Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 350, 2007 г.

Н. В. Проскурин

О НУЛЯХ L-ФУНКЦИИ, АССОЦИИРОВАННОЙ С КУБИЧЕСКОЙ ТЕТА-ФУНКЦИЕЙ

В недавней работе автора [4] была рассмотрена функция $L(\tau;\,\cdot\,)$, ассоциированная посредством преобразования Меллина с кубической тета-функцией Куботы–Паттерсона [1–3]. Для $s \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$L(\tau; s) = \sum_{\nu} \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s}, \tag{1}$$

где коэффициенты $\tau(\nu)$ суть коэффициенты Фурье кубической тета-функции и $\|\cdot\|\colon \mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,) \to \mathbb{Q}$ – норменное отображение, $\|z\| = z\bar{z}$ для всех $z \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$. Суммирование в (1) распространяется на все ν вида $(\sqrt{-3}\,)^{-3}\,\delta$, где δ – целое число поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$, $\delta \neq 0$. Ряд (1) абсолютно сходится в области $\operatorname{Re} s > 1$ и определяет аналитическую функцию, которая продолжается мероморфно на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа, связывающему её значения в точках s и $1-s$. Именно, в [4] было показано, что функция

$$s \mapsto (2\pi)^{-2s}\,\Gamma(s-1/6)\,\Gamma(s+1/6)\,L(\tau; s) \tag{2}$$

инвариантна относительно замены s на $1-s$. Единственной особенностью $L(\tau;\cdot)$ является простой полюс в точке $5/6$. Точки $s = -1/6 - n$ и $s = -5/6 - n$ с целыми $n \geq 0$ являются простыми нулями $L(\tau;\cdot)$, – это так называемые тривиальные нули. Цель настоящей публикации – сообщить результаты наших вычислений нетривиальных нулей. Функция $L(\tau;\cdot)$, напомним, не раскладывается в эйлеровское произведение. Поэтому, мы ожидали, что она имеет нетривиальные нули, лежащие вне критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, и мы надеялись, что в распределении нулей обнаружатся какие-то закономерности. Мы ограничились вычислением нулей в полосе

$$|\operatorname{Im} s| < 444. \tag{3}$$

Эта работа частично финансировалась грантом РФФИ 05-01-00930-а.

Нетривиальные нули расположены на комплексной плоскости симметрично относительно вещественной оси и симметрично относительно критической прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/2$. Поэтому достаточно было вычислить нули, лежащие на полупрямой

$$\mathrm{Re}\, s = 1/2, \qquad \mathrm{Im}\, s \geq 0 \tag{4}$$

и нули, лежащие в квадранте

$$\mathrm{Re}\, s > 1/2, \quad \mathrm{Im}\, s \geq 0. \tag{5}$$

В пределах (3) обнаруживается 891 нуль $z_1, z_2, \ldots, z_{891}$ на полупрямой (4) и 248 нулей $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{248}$, лежащих в квадранте (5).

Нули $\rho_1 = \sigma_1 + \xi_1\sqrt{-1}$, $\rho_2 = \sigma_2 + \xi_2\sqrt{-1}$, $\ldots$, $\rho_{248} = \sigma_{248} + \xi_{248}\sqrt{-1}$ занумерованы в порядке возрастания мнимой части $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{248}$ и приведены на рисунке 2 и в таблице 1. Нули $z_1, z_2, \ldots, z_{891}$ также занумерованы в порядке возрастания мнимой части. Их мнимые части приведены в таблице 2. Погрешность данных в таблицах $\leq 10^{-5}$.

Для вычислений мы использовали систему компьютерной алгебы Maple. Вычисления были проведены на двух компьютерах с процессорами Intel Celeron D.

В пределах (3) все нетривиальные нули простые и находятся в критической полосе, т.е. в полосе, определяемой неравенствами $0 \leq \mathrm{Re}\, s \leq 1$.

Для отрезка $T \subset [0, 444]$ определим $Q(T)$ как число нулей $z_1, z_2, \ldots$ с мнимой частью, принадлежащей T, и определим $R(T)$ как число нулей $\rho_1, \rho_2, \ldots$ с мнимой частью, принадлежащей T. Мы замечаем, что отношение $R(T)/Q(T)$ не проявляет тенденции к стабилизации, но варьируется между 1/4 и 1/3 (если только исключить из рассмотрения очень короткие отрезки T). Мы не находим оснований полагать, что число нетривиальных нулей функции $L(\tau;\cdot)$ лежащих вне критической прямой конечно.

Рассмотрим распределение вещественных частей $\sigma_n = \mathrm{Re}\,\rho_n$ нулей ρ_n, $n = 1, \ldots, 248$, на отрезке $[0.5, 1]$. На рис. 1 изображена гистограмма распределения.

Мы обнаруживаем одну точку $\sigma_{58} = 0.994\ldots$ вблизи 1, существенно отделённую от других точек σ_n, которые все располагаются между $\sigma_{182} = 0.503\ldots$ и $\sigma_{181} = 0.903\ldots$ и распределены хотя и не равномерно, но без больших пробелов. Таким образом, один из нулей нашей функции $L(\tau;\cdot)$, а именно, нуль ρ_{58} равный приблизительно $0.99486 + 147.18892\sqrt{-1}$, изолирован в том смысле, что его вещественная часть существенно отделена от вещественных частей других нулей.

Для каждого чётного $m \geq 2$ выберем на отрезке $[0.5, 1]$ точку c_m так, чтобы число членов последовательности $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$, лежащих на отрезке $[0.5, c_m]$, равнялось числу таковых на отрезке $[c_m, 1]$. В пределах наших вычислений ($m \leq 248$), имеем $0.647 \leq c_m \leq 0.681$ для всех $m \geq 50$, а также $c_m \leq 0.658$ при $m \geq 100$ и $c_m \leq 0.655$ при $m \geq 200$. Основываясь на этом наблюдении, мы можем высказать предположение, что последовательность $c_2, c_4, \ldots$ сходится к некоторой точке вблизи 0.65.

Предполагая, что последовательность $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ бесконечна, мы можем ввести в рассмотрение её спектр, т.е. множество её предельных точек. В частности, было бы интересно знать, есть ли у этой последовательности изолированные предельные точки. Если ω — такая точка, прямую $\mathrm{Re}\, s = \omega$ следовало бы трактовать как полукритическую в том смысле, что в каждой содержащей ее полосе есть бесконечно много нулей функции $L(\tau; \cdot)$. В связи с этим заметим, что нули ρ_3, ρ_{25} и ρ_{196} имеют почти равные вещественные части $\sigma_3 = 0.85379\ldots$, $\sigma_{25} = 0.85379\ldots$ и $\sigma_{196} = 0.85339\ldots$. Какая-то точка ω на отрезке $[0.853, 0.854]$ обладает, возможно, указанным свойством.

В поисках статистических закономерностей в распределении нулей мы можем взять некоторый полином P и рассмотреть средние значения

$$\frac{P(\sigma_1) + P(\sigma_2) + \ldots + P(\sigma_n)}{n}$$

или взвешенные средние значения, например,

$$\frac{P(\sigma_1)\xi_1 + P(\sigma_2)\xi_2 + \ldots + P(\sigma_n)\xi_n}{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}.$$

Наши вычисления показывают, что суммы

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n}{n}$$

концентрируются вблизи точки 2/3, и что суммы

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2}{n}$$

концентрируются вблизи точки 4/9. Суммы

$$\frac{\sigma_1^2\xi_1 + \sigma_2^2\xi_2 + \ldots + \sigma_n^2\xi_n}{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}$$

также концентрируются вблизи точки 4/9.

Эти наблюдения подтверждают наше предположение, что в распределении нетривиальных нулей функции $L(\tau;\cdot)$, лежащих вне критической прямой, могут быть обнаружены определённые статистические закономерности, но они не достаточны для того, чтобы определиться с возможными гипотезами. Возможно и желательно привлечь большие вычислительные ресурсы и провести более обширные вычисления.

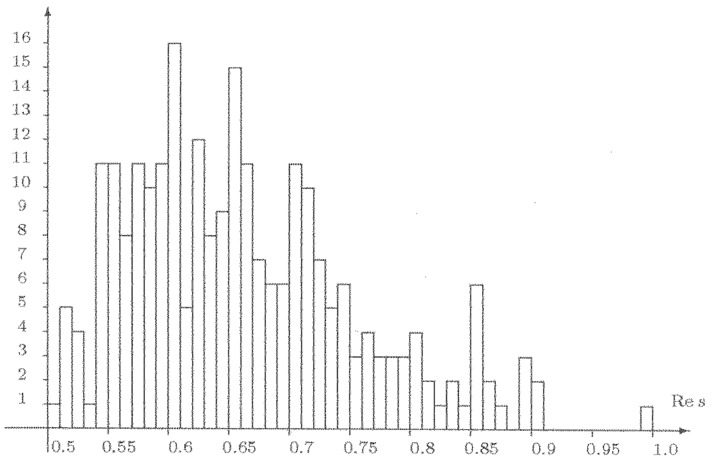

Рис. 1. Гистограмма распределения вещественных частей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{248}$ точек $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{248}$. Отрезок $[0.5, 1]$ разбит на 50 отрезков длины 0.01. Если $[a, b]$ есть один из них, высота столбика над ним равна числу тех n, для которых $a < \sigma_n \leq b$.

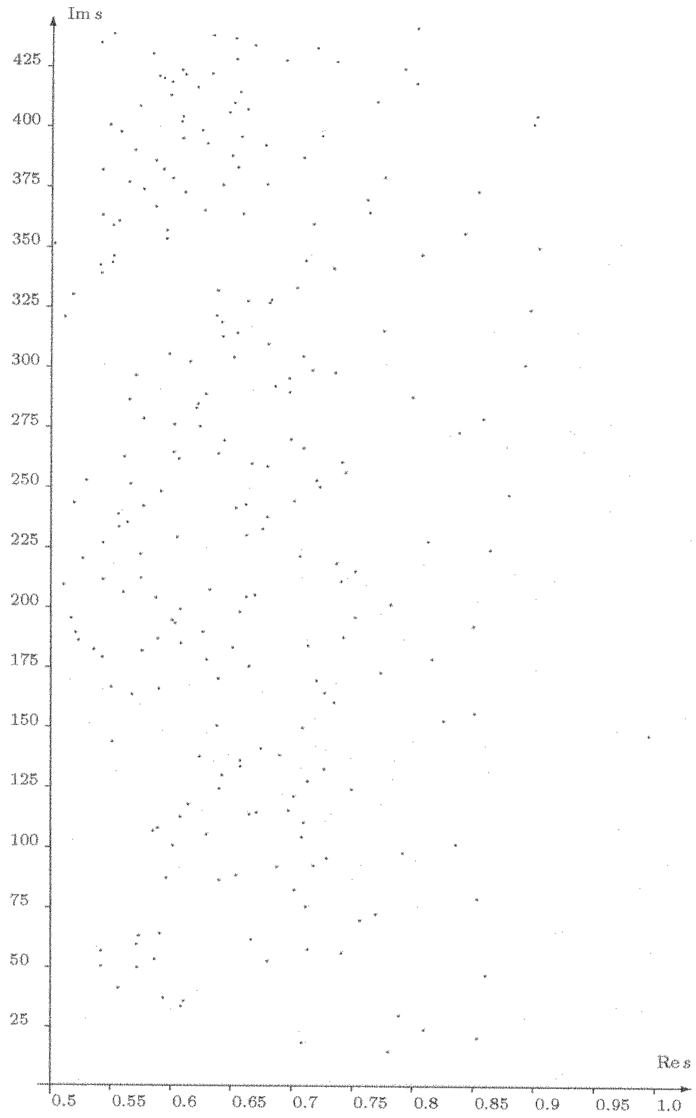

Рис. 2. Точки $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{248}$.

Таблица 1. Нули $\rho_1,\ \rho_2, \dots \rho_{248}$.

1	$0.78060 + 15.36348\sqrt{-1}$	41	$0.60791 + 112.79240\sqrt{-1}$
2	$0.70853 + 18.78938\sqrt{-1}$	42	$0.66505 + 113.88495\sqrt{-1}$
3	$0.85379 + 21.10494\sqrt{-1}$	43	$0.67119 + 114.63805\sqrt{-1}$
4	$0.80969 + 24.34838\sqrt{-1}$	44	$0.69772 + 115.58676\sqrt{-1}$
5	$0.78930 + 30.22591\sqrt{-1}$	45	$0.61468 + 118.06633\sqrt{-1}$
6	$0.60885 + 33.85894\sqrt{-1}$	46	$0.70190 + 121.39032\sqrt{-1}$
7	$0.61061 + 35.94446\sqrt{-1}$	47	$0.74950 + 124.25201\sqrt{-1}$
8	$0.59389 + 37.08914\sqrt{-1}$	48	$0.64038 + 124.67097\sqrt{-1}$
9	$0.55687 + 41.33921\sqrt{-1}$	49	$0.71323 + 127.64098\sqrt{-1}$
10	$0.86018 + 47.12438\sqrt{-1}$	50	$0.64240 + 130.19377\sqrt{-1}$
11	$0.57206 + 49.83201\sqrt{-1}$	51	$0.72692 + 132.90638\sqrt{-1}$
12	$0.54246 + 50.48881\sqrt{-1}$	52	$0.65765 + 133.67382\sqrt{-1}$
13	$0.68026 + 52.73044\sqrt{-1}$	53	$0.65743 + 136.22393\sqrt{-1}$
14	$0.58670 + 53.30304\sqrt{-1}$	54	$0.62369 + 137.91545\sqrt{-1}$
15	$0.74157 + 56.07611\sqrt{-1}$	55	$0.69023 + 138.54730\sqrt{-1}$
16	$0.54257 + 56.59391\sqrt{-1}$	56	$0.67475 + 141.30056\sqrt{-1}$
17	$0.71353 + 57.60136\sqrt{-1}$	57	$0.55138 + 143.87812\sqrt{-1}$
18	$0.57190 + 59.61829\sqrt{-1}$	58	$0.99486 + 147.18892\sqrt{-1}$
19	$0.66681 + 61.64690\sqrt{-1}$	59	$0.70906 + 149.87152\sqrt{-1}$
20	$0.57375 + 63.21329\sqrt{-1}$	60	$0.63850 + 150.69453\sqrt{-1}$
21	$0.59124 + 64.08559\sqrt{-1}$	61	$0.82552 + 153.01071\sqrt{-1}$
22	$0.75666 + 69.94990\sqrt{-1}$	62	$0.85122 + 156.22278\sqrt{-1}$
23	$0.76984 + 72.67357\sqrt{-1}$	63	$0.73485 + 160.48614\sqrt{-1}$
24	$0.71195 + 75.61783\sqrt{-1}$	64	$0.56797 + 163.59230\sqrt{-1}$
25	$0.85379 + 79.00242\sqrt{-1}$	65	$0.72743 + 164.60283\sqrt{-1}$
26	$0.70229 + 82.77611\sqrt{-1}$	66	$0.58999 + 166.17245\sqrt{-1}$
27	$0.64028 + 86.85926\sqrt{-1}$	67	$0.55043 + 166.77577\sqrt{-1}$
28	$0.59646 + 87.58239\sqrt{-1}$	68	$0.72065 + 169.66821\sqrt{-1}$
29	$0.65399 + 88.68071\sqrt{-1}$	69	$0.63943 + 170.29716\sqrt{-1}$
30	$0.68810 + 92.45859\sqrt{-1}$	70	$0.77348 + 173.02565\sqrt{-1}$
31	$0.71830 + 92.85306\sqrt{-1}$	71	$0.66471 + 175.74538\sqrt{-1}$
32	$0.72885 + 95.98840\sqrt{-1}$	72	$0.62963 + 178.32796\sqrt{-1}$
33	$0.79185 + 98.19324\sqrt{-1}$	73	$0.81618 + 178.91537\sqrt{-1}$
34	$0.60185 + 101.06193\sqrt{-1}$	74	$0.54348 + 179.29502\sqrt{-1}$
35	$0.83572 + 101.82425\sqrt{-1}$	75	$0.57610 + 182.01147\sqrt{-1}$
36	$0.70854 + 104.50702\sqrt{-1}$	76	$0.53613 + 182.47956\sqrt{-1}$
37	$0.62936 + 105.50156\sqrt{-1}$	77	$0.65124 + 183.28466\sqrt{-1}$
38	$0.58545 + 107.02841\sqrt{-1}$	78	$0.71332 + 184.46775\sqrt{-1}$
39	$0.58928 + 108.14536\sqrt{-1}$	79	$0.60824 + 185.07763\sqrt{-1}$
40	$0.71003 + 110.77496\sqrt{-1}$	80	$0.52372 + 186.36976\sqrt{-1}$

81	$0.58927 + 186.98648\sqrt{-1}$	123	$0.59166 + 248.09015\sqrt{-1}$
82	$0.74259 + 187.71992\sqrt{-1}$	124	$0.72331 + 250.24796\sqrt{-1}$
83	$0.52104 + 189.46131\sqrt{-1}$	125	$0.56639 + 251.30389\sqrt{-1}$
84	$0.62645 + 189.99999\sqrt{-1}$	126	$0.52970 + 252.63355\sqrt{-1}$
85	$0.85024 + 192.55701\sqrt{-1}$	127	$0.72004 + 253.12485\sqrt{-1}$
86	$0.60352 + 193.38615\sqrt{-1}$	128	$0.74450 + 256.27621\sqrt{-1}$
87	$0.60122 + 194.80692\sqrt{-1}$	129	$0.67947 + 258.69867\sqrt{-1}$
88	$0.51745 + 195.39035\sqrt{-1}$	130	$0.66680 + 259.95086\sqrt{-1}$
89	$0.75234 + 196.10009\sqrt{-1}$	131	$0.74139 + 260.82346\sqrt{-1}$
90	$0.65688 + 198.35719\sqrt{-1}$	132	$0.60626 + 261.87808\sqrt{-1}$
91	$0.60776 + 199.30511\sqrt{-1}$	133	$0.56119 + 262.75503\sqrt{-1}$
92	$0.78165 + 201.72257\sqrt{-1}$	134	$0.63914 + 264.04599\sqrt{-1}$
93	$0.58746 + 204.08149\sqrt{-1}$	135	$0.60195 + 264.49694\sqrt{-1}$
94	$0.66242 + 204.62164\sqrt{-1}$	136	$0.70946 + 266.51838\sqrt{-1}$
95	$0.66944 + 205.40297\sqrt{-1}$	137	$0.64410 + 269.60711\sqrt{-1}$
96	$0.56083 + 206.14879\sqrt{-1}$	138	$0.69895 + 270.00495\sqrt{-1}$
97	$0.63190 + 207.39732\sqrt{-1}$	139	$0.83829 + 273.15686\sqrt{-1}$
98	$0.51132 + 209.50604\sqrt{-1}$	140	$0.62393 + 275.45215\sqrt{-1}$
99	$0.74067 + 211.00398\sqrt{-1}$	141	$0.60279 + 276.05348\sqrt{-1}$
100	$0.54378 + 211.48896\sqrt{-1}$	142	$0.57725 + 278.59311\sqrt{-1}$
101	$0.57496 + 212.18747\sqrt{-1}$	143	$0.85823 + 279.06781\sqrt{-1}$
102	$0.75251 + 215.26395\sqrt{-1}$	144	$0.62095 + 283.04707\sqrt{-1}$
103	$0.73716 + 218.57320\sqrt{-1}$	145	$0.62232 + 284.79733\sqrt{-1}$
104	$0.52724 + 220.13646\sqrt{-1}$	146	$0.56540 + 286.59885\sqrt{-1}$
105	$0.70667 + 221.49293\sqrt{-1}$	147	$0.79968 + 287.94479\sqrt{-1}$
106	$0.57481 + 222.08277\sqrt{-1}$	148	$0.62849 + 288.85945\sqrt{-1}$
107	$0.86378 + 224.31146\sqrt{-1}$	149	$0.69804 + 289.97126\sqrt{-1}$
108	$0.54388 + 226.73123\sqrt{-1}$	150	$0.68612 + 292.30748\sqrt{-1}$
109	$0.81261 + 227.80024\sqrt{-1}$	151	$0.69755 + 295.66848\sqrt{-1}$
110	$0.60506 + 229.08959\sqrt{-1}$	152	$0.57079 + 296.52699\sqrt{-1}$
111	$0.66243 + 230.19250\sqrt{-1}$	153	$0.73571 + 298.04812\sqrt{-1}$
112	$0.67578 + 232.84558\sqrt{-1}$	154	$0.71703 + 299.03346\sqrt{-1}$
113	$0.55670 + 233.56120\sqrt{-1}$	155	$0.89213 + 301.52175\sqrt{-1}$
114	$0.56418 + 235.31761\sqrt{-1}$	156	$0.61575 + 302.45370\sqrt{-1}$
115	$0.67946 + 237.75585\sqrt{-1}$	157	$0.65171 + 304.28854\sqrt{-1}$
116	$0.55628 + 238.89097\sqrt{-1}$	158	$0.70905 + 304.89313\sqrt{-1}$
117	$0.65352 + 241.42279\sqrt{-1}$	159	$0.59834 + 305.55656\sqrt{-1}$
118	$0.57728 + 242.21428\sqrt{-1}$	160	$0.68018 + 309.86962\sqrt{-1}$
119	$0.66198 + 242.81680\sqrt{-1}$	161	$0.64249 + 313.07415\sqrt{-1}$
120	$0.51961 + 243.43243\sqrt{-1}$	162	$0.65458 + 314.50945\sqrt{-1}$
121	$0.70171 + 244.46436\sqrt{-1}$	163	$0.77566 + 315.53275\sqrt{-1}$
122	$0.87916 + 247.21857\sqrt{-1}$	164	$0.64158 + 318.89989\sqrt{-1}$

165	$0.51153 + 321.00825\sqrt{-1}$	207	$0.70920 + 387.09865\sqrt{-1}$
166	$0.63745 + 321.68306\sqrt{-1}$	208	$0.64988 + 387.88386\sqrt{-1}$
167	$0.89665 + 324.46488\sqrt{-1}$	209	$0.56925 + 390.08586\sqrt{-1}$
168	$0.68115 + 327.00505\sqrt{-1}$	210	$0.67723 + 392.34723\sqrt{-1}$
169	$0.66322 + 327.72853\sqrt{-1}$	211	$0.62933 + 393.03056\sqrt{-1}$
170	$0.68273 + 328.19305\sqrt{-1}$	212	$0.60870 + 395.06538\sqrt{-1}$
171	$0.51807 + 330.07547\sqrt{-1}$	213	$0.65741 + 395.77587\sqrt{-1}$
172	$0.63814 + 331.88392\sqrt{-1}$	214	$0.72390 + 396.25529\sqrt{-1}$
173	$0.70375 + 333.14928\sqrt{-1}$	215	$0.55791 + 397.68642\sqrt{-1}$
174	$0.54212 + 339.08197\sqrt{-1}$	216	$0.62491 + 398.54368\sqrt{-1}$
175	$0.73419 + 341.51837\sqrt{-1}$	217	$0.54869 + 400.77346\sqrt{-1}$
176	$0.54107 + 342.42959\sqrt{-1}$	218	$0.89904 + 401.62767\sqrt{-1}$
177	$0.55126 + 343.62414\sqrt{-1}$	219	$0.60777 + 402.14473\sqrt{-1}$
178	$0.71084 + 344.61065\sqrt{-1}$	220	$0.60894 + 404.19669\sqrt{-1}$
179	$0.55224 + 346.22150\sqrt{-1}$	221	$0.90139 + 405.08875\sqrt{-1}$
180	$0.80695 + 347.30155\sqrt{-1}$	222	$0.64728 + 405.98063\sqrt{-1}$
181	$0.90332 + 350.41108\sqrt{-1}$	223	$0.66227 + 407.43396\sqrt{-1}$
182	$0.50313 + 351.37717\sqrt{-1}$	224	$0.57328 + 408.50749\sqrt{-1}$
183	$0.59590 + 353.54949\sqrt{-1}$	225	$0.65129 + 410.10746\sqrt{-1}$
184	$0.84230 + 356.15610\sqrt{-1}$	226	$0.76944 + 410.84610\sqrt{-1}$
185	$0.59581 + 356.84777\sqrt{-1}$	227	$0.59859 + 413.30232\sqrt{-1}$
186	$0.55160 + 358.65689\sqrt{-1}$	228	$0.65630 + 414.69065\sqrt{-1}$
187	$0.71731 + 359.73832\sqrt{-1}$	229	$0.62109 + 416.45515\sqrt{-1}$
188	$0.55631 + 360.73986\sqrt{-1}$	230	$0.80187 + 418.53681\sqrt{-1}$
189	$0.54303 + 363.03591\sqrt{-1}$	231	$0.59956 + 418.87064\sqrt{-1}$
190	$0.65893 + 363.73040\sqrt{-1}$	232	$0.59308 + 420.07778\sqrt{-1}$
191	$0.76330 + 364.54291\sqrt{-1}$	233	$0.58916 + 421.14678\sqrt{-1}$
192	$0.62744 + 365.18415\sqrt{-1}$	234	$0.61072 + 421.92223\sqrt{-1}$
193	$0.58682 + 366.62765\sqrt{-1}$	235	$0.63289 + 422.38144\sqrt{-1}$
194	$0.76180 + 369.76491\sqrt{-1}$	236	$0.60775 + 423.84532\sqrt{-1}$
195	$0.61091 + 372.71888\sqrt{-1}$	237	$0.79188 + 424.59163\sqrt{-1}$
196	$0.85339 + 373.32834\sqrt{-1}$	238	$0.73599 + 427.30750\sqrt{-1}$
197	$0.57667 + 373.87882\sqrt{-1}$	239	$0.69418 + 427.94874\sqrt{-1}$
198	$0.64191 + 375.74458\sqrt{-1}$	240	$0.65308 + 428.43702\sqrt{-1}$
199	$0.67870 + 376.02178\sqrt{-1}$	241	$0.58359 + 430.46767\sqrt{-1}$
200	$0.56473 + 376.87952\sqrt{-1}$	242	$0.71990 + 433.30288\sqrt{-1}$
201	$0.60080 + 378.59017\sqrt{-1}$	243	$0.66829 + 434.15003\sqrt{-1}$
202	$0.77597 + 379.15976\sqrt{-1}$	244	$0.54077 + 435.03785\sqrt{-1}$
203	$0.54264 + 381.79159\sqrt{-1}$	245	$0.65229 + 437.00335\sqrt{-1}$
204	$0.59298 + 382.06300\sqrt{-1}$	246	$0.63375 + 438.14663\sqrt{-1}$
205	$0.65475 + 383.18987\sqrt{-1}$	247	$0.55138 + 438.75616\sqrt{-1}$
206	$0.58649 + 385.76255\sqrt{-1}$	248	$0.80271 + 441.61900\sqrt{-1}$

Таблица 2. Мнимые части нулей $z_1, z_2, \ldots, z_{891}$.

1	1.896686	41	33.99639	81	62.52322	121	83.34524		
2	4.221423	42	34.93195	82	64.53527	122	83.75416		
3	4.918995	43	35.48334	83	65.13245	123	84.12708		
4	6.481932	44	37.83358	84	65.41429	124	84.62147		
5	7.118346	45	38.10505	85	65.82762	125	84.76342		
6	7.791130	46	38.61102	86	66.31737	126	84.94987		
7	8.610583	47	38.89076	87	66.36389	127	85.39309		
8	9.718240	48	39.45412	88	66.97560	128	85.88995		
9	10.56818	49	39.88002	89	67.29234	129	86.39752		
10	10.93011	50	40.39776	90	67.58513	130	88.22634		
11	11.59125	51	41.05427	91	68.02808	131	89.15787		
12	12.52550	52	42.38680	92	68.67186	132	89.50510		
13	12.80511	53	42.72952	93	69.12382	133	89.98010		
14	13.86817	54	42.98793	94	69.36519	134	90.22093		
15	14.33963	55	43.60235	95	70.21523	135	90.59604		
16	16.28947	56	43.88718	96	70.67143	136	91.05830		
17	16.57613	57	44.25092	97	71.24705	137	91.48851		
18	17.68477	58	44.60856	98	71.65541	138	91.84226		
19	17.86650	59	45.10562	99	71.99973	139	93.48901		
20	20.03050	60	45.74855	100	73.09276	140	94.03564		
21	20.22703	61	46.23885	101	73.48028	141	94.35989		
22	21.73164	62	46.75303	102	73.90174	142	94.58128		
23	22.37410	63	47.75862	103	74.24856	143	94.99175		
24	23.11055	64	48.07042	104	74.86665	144	95.47447		
25	23.79423	65	48.64980	105	75.23556	145	96.21430		
26	24.93919	66	49.14685	106	75.94773	146	96.80995		
27	25.47228	67	51.05616	107	76.46988	147	97.18969		
28	26.28962	68	51.81894	108	76.97224	148	97.64293		
29	26.63828	69	52.12347	109	77.29612	149	98.41882		
30	27.30805	70	54.08819	110	77.83478	150	98.85184		
31	27.63785	71	54.47033	111	78.12499	151	99.22232		
32	27.94886	72	55.07006	112	78.78036	152	99.57867		
33	28.60872	73	55.49479	113	79.54596	153	99.98213		
34	29.35570	74	58.26082	114	79.66063	154	100.46894		
35	29.81258	75	58.58206	115	80.34613	155	101.73814		
36	31.04646	76	59.08980	116	80.81655	156	102.34982		
37	31.46187	77	60.24443	117	81.33614	157	102.68554		
38	32.22102	78	60.70031	118	81.47828	158	103.38738		
39	32.70559	79	61.00857	119	81.59830	159	103.55162		
40	33.02131	80	62.12083	120	82.25762	160	103.98714		

161	104.86799	201	126.94888	241	146.21108	281	163.09913
162	106.04485	202	127.77447	242	146.78318	282	164.16585
163	106.46013	203	128.38247	243	147.42617	283	165.03972
164	107.23625	204	128.74455	244	147.82195	284	165.42345
165	107.83913	205	128.96964	245	148.16809	285	165.65453
166	109.05086	206	129.50100	246	148.56965	286	167.35291
167	109.17230	207	129.80431	247	148.91910	287	167.41608
168	109.48820	208	130.70308	248	149.26193	288	167.85501
169	109.92017	209	130.86566	249	150.08905	289	168.23970
170	110.38399	210	131.27886	250	151.14626	290	168.61036
171	111.21132	211	131.71073	251	151.48444	291	169.02394
172	111.67273	212	132.11369	252	151.84440	292	169.36247
173	111.77335	213	132.57243	253	152.17352	293	170.55535
174	112.32659	214	133.95820	254	152.61141	294	170.96285
175	113.33445	215	134.24102	255	153.32627	295	171.37040
176	115.25566	216	134.65901	256	153.63468	296	171.78146
177	115.89448	217	134.96233	257	153.99810	297	172.10219
178	116.47482	218	135.49971	258	154.51009	298	172.62406
179	116.71471	219	135.75046	259	154.76961	299	172.82995
180	117.14889	220	136.74020	260	155.25460	300	173.50969
181	117.50906	221	137.03957	261	155.43930	301	173.95769
182	118.58436	222	137.53521	262	155.84051	302	174.35478
183	118.88739	223	138.76648	263	156.56327	303	174.77108
184	119.04047	224	139.55788	264	156.94091	304	174.78984
185	119.54354	225	139.73444	265	157.35458	305	175.17330
186	119.90569	226	139.94242	266	157.61211	306	176.08759
187	120.29004	227	140.27853	267	157.93243	307	176.46212
188	120.64790	228	140.78225	268	158.36630	308	176.51290
189	120.99890	229	141.61141	269	158.69368	309	177.04646
190	121.64445	230	141.87616	270	159.03826	310	177.49324
191	122.14812	231	142.41181	271	159.30444	311	177.79088
192	122.69689	232	142.82980	272	159.59214	312	179.94915
193	122.97358	233	142.96980	273	159.77352	313	180.21417
194	123.36488	234	143.37278	274	160.85185	314	180.47017
195	123.85551	235	144.10923	275	161.24140	315	180.82880
196	125.16268	236	144.59064	276	161.61237	316	181.30594
197	125.57464	237	144.79456	277	161.67558	317	181.67258
198	126.09216	238	145.45857	278	162.19779	318	183.77511
199	126.37888	239	145.68215	279	162.35808	319	183.89431
200	126.80829	240	145.99448	280	162.87663	320	185.56960

321	185.80956	361	210.01577	401	228.65887	441	248.79859
322	187.97664	362	210.22468	402	229.74093	442	249.20427
323	188.30807	363	210.50806	403	229.88585	443	249.55678
324	188.64838	364	212.73932	404	230.82728	444	249.89016
325	189.00873	365	212.96910	405	230.92986	445	250.49678
326	190.54449	366	213.20443	406	231.33148	446	250.91555
327	190.86639	367	213.53597	407	231.64717	447	251.68613
328	191.22075	368	213.90287	408	231.85652	448	252.16177
329	191.56077	369	214.28754	409	232.17563	449	253.42890
330	191.89048	370	214.58998	410	233.38912	450	253.76344
331	192.13459	371	214.71802	411	233.71239	451	254.10913
332	192.99846	372	215.65985	412	234.21393	452	254.53073
333	193.91377	373	215.88245	413	234.61230	453	254.69144
334	194.23469	374	216.27850	414	234.98119	454	255.07928
335	196.04875	375	216.53954	415	235.85002	455	255.40754
336	196.77485	376	216.89542	416	236.18504	456	255.79235
337	197.12316	377	217.05583	417	236.52110	457	256.16379
338	197.31399	378	217.64466	418	236.79701	458	256.59131
339	197.60573	379	217.97067	419	236.85538	459	256.94749
340	198.44957	380	218.07850	420	237.39813	460	257.27561
341	198.57355	381	219.09877	421	238.10118	461	257.67725
342	199.84394	382	219.18396	422	238.61389	462	258.01724
343	200.01109	383	219.55267	423	239.30361	463	258.36271
344	200.52450	384	220.54104	424	239.60428	464	259.13629
345	200.93828	385	220.73525	425	239.86253	465	259.46092
346	201.27633	386	221.35557	426	240.43168	466	260.17788
347	201.43258	387	222.55184	427	240.69673	467	260.88328
348	202.20736	388	223.00969	428	240.96883	468	261.65578
349	202.46132	389	223.38405	429	241.35500	469	262.29903
350	202.74098	390	223.61384	430	243.73270	470	263.29832
351	203.08916	391	224.10354	431	244.26982	471	263.53469
352	203.55674	392	224.57869	432	244.96128	472	265.09734
353	205.01455	393	224.92105	433	245.24542	473	265.16014
354	206.57446	394	225.17591	434	245.68074	474	265.63355
355	206.86718	395	225.62446	435	246.00373	475	265.70332
356	207.73136	396	225.93235	436	246.25911	476	266.31199
357	207.86430	397	226.27082	437	246.60489	477	266.86532
358	208.42266	398	227.34138	438	246.97356	478	267.45944
359	208.61620	399	227.55447	439	247.31510	479	267.64144
360	209.07801	400	228.26101	440	248.53324	480	267.78486

481	268.13995	521	284.39128	561	301.92813	601	318.04212
482	268.48488	522	285.11164	562	302.90035	602	318.49249
483	268.70915	523	285.50852	563	303.13667	603	318.51489
484	269.30644	524	285.86958	564	303.56678	604	319.42954
485	270.27803	525	286.09492	565	303.99665	605	319.54663
486	270.71135	526	286.91296	566	305.29633	606	319.89230
487	270.98117	527	287.20638	567	306.00822	607	320.07036
488	271.41147	528	287.70592	568	306.36976	608	320.68649
489	271.63345	529	288.24624	569	306.80071	609	321.32095
490	272.08000	530	289.15151	570	306.88943	610	322.12146
491	272.23416	531	289.61419	571	307.37204	611	322.50152
492	272.60839	532	290.39911	572	307.50298	612	322.77806
493	273.15067	533	290.66663	573	307.68871	613	323.01709
494	273.66026	534	290.99023	574	308.03311	614	323.42017
495	273.89691	535	291.20434	575	308.29613	615	323.59044
496	274.27297	536	291.67894	576	308.67964	616	323.99007
497	274.42378	537	292.06004	577	308.78436	617	324.53905
498	274.94408	538	292.61109	578	309.31540	618	324.79426
499	275.64639	539	292.91468	579	309.73401	619	325.29079
500	276.46490	540	293.19310	580	310.45443	620	325.34705
501	276.91244	541	293.44174	581	310.59939	621	325.73130
502	277.18540	542	293.71441	582	310.90696	622	326.19063
503	277.42328	543	294.08029	583	311.18182	623	326.53557
504	277.83443	544	294.44754	584	311.37713	624	327.08083
505	278.05130	545	294.80951	585	311.72933	625	328.62045
506	279.24602	546	295.03383	586	312.03965	626	328.85765
507	279.61666	547	295.46964	587	312.19668	627	329.09534
508	280.04788	548	296.20839	588	312.59389	628	329.55028
509	280.34007	549	296.74618	589	313.51509	629	330.22392
510	280.56126	550	297.20601	590	313.84508	630	330.54023
511	280.96543	551	297.66253	591	313.85622	631	330.84985
512	281.36026	552	298.42498	592	314.91785	632	331.14910
513	281.59720	553	298.67844	593	315.25487	633	331.33156
514	281.77004	554	299.57933	594	315.78184	634	332.40503
515	282.18465	555	299.79802	595	316.20153	635	332.60439
516	282.30947	556	300.11268	596	316.57659	636	333.27811
517	282.63874	557	300.42526	597	316.88911	637	333.57321
518	283.49577	558	300.71488	598	317.12151	638	333.96383
519	283.68171	559	301.10295	599	317.46650	639	334.23107
520	284.21522	560	301.80943	600	317.66489	640	334.44359

641	334.76172	681	349.89281	721	368.03309	761	386.01517
642	335.02890	682	350.38262	722	368.40471	762	386.37749
643	335.29285	683	350.83798	723	368.55267	763	386.66921
644	335.85831	684	351.69564	724	368.87970	764	387.42113
645	335.92978	685	352.02533	725	369.28417	765	388.25543
646	336.22955	686	352.43734	726	369.56149	766	388.49316
647	336.51538	687	352.53013	727	370.24995	767	388.77601
648	336.82669	688	353.04207	728	370.42142	768	389.07615
649	337.01695	689	353.12450	729	370.75094	769	389.30860
650	337.39674	690	353.98197	730	370.88399	770	389.66819
651	337.60001	691	354.09909	731	371.21647	771	390.44796
652	337.77074	692	354.57642	732	371.67761	772	390.72209
653	338.22110	693	354.77259	733	371.97090	773	390.89164
654	338.40052	694	355.10128	734	372.15102	774	391.33806
655	338.62128	695	355.52866	735	373.02099	775	391.53119
656	339.51904	696	355.81461	736	374.38072	776	392.00023
657	339.82422	697	356.09564	737	374.50160	777	392.28458
658	340.10583	698	357.24365	738	374.92001	778	393.34019
659	340.54277	699	357.52669	739	375.17985	779	393.71137
660	340.65338	700	357.85865	740	376.56468	780	393.80297
661	340.92594	701	358.09842	741	377.26499	781	394.16178
662	341.62491	702	358.98655	742	377.79958	782	394.58536
663	341.92563	703	359.20599	743	378.13906	783	395.46964
664	342.91397	704	359.88595	744	378.18539	784	396.53635
665	343.17958	705	360.35552	745	379.33057	785	396.82306
666	343.95008	706	361.14811	746	379.76119	786	397.28404
667	344.39179	707	361.46757	747	380.14381	787	397.99583
668	345.12543	708	361.75713	748	380.20690	788	398.89206
669	345.23024	709	361.81902	749	380.60227	789	399.11028
670	345.74540	710	362.26335	750	380.93476	790	399.40204
671	346.56960	711	362.45024	751	381.29344	791	399.56655
672	346.81761	712	363.42327	752	382.56363	792	399.82505
673	347.19974	713	364.39464	753	382.79649	793	400.13540
674	347.85678	714	365.48149	754	383.63448	794	401.03091
675	348.09826	715	365.73871	755	383.83385	795	401.47178
676	348.34420	716	366.17820	756	384.27150	796	402.74378
677	348.67419	717	366.90165	757	384.43933	797	402.91519
678	349.06835	718	367.07878	758	384.83822	798	403.07061
679	349.29157	719	367.48322	759	384.89689	799	403.38202
680	349.69632	720	367.75678	760	385.19910	800	403.80228

801	404.65538	824	414.99331	847	425.97526	870	436.03337
802	405.21744	825	415.31519	848	426.43263	871	436.28936
803	405.43400	826	415.52280	849	426.70151	872	436.35667
804	406.43316	827	415.87764	850	427.02959	873	437.32284
805	406.71370	828	416.08365	851	428.00250	874	437.44784
806	407.13481	829	416.89528	852	429.13017	875	437.81847
807	407.52742	830	417.26449	853	429.15000	876	439.09892
808	408.10904	831	417.54532	854	429.64338	877	439.49800
809	408.83545	832	417.82729	855	429.93603	878	439.66534
810	409.11407	833	418.08639	856	430.08839	879	439.93761
811	409.35897	834	419.25729	857	430.91767	880	440.24110
812	409.80303	835	419.56029	858	431.11550	881	440.51684
813	410.45800	836	420.35835	859	431.33213	882	440.80898
814	411.27169	837	420.69043	860	431.70456	883	441.04026
815	411.51375	838	421.58617	861	431.99888	884	441.61738
816	411.78398	839	422.65612	862	432.24892	885	441.90270
817	412.05953	840	423.26410	863	432.45615	886	442.23482
818	412.58448	841	423.54141	864	432.87244	887	442.61418
819	412.63153	842	424.24060	865	433.16790	888	442.93757
820	412.82331	843	424.83909	866	433.89370	889	443.12005
821	413.65451	844	425.14519	867	434.50053	890	443.45590
822	414.13333	845	425.45884	868	435.57248	891	443.64566
823	414.35198	846	425.73471	869	435.66335		

Литература

1. T. Kubota, *On automorphic functions and reciprocity law in a number theory*, Lect. Math. Kyoto Univ. **2** (1969).
2. S. J. Patterson, *A cubic analogue of the theta series* I, II, J. Reine Angew. Math. **296** (1977), 125–161, 217–220.
3. N. V. Proskurin, *Cubic metaplectic forms and theta functions*, Lect. Notes Math. 1677 (1998).
4. Н. В. Проскурин, *О рядах Дирихле, ассоциированных с кубической тета-функцией*, Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 212–232.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: np@pdmi.ras.ru

Поступило 25 сентября 2007 г.