Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 350, 2007 г.

Г. В. Кузьмина

О СИММЕТРИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ В ЗАДАЧАХ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ

Большое внимание в современных исследованиях уделялось задачам об экстремальном разбиении, в которых отмеченные точки на поверхности изменяются, подчиняясь тому или иному условию. К таким задачам сводятся многие экстремальные вопросы в классах однолистных отображений. Известно большое число как классических, так и современных результатов, устанавливающих, что экстремальная конфигурация в задаче об экстремальном разбиении обладает соответствующей симметрией (см. обзорные статьи [1, 2]). К таким результатам относятся задачи о максимуме взвешенной суммы

$$\sum_i \alpha_i^2 M(D_i)$$

приведенных модулей односвязных областей относительно их внутренних точек. Общие результаты в этих задачах в случае свободного расположения отмеченных точек на окружности были получены В. Н. Дубининым [3] при помощи преложенного им метода разделяющего преобразования конденсаторов и областей. Подходы к задачам об экстремальном разбиении, основанные на соображениях метода экстремальной метрики, разработаны в работах Е. Г. Емельянова, А. Ю. Солынина и автора, опубликованных в данной серии "Записок научных семинаров ПОМИ".

Задачи об экстремальном разбиении, в которых рассматриваются функционалы вида

$$-\sum_j h_j^2 M(P_j) + \sum_i \alpha_i^2 M(D_i) \tag{1}$$

где $M(D_i)$ – упомянутые выше приведенные модули или же модули двусвязных областей, $M(P_j)$ – приведенные модули двуугольников относительно их вершин, α_i и h_j – вещественные параметры, исследованы сравнительно мало.

В настоящей работе на простых примерах исследуется вопрос существования экстремальных конфигураций задач такого рода, которые обладают соответствующей симметрией.

§1. Вспомогательные результаты

1. В дальнейшем используются следующие обозначения. Через $R(D,a)$ обозначаем конформный радиус односвязной области D относительно точки $a \in D$, через $M(D,a)$ – приведенный модуль области D относительно точки $a \in D$: $M(D,a) = \frac{1}{2\pi}\log R(D,a)$, если $a \neq \infty$, $M(D,\infty) = -\frac{1}{2\pi}\log R(D,\infty)$.

Двуугольником называется односвязная область D с двумя отмеченными граничными элементами с носителями (в различных или совпадающих) точках b_1 и b_2. Будем считать, что область D удолетворяет следующему условию: для отображения $w = g(z)$ области D на полосу $h_1 < \operatorname{Im} w < h_2$, нормированного условиями $\operatorname{Re} g(b_1) = -\infty$, $\operatorname{Re} g(b_2) = +\infty$, в окрестности точки b_k, $k = 1,2$, имеем равенство

$$g(z) = A_k\{(-1)^{k-1}\log(z-b_k) + g(z)\},$$

где $g(z)$ – регулярная функция.

Пусть ϵ_k, $k = 1,2$, – достаточно малые положительные числа. Пусть $C(b_k,\epsilon_k) = \{z : |z-b_k| = \epsilon_k\}$, $S_k(\varepsilon_k)$ – пересечение области D с окружностью $C(b_k,\varepsilon_k)$, $D(\epsilon_1,\epsilon_2)$ – четырехугольник в D с противоположными сторонами $S_k(\epsilon_k)$, $k = 1,2$. Для вариации $\varphi_k(\epsilon_k)$ аргумента $\arg(z-b_k)$ на дуге $S_k(\epsilon_k)$, проходимой в направлении возрастания $\arg(z-b_k)$, имеем равенство

$$\varphi_k(\epsilon_k) = \varphi_k + O(\epsilon_k),$$

где φ_k – внутренний угол области D в точке b_k.

Пусть $M(D(\epsilon_1,\epsilon_2))$ – модуль области $D(\epsilon_1,\epsilon_2)$ относительно семейства дуг в этом четырехугольнике, разделяющих стороны $S_1(\epsilon_1)$ и $S_2(\epsilon_2)$. Предел

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}\left\{M(D(\epsilon_1,\epsilon_2)) + \frac{1}{\varphi_1}\log\epsilon_1 + \frac{1}{\varphi_2}\log\epsilon_2\right\}$$

называем приведенным модулем двуугольника D и обозначаем через $M(D,b_1,b_2)$.

2. Хорошо известна следующая теорема.

Теорема A (В. Н. Дубинин, [3]). *Пусть* $n \geqslant 3$. *Пусть* $a_1, \dots, a_n$ – *различные точки окружности* $|z| = 1$,

$$0 < \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Пусть $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$ – *равноотстоящие точки на* $|z| = 1$:

$$a_k^* = e^{2\pi i k/n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Пусть $D_1, \dots, D_n$ – *система неналегающих односвязных областей на* z-*сфере,* $a_k \in D_k$, $k = 1, \dots, n$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} M(D_k, a_k) \geqslant \frac{n}{2\pi} \log 4/n. \tag{2}$$

Равенство в (2) *достигается только в том случае, когда* $a_k = a_k^*$, $k = 1, \dots, n$, *а областями* D_k *являются углы с вершинами в начале координат раствора* $2\pi/n$: $D_k = \{z : 0 < |z| < \infty,\ \arg a_k^* < \arg z < \arg a_{k+1}^*\}$, $k = 1, \dots, n$.

Теорема A была доказана в [3] методом разделяющего преобразования, к простому доказательству этой теоремы приводит и метод экстремальной метрики.

Общим результатом в теории задач об экстремальном разбиении служит теорема Е. Г. Емельянова [4], устанавливающая условия, при которых взвешенная сумма $\sum_i h_i^2 M(P_i, a_k, a_l)$ приведенных модулей двуугольников относительно их вершин не меньше чем взвешенная сумма $\sum_j \alpha_j^2 M(D_j, a_j)$ приведенных модулей односвязных областей относительно их внутренних точек. Теорему в [4] будем называть теоремой B.

К теореме B примыкает следующий простой результат негативного характера.

Теорема 1. *Пусть* $n \geqslant 2$. *Пусть* a_k *и* a_k^*, $k = 1, \dots, n$, – *системы точек на окружности* $|z| = 1$, *определенные в теореме A. Пусть* $\mathcal{D}_1$ – *семейство систем неналегающих областей* P_k, $k = 1, \dots, n$, *на* $\overline{\mathbb{C}}' = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, *где* P_k – *двуугольник с вершинами в точках* a_k, a_{k+1}, *ассоциированный с классом дуг, гомотопных дуге* $\{z : |z| = 1,\ \arg a_k < \arg z < \arg a_{k+1}\}$ *и имеющий в вершинах* a_k, a_{k+1} *внутренние углы, равные* π. *Пусть* $M(P_k, a_k, a_{k+1})$ – *приведенный модуль двуугольника* P_k *относительно семейства дуг, соединяющих его стороны. Симметричная система областей*

$$P_k^* = \{z : 0 < |z| < \infty, \arg a_k^* < \arg z < \arg a_{k+1}^*\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

не реализует максимума суммы

$$-\sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1})$$

в семействе $\mathcal{D}_1$.

Доказательство. Пусть

$$P_k = \{z : 0 < |z| < \infty, \arg a_k < \arg z < \arg a_{k+1}\},$$
$$P_k^* = \{z : 0 < |z| < \infty, \arg a_k^* < \arg z < \arg a_{k+1}^*\}.$$

Предполагаем, что двуугольники P_k, P_k^* ассоциированы с классами дуг, разделяющих их стороны и гомотопных дугам окружности, соединяющих их вершины. Пусть $M(P_k, a_k, a_{k+1})$ и $M(P_k^*, a_k^*, a_{k+1}^*)$ – приведенные модули двуугольников P_k, P_k^* относительно классов дуг, соединяющих их стороны. Положим

$$\arg \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lambda_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

При отображении

$$\left(\frac{z}{a_k}\right)^{1/(n\lambda_k)} \to \frac{z}{a_k^*},$$

двуугольник P_k переходит в P_k^* и по формуле преобразования для приведенных модулей двуугольников имеем

$$M(P_k, a_k, a_{k+1}) = M(P_k^*, a_k^*, a_{k+1}^*) + \frac{2}{\pi}\log(n\lambda_k), \tag{3}$$

В силу известного неравенства $\prod_{k=1}^{n} \lambda_k \le n^{-n}$,

$$\sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1}) \le \sum_{k=1}^{n} M(P_k^*, a_k^*, a_{k+1}^*) \tag{4}$$

и равенство достигается только в случае $\lambda_k = 1/n$ при $k = 1, \ldots, n$.

Замечание. Пусть $\widehat{\mathcal{D}}_1$ – семейство систем определенных выше двуугольников P_k, $k = 1, \ldots, n$. Неравенство (4) показывает, что симметричная конфигурация $\{P_k\}, \{a_k^*\}$ реализует минимум функционала

$$-\sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1}) \tag{5}$$

в семействе $\widehat{\mathcal{D}}_1$. Из легко проверяемого равенства

$$M(P_k^*, a_k^*, a_{k+1}^*) = \frac{2}{\pi} \log \frac{4}{n}$$

и (3) следует, что

$$M(P_k, a_k, a_{k+1}) = \frac{2}{\pi} \log(4\lambda_k) \to -\infty, \lambda \to 0.$$

Следовательно, сумма (5) неограниченно возрастает, если по крайней мере одно из значений $\lambda_k \to 0$.

§2. Задачи об экстремальном разбиении в семействах областей двух типов

1. Пусть $0 < \beta \le \pi/2$. Пусть $\mathcal{D}_2(\beta)$ – семейство неналегающих двуугольников P_1, P_2 с вершинами в точках $e^{i\beta}$, $e^{-i\beta}$ и внутренними углами, равными π, в этих вершинах и односвязных областей D_1, D_2, $0 \in D_1$, $\infty \in D_2$. Предполагается, что двуугольники P_1, P_2 ассоциированы с классами дуг, гомотопных соответственно дуге $\Gamma_1 = \{z : z = e^{i\varphi}, -\beta < \varphi < \beta\}$ и дуге $\Gamma_2 = \{z : z = e^{i\varphi}, \beta < \varphi < 2\pi - \beta\}$. Пусть $M(P_j, e^{i\beta}, e^{-i\beta})$ – приведенный модуль двуугольника P_j относительно семейства дуг, соединяющих его стороны, и $M(D_1, 0)$, $M(D_2, \infty)$ – приведенные модули областей D_j относительно указанных точек. Пусть α и h – положительные числа. Рассмотрим задачу о максимуме $F_2^*(\beta)$ функционала

$$\begin{aligned} F_2(\beta) = &-h^2\{M(P_1, e^{i\beta}, e^{-i\beta}) + M(P_2, e^{i\beta}, e^{-i\beta})\} + \\ &+ \alpha^2\{M(D_1, 0) + \alpha^2\{M(D_2, \infty)\} \end{aligned} \tag{6}$$

в семействе $\mathcal{D}_2(\beta)$.

Экстремальная система областей этой задачи обладает симметрией относительно окружности окружности $|z| = 1$ и вещественной оси и представляет собой систему полосообразных и круговых областей ассоциированного квадратичного дифференциала. В расположении полюсов и нулей этого дифференциала имеет место соответствующая симметрия.

В случае $\beta = \pi/2$ имеем следующую теорему.

Теорема 2. *В семействе $\mathcal{D}_2(\pi/2)$ имеет место точное неравенство*

$$F_2(\pi/2) \le \frac{2}{\pi} \left\{ h^2 \log \frac{4h^2 + \alpha^2}{16h^2} - 2\alpha h \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2h} + \frac{\alpha^2}{4} \log \frac{16\alpha^2}{4h^2 + \alpha^2} \right\}. \tag{7}$$

Равенство в (7) достигается только для системы областей $\{P_1^*, P_2^*, D_1^*, D_2^*\}$, *представляющих собой систему полосообразных и круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(z)dz^2 = -\frac{\alpha^2}{4\pi^2}\frac{(z^2+l^2)(z^2+1/l^2)}{z^2(z^2-1)^2}dz^2,$$

где l, $0 < l < 1$, *– решение уравнения*

$$1/l + l = 4h/\alpha.$$

Естественно возникает вопрос о зависимости максимума $F_2^*(\beta)$ суммы (6) в семействе $\mathcal{D}_2(\beta)$ от β при $0 < \beta < \pi/2$. Частичный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \beta < \pi/2$. *Экстремальная система областей задачи о максимуме суммы* (6) *в семействе* $\mathcal{D}_2(\beta)$ *представляет собой систему полосообразных и круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(z)dz^2 = -\frac{A}{4\pi^2}\ \frac{(z-b)(z-\overline{b})(z-1/b)(z-1/\overline{b})dz^2}{z^2(z-e^{i\beta})^2(z-e^{-i\beta})^2}, \tag{8}$$

где $A = \alpha^2$, *а нули* b, $\overline{b}$, $1/b$, $1/\overline{b}$ *определяются условием*

$$\frac{\alpha^2|\cos\beta - B|^2}{\sin^2\beta} = 4h^2, \quad B = \frac{1}{2}(b + 1/b), \quad \operatorname{Re} B > \cos\beta,$$

и равенством в Q*-метрике* ($\epsilon > 0$ *и достаточно мало*)

$$\text{lenght}_Q[1, 1/\epsilon] = \text{lenght}_Q[-1, -1/\epsilon] + O(\epsilon).$$

Зависимость величины $F_2^*(\beta)$ *от* β *определяется равенством*

$$\frac{dF_2^*(\beta)}{d\beta} = -\frac{2}{\pi}\ \frac{(\cos\beta - \operatorname{Re}\beta)\alpha^2 + 2h^2\cos\beta}{\sin\beta}. \tag{9}$$

Доказательства теорем 2 и 3 приводятся ниже (см. замечание к теоремам 4 и 5).

В прямой связи с семейством $\mathcal{D}_2(\beta)$ находится следующее семейство систем областей.

2. Пусть $\mathcal{D}_3(\beta)$ – семейство систем неналегающих областей Π_1, Π_2, Δ, где Π_1, Π_2 – двуугольники с вершинами в точке $\cos\beta$ и углами, равными π, в этих вершинах, Δ – односвязная область,

$\infty \in \Delta$. Предполагается, что двуугольники Π_1, Π_2 ассоциированы с классами дуг, выходящих из точки $\cos\beta$ и возвращающихся в ту же точку и гомотопных соответственно разрезу по отрезку $[\cos\beta, 1]$ и по отрезку $[\cos\beta, -1]$. Через $M(\Pi_j, \cos\beta, \cos\beta)$ обозначаем приведенный модуль двуугольника Π_j относительно класса дуг, соединяющих его стороны. Пусть h_1 и α_1 – положительные числа. Пусть $F_3^*(\beta)$ – максимум функционала

$$F_3(\beta) = \\ = -h_1^2\bigl\{M(\Pi_1, \cos\beta, \cos\beta) + M(\Pi_2, \cos\beta, \cos\beta)\bigr\} + \alpha_1^2 M(\Delta, \infty) \quad (10)$$

в семействе $\mathcal{D}_3(\beta)$.

Теорема 4. *В семействе $\mathcal{D}_3(\pi/2)$ имеет место точное неравенство*

$$F_3(\pi/2) \leq \frac{1}{\pi}\left\{4h_1^2 \log\frac{\alpha_1^2 + 16h_1^2}{64h_1^2} - \right. \\ \left. - 4h_1\alpha_1 \operatorname{arctg}\frac{\alpha_1}{4h_1} + \frac{\alpha_1^2}{4}\log\frac{4\alpha_1^2}{\alpha_1^2 + 16h_1^2}\right\}. \quad (11)$$

Равенство в (11) *достигается только для системы областей Π_1^*, Π_2^*, Δ^*, представляющих собой полосообразные и круговую область квадратичного дифференциала*

$$Q_1(u)du^2 = \frac{A}{4\pi^2}\ \frac{(u-B)(u-\overline{B})}{u^2(1-u^2)}du^2,$$

где

$$A = \alpha_1^2, \quad B = il, \quad l > 0, \quad \alpha_1 l = 4h_1.$$

Доказательство. Пусть Π_1^*, Π_2^*, Δ^* – экстремальная система областей данной задачи. Выражение для ассоциированного квадратичного дифференциала и равенства для параметров A и B следуют из общей теории задач об экстремальном разбиении (см., например, [5–7]) и симметрии экстремальной конфигурации.

Найдем $R(\Delta^*, \infty)$. Для отображения $\zeta = g(u)$ области Δ^* на область $|\zeta| > R(\Delta^*, \infty)$, $g(\infty) = \infty$, имеем уравнение

$$2\pi\sqrt{-Q_1(u)}\, du = \alpha_1\, d(\log).$$

Интегрируем левую часть этого уравнения по отрезку $[il, i/\epsilon]$, его правую часть – по отрезку $[R(\Delta^*,\infty), 1/\epsilon]$:

$$I_1 = \int_{il}^{i/\epsilon} \frac{\sqrt{-(u^2-l^2)}}{u\sqrt{(1-u^2)}}du = \int_{l}^{1/\epsilon} \frac{\sqrt{(u^2+l^2)}}{u\sqrt{(1+u^2)}}du =$$
$$= -\log R(\Delta^*,\infty) + \log 1/\epsilon + O(\epsilon).$$

Используя преобразование

$$\frac{u^2-l^2}{1+u^2} = t^2, \quad t_0 = 1 - \frac{l^2+1}{2}\epsilon^2,$$

находим

$$I_1 = \int_0^{t_0} \frac{(l^2+1)t^2}{(1-t^2)(t^2+l^2)}dt = \int_0^{t_0} \Big[\frac{1}{1-t^2} - \frac{l^2}{t^2+l^2}\Big]dt =$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+t_0}{1-t_0} - l\,\mathrm{arctg}\,\frac{t_0}{l} + O(\epsilon),$$

откуда

$$-\log R(\Delta^*,\infty) = 1/2\log\frac{4}{l^2+1} - l\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{l}. \qquad (12)$$

Для нахождения приведенного модуля $M(\Pi_1^*,0,0)$ рассмотрим четырехугольник $\Pi_1^*(\epsilon) = \Pi_1^* \setminus \{u : |u| < \epsilon\}$ и найдем длину в Q-метрике отрезка $[\epsilon, 1]$, являющегося граничной дугой этого четырехугольника. Находим

$$I_2 = \int_{\epsilon}^{1} \frac{\sqrt{u^2+l^2}}{u\sqrt{1-u^2}}du = \int_{t_0}^{\infty} \frac{(l^2+1)t^2dt}{(t^2-l^2)(1+t^2)} + O(\epsilon) =$$
$$= -\frac{l}{2}\log\frac{l^2+1}{4l^2} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{l} + l\log 1/\epsilon + O(\epsilon),$$

где

$$\frac{u^2+l^2}{1-u^2} = t^2, \quad t_0 = l(1 + \frac{l^2+1}{2l^2}\epsilon^2.$$

Обозначая

$$L = -\frac{l}{2}\log\frac{l^2+1}{4l^2} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{l}$$

и принимая во внимание равенство $\alpha_1 l = 4h_1$, получаем

$$\mathrm{lenght}_{Q_1}[\epsilon, 1] = \frac{\alpha_1}{2\pi}(L + l\log 1/\epsilon + O(\epsilon) = \frac{\alpha_1 L}{2\pi} + \frac{2h_1}{\pi}\log 1/\epsilon + O(\epsilon).$$

В силу определения приведенного модуля $M(\Pi_1^*, 0, 0)$, имеем

$$M(\Pi_1^*, 0, 0) = \frac{\alpha_1 L}{\pi h_1},$$

откуда

$$M(\Pi_1^*, 0, 0) = \frac{4}{\pi}\Big\{-\frac{1}{2}\log\frac{l^2+1}{4l^2} + \frac{1}{l}\operatorname{arctg}\frac{1}{l}\Big\}. \qquad (13)$$

Из (12) и (13) получаем равенство для $F_3^*(\pi/2)$, указанное в правой части (11).

Теорема 5. *Пусть $0 < \beta < \pi/2$. Экстремальная конфигурация рассматриваемой задачи в семействе $\mathcal{D}_3(\beta)$ образуется полосообразными областями Π_1^*, Π_2^* и круговой областью Δ^* квадратичного дифференциала*

$$Q_1(u)du^2 = \frac{A}{4\pi^2}\frac{(u-B)(u-\overline{B})}{(u-\cos\beta)^2(1-u^2)}du^2,$$

где $A = \alpha^2$, величины B и $\overline{B}$ определяются условием

$$\frac{\alpha_1|cos\beta - B|}{\sin\beta} = 4h_1 \qquad (14)$$

и интегральным равенством

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\Big\{\frac{\sqrt{(u-B)(u-\overline{B})}}{u-\cos\beta} - \frac{\sqrt{(u+B)(u+\overline{B})}}{u+\cos\beta}\Big\}du = 0, \qquad (15)$$

$\operatorname{Re} B > \cos\beta$ *при* $0 < \beta < \pi/2$.

Зависимость величины $F_3^*(\beta)$ от β определяется формулой

$$\frac{dF_3^*(\beta)}{d\beta} = -\frac{1}{\pi}\frac{\alpha_1^2(\cos\beta - \operatorname{Re} B) + 16h_1^2\cos\beta}{\sin\beta} < 0 \qquad (16)$$

при $0 < \beta < \pi/2$.

Доказательство. В силу общей теории задач об экстремальном разбиении, экстремальная система областей рассматриваемой задачи представляет собой систему характеристических областей квадратичного дифференциала $Q_1(u)du^2$ указанного в теореме вида. Равенства $A = \alpha_1^2$ и (14) определяются нормирующими условиями данной задачи. Условие (15) следует из равенства ($\epsilon > 0$ и достаточно мало)

$$\text{lenght}_{Q_1}[1, 1/\epsilon] = \text{lenght}_{Q_1}[-1, -1/\epsilon] = O(\epsilon)$$

и перехода к пределу при $\epsilon \to 0$.

Очевидно, $\operatorname{Re} B = 0$ при $\beta = \pi/2$. Покажем, что $\operatorname{Re} B > 0$ при $0 < \beta < \pi/2$.

Обозначая интеграл в (15) через I, в силу тождества $A - B = (A^2 - B^2)/(A + B)$, имеем

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2-1}(u^2-\cos^2\beta)} \times$$

$$\times \frac{4uH(u)}{\sqrt{(u-B)(u-\overline{B})(u+\cos\beta)} + \sqrt{(u+B)(u+\overline{B})(u-\cos\beta)}} du,$$

где

$$H(u) = u^2(\cos\beta - \operatorname{Re} B) + \cos\beta(|B|^2 - \cos\beta \operatorname{Re} B).$$

Условие $I = 0$ показывает, что $\operatorname{Re} B > 0$. Предположим, что

$$\operatorname{Re} B < \cos\beta.$$

Тогда второе слагаемое в выражении для $F(u)$ должно быть отрицательным:

$$|B|^2 - \cos\beta \operatorname{Re} B < 0,$$

Следовательно,

$$|B|^2 < \cos\beta \operatorname{Re} B < \cos^2\beta, \quad |B| < \cos\beta.$$

Записав выражение для $H(u)$ в виде

$$H(u) = (\cos\beta - \operatorname{Re} B)(u^2 - \cos\beta \operatorname{Re} B) + \cos\beta \operatorname{Im}^2 B,$$

видим, что $H(u) > 0$ при всех $u \geq 1$ и потому случай $\operatorname{Re} B < \cos\beta$ невозможен. Очевидно, случай $\operatorname{Re} B = \cos\beta$ при $\beta < \pi/2$ также невозможен. Следовательно,

$$\operatorname{Re} B > \cos\beta. \tag{17}$$

В силу (17), $H(u) \to -\infty$ при $u \to \infty$. Поэтому должно выполняться неравенство

$$H(1) = (\cos\beta - \operatorname{Re} B)\sin^2\beta + \cos\beta|B - \cos\beta|^2 > 0. \qquad (18)$$

По общей градиентной теореме [7, 8],

$$\frac{dF_3^*(\beta)}{d\beta} = -\sin\beta\frac{dF_3^*(\beta)}{d\cos\beta} = -2\pi\sin\beta\frac{\partial}{\partial u}Q_1(u)|_{u=\cos\beta},$$

где

$$Q_1(u) = (u - \cos\beta)^2 Q_1(u)$$

и расматривается комплексная производная. Находим

$$\frac{\partial}{\partial u}Q_1(u)\Big|_{u=\cos\beta} = \frac{\alpha_1^2}{2\pi^2}\ \frac{(\cos\beta - \operatorname{Re} B)\sin^2\beta + |\cos\beta - B|^2\cos\beta}{\sin^4\beta}.$$

Принимая во внимание неравенство (18) и используя условие (14), отсюда получаем неравенство (16).

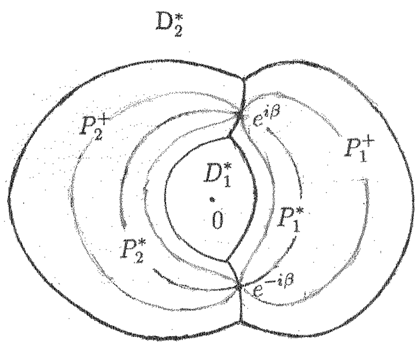

Рис. 1.

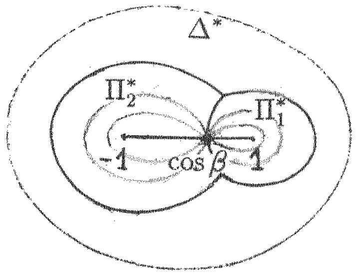

Рис. 2.

3. Замечание. Теоремы 2 и 3 вытекают из теорем 4 и 5 и связи между экстремальными конфигурациями в семействах $\mathcal{D}_2(\beta)$ и $\mathcal{D}_3(\beta)$.

Доказательство. Будем обозначать максимумы функционалов в рассматриваемых семействах систем областей через $F_2^*(\alpha, h, \beta)$ и $F_3^*(\alpha_1, h_1, \beta)$, отмечая этим зависимость от весовых параметров.

Пусть по-прежнему P_1^*, P_2^*, D_1^*, D_2^* – экстремальная система областей задачи о $F_2^*(\alpha, h, \beta)$ и пусть $P_j^+ = P_j^* \cap \{z : |z| > 1|\}$, $j = 1, 2$. Имеем $M(P_1^+, e^{i\beta}, e^{-i\beta}) + 2M(P_1^*, e^{i\beta}, e^{-i\beta})$ и потому

$$F_2^*(\alpha, h, \beta) = -h^2\{M(P_1^*, e^{i\beta}, e^{-i\beta}) + M(P_2^*, e^{i\beta}, e^{-i\beta})\} + \\ +\alpha^2\{M(D_1^*, 0) + M(D_2^*, \infty)\} = 2\big[-h_1^2\{M(P_1^+, e^{i\beta}, e^{-i\beta}) + \\ +M(P_2^+, e^{i\beta}, e^{-i\beta})\} + \alpha_1^2 M(D_2^*, \infty)\big], \tag{19}$$

где

$$\alpha = \alpha_1, \quad h = 2h_1.$$

Пусть $\Pi_1^*, \Pi_2^+, \Delta^*$ – образы областей P_1^*, P_2^*, D_2^* при отображении

$$u = \frac{1}{2}(z + 1/z). \tag{20}$$

Указанная система областей является экстремальной в задаче о максимуме $F_3^*(\alpha_1, h_1, \beta)$ в семействе $\mathcal{D}_3(\beta)$:

$$F_3^*(\alpha_1, h_1, \beta) = \\ = -h_1^2\{M(\Pi_1^*, \cos\beta, \cos\beta) + M(\Pi_2^*, \cos\beta, \cos\beta)\} + \alpha_1^2 M(\Delta^*, \infty).$$

Используя формулы преобразования приведенных модулей двуугольников при конформном отображении [8], находим

$$M(\Pi_j^*, \cos\beta, \cos\beta) = M(P_j^+, e^{i\beta}, e, -i\beta) + \frac{4}{\pi}\log\sin\beta,$$

$$M(\Delta^*, \infty) = M(D_2^*, \infty) + \frac{1}{2\pi}\log 1/2.$$

Следовательно,

$$F_3^*(\alpha_1, h_1, \beta) = \\ = -h_1^2\Big\{M(P_1^+, e^{i\beta}, e^{-i\beta}) + M(P_2^+, e^{i\beta}, e^{-i\beta}) + \frac{8}{\pi}\log\sin\beta\Big\} + \\ + \alpha_1^2\Big\{M(D_2^*, \infty) + \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{2}\Big\},$$

и из (19) находим

$$F_3^*(\alpha_1, h_1, \beta) = \frac{1}{2}F_2^*(\alpha, h, \beta) - \frac{8}{\pi}h_1^2 \log\sin\beta + \frac{1}{2\pi}\alpha_1^2 \log\frac{1}{2}.$$

Отсюда и из (11) получаем (7). Легко видеть также, что ассоциированные квадратичные дифференциалы рассматриваемых экстремальных задач в семействах $\mathcal{D}_2^*(\beta)$ и $\mathcal{D}_3^*(\beta)$ связаны равенством

$$Q(z)dz^2 = Q_1(u)du^2,$$

где u – функция (20). Далее,

$$\frac{dF_2^*(\alpha, h, \beta)}{d\beta} = 2\frac{dF_3^*(\alpha_1, h, \beta)}{d\beta} + \frac{16}{\pi}h_1^2\frac{\cos\beta}{\sin\beta}.$$

Отсюда и из (16) получаем выражение (9). Вопрос о знаке этого выражения при различных $\beta \in (0, \pi/2)$ остается открытым.

Литература

1. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук **49**, вып.1 (1994), 3–76.
2. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций.* I, P, Алгебра и анализ **9**, вып. 3 (1997), 41–103; вып. 5 (1997), 1–50.
3. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении*, Зап. научн. семин. ПОМИ **168** (1988), 48–66.
4. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении*, Зап. научн. семин.ПОМИ **160** (1987), 91–98.
5. J. A. Jenkins, *On the existence of certain general extremal metrics.* I,G Ann. of Math. (2) **66** (1957), 440–453; Tohoku Math. J. (2) **45** (1993), 249–257.
6. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействе систем областей различных типов*, Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 74–104.
7. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы*, Алгебра и анализ **11**, вып. 1 (1999), 3–86.
8. Е. Г, Емельянов, *Некоторые свойства модулей семейств кривых*, Зап. научн. семин. ПОМИ **144** (1985), 72–82.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 17 ноября 2007 г.