Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 350, 2007 г.

В. Г. Журавлев

УРАВНЕНИЕ ПЕЛЛЯ НАД $\circ$–КОЛЬЦОМ ФИБОНАЧЧИ

Введение

0.1. Круговое умножение Фибоначчи. Числа Фибоначчи

$$F_1 = 1, F_2 = 2, \dots, F_{i+2} = F_i + F_{i+1}, \dots \tag{0.1}$$

образуют систему счисления, в которой любое натуральное число N однозначно разлагается в конечную сумму вида

$$N = \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n(N) F_n, \tag{0.2}$$

где коэффициенты $\varepsilon_i(N) = 0$ или 1 удовлетворяют следующему правилу сокращения: $\varepsilon_i(A)\varepsilon_{i+1}(A) = 0$ для всех $i \geq 1$. Разложение (0.2) осуществляется по жадному алгоритму. В системе счисления Фибоначчи $\circ$-произведение $N_1 \circ N_2$ или круговое умножение Фибоначчи [1, 2] вычисляется по формуле

$$N_1 \circ N_2 = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \varepsilon_n(N_1) \varepsilon_m(N_2) F_{n+m}, \tag{0.3}$$

т.е. формально $\circ$-произведение определяется как умножение многочленов от $x^n = F_n$, поскольку для чисел Фибоначчи из определения (0.3) следует формула умножения

$$F_n \circ F_m = F_{n+m}.$$

Эта формула для $n = 0, 1, 2, \dots$ позволяет определить на множестве натуральных чисел операцию сдвига $\overset{n}{\overrightarrow{N}} = F_n \circ N$. Если N имеет разложение (0.2), то согласно (0.3) сдвинутое число $\overset{n}{\overrightarrow{N}}$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00435).

вычисляется по формуле

$$\overset{n}{\overrightarrow{N}} = \sum_{i\geq 1} \varepsilon_i(N) F_{i+n}. \tag{0.4}$$

Умножение Фибоначчи $N_1 \circ N_2$ и функция $[x]$ – целая часть x — связаны между собой следующей формулой [3]

$$N_1 \circ N_2 = N_1 N_2 + [(N_1+1)\tau][(N_2+1)\tau]. \tag{0.5}$$

С помощью данной формулы формально можно распространить $\circ$-умножение Фибоначчи (0.3) с множества натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ на множество вещественных чисел $\mathbb{R}$. Это позволяет определить $\circ$-кольцо Фибоначчи $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$, добавляя к кольцу целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$ операцию умножения Фибоначчи.

0.2. Геометрия уравнения Пелля. В настоящей работе рассматривается вопрос о разрешимости и количестве решений диофантова уравнения

$$N_1 \circ N_1 - A \circ N_2 \circ N_2 = 1, \tag{0.6}$$

где коэффициент A – натуральное число, а переменные N_1, N_2 пробегают все целые числа. Данное уравнение представляет собой уравнение Пелля над o-кольцом Фибоначчи $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$.

Формула (0.5) позволяет также рассматривать уравнение Пелля (0.6) над множеством действительных чисел:

$$x_1 \circ x_1 - A \circ x_2 \circ x_2 = 1, \tag{0.7}$$

где переменные x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$. На Рис. 1. показано множество $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(A)$ вещественных решений (x_1, x_2) уравнения Пелля (0.7) с коэффициентом $A = 1$. В отличие от обычных гипербол, множество $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(A)$ не имеет ни центральной, ни осевых симметрий. Уравнение Пелля (0.7) задает функциональную зависимость между x_1 и x_2. Поэтому множество $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(A)$ можно рассматривать как график соответствующей зависимости. Данный график состоит из бесконечного числа непрерывных кусков кривых. Он имеет разрывы по каждой из переменных x_1 и x_2, а также двойные разрывы.

Кроме этого, множество $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(A)$ имеет двойную структуру: локальную и глобальную. Локальная структура – это наличие коротких непрервных кусков кривых в множестве $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(A)$, длины ко-

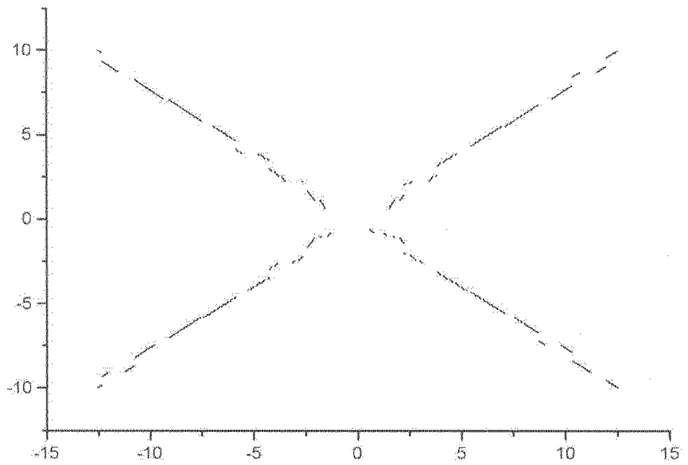

Рис. 1. Множество вещественных решений уравнения Пелля для $A = 1$.

торых стремятся к 0 с ростом $|x_i|$. Координаты точек этих локальных кривых удовлетворяют уравнениям гипербол

$$x_1^2 - Ax_2^2 = B_1$$

со свободными членами B_1, зависящими от выбранной кривой. Глобальная структура проявляется в существовании асимптот у множества $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(A)$. Эти асимптоты в точности такие же, какие имеют гиперболы

$$x_1^2 - \alpha' x_2^2 = B_2, \tag{0.8}$$

с коэффициентом $\alpha' = A + [(A+1)\tau]\tau$.

Таким образом мы видим что, геометрический смысл задачи о целых решениях $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}(A)$ уравнения Пелля (0.6) над o-кольцом Фибоначчи $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ состоит в поиске пересечения множества $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(A)$ с решеткой целых чисел $\mathbb{Z}^2$.

0.3. Краткие формулировки основных результатов. В следствиях 4.1 и 4.2 относительно уравнения Пелля (0.6) доказаны следующие утверждения.

1. Уравнение Пелля (0.6) разрешимо как в целых числах, так и в натуральных числах N_i при условии, если коэффициент A

удовлетворяет неравенству

$$A\tau < [(A+1)\tau], \tag{0.9}$$

где $\tau = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ – золотое сечение.

2. Пусть A снова удовлетворяет условию (0.9). Тогда для количества $n(A;X)$ целых решений (N_1, N_2) уравнения (0.6), удовлетворяющих условию $|N_1| \leq X$, имеет место следующая оценка снизу

$$n(A;X) \geq c(A)\ln X \tag{0.10}$$

при $X > X_A$. Здесь константа $X_A > 0$ зависит от A, а коэффициент $c(A)$ удовлетворяет неравенству

$$c(A) > 0.8\frac{|\alpha|^{1/2}}{t_{e'}},$$

где $\alpha = A - [(A+1)\tau]\tau^{-1}$, $t_{e'} = \operatorname{arccosh}(e'_1)$ и $e' = (e'_1, e'_2)$ является фундаментальным решением уравнения Пелля

$$x_1'^2 - \alpha' x_2'^2 = 1 \tag{0.11}$$

над кольцом Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$ – кольцом целых чисел вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Коэффициент $\alpha' = A + [(A+1)\tau]\tau$ получется сопряжением α относительно поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Для натуральных решений (N_1, N_2) уравнения (0.6) также имеет место аналогичное неравенство (0.10) с коэффициентом $\frac{1}{4}c(A)$.

Заметим, что коэффициент α' в уравнении Пелля (0.11) – тот же самый, что и у гипербол (0.8).

3. Пусть $r(n;X)$ равно количеству натуральных решений (N_1, N_2), где $N_2 < X$, уравнения

$$N_1 \circ N_1 = \overrightarrow{N_2 \circ N_2}^{\,n} + 1.$$

Если $n \geq 1$ нечетное, то для $r(n;X)$ имеет место следующая асимптотическая формула

$$r(n;X) \sim c_n \ln X,$$

при этом

$$\frac{1}{5}\frac{\tau^{n/2}}{\operatorname{arccosh}(\frac{1}{\tau})} < c_n < \frac{1}{4}\frac{\tau^{n/2}}{\operatorname{arccosh}(\frac{1}{\tau})}.$$

0.4. История вопроса. В 1968 году в одной из своих работ по 10-ой проблеме Гильберта Ю. В. Матиясевич [1, 2] определил круговое умножение $A \circ B$ натуральных чисел как умножение многочленов, записанных в системе счисления Фибоначчи F_n. Не зависимо от него – и в другом контексте – круговое умножение возникает в 1988 году в работе Д. Кнута [4], и с этого времени у $A \circ B$ появляется название – умножение Фибоначчи. К задачам о разрешимости диофантовых уравнений круговое умножение было впервые применено в [3].

Побудительным мотивом изучения уравнения Пелля (0.6) являются поиски эффектов, возникающих при рассмотрении диофантовых уравнений, когда вместо обычного кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ выбираются какие-либо нелинейные числовые структуры. В качестве первых таких структур были выбраны аналоги арифметических прогрессий – одномерные квазирешетки [3, 5, 6]. Цель данной работы – рассмотреть $\circ$-кольцо Фибоначчи $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$. Оно более трудное для изучения и причина заключена в следующем.

Операция $N_1 \circ N_2$ является неассоциативной и недистрибутивной. Однако, сдвигаясь по индексам n в основании счисления F_n всегда можно от некоторой δ-границы уйти внутрь области, где $\circ$-умножение обладает всеми обычными свойствами. Указанное явление – общее как для квазирешеток, так и $\circ$-кольца Фибоначчи $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$. Новым для $\circ$-кольца $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ оказалось появление дополнительных геометрических структур. О некоторых таких структурах уже говорилось в п. 0.2, другие будут рассмотрены в п. 2.2.

1. Система счисления Фибоначчи

Как уже отмечалось в п. 0.1, натуральные числа A могут быть разложены (0.2) в системе счисления Фибоначчи (0.1). Если число A имеет разложение (0.2), то сдвинутое число $\overset{\xrightarrow{n}}{A}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, вычисляется по формуле (0.4). Операция сдвига (0.4) и $\circ$-умножение Фибоначчи (0.3) связаны между собой соотношением

$$\overset{\xrightarrow{n}}{A} = F_n \circ A. \tag{1.1}$$

Поэтому, минуя систему счисления Фибоначчи, в силу формулы (0.3) сдвиг (1.1) непосредственно можно вычислить, используя золотое сечение:

$$\overset{n}{\overleftarrow{A}} = \sum_{i\geq 1} \varepsilon_i(A) F_{i-n},$$

Более того, данная формула позволяет продолжить сдвиг (1.1) с множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на все множество вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Аналогично (1.1) для $n = 0, 1, 2, \ldots$ также можно определить сдвиги влево

$$\overset{n}{\overrightarrow{A}} = \sum_{i\geq 1} \varepsilon_i(A) F_{i-n}, \tag{1.2}$$

где полагем $F_0 = 1$ и $F_j = 0$ для индексов $j < 0$.

Если $n = 1$, то вместо $\overset{1}{\vec{A}}$, $\overset{1}{\overleftarrow{A}}$ будем использовать более сокращенные записи $\overrightarrow{A}$, $\overleftarrow{A}$. В случае $n = 1$ для формулы (1.2) существует двойственная ей формула [3]

$$\overleftarrow{A} = [(A+1)\tau]. \tag{1.3}$$

Поскольку $A = \overset{1}{\overleftarrow{A}} + \overset{2}{\overleftarrow{A}}$, то отсюда и (1.3) получаем еще одну формулу

$$\overset{2}{\overleftarrow{A}} = A - [(A+1)\tau], \tag{1.4}$$

выражающую сдвиг для $n = 2$ через функцию $[x]$. Формулы (1.3), (1.4) также позволяют продолжить операции сдвига влево с множества $\mathbb{N}$ на множество всех вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Согласно (1.2) имеем $\overleftarrow{F}_m = F_{m-1}$, при этом $F_1 = F_0$ и $F_m > F_{m-1}$ для $m \geq 2$. Отсюда вытекает формула

$$\overset{\leftarrow}{\overleftarrow{A}} = \overset{2}{\overleftarrow{A}} + \varepsilon_{even}(A), \tag{1.5}$$

где $\overset{\leftarrow}{\overleftarrow{A}}$ обозначает композицию двух сдвигов $(\overleftarrow{A})$ и функция

$$\varepsilon_{even}(A) = \begin{cases} 0, \text{если} & \varepsilon_1(A) = 0, \\ 1, \text{если} & \varepsilon_1(A) = 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

определяет соответственно четно- и нечетно-фибоначчевы числа A.

2. Гиперболы над ∘-кольцом Фибоначчи

2.1. Связь ∘-кольца $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ с квадратичным кольцом $\mathbb{Z}[\tau]$. Удобно вместо уравнения Пелля (0.6) рассмотреть над ∘-кольцом Фибоначчи $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ общее уравнение ∘-гиперболы вида

$$N_1 \circ N_1 - A \circ N_2 \circ N_2 = B, \tag{2.1}$$

где $N_i \in \mathbb{Z}$, $A \in \mathbb{N}$,$B \in \mathbb{Z}$. При этом полагаем

$$-A \circ N_2 \circ N_2 = -(A \circ (N_2 \circ N_2)).$$

Для любого $N \in \mathbb{Z}$ определим δ-функцию

$$\delta(N) = N - [(N+1)\tau]\widetilde{\tau}, \tag{2.2}$$

где $\widetilde{\tau} = \tau^{-1} = \tau + 1$. Значения функции $\delta(N)$ принадлежит полуинтервалу $I = [-1, \tau)$ и замыкание $\overline{\delta(\mathbb{Z})}$ совпадает с интервалом $\overline{I} = [-1, \tau]$ (см. [3]).

Функция $\delta(N)$ обладает следующими инвариантными свойствами:

$$\begin{gathered}\delta(N_1 + N_2) = \delta(N_1) + \delta(N_2) + \sigma(N_1, N_2)\widetilde{\tau},\\ \delta(N_1 \circ N_2) = \delta(N_1) \cdot \delta(N_2) + \varrho(N_1, N_2)\widetilde{\tau},\end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$\sigma(N_1, N_2) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \delta(n_1) + \delta(n_2) \geq \tau, \\ 0, & \text{если} \quad \delta(n_1) + \delta(n_2) \in J, \\ -1, & \text{если} \quad \delta(n_1) + \delta(n_2) < -1; \end{cases}$$

$$\varrho(N_1, N_2) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \delta(n_1)\delta(n_2) \in J, \\ -1, & \text{если} \quad \delta(n_1)\delta(n_2) \geq \tau. \end{cases}$$

Из определения (2.2) вытекает, что функция $\delta(N)$ удовлетворяет следующему сравнению

$$\delta(N) \equiv N \mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau}, \tag{2.4}$$

из которого и свойств инвариантности (2.3), в свою очередь, вытекают сравнения:

$$\begin{gathered}\delta(N_1 + N_2) \equiv \delta(N_1) + \delta(N_2) \mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau},\\ \delta(N_1 \circ N_2) \equiv \delta(N_1) \cdot \delta(N_2) \mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau}.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Лемма 2.1. *Пусть N_1 и N_2 – произвольные целые числа. Тогда (N_1, N_2) является решением уравнения (2.1) тогда и только тогда, когда (N_1, N_2) удовлетворяет уравнению*

$$\delta(N_1)^2 - \delta(A)\delta(N_2)^2 = \delta(B) - k(N_2)[(A+1)\tau] + k\widetilde{\tau} \tag{2.6}$$

для некоторого целого $k \in \mathbb{Z}$. Здесь $k(N_2)$ определено условиями

$$k(N_2) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \delta(N_2) \in J_I, \\ -1, & \text{если} \quad \delta(N_2) \in J_{II}, \end{cases}$$

где полуинтервал $J = [-1, \tau)$ разбит

$$J = J_I \sqcup J_{II}$$

на два интервала $J_I = [-1, -\sqrt{\tau}]$ и $J_{II} = (-\sqrt{\tau}, \tau)$.

Доказательство. Прямое утверждение вытекает из сравнений (2.4) и (2.5).

Обратно, пусть (N_1, N_2) удовлетворяет уравнению (2.6). Тогда, переходя к сравнению, имеем

$$\delta(N_1)^2 - \delta(A)\delta(N_2)^2 + k(N_2)[(A+1)\tau] \equiv \delta(B) \mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau}.$$

Снова используя сравнения (2.4) и (2.5), но уже в обратном порядке, получаем сравнение

$$\delta(N_1 \circ N_1 - A \circ N_2 \circ N_2) \equiv \delta(B) \mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau}$$

или в силу (2.4) – сравнение

$$N_1 \circ N_1 - A \circ N_2 \circ N_2 \equiv B \mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau}. \tag{2.7}$$

Заметим, что

$$N \equiv M \mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau} \quad \Leftrightarrow \quad N = M$$

для любых $N, M \in \mathbb{Z}$. Отсюда и сравнения (2.7) заключаем, что (N_1, N_2) является решением уравнения (2.1).

□

Введем переменные $x_i = \delta(N_i)$, где $i = 1, 2$, и перепишем уравнение (2.6) в виде

$$x_1^2 - \alpha x_2^2 = \beta_k, \tag{2.8}$$

где $\alpha = \delta(A)$ и свободный β_k член задан условиями

$$\beta_k = \begin{cases} \delta(B) + k\widetilde{\tau}, & \text{если} \quad x_2 \in J_I, \\ \delta(B) + [(A+1)\tau] + k\widetilde{\tau}, & \text{если} \quad x_2 \in J_{II}. \end{cases} \tag{2.9}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только случай

$$\alpha = \delta(A) < 0,$$

когда (2.8) является уравнением эллипса. Обозначим через $E_I(A, B, k)$ и $E_{II}(A, B, k)$ соответствующие эллипсы I- и II-типа.

Лемма 2.2. *Пусть $\alpha = \delta(A) < 0$, $\beta = \delta(B)$ и пусть $E_{I,\mathbb{R}}(A, B, k)$, $E_{II,\mathbb{R}}(A, B, k)$ обозначают множества точек $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$, лежащих на эллипсах* (2.8) *соответственно I- и II-типа.*

1) *Тогда существует некоторое $k \in \mathbb{Z}$ с условием*

$$E_{I,\mathbb{R}}(A, B, k) \cap J \times J_I \neq \emptyset \tag{2.10}$$

тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$k_I \geq -\tau\beta \text{ и } \quad \{\tau - \alpha\tau^2 - \tau\beta\} \neq 0, \tag{2.11}$$

где

$$k_I = [\tau - \alpha\tau^2 - \tau\beta]. \tag{2.12}$$

Если выполнено условие (2.10) *или* (2.11), *то*

$$k = k_I. \tag{2.13}$$

2) *Аналогично, существует некоторое $k \in \mathbb{Z}$ с условием*

$$E_{II,\mathbb{R}}(A, B, k) \cap J \times J_{II} \neq \emptyset \tag{2.14}$$

тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$k_{II} \leq \tau - \alpha\tau - \tau\beta - [(A+1)\tau]\tau, \tag{2.15}$$

где

$$k_{II} = [-A\tau^2 - \tau\beta] + 1. \tag{2.16}$$

Если выполнено условие (2.14) *или* (2.15), *то*

$$k = k_{II}. \tag{2.17}$$

Доказательство. I-тип. Обозначим

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - \alpha x_2^2.$$

Тогда
$$\sup f_I = \sup_{(x_1,x_2)\in J\times J_I} = f(-1,-\sqrt{\tau}) = 1-\alpha\tau. \qquad (2.18)$$

В силу (2.10) и (2.18) имеем на $\beta_k = \delta(B) + k\widetilde{\tau}$ следующие ограничения $0 \le \beta_k < 1-\alpha\tau$ и, значит,
$$k \in [-\tau\delta(B), \tau(1-\alpha\tau) - \tau\delta(B)). \qquad (2.19)$$

Длина данного полуинтервала меньше, чем $\tau - \alpha\tau^2 < 1$ для $A \neq -1$. По условию $A \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, количество k, удовлетворяющих условию (2.19), не превосходит 1. Кроме того, если $\{\tau(1-\alpha\tau) - \tau\delta(B)\} = 0$, то полуинтервал из (2.19) не содержит целые числа. Отсюда и включения (2.19) вытекают утверждения (2.11) и (2.13).

II-тип. В этом случае имеем
$$\inf f_{II} = \inf_{(x_1,x_2)\in J\times J_{II}} = f(0,-\sqrt{\tau}) = -\alpha\tau,$$
$$\max f_{II} = \max_{(x_1,x_2)\in J\times J_{II}} = f(-1,-1) = 1-\alpha.$$

Отсюда и условия (2.14) получаем, что $\beta_k = \delta(B) + [(A+1)\tau] + k\widetilde{\tau}$ принадлежит полуинтервалу $(-\alpha\tau, 1-\alpha]$. Поэтому
$$k \in [-\alpha\tau^2 - (\delta(B) + [(A+1)\tau])\tau, (1-\alpha)\tau - (\delta(B) + [(A+1)\tau])\tau). \quad (2.20)$$

Длина полуинтервала из (2.20) меньше, чем $(1-\alpha)\tau + \alpha\tau^2 \le \tau + \tau^3 < 1$. Поэтому количество целых k, содержащихся в полуинтервале (2.20), не превосходит 1. Отсюда и включения (2.20) получаем утверждения (2.15) и (2.17).

□

Предложение 2.1. *Пусть* $\alpha = \delta(A) < 0$ *и* $\beta = \delta(B)$, *где* $A \in \mathbb{N}$, $B \in \mathbb{Z}$, *и пусть множества* $E_{I,\mathbb{R}}(A,B,k)$, $E_{II,\mathbb{R}}(A,B,k)$ *определены в лемме* 2.2.

1) *Тогда существует некоторое* $k_I \in \mathbb{Z}$ *с условием*
$$E_{I,\mathbb{R}}(A,B,k_I) \cap J \times J_I \neq \emptyset \qquad (2.21)$$
тогда и только тогда, когда выполняются неравенства
$$\beta \ge 0 \qquad (2.22)$$

или

$$\alpha\tau + \beta + \tau < 0. \tag{2.23}$$

2) *Аналогично, существует некоторое* $k_{II} \in \mathbb{Z}$ *с условием*

$$E_{II,\mathbb{R}}(A, B, k_{II}) \cap J \times J_{II} \neq \emptyset \tag{2.24}$$

тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\begin{cases} \alpha - \beta \leq 0, \\ \alpha\tau - \beta + 1 \geq 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

или

$$\alpha\tau - \beta - \tau \geq 0. \tag{2.26}$$

Следствие 2.1. *Не существуют целые числа* k_I *или* k_{II} *соответственно с условиями* (2.21) или (2.24) тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\begin{cases} \alpha - \beta > 0, \\ \alpha\tau + \beta + \tau > 0. \end{cases}$$

Доказательство предложения 2.1. 1) Неравенства (2.22) и (2.23) непосредственно получаются, если первое неравенство (2.11) переписать в следующем виде

$$\{\tau - \alpha\tau^2 - \tau\beta\} \leq \tau - \alpha\tau^2.$$

Согласно (2.11), для доказательства (2.22) и (2.23) осталось проверить лишь выполнение второго неравенства из (2.11). Обозначим $x = \tau - \alpha\tau^2 - \tau\beta$, и предположим противное: пусть

$$\{x\} = 0 \tag{2.27}$$

для некоторых $A \in \mathbb{N}$ и $B \in \mathbb{Z}$. По условию $-1 < \alpha = \delta(A) < 0$ и $-1 < \beta = \delta(B) < \tau$, поэтому x может изменяться от τ^3 до $1 + \tau$.

Если $x < 1$, то в силу (2.27) имеем $\tau - \alpha\tau^2 - \tau\beta = 0$ или, что равносильно

$$\beta = 1 - \alpha\tau. \tag{2.28}$$

Вспоминая определение (2.2) отображения δ, можем соотношение (2.28) преобразовать в систему равенств

$$A = [(B + 1)\tau], \tag{2.29}$$

$$[(A+1)\tau] = B - [(B+1)\tau] - 1.$$

Из первого равенства вытекает $B \in \mathbb{N}$. Согласно формул (1.3) и (1.5), выражения из правых частей равенств (2.29) можно записать в терминах сдвигов натуральных чисел, записанных в системе счисления Фибоначчи:

$$\begin{aligned} [(B+1)\tau] &= \overleftarrow{B}, \\ B - [(B+1)\tau] &= \overleftarrow{\overleftarrow{B}} - \varepsilon_{even}(B). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Теперь, подставляя выражения (2.30) в систему равенств (2.29), приходим к противоречивому равенству $\varepsilon_{even}(B) = -1$ (см. определение (1.6)).

Предположим, что выполнено неравенство $x > 1$. Тогда в силу (2.28) получаем соотношение

$$\beta = -\tau - \alpha\tau, \tag{2.31}$$

из которого вытекает система равенств

$$\begin{aligned} B - [(B+1)\tau] &= [(A+1)\tau], \\ [(B+1)\tau] &= A - [(A+1)\tau] \end{aligned}$$

и, следовательно, $A = B$, т.е. $\alpha = \beta$. Отсюда и соотношения (2.31) получаем $\alpha = \delta(A) = -\tau^2$. Но это возможно только для $A = -2$. Снова получили противоречие, так как по условию $A \in \mathbb{N}$.

2) Для доказательства (2.25) и (2.26) перепишем неравенство (2.15) в виде более простого неравенства

$$\{A\tau - \beta\tau\} \geq \tau^2 + \alpha\tau^3. \tag{2.32}$$

Воспользуемся следующей параметризацией: существует вложение множества целых чисел

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow [0, \widetilde{\tau}) : A \mapsto t = t_A$$

с условием

$$(\{A\tau\}, \alpha) = (\tau t, t^*), \tag{2.33}$$

где

$$t^* = \begin{cases} t, & \text{если} \quad t < \tau, \\ t - \widetilde{\tau}, & \text{если} \quad t \geq \tau. \end{cases}$$

Из (2.33) вытекает следующее представление

$$(\{A\tau\}, \alpha) = (\tau t, t - \widetilde{\tau}),$$

справедливое для всех чисел A из множества $\mathbb{Z}_- = \{A \in \mathbb{Z}; \delta(A) < 0\}$. Из указанного представления и неравенства (2.32) выводим нужные нам неравенства (2.25) и (2.26).

□

2.2. Значения свободных членов β_k.

Предложение 2.2. *Пусть выполнены условия предложения* 2.1 *и* β_k *заданы равенствами* (2.9), *где целые числа* $k = k_I$ *и* k_{II} *определены соответственно равенствами* (2.12) *и* (2.16). *Тогда для* β_k *выполняются следующие явные формулы*

$$\beta_{k_I} = \begin{cases} \beta, & \textit{если} \quad \beta \geq 0, \\ \beta + \widetilde{\tau}, & \textit{если} \quad \tau\alpha + \beta + \tau < 0, \end{cases} \tag{2.34}$$

$$\beta_{k_{II}} = \begin{cases} \beta - \alpha\widetilde{\tau}, & \textit{если} \quad \tau\alpha - \beta + 1 \geq 0, \alpha - \beta \leq 0, \\ \beta - \alpha\widetilde{\tau} + \widetilde{\tau}, & \textit{если} \quad \tau\alpha - \beta - \tau \geq 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Замечание 2.1. В формулах (2.34) и (2.35) ограничения на α и β согласованы с условиями (2.21) и (2.24) пересечения эллипсов $E_{I,\mathbb{R}}(A, B, k_I)$ и $E_{II,\mathbb{R}}(A, B, k_{II})$ соответственно с прямоугольными областями $J \times J_I$ и $J \times J_{II}$.

Доказательство. *Значения* β_{k_I}. Согласно (2.9) можем записать

$$\beta_{k_I} = \beta + B_\tau \widetilde{\tau}$$

с коэффициентом $B_\tau = [\tau - \alpha\tau^2 - \beta\tau]$, который равен 0, если $\tau\alpha + \beta + \tau > 0$, и 1 – в противном случае. Отсюда получаем формулу

$$\beta_{k_I} = \begin{cases} \beta, & \text{если} \quad \tau\alpha + \beta + \tau > 0, \\ \beta + \widetilde{\tau}, & \text{если} \quad \tau\alpha + \beta + \tau \leq 0, \end{cases}$$

из которой в силу предложения 2.1 формула (2.34) вытекает как частный случай.

Значения $\beta_{k_{II}}$. Используя (2.9) и (2.16), можем записать $\beta_{k_{II}}$ в следующем виде

$$\beta_{k_{II}} = \beta + \overleftarrow{\alpha} + r(A, \beta)\widetilde{\tau} + \widetilde{\tau}, \tag{2.36}$$

при этом $\overleftarrow{\alpha} = \delta([(A+1)\tau])$, где $[(A+1)\tau] = \overleftarrow{A}$ для $A \in \mathbb{N}$, и

$$r(A,\beta) = [-A\tau^2 - \beta\tau] + [[A\tau + \tau]\tau + \tau]$$

– целое число. Следующие формулы для функции $r(A,\beta)$ получаются прямыми вычислениями

$$\begin{aligned} r(A,\beta) &= 1, \text{если} \quad \alpha - \beta > 0, \quad \alpha < -\tau^2, \\ r(A,\beta) &= -1, \text{если} \quad \alpha - \beta \le 0, \quad \alpha \ge -\tau^2, \\ r(A,\beta) &= 0, \text{если} \quad \alpha - \beta \le 0, \quad \alpha < -\tau^2 \\ &\text{или} \quad \alpha - \beta > 0, \quad \alpha \ge -\tau^2. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Заметим, что $\overleftarrow{\alpha}$ связано с $\alpha = \delta(A)$ для любого $A \in \mathbb{Z}$ соотношением

$$\overleftarrow{\alpha} = \begin{cases} -\alpha\widetilde{\tau}, & \text{если} \quad \alpha \in (-\tau^2, \tau), \\ -\alpha\widetilde{\tau} - \widetilde{\tau}, & \text{если} \quad \alpha \in [-1, -\tau^2]. \end{cases} \tag{2.38}$$

Если теперь подставить (2.37) и (2.38) в равенство (2.36), то для $\beta_{k_{II}}$ получим формулы

$$\beta_{k_{II}} = \begin{cases} \beta - \alpha\widetilde{\tau}, & \text{если} \quad \alpha - \beta \le 0, \\ \beta - \alpha\widetilde{\tau} + \widetilde{\tau}, & \text{если} \quad \alpha - \beta > 0. \end{cases} \tag{2.39}$$

Используя предложение 2.1, выводим для $\beta_{k_{II}}$ формулу (2.35) как частный случай из формулы (2.39).

□

3. Количество точек на эллипсах

3.1. Общий случай. Для дальнейшего нам потребуется теорема 4.1 из [6]. Она была сформулирована на языке квазирешеток и гипербол. Для наших целей более удобно переформулировать указанную теорему на языке эллипсов. С этой целью рассмотрим следующее семейство эллипсов

$$x_1^2 - \alpha x_2^2 = \beta_k, \tag{3.1}$$

определенных на двух не пересекающихся прямоугольных областях $J \times J_I$ и $J \times J_{II}$. Здесь коэффициент α и свободный член β_k имеют вид $\alpha = \delta(A) < 0$, $A \in \mathbb{N}$, а $\beta_k = \beta_{k_I}$ или $\beta_{k_{II}}$ определяется формулами (2.34) или (2.35) в зависимости от включения (α, β), где $\beta = \delta(B)$, $B \in \mathbb{Z}$, в одну из областей R_t, $t = I$ или II.

Указанные области $R_t \subset [-1, 0) \times J$ задаются соответствующими условиями из формул (2.34) или (2.35).

Если элемент $x = a + b\widetilde{\tau}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, принадлежит квадратичному полю $F = \mathbb{Q}(\widetilde{\tau})$, то обозначим через $x' = a + b\widetilde{\tau}' = a - b\tau$ сопряженный ему элемент. Рассмотрим на элипсах (3.1) множества $E_{t,F}(\alpha, \beta)$ точек (x_1, x_2) с координатами x_i из поля F. Тогда точки (x_1', x_2') из сопряженных множеств $E'_{t,F}(\alpha, \beta)$ лежат на гиперболах $H_{t,\mathbb{R}}(\alpha, \beta)$, имеющих уравнение

$$x_1^{'2} - \alpha' x_2^{'2} = \beta_k'. \tag{3.2}$$

Действительно, согласно (2.2) имеем $\alpha' = \delta'(A) > 0$ для всех $A \in \mathbb{N}$, где

$$\delta'(A) = A + [(A+1)\tau]\tau.$$

Известно [7], что кольцо Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$ является евклидовым вещественным квадратичным кольцом, т.е. кольцом с алгоритмом Евклида. Кроме обычного деления по норме, кольцо Фибоначчи допускает быстрый одномерный 2-ступенчатый алгоритм Евклида [5].

В [6] доказано, что множество решений (x_1', x_2') уравнения Пелля

$$x_1^{'2} - \alpha' x_2^{'2} = 1 \tag{3.3}$$

над кольцом Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$ образует коммутативную группу $P = P_{\mathbb{Z}[\tau]}$ относительно операции умножения

$$(x_1', x_2') \cdot (y_1', y_2') = (x_1'y_1' + \alpha' x_2'y_2', x_1'y_2' + x_2'y_1'). \tag{3.4}$$

Группа Пелля P разлагается в прямое произведение

$$P = S_2 \times P^+$$

циклической группы $S_2 = \{(\pm 1, 0)\}$ второго порядка и бесконечной циклической группы $P^+ = \{e^{'i} : i \in \mathbb{Z}\}$ с образующим элементом $e' = (e_1', e_2')$, являющимся фундаментальным решением уравнения Пелля (3.3). Фундаментальное решение выбирается среди всех решений $(x_1', x_2') \in \mathbb{Z}[\tau] \times \mathbb{Z}[\tau]$ уравнения (3.3), удовлетворяющих условию: $x_1' > 1$, $x_2' > 0$ и x_1' минимально.

Операция умножения (3.4) также определяет действие группы P на множестве вещественных точек $H_{t,\mathbb{R}}(\alpha, \beta)$. В качестве фундаментальной области $F_{t,\mathbb{R}}(\alpha, \beta) = H_{t,\mathbb{R}}(\alpha, \beta)/P$ можно выбрать следующее множество

$$F_{t,\mathbb{R}}(\alpha,\beta) = \{(x_1', x_2') \in H_{t,\mathbb{R}}(\alpha,\beta) : \sqrt{|\beta_k'|} \le x_1' < e_1\sqrt{|\beta_k'|}, x_2' > 0\}. \tag{3.5}$$

Множество $F_{t,\mathbb{R}}(\alpha,\beta)$ содержит лишь конечное число $f_t(\alpha,\beta)$ точек с координатами из кольца $\mathbb{Z}[\tau]$.

Обозначим через $|I_t(\alpha,\beta)|$ угловую меру пересечения эллипсов $E_{t,\mathbb{R}}(\alpha,\beta)$ с прямоугольной областью $J \times J_t$. Она равна мере Лебега множества

$$I_t(\alpha,\beta) = \{t \in [0,1] : (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in \frac{1}{\sqrt{\beta_k}} J \times \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta_k}} J_t\}, \tag{3.6}$$

состоящего из конечного множества полуинтервалов.

В приведенных терминах теорема 4.1 [6] может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 3.1. *Пусть $n_t(\alpha,\beta;X)$ равно количеству точек $(x_1,x_2) = (\delta(N_1),\delta(N_2))$, где $N_i \in \mathbb{Z}$ и $|N_1| \le X$, лежащих на дугах $E_{t,\mathbb{R}}(\alpha,\beta) \cap J \times J_t$ эллипсов (1.1), где $t = I$ или II. Тогда относительно $n_t(\alpha,\beta;X)$ справедливы следующие утверждения.*

1) Если $f_t(\alpha,\beta) = 0$ или (α,β) принадлежит дополнительнию $R_t^c = J \times J_t \setminus R_t$ области R_t, где $t = I$ или II, то

$$n_t(\alpha,\beta;X) = 0.$$

2) Если же (α,β) принадлежит границе $\partial R_t = \overline{R}_t \setminus R_t^{int}$, где $\overline{R}_t$ и R_t^{int} – соответственно замыкание и внутренность области R_t, то

$$n_t(\alpha,\beta;X) \le 1.$$

3) В случае, если (α,β) принадлежит R_t^{int}, то отвечающая ей угловая мера

$$|I_t(\alpha,\beta)| > 0.$$

Кроме того, если выполнено дополнительное условие $f_t(\alpha,\beta) > 0$, то для $n_t(\alpha,\beta;X)$ имеет место следующая асимптотическая формула

$$n_t(\alpha,\beta;X) \sim c_t(\alpha,\beta)\ln X,$$

где $X \to +\infty$ и коэффициент $c_t(\alpha,\beta)$ вычисляется по формуле

$$c_t(\alpha,\beta) = 4\frac{|I_t(\alpha,\beta)| f_t(\alpha,\beta)}{t_{e'}}$$

при этом $t_{e'} = \operatorname{arccosh}(e_1')$.

3.2. Случай $B = 1$. Рассмотрим отдельно случай $B = 1$, когда $\beta = \delta(1) = -\tau$. Тогда, согласно равенств (2.34) и (2.35), в уравнении эллипса (3.1) свободный член β_k в зависимости от типа уравнения $t = I$ или II вычисляется по следующим формулам.

I-тип: если $(x_1, x_2) \in J \times J_I$, то

$$\beta_{k_I} = 1 \quad \text{для любого} \quad \alpha < 0; \tag{3.7}$$

II-тип: если $(x_1, x_2) \in J \times J_{II}$, то

$$\beta_{k_{II}} = -\tau - \alpha\widetilde{\tau} \quad \text{для любого} \quad \alpha < -\tau. \tag{3.8}$$

Теорема 3.2. *Пусть $n_t(\alpha; X) = n_t(\alpha, -\tau; X)$ обозначает количество точек $(x_1, x_2) = (\delta(N_1), \delta(N_2))$, где $N_i \in \mathbb{Z}$ и $|N_1| \leq X$, лежащих на дугах $E_{t,\mathbb{R}}(\alpha, -\tau) \cap J \times J_t$ элипсов (3.1), где $\alpha = \delta(A) < 0$, $A \in \mathbb{N}$, и свободные члены β_k задаются формулами (3.7) и (3.8) соответственно для $t = I$ или II. При этих условиях для $n_t(\alpha; X)$ имеют место следующие асимптотические формулы.*

Для I-типа –

$$n_I(\alpha; X) \sim c_I(\alpha, -\tau) \ln X, \tag{3.9}$$

где

$$c_I(\alpha, -\tau) = 4\frac{|I_I(\alpha, -\tau)|}{t_{e'}}$$

и угловая мера $|I_I(\alpha, -\tau)|$ удовлетворяет неравенствам

$$0.8\frac{|\alpha|^{1/2}}{t_{e'}} < |I_I(\alpha, -\tau)| < \frac{|\alpha|^{1/2}}{t_{e'}}.$$

Таким образом, уравнение (3.1) I-типа, т.е. в данном случае – уравнение $x_1^2 - \alpha x_2^2 = 1$ всегда разрешимо над кольцом Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$.

Для II-типа –

1)

$$|I_{II}(\alpha, \beta)| > 0 \quad \text{для} \quad \alpha < -\tau, \quad |I_{II}(\alpha, \beta)| = 0 \quad \text{для} \quad -\tau \leq \alpha < 0.$$

2) Если $\alpha \in [-\tau, 0)$ или $f_{II}(\alpha, -\tau) = 0$, то

$$n_{II}(\alpha; X) = 0.$$

3) В случае же, если $\alpha < -\tau$ и $f_{II}(\alpha, -\tau) > 0$, выполняется асимптотическая формула

$$n_{II}(\alpha; X) \sim c_{II}(\alpha, -\tau) \ln X \tag{3.10}$$

с коэффициентом

$$c_{II}(\alpha, -\tau) = 4\frac{|I_{II}(\alpha, -\tau)| f_{II}(\alpha, -\tau)}{t_{e'}}.$$

Доказательство. Согласно (3.7), уравнение эллипсов I-типа есть уравнение Пелля. В этом случае фундаментальная область $F_{I,\mathbb{R}}(\alpha, 1)$ (см. (3.5)) содержит одно решение и, значит, $f_I(\alpha, 1) = 1$. Отсюда, (3.7), (3.8) и теоремы 3.1 вытекают все утверждения теоремы 3.2.

□

4. Уравнение Пелля над кольцом $\mathring{\mathbb{Z}}$

4.1. Общий случай. Начиная с этого места, будем полагать $B = 1$ в уравнении (2.1). Получим уравнением Пелля над o-кольцом Фибоначчи $\mathring{\mathbb{Z}}$:

$$N_1 \circ N_1 - A \circ N_2 \circ N_2 = 1, \tag{4.1}$$

где переменные $N_i \in \mathbb{Z}$. Здесь снова считаем, что коэффициент $A \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию $\alpha = \delta(A) < 0$.

По лемме 2.1 пара (N_1, N_2) является решением уравнения (4.1) тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2) = (\delta(N_1), \delta(N_2))$ удовлетворяет уравнению эллипса (3.1), где β_k определено формулами (3.7), (3.8).

Обозначим через $n_t(A; X)$ количество решений (N_1, N_2) уравнения (4.1) для $t = I$- или II-типа, удовлетворяющих условиям $|N_1| \leq X$ и (x_1, x_2) принадлежит области $J \times J_t$, и через

$$n(A; X) = n_I(A; X) + n_{II}(A; X)$$

– общее количество решений (N_1, N_2) с условиями $|N_1| \leq X$.

Из равенств (3.7), (3.8) и теоремы 3.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть в уравнении Пелля* (4.1) *коэффициент* $A \in \mathbb{N}$ *удовлетворяет условию* $\alpha = \delta(A) < 0$, *где* $\delta(A)$ *задается равенством* (2.2).

1) *Тогда уравнение* (4.1) *имеет количество решений I-типа*

$$n_I(A; X) \sim c_I(A) \ln X, \tag{4.2}$$

при этом коэффициент

$$c_I(A) = 4\frac{|I_I(\alpha, -\tau)|}{t_{e'}} > 0,$$

где $t_{e'} = \operatorname{arccosh}(e'_1)$ *и* (e'_1, e'_2) *– фундаментальное решение уравнения Пелля* $x_1'^2 - \alpha x_2'^2 = 1$ *над кольцом Фибоначчи* $\mathbb{Z}[\tau]$.

2) *Относительно решений* II*-типа уравнения* (4.1) *справедливы следующие утверждения.*

а) *Если* $\alpha \in [-\tau, 1)$ *или* $f_{II}(\alpha, -\tau) = 0$, *где* $f_{II}(\alpha, -\tau)$ *– количество фундаментальных решений* (x'_1, x'_2) *уравнения* $x_1'^2 - \alpha x_2'^2 = \beta'_{k_{II}}$ *со свободным членом* $\beta'_{k_{II}} = \widetilde{\tau} + \alpha'\tau$, *то*

$$n_{II}(A; X) = 0.$$

б) *В случае* $\alpha < -\tau$ *и* $f_{II}(\alpha, -\tau) > 0$ *для* $n_{II}(A; X)$ *имеет место асимптотическая равенство*

$$n_{II}(A; X) \sim c_{II}(A) \ln X \tag{4.3}$$

и коэффициент $c_{II}(A)$ *вычисляется по формуле*

$$c_{II}(A) = 4\frac{|I_{II}(\alpha, -\tau)| f_{II}(\alpha, -\tau)}{t_{e'}}.$$

Следствием теоремы 4.1 является следующий результат.

Следствие 4.1. *Для любого* $A \in \mathbb{N}$ *с условием* $\delta(A) < 0$ *или, что равносильно неравенству*

$$A\tau < [(A+1)\tau],$$

уравнение Пелля (4.1) *разрешимо как в целых числах, так и в натуральных числах* N_i. *При этом количество целых решений* $n(A; X)$ *удовлетворяет неравенству*

$$n(A; X) \geq c_I(A) \ln X \quad \text{для} \quad X > X_A \tag{4.4}$$

с коэффициентом

$$0.8\frac{|\delta(A)|^{1/2}}{t_{e'}} < c_I(A) < \frac{|\delta(A)|^{1/2}}{t_{e'}}, \tag{4.5}$$

а натуральных решений – аналогичному неравенству с коэффициентом $\frac{1}{4}c_I(A)$. *Здесь в формуле* (4.4) *константа* $X_A > 0$ *зависит от* A.

Доказательство вытекает из теоремы 4.1 и неравенств

$$\frac{1}{5}|\alpha|^{1/2} \le |I_I(\alpha, -\tau)| \le \frac{1}{4}|\alpha|^{1/2}$$

для угловой меры (3.6) при $\alpha < 0$.

□

4.2. Случай $A = F_n$**.** Выберем коэффициент A в уравнении (4.1), равный числу Фибоначчи F_n. По формуле (2.2) имеем

$$\alpha = \delta(F_n) = (-\tau)^n.$$

Поэтому для нечетных номеров n можем применить следствие 4.1.

Следствие 4.2. *Если* $n \ge 0$ *нечетное, то для числа решений* $(N_1, N_2) \in \mathbb{Z}^2$, $|N_1| \le X$, *уравнения Пелля*

$$N_1 \circ N_1 - F_n \circ N_2 \circ N_2 = 1 \tag{4.6}$$

или – равносильного ему урвнения

$$N_1 \circ N_1 - \overrightarrow{N_2 \circ N_2}^{\,n} = 1 \tag{4.7}$$

имеет место следующая асимптотическая формула

$$n(F_n; X) \sim c_I(F_n) \ln X, \tag{4.8}$$

при этом

$$0.8\frac{\tau^{n/2}}{\operatorname{arccosh}(\frac{1}{\tau})} < c_I(F_n) < \frac{\tau^{n/2}}{\operatorname{arccosh}(\frac{1}{\tau})}.$$

Если же рассматривать решения уравнений (4.6), (4.7) *в натуральных числа* $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$, *то в асимптотической формуле* (4.8) *коэффициент* $c_I(F_n)$ *нужно заменить на* $\frac{1}{4}c_I(F_n)$.

Доказательство. В данном случае уравнение Пелля (3.3) принимает вид

$$x_1'^2 - \widetilde{\tau}^n x_2'^2 = 1, \tag{4.9}$$

так как $\alpha' = \delta(F_n)' = \widetilde{\tau}^n$. Производя замену $y_2' = \widetilde{\tau}^{n_1} x_2'$, где $n = 2n' + 1$, приходим к уравнению Пелля вида $x_1'^2 - \widetilde{\tau} y_2'^2 = 1$, равносильному над кольцом $\mathbb{Z}[\tau]$ уравнению (4.9). Данное уравнение имеет фундаментальное решение $(e'_1, e'_2) = (\frac{1}{\tau}, 1)$ (см. [6]), поэтому $t_{e'} = \operatorname{arccosh}(\frac{1}{\tau})$. Отсюда и из теоремы 4.1 и неравенств (4.5) вытекает следствие 4.2.

□

Литература

1. Ю. В. Матиясевич, *Связь систем уравнений в словах и длинах с 10-й проблемой Гилберта*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **8** (1968), 132–144.
2. Ю. В. Матиясевич, *Две редукции 10-й проблемы Гилберта*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **8** (1968), 145–158.
3. В. Г. Журавлев, *Суммы квадратов над* ∘*-кольцом Фибоначчи*, Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 165–190.
4. D. E. Knuth, *Fibonacci multiplication*, Appl. Math. Lett. **1** (1988), 57–60.
5. В. Г. Журавлев, *Одномерные квазирешетки Фибоначчи и их приложения к дофантовым уравнениям и алгоритму Евклида*, Алгебра и анализ **19**, No. 3 (2007), 177–208.
6. В. Г. Журавлев, *Гиперболы над двумерными квазирешетками Фибоначчи*. Диофантовы и аналитические проблемы теории чисел, Тр. Междун. конф., посвященной 100 летию со дня рождения А. О. Гельфонда, МГУ, М., 2007, в печати.
7. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*. М., 1985.

Владимирский государственный педагогический университет

E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 15 ноября 2007 г.