} + A_3'' p^{-3s} + \cdots).$$

Исходя из (12), показываем, что $T^{(3)}(s)$ аналитически продолжает в полуплоскость $\sigma > \frac{1}{2}$ с единственной особенностью там – полюсом пятого порядка в точке $s = 1$. При этом отметим, что хотя в большинстве случаев функция $L(s, \mathrm{sym}^3 F)$ является целой [23], в нашем случае она имеет в точке $s = 1$ полюс первого порядка.

В полосе $\frac{1}{2} + \varepsilon \leqslant \sigma \leqslant 1 + \varepsilon$ при $|t| \to \infty$ справедлива оценка роста

$$T^{(3)}(s) \ll \big(|t| + 1\big)^{\frac{67}{6}(1-\sigma)+12\varepsilon}.$$

Пользуясь формулой обращения для рядов Дирихле и этой оценкой, доказываем теорему 4.

Литература

1. *Алгебраическая теория чисел. Под редакцией Дж. Касселса и А. Фрёлиха,* М., 1969.
2. H. Cohn, *A classical invitation to algebraic numbers and class fields,* New York etc., 1978.
3. P. Deligne, J.-P. Serre, *Formes modulaires de poids 1,* Ann. Sci. École Norm. Sup (4) **7** (1974), 507–530.
4. Р. М. Кауфман, *Об укороченных уравнениях А. Ф. Лаврика,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **76** (1978), 124–158.
5. Р. М. Кауфман, *Оценка L-функций Гекке на половинной прямой,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **91** (1979), 40–51.
6. D. R. Heath-Brown, *The growth rate of the Dedekind zeta-function on the critical line,* Acta Arithm. **49** (1988), 323–339.
7. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *The approximate functional equation for a class of zeta-functions,* Math. Ann **152** (1963), 30–64.
8. K. Chandrasekharan, A. Good, *On the number of integral ideals in Galois extensions,* Monatsh. Math. **95** (1983), 99–109.
9. M. N. Huxley, *Exponential sums and the Riemann zeta-function V,* Proc. London Math. Soc. (3) **90** (2005), 1–41.
10. C. S. Yoganandra, *Transformation formula for exponential sums involving Fourier coefficients modular forms,* Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **103**, No. 1 (1993), 1–25.

11. A. Good, *Approximative Funktionalgleichungen und Mittelwertsätze für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind,* Comment. Math. Helvetici **50** (1975), 327–361.
12. M. Jutila, *Lectures on a method in the theory of exponential sums,* Bombay, 1987.
13. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function,* 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
14. A. Ivić, *On zeta-functions associated with Fourier coefficients of cusp forms,* Proc. of the Amalfi Conf. on Analytic Number Theory (Maiori, 1989), 231–246, Salerno, 1992.
15. K. Matsumoto, *Lifting and mean value theorems for automorphic L-functions,* Proc. London Math. Soc. (3) **90** (2005), 297–320.
16. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *On the mean value of the error term of a class of arithmetical functions,* Acta Math **112** (1964), 41–67.
17. M. Koike, *Higher reciprocity law, modular forms of weight 1 and elliptic curves,* Nagoya Math. J. **98** (1985), 109–115.
18. H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory,* AMS, Providence, Rhode Island, 2004.
19. A. Sankaranarayanan, *Fundamental properties of symmetric square L-functions.* I, Illinois J. Math. **46** (2002), 23–43.
20. P. B. Garrett, *Decomposition of Eisenstein series: Rankin triple product,* Ann. Math. **125** (1987), 209–235.
21. О. М. Фоменко, *Коэффициенты Фурье параболических форм и автоморфные L-функции,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 194–226.
22. C. J. Moreno, F. Shahidi, *The L-function $L_3(s, \pi_\Delta)$ is entire,* Invent. Math. **79** (1985), 247–251.
23. H. M. Kim, F. Shahidi, *Symmetric cube L-functions for GL_2 are entire,* Ann. Math. **150** (1999), 645–662.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 16 октября 2007 г.