Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 350, 2007 г.

В. Г. Журавлев

ОБЛАСТЬ ПРИТЯЖЕНИЯ ДЛЯ АТТРАКТОРА ДВУХЦВЕТНОГО ПОВОРОТА ОКРУЖНОСТИ

Введение

0.1. Двухцветный сдвиг, аттрактор и область притяжения. Отождествим единичный полуинтервал $I = [0, 1)$ с единичной окружностью $C \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и рассмотрим на нем *двухцветный сдвиг* $S_\varepsilon : I \to I$, зависящий от непрерывного параметра $\varepsilon \in I$ и определяемый условиями

$$\begin{aligned} x &\longmapsto x + 2\tau \bmod 1, \quad \text{если} \quad x \in I_\varepsilon^-, \\ x &\longmapsto x + \tau \bmod 1, \quad \text{если} \quad x \in I_\varepsilon^+, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ – *золотое сечение* и $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$, $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$. Двухцветный сдвиг S_ε является сжимающим отображением (теорема 4.1)

$$I \supset S_\varepsilon(I) \supset S_\varepsilon^2(I) \supset \ldots \supset S_\varepsilon^k(I) \supset \ldots, \tag{2}$$

где S_ε^k обозначает k-кратную композицию для сдвига S_ε. Для любого $\varepsilon \in I$ убывающая последовательность (2) стабилизируется $S_\varepsilon^k(I) = S_\varepsilon^{k+1}(I) = \ldots$ через конечное число шагов. Наименьшую степень k с таким условием обозначим $k(\varepsilon)$ и определим *аттрактор* Att_ε двухцветного сдвига S_ε равенством $\mathrm{Att}_\varepsilon = S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(I)$. Тогда единичный полуинтервал I разбивается

$$I = \mathrm{Att}_\varepsilon \cup \mathrm{Spir}_\varepsilon$$

на две области: аттрактор Att_ε и *область притяжения* $\mathrm{Spir}_\varepsilon = I \setminus \mathrm{Att}_\varepsilon$. Относительно отображения S_ε аттрактор Att_ε является инвариантным подмножеством из I и любая точка из области притяжения $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ через конечное число S_ε-итераций $k \le k(\varepsilon)$ попадает в аттрактор Att_ε.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 05-01-00435.

0.2. Глубокие дыры и динамическое расстояние. Пусть

$$d_\varepsilon(x) = \min\{k : \ S_\varepsilon^k(x) \in \mathrm{Att}_\varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$$

– *динамическое расстояние* от точки $x \in I$ до аттрактора Att_ε. Из определения следует, что для всех $x \in I$ динамическое расстояние $d_\varepsilon(x)$ ограничено степенью $k(\varepsilon)$. *Глубокая дыра*

$$Dh(\varepsilon) = \{x \in \mathrm{Spir}_\varepsilon : d_\varepsilon(x) = k(\varepsilon)\} \tag{3}$$

состоит из точек, максимально удаленных от аттрактора Att_ε. В предложении 6.1 доказано, что максимальное расстояние $k(\varepsilon)$ вычисляется по формуле

$$k(\varepsilon) = \left[\frac{F_{m+2}}{2}\right]$$

для всех ε, принадлежащих J^m из разбиения единичного полуинтервала

$$I = J^0 \oplus J^1 \oplus \dots \oplus J^m \oplus \dots$$

на точечное множество $J^0 = \{0\}$ и полуинтервалы $J^m = (\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m]$ уровней $m = 1, 2, 3, \dots$ Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x, $\oplus$ – некоммутативную операцию прикладывания полуинтервалов, $\varepsilon_m = 1 - \tau^{-m}$, F_m – числа Фибоначчи, определяемые рекуррентным соотношением

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

для $n \geq 2$ и начальными условиями $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Кроме того, доказано, что для максимального расстояния $k(\varepsilon)$ имеет место гиперболическая аппроксимация

$$\frac{c_1}{1-\varepsilon} - 2 < k(\varepsilon) < \frac{c_2}{1-\varepsilon} + 1,$$

где $c_1 = \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}} \approx 0.58$ и $c_2 = \tau \cdot c_1 \approx 0.94$ – точные константы.

0.3. Мера глубоких дыр и динамическое расстояние. В предложении 7.1 доказано, что глубокие дыры $Dh(\varepsilon)$ (3) представляют собой некоторый полуинтервал для любого $\varepsilon > 0$ и $Dh(\varepsilon)$ – пустое множество для $\varepsilon = 0$. Пусть $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_m$, если ε содержится в полуинтервале J^m уровня $m > 0$, и $\Delta = 0$ для ε из J^0. Тогда мера глубокой дыры $|Dh(\varepsilon)|$ вычисляется по формуле

$$|Dh(\varepsilon)| = \Delta$$

для уровней $m \neq 2$. Если $m = 2$, то мера $|Dh(\varepsilon)|$ не зависит от параметра $\varepsilon \in J^2$ и равна

$$|Dh(\varepsilon)| = \tau^{-2}.$$

При этом мера глубокой дыры $|Dh(\varepsilon)|$ и максимальное расстояние $k(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in I$ удовлетворяют неравенству

$$|Dh(\varepsilon)| \cdot d_\varepsilon(Dh(\varepsilon)) \leq \tau^{-2}.$$

0.4. Локализация глубоких дыр. Снова отождествим единичный полуинтервал I с окружностью $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и перенесем на I ее метрику $\rho(x,y) = ||x-y||$, где $||x||$ обозначает расстояние от x до ближайшего целого числа. С помощью метрики $\rho(x,y)$ определим

$$\rho(Dh(\varepsilon),\alpha) = \max_{x \in Dh(\varepsilon)} \rho(x,\alpha)$$

– максимальное расстояние от глубокой дыры $Dh(\varepsilon)$ до некоторого числа α из I. Будем говорить, что $Dh(\varepsilon)$ стремится к α при $\varepsilon \uparrow 1$ и записывать

$$Dh(\varepsilon) \xrightarrow{\rho} \alpha \quad \text{при} \quad \varepsilon \uparrow 1,$$

где $\varepsilon, \alpha \in I$, если $\rho(Dh(\varepsilon),\alpha) \to 0$ при $\varepsilon \uparrow 1$. В предложении 7.2 показано, что в метрике $\rho(x,y)$ имеет место явление локализации глубоких дыр:

$$Dh(\varepsilon) \xrightarrow{\rho} \langle 2\tau \rangle \quad \text{при} \quad \varepsilon \uparrow 1.$$

0.5. Скорость сжатия единичного полуинтервала. Как было отмечено в (2), двухцветный сдвиг S_ε является сжимающим отображением единичного полуинтервала I. Скорость сжатия полуинтервала I характеризуется функцией

$$\mathrm{mes}_\varepsilon(t) = |S_\varepsilon^{[t]}(I)|,$$

равной мере множества $S_\varepsilon^{[t]}(I) \subset I$. Мера $\mathrm{mes}_\varepsilon(t)$ является невозрастающей, кусочно-постоянной функцией переменной t из $[0,\infty)$, удовлетворяющей неравенствам $1/2 \leq \mathrm{mes}_\varepsilon(t) \leq 1$ для всех $\varepsilon \in I$ и $t \in [0,\infty)$. Для описания поведения функции $\mathrm{mes}_\varepsilon(t)$ удобно использовать нормированную меру

$$\mathrm{mes}_\varepsilon\left(\frac{\tau^{m+2}t}{2\sqrt{5}}\right) = \left|S_\varepsilon^{[\tau^{m+2}t/(2\sqrt{5})]}(I)\right|, \tag{4}$$

где уровень $m = m(\varepsilon)$ определяется параметром $\varepsilon \in J^m$. В теореме 8.1 доказано, что для нормированной меры (4) имеет место следующее предельное распреление

$$\mathrm{mes}_\varepsilon\left(\frac{\tau^{m+2}t}{2\sqrt{5}}\right) = \lambda_m(\varepsilon)L(t) + (1-\lambda_m(\varepsilon))L(\tau t) + O(1-\varepsilon) \qquad (5)$$

при $\varepsilon \uparrow 1$, где $\lambda_m(\varepsilon) = \tau^{m+1}(\varepsilon - \varepsilon_{m-1})$ и $L(t)$ – кусочно-линейная функция

$$\begin{aligned} L_1(t) &= 1 - \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}}t && \text{для} \quad 0 \le t \le \tau^{-1}, \\ L_2(t) &= \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2\sqrt{5}}(1-t) && \text{для} \quad \tau^{-1} \le t \le 1, \\ L_3(t) &= \frac{1}{2} && \text{для} \quad 1 \le t < \infty. \end{aligned}$$

0.6. История вопроса. Однопараметрическое семейство двухцветных сдвигов S_ε представляет собою специализацию более общих сдвигов $S_{(\alpha,\beta,\varepsilon)}(x)$, определяемых условиями (1), где 2τ, τ заменены произвольными числами α, β. Первоначально сдвиги $S_{(\alpha,\beta,\varepsilon)}(x)$ появились в работах [1, 2], а затем в общем виде – в [3]. Рангом вращения d сдвига $S_{(\alpha,\beta,\varepsilon)}(x)$ называется размерность векторного пространства над полем $\mathbb{Q}$, порожденного числами α, β, 1. Для сдвигов $S_{(\alpha,\beta,\varepsilon)}(x)$ ранга $d = 2$ и, в частности, для сдвигов S_ε в [3] доказано, что последовательности строгих вложений (2) конечны, т.е. такие двухцветные сдвиги имеют конечный тип. Цель настоящей работы – исследовать поведение двухцветного сдвига S_ε на области притяжения $\mathrm{Spir}_\varepsilon$. Данная задача – одна из самых сложных, поскольку область притяжения $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ является нестабильным фактором динамики сдвига S_ε. Для изучения мы применяем технику конечных разбиений Фибоначчи $\mathrm{Til}(\varepsilon_m)$ [4, 5]. С помощью ее удалось вычислить динамическую длину $k(\varepsilon)$ области притяжения $\mathrm{Spir}_\varepsilon$, обнаружить эффект локализации глубоких дыр $Dh(\varepsilon) \subset \mathrm{Spir}_\varepsilon$, определить их меру $|Dh(\varepsilon)|$ и для скорости сжатия $\mathrm{mes}_\varepsilon\left(\frac{\tau^{m+2}t}{2\sqrt{5}}\right)$ (4) единичного полуинтервала I доказать предельную формулу (5). Как следствие, из указанной формулы вытекает следующий результат: 1) сжатие двухцветным сдвигом S_ε единичного полуинтервала I осуществляется в общем случае в четырех линейных режимах; 2) переход от одного режима к другому происходит при $t = \tau^{-2}, \tau^{-1}, 1$. Ранее поведение двухцветного сдвига S_ε на аттракторе Att_ε было рассмотрено в [6].

1. Одномерные разбиения Фибоначчи

1.1. B-процесс. Определим *B-процесс* на полуинтервале I следующим образом.

$\triangle$ Задано множество $P = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ отмеченных точек $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 2 - \tau$. Точка ε с постоянной положительной скоростью пробегает полуинтервал I, начиная своё движение из точки ε_0. Вместе с точкой ε с той же скоростью из каждой отмеченной точки ε_α начинают движение её образы ε^α. Как только хотя бы одна ε^β из движущихся точек ε^α, среди которых присутствует ε, достигает какой-либо отмеченной точки ε_α, то возникает новое множество отмеченных точек P, состоящее из объединения всех точек ε^α и старых отмеченных точек. После очередного ветвления точка ε продолжает своё движение вдоль I. $\bigtriangledown$

Из определения B-процесса следует, что множество отмеченных точек $P = P(\varepsilon)$ зависит от ε и рост $P(\varepsilon)$ происходит для дискретного множества значений $\varepsilon \in I$:

$$\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_m < \dots \tag{1.1}$$

Множество $E = \{\varepsilon_m\}$ назовем *спектром* B-процесса, а ε_m – *собственными значениями*. Они удовлетворяют следующим соотношениям [4]

$$\begin{aligned} &\varepsilon_m = \langle (-1)^m F_m \cdot \tau \rangle = 1 - \tau^{-m}, \\ &\varepsilon_{m+2} = \varepsilon_m - \varepsilon_{m+1} + 1, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\langle x \rangle$ обозначает дробную часть числа x.

1.2. B-процесс и разбиения. Множество отмеченных точек $P(\varepsilon)$ разбивает на отрезки единичный полуинтервал I. Обозначим $\mathrm{Til}\,(\varepsilon)$ соответствующее разбиение I на полуинтервалы, включающие в себя левые концы. Для $\varepsilon = \varepsilon_m$ разбиение

$$\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m) = \bigsqcup_j G_j^m \sqcup \bigsqcup_i E_i^m \tag{1.3}$$

называется *собственным разбиением Фибоначчи*. Оно состоит из полуинтервалов двух видов: G_j^m длины g_m и E_i^m длины e_m, и отношение этих длин равно $e_m/g_m = \tau$ для $m = 0, 2, 4, \ldots$ и $g_m/e_m = \tau$ для $m = 1, 3, 5, \ldots$. Для вычисления длин имеются удобные формулы

$$g_m = \tau^{-(2[m/2]+2)}, \quad e_m = \tau^{-(2[(m+1)/2]+1)}. \tag{1.4}$$

Если ε не является собственным значением, то разбиение $\mathrm{Til}\,(\varepsilon)$ называется *несобственным*. Для m четного и $\varepsilon_m \le \varepsilon \le \varepsilon_{m+1}$ разбиение

$$\mathrm{Til}\,(\varepsilon) = \bigsqcup_j G_j^m \sqcup \bigsqcup_i E_i^m \tag{1.5}$$

получается из (1.3) с помощью подразбиения $G_j^m = GG_j^m(\varepsilon) \oplus G_j^m(\varepsilon)$, $E_i^m = GE_i^m(\varepsilon) \oplus E_i^m(\varepsilon)$, в котором левые полуинтервалы имеют длину $|GG_j^m(\varepsilon)| = |GE_i^m(\varepsilon)| = \varepsilon - \varepsilon_m$. Следовательно, для $\varepsilon = \varepsilon_m$ разбиение $\mathrm{Til}\,(\varepsilon)$ (1.5) совпадает с собственным разбиением $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m)$, а при $\varepsilon = \varepsilon_{m+1}$ разбиение $\mathrm{Til}\,(\varepsilon)$ переходит в следующее собственное разбиение

$$\mathrm{Til}\,(\varepsilon_{m+1}) = \bigsqcup_j G_j^{m+1} \sqcup \bigsqcup_i E_i^{m+1}, \tag{1.6}$$

где

$$\bigsqcup_j G_j^{m+1} = \bigsqcup_j GG_j^m(\varepsilon_{m+1}) \sqcup \bigsqcup_i GE_i^m(\varepsilon_{m+1}),$$
$$\bigsqcup_i E_i^{m+1} = \bigsqcup_i E_i^m(\varepsilon_{m+1}).$$

Если уровень m нечетный, то разбиение $\mathrm{Til}\,(\varepsilon)$ (1.5) получается подразбиением $G_j^m = EG_j^m(\varepsilon) \oplus G_j^m(\varepsilon)$, $E_i^m = EE_i^m(\varepsilon) \oplus E_i^m(\varepsilon)$, где $|EG_j^m(\varepsilon)| = |EE_i^m(\varepsilon)| = \varepsilon - \varepsilon_m$. При $\varepsilon = \varepsilon_{m+1}$ собственное разбиение $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_{m+1})$ образуется из полуинтервалов

$$\bigsqcup_j G_j^{m+1} = \bigsqcup_j G_j^m(\varepsilon_{m+1}),$$
$$\bigsqcup_i E_i^{m+1} = \bigsqcup_j EG_j^m(\varepsilon_{m+1}) \sqcup \bigsqcup_i EE_i^m(\varepsilon_{m+1}).$$

Приведенная конструкция описывает непрерывную перестройку собственных разбиений при переходе на следующий уровень. На рис. 1.1 процесс перестройки показан для первых четырех собственных разбиений Фибоначчи $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m)$.

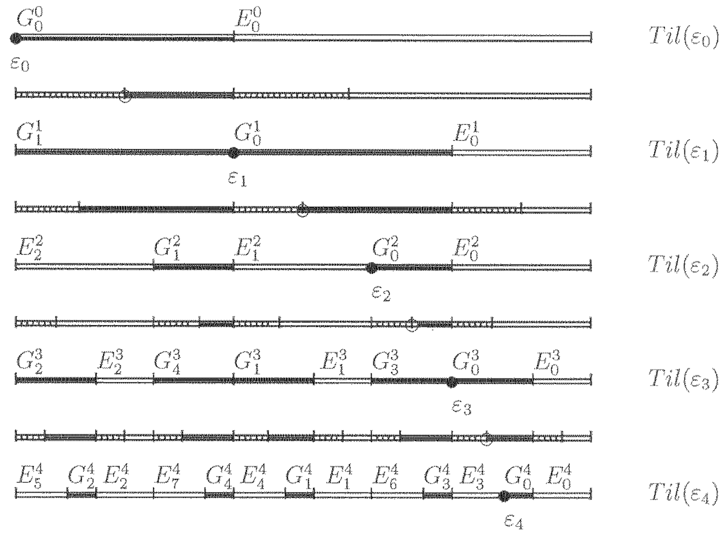

Рис. 1.1. Разбиения Фибоначчи $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m)$ для $m = 0, \ldots, 4$.

1.3. Глобальные координаты. Для любых целых j, i обозначим $I[j, i)$ полуинтервал $[\langle j\tau\rangle, \langle i\tau\rangle)$ из $I = [0, 1)$. При этом предполагается, что $\langle j\tau\rangle < \langle i\tau\rangle$, и если $i = 0$, то полагаем $I[j, 0) = [\langle j\tau\rangle, 1\rangle)$. Пусть m четное. Тогда в *координатах* собственное разбиение Фибоначчи $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m)$ (1.3) имеет представление [4]

$$\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m) = \bigsqcup_{0 \leqslant k < F_{m+1}} (G_k^m + E_k^m) \sqcup \bigsqcup_{F_{m+1} \leqslant k < F_{m+2}} E_k^m, \tag{1.7}$$

где полуинтервалы G_k^m и E_k^m определяются равенствами

$$G_k^m = I[k^+, k^-), \;\; E_k^m = I[k^-, k), \tag{1.8}$$

при этом использованы сокращения $k^+ = k + F_m$, $k^- = k - F_{m+1}$. Полуинтервалы G_k^m, E_k^m из разбиения (1.7) имеют длины (1.4) и получаются последовательными сдвигами начальных полуинтервалов

$$G_{k+1}^m \equiv G_k^m + \tau \bmod 1, \tag{1.9}$$

где $0 \le k < F_{m+1}$ и $G_0^m = I[F_m, -F_{m+1}) = I[\langle F_m\rangle, \langle -F_{m+1}\rangle)$, и –

$$E_{k+1}^m \equiv E_k^m + \tau \bmod 1, \tag{1.10}$$

где $0 \le k < F_{m+2}$ и $E_0^m = I[-F_{m+1}, 0) = [\langle -F_{m+1}\tau\rangle, 1)$. Аналогично для нечетных уровней m собственные разбиения $\operatorname{Til}(\varepsilon_m)$ (1.3) представляются в виде суммы

$$\operatorname{Til}(\varepsilon_m) = \bigsqcup_{0\leqslant k<F_{m+1}} (G_k^m + E_k^m) \sqcup \bigsqcup_{F_{m+1}\leqslant k<F_{m+2}} G_k^m, \qquad (1.11)$$

полуинтервалы G_k^m и E_k^m в этом случае задаются формулами

$$G_k^m = I[k^-, k^=), \quad E_k^m = I[k^=, k), \qquad (1.12)$$

где $k^- = k - F_m$, $k^= = k - F_{m+2}$, и полуинтервалы связаны между собой сдвигами

$$G_{k+1}^m \equiv G_k^m + \tau \bmod 1, \qquad (1.13)$$

где $0 \le k < F_{m+2}$, $G_0^m = I[-F_m, -F_{m+2}) = [\langle -F_m\tau\rangle, \langle -F_{m+2}\tau\rangle)$, и

$$E_{k+1}^m \equiv E_k^m + \tau \bmod 1, \qquad (1.14)$$

где $0 \le k < F_{m+1}$ и $E_0^m = I[-F_{m+2}, 0) = [\langle -F_{m+2}\tau\rangle, 1)$.

1.4. Простой сдвиг и собственные разбиения Фибоначчи. Как следствие из соотношений (1.9), (1.10) и (1.13), (1.14) получаем, что полуинтервалы

$$G_k^m = S^k(G_0^m), \quad E_k^m = S^k(E_0^m) \qquad (1.15)$$

– суть S^k-образы начальных полуинтервалов G_0^m и E_0^m, где S^k обозначает k-композицию *простого сдвига* единичного полуинтервала

$$I \xrightarrow{S} I: \quad x \longmapsto S(x) = x + \tau \bmod 1. \qquad (1.16)$$

Формулы (1.15) и равенства (1.8), (1.12) дают основание называть индексы k *глобальными координатами* полуинтервалов G_k^m, E_k^m в разбиениях $\operatorname{Til}(\varepsilon_m)$. Используя равенства (1.15), разбиения $\operatorname{Til}(\varepsilon_m)$ можно переписать в виде

$$\operatorname{Til}(\varepsilon_m) = \\ = \bigsqcup_{0\leqslant k<F_{m+1}} (S^k(G_0^m) \sqcup S^k(E_0^m)) \sqcup \bigsqcup_{0\leqslant F_{m+1}\le k<F_{m+2}} S^k(E_0^m), \qquad (1.17)$$

для m четных, и –

$$\operatorname{Til}(\varepsilon_m) = \bigsqcup_{0\leqslant k<F_{m+2}} (S^k(G_0^m) \sqcup S^k(E_0^m)) \sqcup \bigsqcup_{0\leqslant F_{m+1}\le k<F_{m+1}} S^k(G_0^m)$$

для m нечетных. Пусть m четное. Согласно (1.11) правая часть равенства (1.17) представляет собой разбиение единичного полуинтервала I. Поэтому действуя на него сдвигом S приходим к еще одному разбиению

$$S(\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m)) = \mathrm{Til}\,(\varepsilon_m) \setminus (G_0^m \oplus E_0^m) \oplus (E_{F_{m+2}}^m \oplus G_{F_{m+1}}^m), \qquad (1.18)$$

где $E_{F_{m+2}}^m = S^{F_{m+2}}(E_0^m)$ и $G_{F_{m+1}}^m = S^{F_{m+1}}(G_0^m)$. Причем все слагаемые справа в (1.18) записаны в своем истинном порядке. Разбиение (1.18) вытекает из равенства

$$G_0^m \oplus E_0^m = E_{F_{m+2}}^m \oplus G_{F_{m+1}}^m. \qquad (1.19)$$

Аналогично, используя разложение (1.11), для нечетных m, получаем

$$S(\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m)) = \mathrm{Til}\,(\varepsilon_m) \setminus (G_0^m \oplus E_0^m) \oplus (E_{F_{m+1}}^m \oplus G_{F_{m+2}}^m), \qquad (1.20)$$

при этом

$$G_0^m \oplus E_0^m = E_{F_{m+1}}^m \oplus G_{F_{m+2}}^m. \qquad (1.21)$$

Равенства (1.18) и (1.20) показывают, что действие простого сдвига S на собственное разбиение Фибоначчи $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m)$ сводится к перекладыванию двух его крайних правых полуинтервалов – это основная структурная теорема, доказанная в [4].

1.5. Квазилокальные координаты. Для собственных разбиений Фибоначчи $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m)$ (1.7), (1.11) существуют два алгоритма [4] построения последовательности примыкающих друг к другу полуинтервалов G_k^m, E_k^m.

Алгоритм 1 для четных m. *Первый этап.* Справа налево строим последовательность из одних только полуинтервалов G_k^m:

$$\ldots, G_{k+}^m, G_k^m, \ldots, G_0^m \qquad (1.22)$$

по правилу

$$k \mapsto k^+ \bmod F_{m+1}, \qquad (1.23)$$

где $k^+ = k + F_m$ и в (1.23) $\mathrm{mod} F_{m+1}$ означает, что в качестве k^+ выбирается вычет по $\mathrm{mod} F_{m+1}$, т.е. $0 \le k^+ \mod F_{m+1} < F_{m+1}$. *Второй этап.* Расширяем последовательность (1.22) с помощью подстановок

$$\begin{array}{ccc} & G_k^m & \\ & \downarrow & \\ E_{k+F_m}^m & G_k^m & E_k^m \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} G_k^m & \\ \downarrow & \\ G_k^m & E_k^m \end{array} \qquad (1.24)$$

для индексов $k \geqslant F_{m-1}$ и $0 \leqslant k < F_{m-1}$ соответственно.

Алгоритм 2 для нечетных m. *Первый этап.* Строится последовательность

$$\ldots, E^m_{k^*}, E^m_k, \ldots, E^m_0 \tag{1.25}$$

по правилу

$$k \mapsto k^* = k^+ \bmod F_{m+1}, \tag{1.36}$$

где $k^+ = k + F_{m-1}$ (ср. (1.23)). *Второй этап.* Дополняем последовательность (1.25) полуинтервалами G^m_k с помощью подстановок

$$\begin{array}{ccc} & E^m_k & \\ & \downarrow & \\ G^m_k & E^m_k & G^m_{k+F_m} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} & E^m_k \\ & \downarrow \\ G^m_k & E^m_k \end{array} \tag{1.27}$$

для индексов $k \geqslant F_{m-1}$ и $k < F_{m-1}$ соответственно.

Пусть $\mathrm{Til}(\varepsilon_m)$ – собственное разбиение (1.7) или (1.11). Тогда соответствующий алгоритм определяет естественный порядок следования его полуинтервалов:

$$\mathrm{Til}(\varepsilon_m) = \cdots \oplus G^m_{k^*} \oplus E^m_{k^*} \oplus G^m_k \oplus E^m_k \oplus \cdots \oplus G^m_0 \oplus E^m_0, \tag{1.28}$$

Если m четное, то сумма (1.28) содержит F_{m+1} различных полуинтервалов G^m_k с индексами $0 \leqslant k < F_{m+1}$ и F_{m+2} полуинтервалов E^m_k с индексами $0 \leqslant k < F_{m+2}$. В случае нечетного m сумма (1.28) содержит F_{m+2} полуинтервалов G^m_k с индексами $0 \leqslant k < F_{m+2}$ и F_{m+1} полуинтервалов E^m_k с индексами $0 \leqslant k < F_{m+1}$.

Первоначально индексы k у полуинтервалов G^m_k и E^m_k использовались как их глобальные координаты. В формулировках алгоритмов 1, 2 индексы k напрямую уже не связаны с глобальными координатами, а определяют через формулы (1.23) и (1.26) *локальный порядок* следования друг за другом полуинтервалов G^m_k и E^m_k по отдельности. Взаимосвязь между этими двумя видами полуинтервалов определяется подстановками (1.24) и (1.27). Сами подстановки содержат числа Фибоначчи F_{m-1}, F_m, F_{m+1}, определяемые номером m разбиения $\mathrm{Til}(\varepsilon_m)$. Отсюда следует невозможность построения собственных разбиений Фибоначчи $\mathrm{Til}(\varepsilon_m)$, используя только локальные правила, не зависящие от m. По этой причине индексы k называются *квазилокальными координатами* полуинтервалов G^m_k и E^m_k в разбиениях $\mathrm{Til}(\varepsilon_m)$.

Применение подстановок позволяет переходить с одного уровня разбиений на другой. Пусть, в зависимости от четности уровня m, по алгоритмам 1, 2 построена последовательность полуинтервалов

$$\ldots, G^m_k, E^m_k, \ldots, G^m_0, E^m_0 \tag{1.29}$$

и для следующего номера $m+1$ по своим алгоритмам 1, 2 построена другая последовательность

$$\ldots, G_k^{m+1}, E_k^{m+1}, \ldots, G_0^{m+1}, E_0^{m+1}. \tag{1.30}$$

Тогда если m четное, то последовательность (1.29) отображается в последовательность (1.30) с помощью подстановок

$$\begin{array}{c} G_k^m \\ \downarrow \\ G_{k+F_{m+2}}^{m+1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} E_k^m \\ \downarrow \\ G_k^{m+1} \quad E_k^{m+1} \end{array} \tag{1.31}$$

для индексов $0 \leqslant k < F_{m+1}$ и $0 \leqslant k < F_{m+2}$ соответственно. Если же m нечетное, то последовательность (1.29) отображается в (1.30) через подстановки

$$\begin{array}{c} G_k^m \\ \downarrow \\ E_{k+F_{m+1}}^{m+1} \quad G_k^{m+1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} E_k^m \\ \downarrow \\ E_k^{m+1} \end{array} \tag{1.32}$$

для индексов $0 \leqslant k < F_{m+2}$ и $0 \leqslant k < F_{m+1}$ соответственно.

2. Двухцветный сдвиг и динамические графы

2.1. Динамическое разбиение. Используя собственные значения ε_m (1.1), разобьем I на прилегающие друг к другу полуинтервалы упорядеченными точками

$$\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < \varepsilon_6 < \varepsilon_7 < \varepsilon_9 < \varepsilon_{10} < \varepsilon_{12} < \ldots,$$

где индексы $m \equiv 0, 1, 3, 4 \bmod 6$. Обозначим соответствующие полуинтервалы через

$$V^m = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m), \quad C^m = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2}) \tag{2.1}$$

для $m \equiv 1 \bmod 3$, и пусть $W^m = V^m \oplus C^m$. Из (1.2) получаем для длин $c_m = |C_m|, v_m = |V_m|$ полуинтервалов (2.1) равенства

$$c_m = v_m = \tau^{-(m+1)}. \tag{2.2}$$

Исследование сдвига S_ε опирается на следующее *динамическое разбиение*

$$I = W^1 \oplus W^4 \oplus W^7 \oplus W^{10} \oplus \cdots \tag{2.3}$$

Тип поведения двухцветного сдвига S_ε для $\varepsilon \in W^m$ зависит от принадлежности $\varepsilon \in V^m$ или C^m и вида уровня $m \equiv 1 \bmod 6$ или $m \equiv 4 \bmod 6$. В дальнейшем указанные четыре случая будут разделяться.

2.2. δ-разбиения. Роль собственных разбиений Фибоначчи $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m)$ состоит в том, что с помощью $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m)$ и дополнительного *простого сдвига*

$$I \xrightarrow{t_\delta} I : x \mapsto t_\delta(x) = x - \delta \bmod 1, \tag{2.4}$$

где $\delta \in I$ будет зависеть от параметра ε, можно задать еще один вид δ-разбиений $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m, \delta)$, согласованых с действием двухцветного сдвига S_ε. В результате возникают некоторые динамические графы D_m^v, D_m^c, полностью описывающие поведение сдвига S_ε, и в частности – его аттрактор Att_ε и область притяжения $\mathrm{Spir}_\varepsilon$. Указанные *$\delta$-разбиения* имеют вид

$$\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m, \delta) = t_\delta(\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m)) \tag{2.5}$$

и состоят, согласно п. 1.2, из полуинтервалов $G_k^m(\delta) = t_\delta(G_k^m)$, $E_k^m(\delta) = t_\delta(E_k^m)$. Если $m \equiv 1 \bmod 6$, то полагаем

$$\delta = (\varepsilon_m - \varepsilon) + g_{m-1} \quad \text{для} \quad \varepsilon \in C^m, \tag{2.6}$$

$$\delta = g_{m-1} \quad \text{для} \quad \varepsilon \in V^m;$$

если же $m \equiv 4 \bmod 6$, то

$$\delta = e_m \quad \text{для всех} \quad \varepsilon \in W^m = V^m \oplus C^m. \tag{2.7}$$

2.3. Динамические графы. *Граф* D вида D_v^m или D_c^m – это ориентированный граф, вершины V которого пронумерованы полуинтервалами $G_k^m(\delta)$ и $E_k^m(\delta)$ из δ-разбиения $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m, \delta)$. Далее, говоря о динамических графах, будем считать синонимами *вершины и полуинтервалы*, *ребра и стрелки*. Если под действием двухцветного сдвига S_ε образ $S_\varepsilon(V_k)$ полуинтервала V_k содержится в некотором полуинтервале V_l из разбиения $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m, \delta)$, то из вершины V_k выходит единственное направленное в вершину V_l ребро. В противном случае имеет место *ветвление* сдвига S_ε, когда из вершины V_k выходят два ребра. В этом случае V_k можно разбить $V_k = V_k^{'} \oplus V_k^{''}$ на два прилегающих друг к другу полуинтервала $V_k^{'}, V_k^{''}$ так, что выполняются включения $S_\varepsilon(V_k^{'}) \subset V_r$, $S_\varepsilon(V_k^{''}) \subset V_s$ для подходящих полуинтервалов V_r, V_s из разбиения $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m, \delta)$. Из приведенного описания графа D следует, что любая точка x единичного полуинтервала I принадлежит одной и только одной вершине-полуинтервалу графа D, скажем V_k, а ее образ $S_\varepsilon(x)$ принадлежит той вершине-полуинтервалу V_l, в которую входит ребро из V_k. Если из V_k выходят два ребра и точка x, предположим, принадлежит левому подинтервалу $V'_k \subset V_k$, то ее образ $S_\varepsilon(x)$ содержится в той вершине V_r, в которую входит одно из двух выходящих из V_k ребер. Будем говоить, что обладающий таким свойством граф D *представляет* двухцветный сдвиг S_ε.

2.4. Обозначения и соглашения, используемые в динамических графах D_v^m и D_c^m (см. рис. 2.1–2.4).

Ребра. Сплошными ребрами соединены полуинтервалы из *аттрактора* Att_ε – инвариантного относительно сдвига S_ε подмножества единичного полуинтервала I, пунктирными ребрами соединяются полуинтервалы из дополнительной к Att_ε области притяжения или, как мы будем в дальнейшем называть, – множества *спиралей* $\mathrm{Spir}_\varepsilon = I \backslash \mathrm{Att}_\varepsilon$. Кружочками на пунктирных ребрах отмечены начала спиралей. Строгие определения множеств Att_ε и $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ будут приведены в п. 3.1. Внутренние стрелки на ребрах обозначают цепи последовательных полуинтервалов с разностью номеров 2. Одинарные стрелки $- > -$ указывают на то, что цепь состоит из полуинтервалов с нечетными номерами, двойные стрелки $- \gg -$ означают, что номера полуинтервалов четные. Обычные стрелки отвечают ребрам графа, при этом жирные стрелки $- \blacktriangleright$ указывают на вход в аттрактор Att_ε.

Раскраска полуинтервалов. Верхние индексы $+,-$ у полуинтервалов $G_k^m(\delta)$, $E_k^m(\delta)$ обозначают их части mod1, содержащиеся соответственно в полуинтервалах $I_\varepsilon^- = [0,\varepsilon)$, $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$. Расположение индексов, например,

$$^{+}G_k^m(\delta)^- =^{+} G_k^m(\delta) \oplus G_k^m(\delta)^- \tag{2.8}$$

показывают, что $G_k^m(\delta)$ разбит на два полуинтервала, при этом $^{+}G_k^m(\delta)$ – левый, а $G_k^m(\delta)^-$ – правый подинтервалы. Если полуинтервалы $G_k^m(\delta)$, $E_k^m(\delta)$ отмечены нижними индексами $G_k^m(\delta)_+$, $E_k^m(\delta)_+$, то это означает их принадлежность целиком полуинтервалу I_ε^+. Неотмеченные нижним индексом $+$ полуинтервалы содержатся в I_ε^-.

Ветвление. В динамическом графе из вершин вида (2.8) выходят два ребра. Будем говорить, что в таких вершинах имеет место S_ε-*ветвление* или *цветное ветвление*. В графах присутствует еще один тип S-*ветвлений*, связанных с перекладыванием сдвигом S полуинтервалов G_0^m и E_0^m.

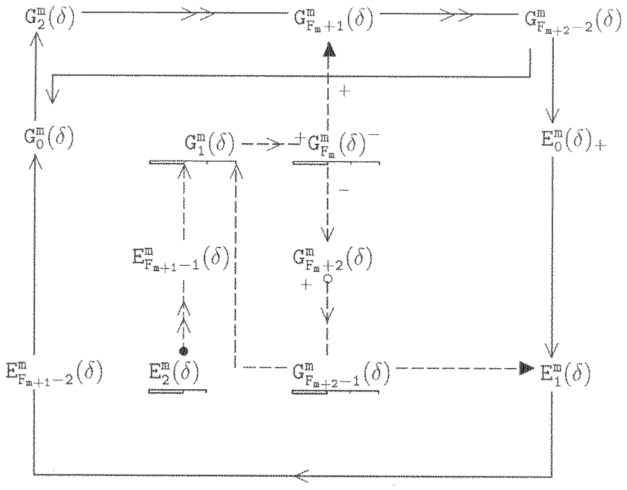

Рис. 2.1. **Динамический граф** D_c^m **для** $m \equiv 1 \bmod 6$, $m > 1$.

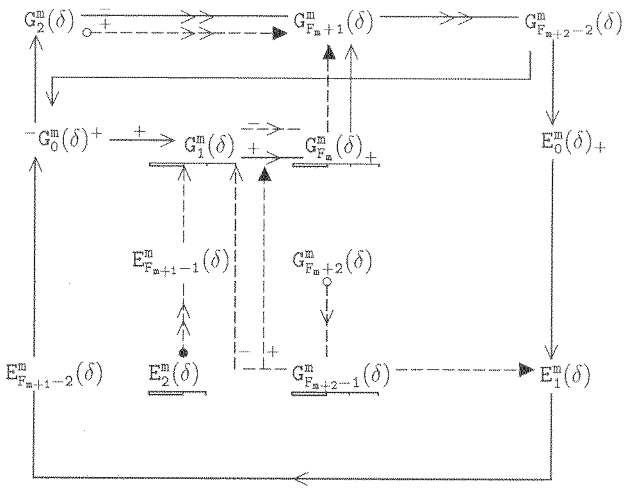

Рис. 2.2. **Динамический граф** D_v^m, $m \equiv 1 \bmod 6$, $m > 1$.

S-ветвления в динамическом графе D_c^m рис. 2.1 для $m \equiv 1 \bmod 6$, $m > 1$ (ср. с перекладыванием (1.21)) имеют вид

$$E_{F_{m+1}-2}^m(\delta) \oplus G_{F_{m+2}-2}^m(\delta) \xmapsto{S_\varepsilon} G_0^m(\delta) \oplus E_0^m(\delta), \tag{2.9}$$

$$E^m_{F_{m+1}-1}(\delta)\oplus G^m_{F_{m+2}-1}(\delta)\xmapsto{S_\varepsilon} G^m_1(\delta)\oplus E^m_1(\delta).$$

На подмножествах слева в (2.9) двухцветный сдвиг S_ε совпадает с композицией $S^2 = S\cdot S$. Стрелки с хвостиком означают наложение левых разбиений на правые.

S_ε-*ветвления* в графе D^m_c представлено наложениями полуинтервалов

$$^+G^m_{F_m}(\delta)\xmapsto{S_\varepsilon}{}^+\ G^m_{F_m+1}(\delta),\quad G^m_{F_m}(\delta)^-\xmapsto{S_\varepsilon} G^m_{F_m+2}(\delta)^-, \tag{2.10}$$

где $G^m_k(\delta) = {}^+G^m_k(\delta)\oplus G^m_k(\delta)^-$ считается разбитым на полуинтервалы в том же отношении, что и цветной полуинтервал (см. (2.8)) $^+G^m_{F_m}(\delta)^- = {}^+G^m_{F_m}(\delta)\oplus G^m_{F_m}(\delta)^-$. Разбиения полуинтервалоа G^m_k для $k\neq F_m$ не связаны с включениями в $I^-_\varepsilon, I^+_\varepsilon$.

Для динамического графа D^m_v рис. 2.2 уровня $m\equiv 1 \bmod 6$, $m>1$, S-*ветвления* (2.9) остаются без изменения, а его S_ε-*ветвление* (2.10) перемещается на полуинтервал (ср. (2.8)) $^-G^m_0(\delta)^+ = {}^-G^m_0(\delta)+G^m_0(\delta)^+$ и принимает вид

$$^-G^m_0(\delta)\xmapsto{S_\varepsilon}{}^-G^m_2(\delta),\quad G^m_0(\delta)^+\xmapsto{S_\varepsilon} G^m_1(\delta)^+. \tag{2.11}$$

Полуинтервалы $G^m_k(\delta) = {}^-G^m_k(\delta)+G^m_k(\delta)^+$ для $k=1,2$ разбиты так, что выполнены два условия: 1) $^-G^m_1(\delta), G^m_1(\delta)^+$ и следующие за ними аналогичные полуинтервалы содержатся в $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ и Att_ε соответственно, что на графе D^v_m отмечено пунктирной и сплошной стрелками; 2) $^-G^m_2(\delta), G^m_2(\delta)^+$ и следующие за ними полуинтервалы содержатся в Att_ε и $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ соответственно, на это указывают сплошная и пунктирная стрелки. Двойные пунктирные стрелки, выходящие из $G^m_{F_{m+2}-1}(\delta)$ в полуинтервал $G^m_1(\delta)$, указывают в какой из его подинтервалов $^-G^m_1(\delta)$ или $G^m_1(\delta)^+$ переводятся сдвигом S_ε соответствующие части из $G^m_{F_{m+2}-1}(\delta)$ после S-ветвления (2.9).

Динамический граф D^m_c рис. 2.3 для уровней $m\equiv 4 \bmod 6$ имеет S-*ветвления* (ср. с перекладыванием полуинтервалов (1.19))

$$E^m_{F_{m+2}-2}(\delta)\oplus G^m_{F_{m+1}-2}(\delta)\xmapsto{S_\varepsilon} G^m_0(\delta)\oplus E^m_0(\delta), \tag{2.12}$$

$$E^m_{F_{m+2}-1}(\delta)\oplus G^m_{F_{m+1}-1}(\delta)\xmapsto{S_\varepsilon} G^m_1(\delta)\oplus E^m_1(\delta),$$

и S_ε-*ветвление* вида

$$^-E^m_{F_{m+1}}(\delta)\xmapsto{S_\varepsilon}{}^-E^m_{F_{m+1}+2}(\delta),\quad E^m_{F_{m+1}}(\delta)^+\xmapsto{S_\varepsilon} E^m_{F_{m+1}+1}(\delta)^+. \tag{2.13}$$

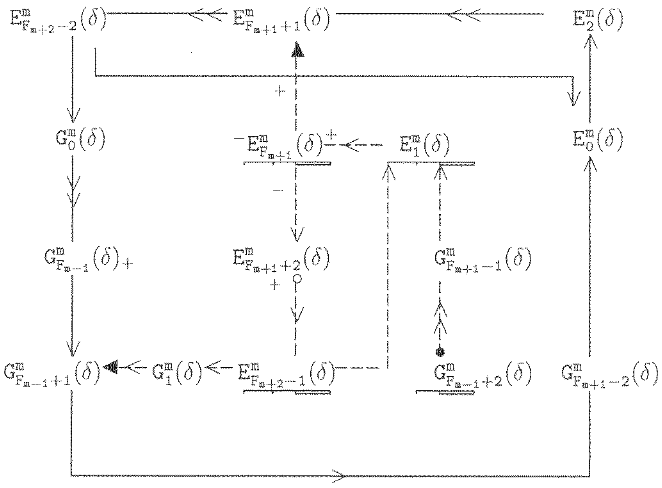

Рис. 2.3. Динамический граф D_c^m, $m \equiv 4 \bmod 6$.

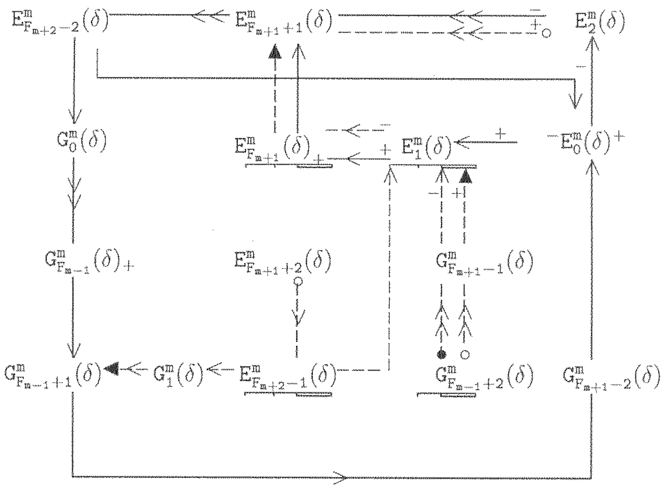

Рис. 2.4. Динамический граф D_v^m, $m \equiv 4 \bmod 6$.

В динамическом графе D_v^m рис. 2.4 для $m \equiv 4 \bmod 6$ сохраняются S-*ветвления* (2.12), а S_ε-*ветвление* перемещается на полуинтервал $^-E_0^m(\delta)^+ = {}^-E_0^m(\delta) + E_0^m(\delta)^+$ и имеет вид (ср. (2.111))

$$^-E_0^m(\delta) \xmapsto{S_\varepsilon} {}^-E_2^m(\delta), \quad E_0^m(\delta)^+ \xmapsto{S_\varepsilon} E_1^m(\delta)^+. \tag{2.14}$$

Разбиения $E_k^m(\delta) = {}^-E_k^m(\delta) + E_k^m(\delta)^+$ для $k = 1, 2$ и следующих за ними полуинтервалов снабжены сплошными и пунктирными стрелками со значками $+$, $-$, указывающими на принадлежность частей этих разбиений множествам Att_ε и $\mathrm{Spir}_\varepsilon$. Двойные пунктирные стрелки, выходящие из $G^m_{F_{m+1}-1}(\delta)$, указывают на то, что полуинтервалы $^-G^m_{F_{m+1}-1}(\delta)$ и $G^m_{F_{m+1}-1}(\delta)^+$ переводятся двухцветным сдвигом S_ε соответственно в множества $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ и Att_ε. В [4] доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Двухцветный сдвиг S_ε (1) представим динамическими графами D_c^m (см. рис. 2.1, 2.3) или D_v^m (см. рис. 2.2, 2.4), если параметр ε принадлежит полуинтервалам C^m или V^m (2.1) соответственно.*

3. Аттрактор двухцветного сдвига

3.1. Аттрактор. Удобно аттрактор Att_ε представить в виде цепей из последовательных поуинтервалов, соединенных ребрами графов D_c^m, D_v^m.

В случае уровня $m \equiv 1 \bmod 6$ и $\varepsilon \in C^m$ (2.1), согласно динамическим графам D_c^m (см. рис. 2.1), для *аттрактора* Att_ε имеем разбиение

$$\mathrm{Att}_\varepsilon = \widehat{G_0^m(\delta)} \sqcup \widehat{E_0^m(\delta)} \tag{3.1}$$

на цепи $\widehat{G_0^m(\delta)}$, $\widehat{E_0^m(\delta)}$, которые в обозначениях п. 2.5 можно записать в виде

$$\widehat{G_0^m(\delta)} = G_0^m(\delta) - \gg - G^m_{F_{m+2}-2}(\delta), \tag{3.2}$$

$$\widehat{E_0^m(\delta)} = E_0^m(\delta)_+ \to E_1^m(\delta) - > - E^m_{F_{m+1}-2}(\delta),$$

если $m > 1$, и –

$$\widehat{G_0^1(\delta)} = G_0^1(\delta), \quad \widehat{E_0^1(\delta)} = E_0^1(\delta)_+,$$

если $m = 1$.

Пусть $m \equiv 1 \bmod 6$ и $\varepsilon \in V^m$ (2.1). Согласно динамическим графам D_v^m рис. 2.2, в аттракторе Att_ε появляется S_ε-ветвление п. 2.4, что приводит к его перестройке

$$\mathrm{Att}_\varepsilon = {}^-\widehat{G_0^m(\delta)} \sqcup \widehat{G_0^m(\delta)^+} \sqcup \widehat{E_0^m(\delta)}, \tag{3.3}$$

состоящей из цепей

$${}^-\widehat{G_0^m(\delta)} = {}^- G_0^m(\delta) - \gg -{}^- G_{F_{m+2}-2}^m(\delta), \tag{3.4}$$

$$\widehat{G_0^m(\delta)^+} = G_0^m(\delta)^+ \to G_1^m(\delta)^+ - > - G_{F_m}^m(\delta)_+^+ \to$$
$$\to G_{F_m+1}^m(\delta)^+ - \gg - G_{F_{m+2}-2}^m(\delta)^+,$$

$$\widehat{E_0^m(\delta)} = E_0^m(\delta)_+ \to E_1^m(\delta) - > - E_{F_{m+1}-2}^m(\delta),$$

если $m > 1$, и

$${}^-\widehat{G_0^1(\delta)} = {}^- G_0^1(\delta), \quad \widehat{G_0^1(\delta)^+} = G_0^1(\delta)^+ \to G_1^1(\delta)_+^+, \tag{3.5}$$
$$\widehat{E_0^1(\delta)} = E_0^1(\delta)_+,$$

если $m = 1$.

В случае уровня $m \equiv 4 \bmod 6$ и $\varepsilon \in C^m$ (2.1) из динамических графов D_c^m рис. 2.3 следует

$$\mathrm{Att}_\varepsilon = \widehat{G_0^m(\delta)} \sqcup \widehat{E_0^m(\delta)}, \tag{3.6}$$

где

$$\widehat{G_0^m(\delta)} = G_0^m(\delta) - \gg - G_{F_{m-1}}^m(\delta)_+ \to$$
$$\to G_{F_{m-1}+1}^m(\delta) - > - G_{F_{m+1}-2}^m(\delta), \tag{3.7}$$

$$\widehat{E_0^m(\delta)} = E_0^m(\delta) - \gg - E_{F_{m+2}-2}^m(\delta).$$

Если же уровень $m \equiv 4 \bmod 6$ и $\varepsilon \in V^m$ (2.1), то согласно динамическому графу D_v^m рис. 2.4 S_ε-ветвление преобразует аттрактор Att_ε (3.6) к следующему виду

$$\mathrm{Att}_\varepsilon = \widehat{G_0^m(\delta)} \sqcup {}^-\widehat{E_0^m(\delta)} \sqcup \widehat{E_0^m(\delta)^+}, \tag{3.8}$$

где цепь $\widehat{G_0^m(\delta)}$ осталась без изменений (3.7), а $\widehat{E_0^m(\delta)}$ раздвоилась на цепи

$${}^-\widehat{E_0^m(\delta)} = {}^- E_0^m(\delta) - \gg -{}^- E_{F_{m+2}-2}^m(\delta), \tag{3.9}$$

$$\widehat{E_0^m(\delta)^+} = E_0^m(\delta)^+ \to E_1^m(\delta)^+ - > -E^m_{F_{m+1}}(\delta)^+_+ \to$$
$$\to E^m_{F_{m+1}+1}(\delta)^+ - \gg -E^m_{F_{m+2}-2}(\delta)^+.$$

3.2. Мера аттрактора. Определим *меру* $|\mathrm{Att}_\varepsilon|$ аттрактора Att_ε как сумму длин входящих в него полуинтервалов. Имеет место следующее утверждение [4].

Предложение 3.1. 1. *Пусть аттрактор* Att_ε *определен равенствами* (3.1), (3.3), (3.6) *и* (3.8). *Тогда его мера* $|\mathrm{Att}_\varepsilon|$ *вычисляется по формулам*

$$|\mathrm{Att}_\varepsilon| = \frac{1}{2}(1 + \tau^{-(m+2)}) \tag{3.10}$$

для ε *из полуинтервалов* $C^m = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2})$,

$$|\mathrm{Att}_\varepsilon| = \frac{1}{2}(1 + \tau^{-(m+2)}) + (\varepsilon_m - \varepsilon) \tag{3.11}$$

для ε *из полуинтервалов* $V^m = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m)$ *и любого уровня* $m \equiv 1 \bmod 3$, $m \geq 1$.

2. *Мера* $|\mathrm{Att}_\varepsilon|$ *как функция от* $\varepsilon \in I$ *непрерывна, она убывает на полуинтервалах* V^m, *постоянна на* C^m *и имеет предельное значение*

$$\lim_{\varepsilon \uparrow 1} |\mathrm{Att}_\varepsilon| = \frac{1}{2}.$$

4. Интегральные преобразования, аттрактор и его область притяжения

4.1. Интегральные преобразования. Для $m \equiv 1 \bmod 6$ и $\varepsilon \in C^m$ определение интегрального преобразования (см., например, [7])

$$T_\varepsilon = \int S^{\pm 1} d_\varepsilon \tag{4.1}$$

опирается на следующее разбиение единичного полуинтервала

$$I = [0, \langle\tau\rangle) \oplus [\langle\tau\rangle, 1). \tag{4.2}$$

Функцию распределения $d_\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{N}$, где $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, зададим условиями

$$d_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} F_{m+2}, & \text{если } x \in [0, \langle\tau\rangle), \\ \frac{1}{2}(F_{m+1} + 1), & \text{если } x \in [\langle\tau\rangle, 1). \end{cases} \tag{4.3}$$

Интегральное преобразование T_ε действует на пространстве

$$\widehat{I}_\varepsilon = \{(x,i) : x \in I, 0 \leq i < d_\varepsilon(x)\} \tag{4.4}$$

по правилу

$$T_\varepsilon(x,i) = \begin{cases} (x, i+1), & \text{если } \ i+1 < d_\varepsilon(x), \\ (S^{-1}(x), 0), & \text{если } \ i+1 = d_\varepsilon(x). \end{cases} \tag{4.5}$$

Пусть μ – *нормированная мера Хаара* на торе $I \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, инвариантная относительно сдвига S^{-1}. Она индуцирует *меру* μ_ε на пространстве $\widehat{I}_\varepsilon$ (4.4), удовлетворяющую равенству

$$\mu_\varepsilon((X,i)) = \mu(X) \Big/ \int\limits_I d_\varepsilon(x) d\mu \tag{4.6}$$

на подмножествах вида $(X,i) \subset \widehat{I}_\varepsilon$. Мера μ_ε нормирована и инвариантна относительно интегрального преобразования T_ε (4.1).

Если $m \equiv 1 \bmod 6$ и $\varepsilon \in V^m$, то выберем другое разбиение

$$I = [0, \varepsilon') \oplus [\varepsilon', \langle\tau\rangle) \oplus [\langle\tau\rangle, 1), \tag{4.7}$$

где $\varepsilon' = (\varepsilon - \varepsilon_{m-1})/|I^m(\delta)| = \tau^m(\varepsilon - \varepsilon_{m-1})$. Функцию d_ε зададим условиями

$$d_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} F_{m+2}, & \text{если } \ x \in [0, \varepsilon'), \\ \dfrac{1}{2} F_{m+2} + 1, & \text{если } \ x \in [\varepsilon', \langle\tau\rangle), \\ \dfrac{1}{2}(F_{m+1} + 1), & \text{если } \ x \in [\langle\tau\rangle, 1). \end{cases} \tag{4.8}$$

Пространство представления $\widehat{I}_\varepsilon$ и правило действия на нем (4.5) интегрального преобразования T_ε (4.1) определяются в соответствии с распределением d_ε (4.8).

В случае $m \equiv 4 \bmod 6$ и $\varepsilon \in C^m$ перекладываем полуинтервалы в разбиении (4.2)

$$I = [0, \langle-\tau\rangle) \oplus [\langle-\tau\rangle, 1) \tag{4.9}$$

и функцию распределения d_ε положим равной

$$d_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(F_{m+1} + 1), & \text{если } \ x \in [0, \langle-\tau\rangle), \\ \dfrac{1}{2} F_{m+2}, & \text{если } \ x \in [\langle-\tau\rangle, 1). \end{cases} \tag{4.10}$$

Если же уровень $m \equiv 4 \bmod 6$ и $\varepsilon \in V^m$, то I разбиваем следующим образом

$$I = [0, \langle -\tau \rangle) \oplus [\langle -\tau \rangle, \varepsilon') \oplus [\varepsilon', 1), \tag{4.11}$$

где

$$\varepsilon' = \langle -\tau \rangle + (\varepsilon - \varepsilon_{m-1})/|I^m(\delta)| = \langle -\tau \rangle + \tau^m(\varepsilon - \varepsilon_{m-1}),$$

а функцию распределения d_ε определяем условиями

$$d_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(F_{m+1} + 1), & \text{если} \quad x \in [0, \langle -\tau \rangle), \\ \dfrac{1}{2}F_{m+2}, & \text{если} \quad x \in [\langle -\tau \rangle, \varepsilon'), \\ \dfrac{1}{2}F_{m+2} + 1, & \text{если} \quad x \in [\varepsilon', 1). \end{cases} \tag{4.12}$$

В обоих случаях для $m \equiv 4 \bmod 6$ интегральное преобразование T_ε имеет вид

$$T_\varepsilon = \int S d_\varepsilon. \tag{4.13}$$

Пространство представления $\widehat{I}_\varepsilon$ (4.4) согласовано с распределениями d_ε (4.10), (4.12), а правило действия на нем (4.5) естественно заменяется на правило

$$T_\varepsilon(x, i) = \begin{cases} T_\varepsilon(x, i+1), & \text{если} \quad i + 1 < d_\varepsilon(x), \\ (S(x), 0), & \text{если} \quad i + 1 = d_\varepsilon(x). \end{cases}$$

Нормирующий множитель в (4.6) тесно связан с мерой аттрактора Att_ε п. 3.2. Разбиения полуинтервала $I^m(\delta)$ п. 2.2 подобны соответствующим разбиениям единичного полуинтервала I. Поскольку общий коэффициент подобия равен $|I|/|I^m(\delta)| = \tau^m$ (2.6), то нормирующий множитель и мера аттрактора связаны соотношением

$$\int\limits_I d_\varepsilon(x) d\mu = \tau^m \cdot |\mathrm{Att}_\varepsilon|, \tag{4.14}$$

где мера $|\mathrm{Att}_\varepsilon|$ вычисляется по формулам (3.10) и (3.11).

4.2. Изоморфизм. Соглано динамическим графам D_c^m, D_v^m рис. 2.1–2.4 и разложениям (3.1), (3.3), (3.6) и (3.8), аттрактор Att_ε

инвариантен относительно действия двухцветного сдвига S_ε. Поэтому формально имеем право рассмотреть *индуцированное отображение* $S_\varepsilon|\mathrm{Att}_\varepsilon$ и определить *меру* $\mu|\mathrm{Att}_\varepsilon$, полагая

$$\mu|\mathrm{Att}_\varepsilon(X) = \mu(X)/|\mathrm{Att}_\varepsilon|, \tag{4.15}$$

где $|\mathrm{Att}_\varepsilon| = \mu(\mathrm{Att}_\varepsilon)$ – отвечающая λ мера аттрактора. Основные свойства производной $S_\varepsilon|\mathrm{Att}_\varepsilon$ содержатся в следующем утверждении [4].

Теорема 4.1. 1. *Аттрактор* $\mathrm{Att}_\varepsilon \subset I$ (3.1), (3.3), (3.6), (3.8) *и определенная на нем мера* $\mu|\mathrm{Att}_\varepsilon$ (4.15) *инвариантны относительно действия двухцветного сдвига* S_ε (1), *являющегося автоморфизмом аттрактора* Att_ε. *Индуцированное отображение* $S_\varepsilon|\mathrm{Att}_\varepsilon$ *метрически изоморфно*

$$S_\varepsilon|\mathrm{Att}_\varepsilon \simeq \int S^{\pm 1} d_\varepsilon \tag{4.16}$$

интегральному преобразованию T_ε (4.1), (4.13) *простого сдвига* $S^{\pm 1}$ *единичного полуинтервала* I *относительно распределения* d_ε (4.3), (4.8), (4.10), (4.12). *Если* $\varepsilon \in W^m$ (2.1), *то степень в* $S^{\pm 1}$ *определяется четностью уровня* m.

2. *Относительно инвариантной меры* $\mu|\mathrm{Att}_\varepsilon$ *индуцированное отображение* $S_\varepsilon|\mathrm{Att}_\varepsilon$ *является эргодическим автоморфизмом аттрактора* Att_ε.

3. *Для любой начальной точки* $x \in \mathrm{Att}_\varepsilon$ *точки ее орбиты* $x_k = S_\varepsilon^k(x)$, *где* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *равномерно распределены на множестве* Att_ε *относительно меры* $\mu|\mathrm{Att}_\varepsilon$.

4. *Для любого* $\varepsilon \in I$ *найдется минимальное* $k(\varepsilon) = 0, 1, 2, \ldots$ *такое, что существует строго убывающая последовательность образов*

$$I \supset S_\varepsilon^1(I) \supset S_\varepsilon^2(I) \supset \ldots \supset S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(I), \tag{4.17}$$

стабилизирующаяся на последнем множестве $S_\varepsilon^k(I) = S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(I)$ *для всех* $k \geq k(\varepsilon)$. *Аттрактор* Att_ε *удовлетворяет равенству*

$$\mathrm{Att}_\varepsilon = S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(I). \tag{4.18}$$

5. Локальные и глобальные спирали

5.1. Измельчение разбиений. Как будет показано далее, поведение двухцветного сдвига S_ε на множестве спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ обладает более тонкой структурой по сравнению с поведением ограничения сдвига S_ε на его аттрактор Att_ε. Чтобы описать эту структуру, приходится измельчать δ-разбиения $\mathrm{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ (2.6). Упомянутое измельчение подразумевает повышение уровня разбиения $m \to m+2$ на два порядка. Этому переходу отвечает некоторая подстановка для полуинтервалов.

Пусть, в зависимости от четности уровня m, по алгоритмам (1.22)–(1.24) или (1.25)–(1.27) построена последовательность полуинтервалов

$$\ldots, G_k^m, E_k^m, \ldots, G_0^m, E_0^m$$

и для следующего номера $m+1$ по своим алгоритмам 1 или 2 построена другая последовательность

$$\ldots, G_k^{m+1}, E_k^{m+1}, \ldots, G_0^{m+1}, E_0^{m+1}.$$

Тогда если m четное, то последовательность (1.29) отображается в последовательность (1.30) с помощью подстановок

$$\begin{array}{c} G_k^m \\ \downarrow \\ G_{k+F_{m+2}}^{m+1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} & E_k^m \\ & \downarrow \\ G_k^{m+1} & E_k^{m+1} \end{array} \tag{5.1}$$

для индексов $0 \leqslant k < F_{m+1}$ и $0 \leqslant k < F_{m+2}$ соответственно. Если же m нечетное, то последовательность (1.29) отображается в (1.30) через подстановки

$$\begin{array}{cc} & G_k^m \\ & \downarrow \\ E_{k+F_{m+1}}^{m+1} & G_k^{m+1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} E_k^m \\ \downarrow \\ E_k^{m+1} \end{array} \tag{5.2}$$

для индексов $0 \leqslant k < F_{m+2}$ и $0 \leqslant k < F_{m+1}$ соответственно.

В случае нечетного m, применяя (5.2) и (5.1), получаем следующие разбиения

$$\begin{aligned} \underline{G_k^m} &= G_{k+F_{m+1}}^{m+2} \oplus E_{k+F_{m+1}}^{m+2} \oplus G_{k+F_{m+3}}^{m+2}, \\ \underline{E_k^m} &= G_k^{m+2} \oplus E_k^{m+2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Согласно формулам (1.4), полуинтервалы G_k^{m+2}, E_k^{m+2} имеют длины $|G_k^{m+2}| = \tau^{-(m+3)}$, $|E_k^{m+2}| = \tau^{-(m+4)}$. Если m четное, то разбиения принимают вид

$$\begin{aligned} \underset{---}{G_k^m} &= E_{k+2F_{m+2}}^{m+2} \oplus G_{k+F_{m+2}}^{m+2}, \\ \underset{---}{E_k^m} &= E_{k+F_{m+2}}^{m+2} \oplus G_k^{m+2} \oplus E_k^{m+2}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Измельченные полуинтервалы G_k^{m+2}, E_k^{m+2} теперь в силу формул (1.4) имеют длины $|G_k^{m+2}| = \tau^{-(m+4)}$, $|E_k^{m+2}| = \tau^{-(m+3)}$.

В левых частях формул (5.3) и (5.4) использованы обозначения, указывающие количество полуинтервалов разбиения, порядок их следования и относительные длины. В дальнейшем нам придется рассматривать не полные полуинтервалы G_k^m, E_k^m, а только некоторые их части. Чтобы не использовать каждый раз сложные индексы для указания этих частей, воспользуемся следующими обозначениями. Объясним их на примере разбиения полуинтервала G_k^m из (5.3):

$$\underset{--}{G_k^m} = G_{k+F_{m+1}}^{m+2} \oplus E_{k+F_{m+1}}^{m+2}, \qquad \underset{-\cdot}{G_k^m} = G_{k+F_{m+1}}^{m+2}.$$

Здесь точки указывают, какие из подынтервалов в правой части разбиения (5.3) пропущены.

5.2. Спирали нечетного уровня. Пусть $m \equiv 1 \bmod 6$, $m > 1$, и ε принадлежит полуинтервалу $C^m = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2})$ (2.1). Согласно динамическому графу D_c^m (рис. 2.1), множество спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ состоит из следующих *локальных спиралей*:

$$s(\underset{\cdot--}{G_{F_{m+2}}^m}(\delta)) =\overset{-}{\longrightarrow} \underset{\cdot--}{G_{F_{m+2}}^m}(\delta)- > -\underset{\cdot--}{G_{F_{m+2}-1}^m}(\delta)- \blacktriangleright, \tag{5.5}$$

$$s(\underset{-\cdot\cdot}{G_{F_{m+2}}^m}(\delta) =\overset{-}{\longrightarrow} \underset{-\cdot\cdot}{G_{F_{m+2}}^m}(\delta)- > -\underset{\cdot\cdot-}{G_{F_{m+2}-1}^m}(\delta) \rightarrow$$

$$\underset{\cdot\cdot-}{G_1^m}(\delta)- > -\underset{\cdot\cdot-}{G_{F_m}^m}(\delta)\overset{+}{-} \blacktriangleright,$$

$$s(\underset{--}{E_2^m}(\delta) = \underset{--}{E_2^m}(\delta)- \gg -\underset{--}{E_{F_{m+1}-1}^m}(\delta) \rightarrow \underset{--}{G_1^m}(\delta)- > -\underset{--}{G_{F_m}^m}(\delta) \overset{+}{\rightarrow} .$$

Разбиения полуинтервалов в (5.5) совпадает с разбиениями из (5.3). Стрелка $- \blacktriangleright$ указывает на вход в аттрактор Att_ε, а стрелка со знаком $\overset{+}{-} \blacktriangleright$ относися только к пересечению ${}^{+}G_{F_m}^m(\delta) =$

$G^m_{F_m}(\delta) \cap I^+_\varepsilon$ с полуинтервалом $I^+_\varepsilon = [\,\varepsilon, 1)$. Склейка локальных спиралей (5.5) происходит по дополнительным к ${}^+G^m_{F_m}(\delta)$ частям полуинтервала $G^m_{F_m}(\delta)^- = G^m_{F_m}(\delta) \cap I^-_\varepsilon$. *Склейка* осуществляется с помощью двухцветного сдвига

$$S_\varepsilon : \underset{***}{G^m_{F_m}}(\delta)^- \xrightarrow{-} \underset{***}{G^m_{F_{m+2}}}(\delta)^-, \tag{5.6}$$

где звездочками отмечены соответствующие полуинтервалы из (5.5) и знак минус на стрелке указывает, что сдвиг S_ε действует только на тот полуинтервал из $G^m_{F_m}(\delta)$, который содержится в I^-_ε. Отметим, что знак минус у полуинтервала справа в (5.6) уже не связан с его пересечением с полуинтервалом I^-_ε.

Длина спирали равна количеству входящих в нее полуинтервалов. Локальные спирали (5.5) имеют следующие длины

$$\sharp s(G^m_{F_{m+2}}(\delta)) = f_{m+1}, \quad \sharp s(G^m_{F_{m+2}}(\delta)) = f_{m+2},$$
$$\sharp s(E^m_2(\delta)) = f_{m+2}, \tag{5.7}$$

где числа $f_n = [F_n/2]$ обладают аддитивным свойством

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} + 1, \quad \text{если} \quad n \equiv 0 \mod 3, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{если} \quad n \equiv 1 \text{ или } 2 \mod 3. \end{aligned} \tag{5.8}$$

При рассмотрении действия двухцветного сдвига S_ε на множестве спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon$, вместо разбиения (2.3), необходимо перейти к более мелкому разбиению

$$I = \{0\} \oplus J^1 \oplus J^2 \oplus \ldots \oplus J^n \oplus \ldots$$

на полуинтервалы $J^n = (\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n]$ длины $|J^n| = \tau^{-(n+1)}$. Для любого $\varepsilon \in J^n$, определим разность $\Delta = \Delta_n = \varepsilon - \varepsilon_{n-1}$. Пусть $X = [\,\alpha, \beta)$ – произвольный полуинтервал длины $|X| \geq |J^n|$. С помощью разности Δ определим два дополняющих друг друга *оператора обрезания*

$$\overleftarrow{\Delta} X = [\beta - \Delta, \beta), \qquad \overleftarrow{\Delta}^c X = [\alpha, \beta - \Delta), \tag{5.9}$$

обладающих свойством $\overleftarrow{\Delta}^c X \oplus \overleftarrow{\Delta} X = X$. Склейка (5.6) индуцирует отображение

$$x \longmapsto x' = x + e_m$$

для x из полуинтервала $\overleftarrow{\Delta}(\underset{-\,-}{E^m_2(\delta)} \oplus \underset{-\,\cdot\cdot}{G^m_{F_m+2}(\delta)})$, где $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_m$ и $e_m = |E^m_2(\delta)|$. Это отображение определяется композицией $x \longmapsto$

$x_{\text{end}} \xmapsto{S_\varepsilon} x'$, т.е. $x' = S_\varepsilon(x_{\text{end}})$, где x_{end} – образ точки x в конце $G^m_{F_m}(\delta)$ локальной спирали из (5.5), началу которой принадлежит x. Отображение $x \mapsto x'$ задает, согласно динамическому графу D^m_c рис. 2.1, *склейку* локальных спиралей из (5.5). Образование *глобальных спиралей* схематически показано на *графе склейки* G^m_c (см. рис. 5.1).

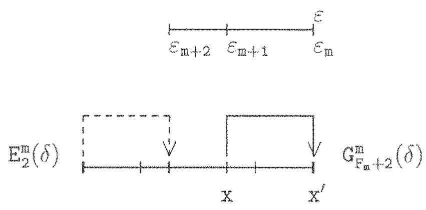

Рис. 5.1. Граф склейки G^m_c уровня $m \equiv 1 \bmod 6$, $m > 1$.

Пусть ε принадлежит полуинтервалу $J^{m+1} = (\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}]$ с номером $m > 1$. Используя отображение склейки $x \mapsto x'$, из (5.5) получаем следующие три *глобальные спирали*

$$\overleftarrow{\Delta}^c s(E^m_2(\delta) \oplus G^m_{F_m+2}(\delta)), \quad \overleftarrow{\Delta}^c s(G^m_{F_m+2}(\delta)), \tag{5.10}$$

$$\overleftarrow{\Delta} s(E^m_2(\delta) \oplus G^m_{F_m+2}(\delta)) \longrightarrow \overleftarrow{\Delta} s(G^m_{F_m+2}(\delta)),$$

так как

$$\overleftarrow{\Delta}(E^m_2(\delta) \oplus G^m_{F_m+2}(\delta)) = \overleftarrow{\Delta}(E^m_2(\delta) \oplus G^m_{F_m+2}(\delta))$$

для $\varepsilon \in J^{m+1}$. Спирали (5.10) в силу (5.7) имеют соответственно длины f_{m+2}, f_{m+1} и $f_{m+3} = f_{m+2} + f_{m+1}$ согласно аддитивному свойству (5.8).

Если ε принадлежит $J^{m+2} = (\varepsilon_{m+1}, \varepsilon_{m+2}]$ с номером $m > 1$, то глобальные спирали (5.10) перестраиваются следующим образом

$$\overleftarrow{\Delta}^c s(E^m_2(\delta)), \quad \overleftarrow{\Delta}^c s(E^m_2(\delta) \oplus G^m_{F_m+2}(\delta)) \longrightarrow \overleftarrow{\Delta}^c s(G^m_{F_m+2}(\delta)), \tag{5.11}$$

$$\overleftarrow{\Delta} s(E^m_2(\delta)) \longrightarrow \overleftarrow{\Delta} s(G^m_{F_m+2}(\delta)) \longrightarrow \overleftarrow{\Delta} s(G^m_{F_m+2}(\delta)).$$

Длины этих спиралей соответственно равны f_{m+2}, f_{m+3} и f_{m+4}.

Рассмотрим случай $m = 1$ и ε принадлежит полуинтервалу $C^1 = [\varepsilon_1, \varepsilon_3)$. В этом случае существуют три локальные спирали

$$s(\underset{\cdot\cdot -}{G_1^1(\delta)}) = \xrightarrow{-} \underset{\cdot\cdot -}{G_1^1(\delta)} - \blacktriangleright, \quad s(\underset{\cdot - \cdot}{G_1^1(\delta)}) = \underset{\cdot - \cdot}{G_1^1(\delta)} - \blacktriangleright, \tag{5.12}$$

$$s(\underset{- \cdot\cdot}{G_1^1(\delta)}) = \underset{- \cdot\cdot}{G_1^1(\delta)} \overset{+}{-} \blacktriangleright .$$

Двухцветный S_ε сдвиг производит склейку

$$S_\varepsilon : \underset{- \cdot\cdot}{G_1^1(\delta)}^- \xrightarrow{-} \underset{\cdot\cdot -}{G_1^1(\delta)}^-,$$

где $\underset{- \cdot\cdot}{G_1^1(\delta)}^- = \underset{- \cdot\cdot}{G_1^1(\delta)} \cap I_\varepsilon^-$, схематически представленную на графе склейки G_c^1 (см. рис. 5.2).

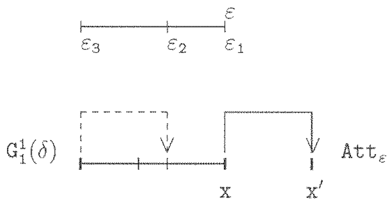

Рис. 5.2. Граф склейки G_c^1.

Потому глобальные спирали имеют вид

$$s(\underset{- - -}{G_1^1(\delta)}) = \underset{- - -}{G_1^1(\delta)} - \blacktriangleright, \tag{5.13}$$

если ε принадлежит полуинтервалу $J^2 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, и

$$\overleftarrow{\Delta}^c s(\underset{- \cdot\cdot}{G_1^1(\delta)}), \quad s(\underset{\cdot - -}{G_1^1(\delta)}), \tag{5.14}$$

$$\overleftarrow{\Delta} s(\underset{- \cdot\cdot}{G_1^1(\delta)}) \to \overleftarrow{\Delta} s(\underset{\cdot\cdot -}{G_1^1(\delta)}),$$

если ε содержится в $J^3 = (\varepsilon_2, \varepsilon_3]$.

Теперь рассмотрим случай $m \equiv 1 \mod 6$, $m > 1$, и ε содержится в полуинтервале $V^m = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m)$ (2.1). Из динамического графа D_v^m рис. 2.3 следует, что множество $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ в этом случае состоит из пяти локальных спиралей

$$
\begin{aligned}
&s(\underline{G^m_{F_m+2}}(\delta)) = \underline{G^m_{F_m+2}}(\delta) - > - \underline{G^m_{F_{m+2}-1}}(\delta) - \blacktriangleright,\\
&s(\underline{G^m_{F_m+2}}(\delta)) = \underline{G^m_{F_m+2}}(\delta) - > - \underline{G^m_{F_{m+2}-1}}(\delta) \overset{+}{-} \blacktriangleright,\\
&s(\underline{E^m_2}(\delta)) = \underline{E^m_2}(\delta) - \gg - \underline{E^m_{F_{m+1}-1}}(\delta) \overset{+}{-} \blacktriangleright,\\
&\overrightarrow{\Delta} s(\underline{G^m_1(\delta)}) = \overset{-}{\rightarrow} \overrightarrow{\Delta}\, \underline{G^m_1(\delta)} - > - \overrightarrow{\Delta}\, \underline{G^m_{F_m}(\delta)} - \blacktriangleright,\\
&\overrightarrow{\Delta}^c s(\underline{G^m_2(\delta)}) = \overrightarrow{\Delta}^c\, \underline{G^m_2(\delta)} - \gg - \overrightarrow{\Delta}^c\, \underline{G^m_{F_m-1}}(\delta) - \blacktriangleright\ .
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Для последних двух спиралей были использованы операторы обрезания (ср. (5.9))

$$
\overrightarrow{\Delta} X = [\alpha, \alpha + \Delta), \qquad \overrightarrow{\Delta}^c X = [\alpha + \Delta, \beta), \tag{5.16}
$$

при этом $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_{m-1}$ и предполагается, что длина полуинтервала $X = [\alpha, \beta)$ не меньше $|V^m|$. Аналогично операторам $\overleftarrow{\Delta}$, $\overleftarrow{\Delta}^c$ (5.9) операторы $\overrightarrow{\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta}^c$ (5.16) обладают свойством $\overleftarrow{\Delta} X \oplus \overleftarrow{\Delta}^c X = X$. В (5.15) использованы те же обозначения, что и в (5.5).

Согласно динамическому графу D_v^m рис. 2.3, ветвление двухцветного сдвига происходит на полуинтервале $G_0^m(\delta)$, имеющего раскраску

$$
\begin{aligned}
{}^-G_0^m(\delta) &= G_0^m(\delta) \cap I_\varepsilon^- = \overrightarrow{\Delta} G_0^m(\delta),\\
G_0^m(\delta)^+ &= G_0^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+ = \overrightarrow{\Delta}^c G_0^m(\delta).
\end{aligned}
$$

Поэтому *склека* локальных спиралей имеет вид (ср. рис. 5.3)

$$
S_\varepsilon : \underline{E^m_{F_{m+1}-1}}(\delta) \oplus \underline{G^m_{F_{m+2}-1}}(\delta) \longrightarrow \underline{G^m_1(\delta)} = {}^-\, G^m_1(\delta) \oplus G^m_1(\delta)^+, \tag{5.17}
$$

где ${}^-G_1^m(\delta) = \overrightarrow{\Delta} G_1^m(\delta)$ принадлежит множеству спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon$, а $G_1^m(\delta)^+ = \overrightarrow{\Delta}^c G_1^m(\delta)$ содержится в аттракторе Att_ε.

Длины первых трех локальных спиралей из (5.15) равны f_{m+1}, а четвертой и пятой спиралей соответственно равны $f_m + 1$ и f_m.

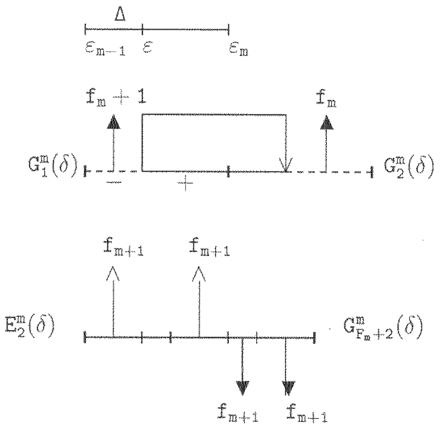

Рис. 5.3. Граф склейки G_v^m уровня $m \equiv 1 \bmod 6$, $m > 1$.

Если ε принадлежит $J^m = (\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m]$, то, используя склейку (5.17), из (5.15) получим *глобальные спирали*

$$s(\underline{G^m_{F_m+2}}(\delta)), \quad \overrightarrow{\Delta}^c s(\underline{G^m_2}(\delta)) \tag{5.18}$$

с длинами f_{m+1}, f_m и еще две глобальные спирали

$$\overrightarrow{\Delta}^c s(\underline{E^m_2}(\delta) \oplus \underline{G^m_{F_m+2}}(\delta)), \tag{5.19}$$

$$\overrightarrow{\Delta} s(\underline{E^m_2}(\delta) \oplus \underline{G^m_{F_m+2}}(\delta)) \longrightarrow \overrightarrow{\Delta} s(\underline{G^m_1(\delta)}),$$

первая из которых имеет длину f_{m+1}, а вторая, в силу аддитивного свойства, имеет длину $f_{m+1} + (f_m + 1) = f_{m+2}$.

Для нечетного уровня m осталось рассмотреть случай $m = 1$ и ε принадлежит полуинтервалу $V^1 = [\varepsilon_0, \varepsilon_1) = [0, \varepsilon_1)$. В данном случае существует единственная локальная спираль

$$\overrightarrow{\Delta} s(\,\underline{G^1_1(\delta)}\,) = \overrightarrow{\Delta}\ \underline{G^1_1(\delta)} - \blacktriangleright \tag{5.20}$$

единичной длины (см. рис. 5.4). Поэтому склейка отсутствует и главная спираль совпадает с со спиралью (5.20).

5.3. Спирали четного уровня. Пусть $m \equiv 4 \bmod 6$ и параметр ε принадлежит полуинтервалу $C^m = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2})$. Из динамического

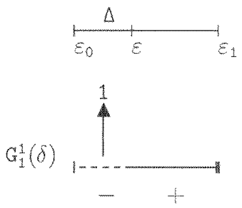

Рис. 5.4. Граф склейки G_v^1.

графа D_c^m рис. 2.3 следует, что локальные спирали из $\mathrm{Spir}_\varepsilon = I \setminus \mathrm{Att}_\varepsilon$ имеют следующий вид

$$s(E^m_{F_{m+1}+2}(\delta)) \overset{-}{=\!\!\longrightarrow} E^m_{F_{m+1}+2}(\delta) - > - E^m_{F_{m+2}-1}(\delta) \to$$
$$\to G^m_1(\delta) - > - G^m_{Fm-1-1}(\delta) - \blacktriangleright,$$

$$s(E^m_{F_{m+1}+2}(\delta)) \overset{-}{=\!\!\longrightarrow} E^m_{F_{m+1}+2}(\delta) - > - E^m_{F_{m+2}-1}(\delta) \to$$
$$\to E^m_1(\delta) - > - E^m_{Fm+1}(\delta) \overset{+}{-} \blacktriangleright,$$

$$s(G^m_{F_{m-1}+2}(\delta)) = G^m_{F_{m-1}+2}(\delta) - \gg - G^m_{F_{m+1}-1}(\delta) \to$$
$$\to E^m_1(\delta) - > - E^m_{F_{m+1}}(\delta) \overset{+}{-} \blacktriangleright$$

и их длины соответственно равны f_{m+1}, f_{m+2} и f_{m+2}, где $f_n = [F_n/2]$.

Ветвление сложного сдвига S_ε осуществляется на полуинтервале $E^m_{F_{m+1}}(\delta)$, имеющего раскраску ${}^-E^m_{F_{m+1}}(\delta) = E^m_{F_{m+1}}(\delta) \cap I^-_\varepsilon = \overrightarrow{\Delta} E^m_{F_{m+1}}(\delta)$, где $I^-_\varepsilon = [0, \varepsilon)$, $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_m$ и $\overrightarrow{\Delta}$ – оператор (5.16). Поэтому склейка происходит через отображение

$$S_\varepsilon : \quad \overrightarrow{\Delta}\, E^m_{F_{m+1}}(\delta) \overset{-}{\longrightarrow} \overrightarrow{\Delta}\, E^m_{F_{m+1}+2}(\delta)\,.$$

Следовательно, склейка индуцирует отображение (см. граф склейки G_c^m рис. 5.5)

$$\overrightarrow{\Delta}(E^m_{F_{m+1}+2}(\delta) \oplus G^m_{F_{m-1}+2}(\delta)) \longrightarrow \overrightarrow{\Delta}\, E^m_{F_{m+1}+2}(\delta) \tag{5.22}$$

$$x \longmapsto x' = x - g_m,$$

определяемое следующим образом (ср. п. 6.2) $x \longmapsto x_{\text{end}} \overset{S_\varepsilon}{\longmapsto} x'$, т.е. $x' = S_\varepsilon(x_{\text{end}})$, где x_{end} – образ точки x в конечном полуинтервале $E^m_{F_{m+1}}(\delta)$ локальной спирали из (5.21), начальному полуинтервалу которой принадлежит x.

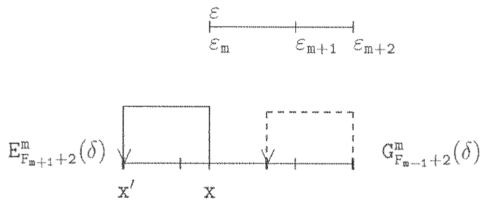

Рис. 5.5. Граф склейки G^m_c уровня $m \equiv 4 \bmod 6$.

Пусть ε принадлежит полуинтервалу $J^{m+1} = (\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}]$. Используя отображение склейки (5.22), из локальных спиралей (5.21) получаем три глобальные спирали

$$\overrightarrow{\Delta}^c s(E^m_{F_{m+1}+2}(\delta)), \quad \overrightarrow{\Delta}^c s(E^m_{F_{m+1}+2}(\delta) \oplus G^m_{F_{m-1}+2}(\delta)), \tag{5.23}$$

$$\overrightarrow{\Delta} s(E^m_{F_{m+1}+2}(\delta) \oplus G^m_{F_{m-1}+2}(\delta)) \longrightarrow \overrightarrow{\Delta} s(E^m_{F_{m+1}+2}(\delta)),$$

где $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_m$. Их длины складываются из длин локальных спиралей (5.21) по правилу (5.8) и равны f_{m+1}, f_{m+2} и f_{m+3} соответственно.

Если ε принадлежит полуинтервалу $J^{m+2} = (\varepsilon_{m+1}, \varepsilon_{m+2}]$, то глобальные спирали (5.23) перестраиваются следующим образом

$$\overrightarrow{\Delta}^c s(G^m_{F_{m-1}+2}(\delta)), \tag{5.24}$$

$$\overrightarrow{\Delta}^c s(E^m_{F_{m+1}+2}(\delta) \oplus G^m_{F_{m-1}+2}(\delta)) \longrightarrow \overrightarrow{\Delta}^c s(E^m_{F_{m+1}+2}(\delta)),$$

$$\overrightarrow{\Delta} s(G^m_{F_{m-1}+2}(\delta)) \longrightarrow \overrightarrow{\Delta} s(E^m_{F_{m+1}+2}(\delta)) \longrightarrow \overrightarrow{\Delta} s(E^m_{F_{m+1}+2}(\delta)),$$

где $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_{m+1}$. Теперь глобальные спирали имеют длины f_{m+2}, f_{m+3} и f_{m+4}.

При переходе к случаю, когда $m \equiv 4 \bmod 6$, и ε принадлежит полуинтервалу $V^m = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m)$, также, как и для нечетного уровня m (5.15), наблюдается явление увеличения количества локальных спиралей (см. динамический граф D_v^m рис. 2.4)

$$\begin{aligned}
&s(\underline{E^m_{F_{m+1}+2}}(\delta)) = \underline{E^m_{F_{m+1}+2}}(\delta) - > - \underline{E^m_{F_{m+2}-1}}(\delta) \to \\
&\qquad\qquad\qquad \to \underline{G^m_1}(\delta) - > - \underline{G^m_{F_{m-1}-1}}(\delta) - \blacktriangleright, \\
&s(\underline{E^m_{F_{m+1}+2}}(\delta)) = \underline{E^m_{F_{m+1}+2}}(\delta) - > - \underline{E^m_{F_{m+2}-1}}(\delta) \overset{+}{-} \blacktriangleright, \\
&s(\underline{G^m_{F_{m-1}+2}}(\delta)) = \underline{G^m_{F_{m-1}+2}}(\delta) - \gg - \underline{G^m_{F_{m+1}-1}}(\delta) \overset{+}{-} \blacktriangleright, \\
&\vec{\Delta} s(\underline{E^m_1}(\delta)) = \overset{-}{\to}\ \vec{\Delta}\, \underline{E^m_1}(\delta) - > - \vec{\Delta}\, \underline{E^m_{F_{m+1}}}(\delta) - \blacktriangleright, \\
&\vec{\Delta}^c s(\underline{E^m_2}(\delta)) = \vec{\Delta}^c\, \underline{E^m_2}(\delta) - \gg - \vec{\Delta}^c\, \underline{E^m_{F_{m+1}-1}}(\delta) - \blacktriangleright\,.
\end{aligned}$$

Длина первой спирали равна f_{m+1}, второй и третьей равна f_m, четвертой – $f_{m+1}+1$ и пятой – f_{m+1}. В (5.25) операторы $\vec{\Delta}$, $\vec{\Delta}^c$ (5.16) определены для $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_{m-1}$ и ветвление двухцветного сдвига S_ε происходит на полуинтервале $E_0^m(\delta)$, имеющего раскраску $E_0^m(\delta)^+ = E_0^m(\delta) \cap I^+{-}_\varepsilon = \vec{\Delta}^c E_0^m(\delta)$, где $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$.
Склейка локальных спиралей (5.25) осуществляется через отображение (см. рис. 5.6)

$$S_\varepsilon : \quad \vec{\Delta}(\underline{E^m_{F_{m+2}-1}}(\delta) \oplus \underline{G^m_{F_{m-1}+2}}(\delta)) \longrightarrow \vec{\Delta}\, \underline{E^m_1}(\delta), \tag{5.26}$$

где $\vec{\Delta} E_1^m(\delta)$ принадлежит множеству спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon$. Склеивая локальные спирали (5.25) по правилу (5.26), получим следующие глобальные спирали

$$\begin{aligned}
&s(\underline{E^m_{F_{m+1}+2}}(\delta)), \vec{\Delta}^c s(\underline{E^m_2}(\delta)), \qquad (5.27)\\
&\vec{\Delta}^c s(\underline{E^m_{F_{m+1}+2}}(\delta) \oplus \underline{G^m_{F_{m-1}+2}}(\delta)), \\
&\vec{\Delta} s(\underline{E^m_{F_{m+1}+2}}(\delta) \oplus \underline{G^m_{F_{m-1}+2}}(\delta)) \longrightarrow \vec{\Delta} s(\underline{E^m_1}(\delta)),
\end{aligned}$$

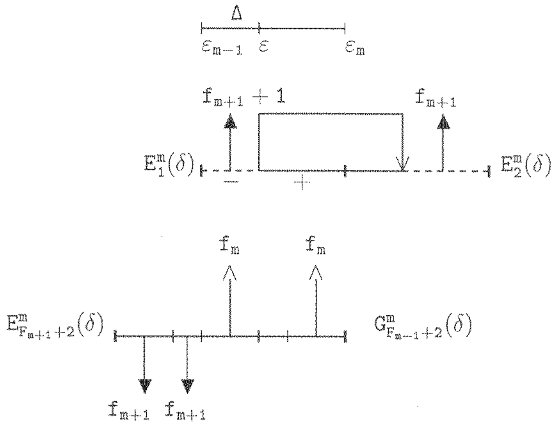

Рис. 5.5. Граф склейки G_v^m уровня $m \equiv 4 \bmod 6$.

длины которых соответственно равны f_{m+1}, f_{m+1}, f_m и f_{m+2}.

6. Глубокие дыры и динамическое расстояние

6.1. Глубокие дыры. Согласно теореме 4.1, для любой точки x из единичного полуинтервала $I=[0,1)$ найдется такая степень $k=0,1,2,\ldots$, что $S_\varepsilon^k(x)\in \mathrm{Att}_\varepsilon$ и $S_\varepsilon^{k-1}(x)\notin \mathrm{Att}_\varepsilon$, где Att_ε – аттрактор, определяемый условием

$$\mathrm{Att}_\varepsilon = S_\varepsilon^\infty(I), \tag{6.1}$$

при этом $S_\varepsilon^\infty(I) = \cap_{k=0}^\infty S_\varepsilon^k(I)$. Таким образом, аттрактор Att_ε относительно отображения S_ε является *притягивающим, инвариантным и несжимаемым* подмножеством из I. В силу равенства (4.18) для любого $\varepsilon\in I$ существует *конечная степень* $k(\varepsilon)$, для которой справедливо равенство $\mathrm{Att}_\varepsilon = S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(I)$. Следовательно, можно определить *динамическое расстояние* $d_\varepsilon(x)$ от точки $x\in I$ до аттрактора Att_ε с помощью равенства

$$d_\varepsilon(x)=\min\{k:\ S_\varepsilon^k(x)\in \mathrm{Att}_\varepsilon,\quad k=0,1,2,\ldots\}. \tag{6.2}$$

Пусть степень $k(\varepsilon)$ с условием $S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(I)=\mathrm{Att}_\varepsilon$ также выбрана минимальной (см. (4.17)). Очевидно, что динамическое расстояние $d_\varepsilon(x)$ и степень $k(\varepsilon)$ удовлетворяют неравенству

$$d_\varepsilon(x)\le k(\varepsilon). \tag{6.3}$$

Назовем *глубокой дырой* множество $Dh(\varepsilon)$ всех $x \in \mathrm{Spir}_\varepsilon$, для которых нестрогое неравенство (6.3) обращается в равенство $d_\varepsilon(x) = k(\varepsilon)$. Поскольку для $Dh(\varepsilon)$ справедливо представление

$$Dh(\varepsilon) = \{x \in \mathrm{Spir}_\varepsilon : S_\varepsilon^{k(\varepsilon)-1}(x) \notin \mathrm{Att}_\varepsilon\}, \tag{6.4}$$

то глубокая дыра

$$Dh(\varepsilon) \subset \mathrm{Spir}_\varepsilon \tag{6.5}$$

состоит из точек x, принадлежащих множеству спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon = I \setminus \mathrm{Att}_\varepsilon$, максимально удаленных от аттрактора Att_ε, и *динамическое расстояние* $d_\varepsilon(Dh(\varepsilon))$ от глубокой дыры $Dh(\varepsilon)$ до аттрактора Att_ε равно

$$d_\varepsilon(Dh(\varepsilon)) = k(\varepsilon) \tag{6.6}$$

– степени $k(\varepsilon)$ (4.17), (4.18).

6.2. Динамическая длина спирали. Рассмотрим спирали уровня $m \equiv 1 \bmod 6$, $m > 1$, когда параметр ε принадлежит полуинтервалу $C^m = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2})$. Если ε содержится в полуинтервале $J^{m+1} = (\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}]$, то, согласно (5.10), множество спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ состоит из трех глобальных спиралей. Ради сокращения записи обозначим эти спирали s_1, s_2 и $s_{\max}$. Итак, имеем

$$\mathrm{Spir}_\varepsilon = s_1 \sqcup s_2 \sqcup s_{\max} \tag{6.7}$$

– разбиение множества $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ на глобальные спирали, длины которых равны $\sharp s_1 = f_{m+2}$, $\sharp s_2 = f_{m+1}$, $s_{\max} = f_{m+3}$. При этом спираль максимальной длины $s_{\max}$ — непустое множество, если $\varepsilon \in J^{m+1}$. Пусть дано

$$s = X_1 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_f$$

– разложение глобальной спирали $s = s_{\max}$ в цепь ее последовательных полуинтервалов относительно действия двухцветного сдвига S_ε. Согласно динамическому графу D_v^m рис. 2.1 и (5.6), (5.10), сдвиг S_ε действует на спираль s следующим образом

$$\begin{aligned} S_\varepsilon(s) = X_2 \longrightarrow \quad &\cdots \quad \longrightarrow X_f \bmod \mathrm{Att}_\varepsilon, \\ &\cdots \\ S_\varepsilon^k(s) = X_{k+1} \longrightarrow \quad &\cdots \quad \longrightarrow X_f \bmod \mathrm{Att}_\varepsilon \end{aligned} \tag{6.8}$$

для любого $k < f$, так как $S_\varepsilon(X_i) = X_{i+1}$ для любого $i < f$, а образ $S_\varepsilon(X_f)$ последнего полуинтервала X_f содержится в аттракторе Att_ε.

Назовем *динамической длиной* $d_\varepsilon(s)$ спирали s наименьшее $k = 0, 1, 2, \ldots$ с условиями

$$S_\varepsilon^k(s) \subseteqq \mathrm{Att}_\varepsilon, \quad S_\varepsilon^{k-1}(s) \nsubseteqq \mathrm{Att}_\varepsilon. \tag{6.9}$$

Из формулы (6.8) выводим равенство

$$d_\varepsilon(s) = \sharp s, \tag{6.10}$$

где $\sharp s = f$ – длина спирали s. *Динамическую длину* $d_\varepsilon(\mathrm{Spir}_\varepsilon)$ множества спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ определим как максимум динамических длин $d_\varepsilon(s_i)$ глобальных спиралей s_i, на которые распадается множество $\mathrm{Spir}_\varepsilon$. Из определений (6.4), (6.9) и формул (6.6), (6.10) вытекают следующие соотношения между динамическими длинами, динамическим расстоянием и степенным показателем $k(\varepsilon)$ (4.17):

$$d_\varepsilon(\mathrm{Spir}_\varepsilon) = d_\varepsilon(Dh(\varepsilon)), \quad d_\varepsilon(\mathrm{Spir}_\varepsilon) = k(\varepsilon), \tag{6.11}$$
$$d_\varepsilon(\mathrm{Spir}_\varepsilon) = d_\varepsilon(s_{\max}) = \sharp s_{\max}.$$

Таким образом, если множество спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ имеет уровень $m \equiv 1 \bmod 6$, $m > 1$, и $\varepsilon \in J^{m+1}$, то из (6.7) и (6.11) для динамической длины множества $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ получаем формулу

$$d_\varepsilon(\mathrm{Spir}_\varepsilon) = f_{m+3}. \tag{6.12}$$

6.3. Сжатие единичного полуинтервала и спирали.

Предложение 6.1. 1. *Наименьшая степень* $k(\varepsilon) = 0, 1, 2, \ldots$ *с условием* $S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(I) = \mathrm{Att}_\varepsilon$ (4.18) *равна*

$$k(\varepsilon) = d_\varepsilon(\mathrm{Spir}_\varepsilon) \tag{6.13}$$

– динамической длине множества спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon = I \setminus \mathrm{Att}_\varepsilon$.

2. *Множество спиралей* $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ *является областью притяжения аттрактора* Att_ε *относительно сложного сдвига* S_ε *и его динамическая длина* $d_\varepsilon(\mathrm{Spir}_\varepsilon)$ *вычисляется по формуле*

$$d_\varepsilon(\mathrm{Spir}_\varepsilon) = f_{m+2} \tag{6.14}$$

для всех ε, *принадлежащих* J^m *из разбиения единичного полуинтервала*

$$I = J^0 \oplus J^1 \oplus \ldots \oplus J^m \oplus \ldots \tag{6.15}$$

на точечное множество $J^0 = \{0\}$ *и полуинтервалы* $J^m = (\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m]$ *для* $m = 1, 2, 3, \ldots$, *где* $\varepsilon_m = 1 - \tau^{-m}$ *– собственные значения* B*-процесса* (1.2). *В формуле* (6.14) *правая часть равна* $f_{m+2} = [F_{m+2}/2]$.

Доказательство. 1). Формула (6.13) вытекает из закона действия (6.8) двухцветного сдвига S_ε на глобальные спирали и из определения динамической длины $d_\varepsilon(\mathrm{Spir}_\varepsilon)$ множества спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon$. 2). Если $m \equiv 1 \bmod 6$, $m > 1$, и ε принадлежит полуинтервалу J^{m+1}, то формула (6.14) совпадает с доказанной формулой (6.12). Остальные случаи $m \neq 0$ рассматриваются аналогично с использованием явного вида глобальных спиралей (5.11), (5.13), (5.14), (5.18)–(5.20), (5.23), (5.24) и (5.27). В случае $m = 0$ множество спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ пустое, а значит, его динамическая длина равна 0. □

6.4. Гиперболическая аппроксимация. Рассмотрим для функции $k(\varepsilon)$ ее график $Gr(k(\varepsilon)) \subset I \times \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных чисел. Согласно равенствам (6.13) и (6.14), функция $k(\varepsilon)$ вычисляется по формуле

$$k(\varepsilon) = f_{m+2}, \tag{6.16}$$

если ε принадлежит полуинтервалу $J^m = (\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m]$. Таким образом, график $Gr(k(\varepsilon))$ имеет ступенчатый вид и концы ступенек имеют абсциссы $\varepsilon_m = 1 - \tau^{-m}$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, график $Gr(k(\varepsilon))$ заключен между двух гипербол и обладает асимптотическим самоподобием относительно гиперболического преобразования $(x, y) \longmapsto (1 - \tau^{-1}(1 - x), \tau y)$. Формула (6.16) для функции $k(\varepsilon)$ точная. В ней зависимость $k(\varepsilon)$ от ε опосредствована использованием разбиения единичного полуинтервала I (6.15). Если исключить это промежуточное звено и воспользоваться явной формулой для чисел Фибоначчи $F_n = \frac{\tau^n - (-1)^n \tau^{-n}}{\sqrt{5}}$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, то из формулы (6.16) выводим для функции $k(\varepsilon)$ следующие неравенства

$$\frac{c_1}{1-\varepsilon} - 2 < k(\varepsilon) < \frac{c_2}{1-\varepsilon} + 1, \tag{6.17}$$

справедливые для всех $\varepsilon \in I$, где константы в (6.17) $c_1 = \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}} \approx 0.58$ и $c_2 = \tau \cdot c_1 \approx 0.94$ точные. Из неравенств (6.17) следует, что функция k_ε имеет степенной рост порядка $(1 - \varepsilon)^{-1}$ при $\varepsilon \to 1$. В силу формул (6.11) такой же порядок роста имеет динамическая длина $d_\varepsilon(\mathrm{Spir}_\varepsilon)$ множества спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ и динамическое расстояние $d_\varepsilon(Dh(\varepsilon))$ от глубокой дыры $Dh(\varepsilon)$ (6.5) до аттрактора Att_ε (6.1).

7. Мера и локализация глубоких дыр

7.1. Мера глубоких дыр. По определению (6.4) глубокая дыра

$$Dh(\varepsilon) = \{x \in I : d_\varepsilon(x) = d_\varepsilon(\mathrm{Spir}_\varepsilon)\} \tag{7.1}$$

состоит из точек с динамическим расстоянием $d_\varepsilon(x)$ (6.2) до аттрактора Att_ε, равным динамической длине $d_\varepsilon(\mathrm{Spir}_\varepsilon)$ п. 6.2 множества спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon = I \setminus \mathrm{Att}_\varepsilon$. Поэтому для каждого $\varepsilon \in I$ глубокая дыра $Dh(\varepsilon)$ совпадает с начальным полуинтервалом глобальной спирали максимальной длины. Используя описание глобальных спиралей, приведенное в п.п. 5.2, 5.3 можем получить явное представление глубоких дыр $Dh(\varepsilon)$ в терминах δ-разбиений Фибоначчи $\mathrm{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ (2.5) и операторов обрезания $\overleftarrow{\Delta}$ (5.9) и $\overrightarrow{\Delta}$ (5.16).

Нечетные уровни m. Если $m \equiv 1 \bmod 6$ и $m > 1$, то по формулам (5.10) глубокую дыру $Dh(\varepsilon)$ можно записать в виде

$$Dh(\varepsilon) = \overleftarrow{\Delta}(E_2^m(\delta) \oplus G_{F_m+2}^m(\delta)), \tag{7.2}$$

где $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_m$, ε принадлежит полуинтервалу $J^{m+1} = (\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}]$; и по формулам (5.11) можно записать в виде

$$Dh(\varepsilon) = \overleftarrow{\Delta}(E_2^m(\delta)), \tag{7.3}$$

где $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_{m+1}$ и ε принадлежит полуинтервалу $J^{m+2} = (\varepsilon_{m+1}, \varepsilon_{m+2}]$.

Если же $m = 1$, то, согласно формул (5.13) и (5.14), глубокие дыры $Dh(\varepsilon)$ имеют вид

$$Dh(\varepsilon) = G_1^1(\delta), \quad Dh(\varepsilon) = \overleftarrow{\Delta}(G_1^1(\delta)) \tag{7.4}$$

для $\varepsilon \in J^2 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ и $\varepsilon \in J^3 = (\varepsilon_2, \varepsilon_3]$ с $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_2$ соответственно. В оставшихся случаях нечетного уровня m в силу формул (5.19) и (5.20) можем записать

$$Dh(\varepsilon) = \overrightarrow{\Delta}(E^m_2(\delta) \oplus G^m_{F_m+2}(\delta)) \tag{7.5}$$

для ε из полуинтервала $J^m = (\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m]$, $m > 1$, $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_{m-1}$; и можем записать

$$Dh(\varepsilon) = \overrightarrow{\Delta}(G^1_1(\delta)) \tag{7.6}$$

для ε из полуинтервала $J^1 = (\varepsilon_0, \varepsilon_1] = (0, \varepsilon_1]$ и $\Delta = \varepsilon$.

Четные уровни m. В случае $m \equiv 4 \bmod 6$ для глубоких дыр $Dh(\varepsilon)$ из формул (5.23), (5.24) и (5.27) вытекают следующие предствления

$$Dh(\varepsilon) = \overrightarrow{\Delta}(E^m_{F_{m+1}+2}(\delta) \oplus G^m_{F_{m-1}+2}(\delta)), \tag{7.7}$$

$$Dh(\varepsilon) = \overrightarrow{\Delta}(G^m_{F_{m-1}+2}(\delta)),$$

$$Dh(\varepsilon) = \overrightarrow{\Delta}(E^m_{F_{m+1}+2}(\delta) \oplus G^m_{F_{m-1}+2}(\delta))$$

для значений параметра ε из полуинтервалов J^{m+1}, J^{m+2} и J^m соответственно.

Из формул (7.2)–(7.7) и определения операторов обрезания $\overleftarrow{\Delta}$ (6.12) и $\overrightarrow{\Delta}$ (6.19) следует

Предложение 7.1. *Пусть* $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_{m-1}$, *если* ε *содержится в* $J^m = (\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m]$ *для* $m = 1, 2, 3, \dots$ *из разбиения* (6.15), *где* $\varepsilon_m = 1 - \tau^{-m}$ – *собственные значения* (1.2). *Если* $m = 0$ *и* $\varepsilon \in J^0 = \{0\}$, *то в этом случае полагаем* $\Delta = 0$.

Тогда мера глубоких дыр $Dh(\varepsilon)$ (6.4), (7.1) *вычисляется по формуле*

$$|Dh(\varepsilon)| = \Delta \tag{7.8}$$

для всех $m \neq 2$. *Если* $m = 2$, *то мера глубокой дыры* $|Dh(\varepsilon)|$ *не зависит от параметра* $\varepsilon \in J^2$ *и равна*

$$|Dh(\varepsilon)| = \tau^{-2}. \tag{7.9}$$

$\square$

7.2. Мера и динамическое расстояние. Докажем, что мера глубокой дыры $|Dh(\varepsilon)|$ и ее динамическое расстояние $d_\varepsilon(Dh(\varepsilon))$ п. 6.1 до аттрактора Att_ε удовлетворяют неравенству

$$|Dh(\varepsilon)| \cdot d_\varepsilon(Dh(\varepsilon)) \leq \tau^{-2}. \tag{7.10}$$

Рассмотрим следующую функцию $P(\varepsilon) = |Dh(\varepsilon)| \cdot d_\varepsilon(Dh(\varepsilon))$ параметра $\varepsilon \in I$. Согласно формулам (6.11) и (6.16), выполняется равенство

$$d_\varepsilon(Dh(\varepsilon)) = f_{m+2}, \tag{7.11}$$

если ε принадлежит полуинтервалу $J^m = (\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m]$ из разбиения (7.15). Из предложения 7.1 и формулы (6.14) следует, что функция $P(\varepsilon)$ имеет локальные максимумы в точках $\varepsilon = \varepsilon_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, для любого $\varepsilon \in I$ выполняется неравенство

$$P(\varepsilon) \leq \max\{P(\varepsilon_m) : m = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Ввиду равенств (7.8) и (7.9) в точках $\varepsilon = \varepsilon_m$ мера глубоких дыр $|Dh(\varepsilon)|$ равна длине полуинтервала $|J^m| = \tau^{-(m+1)}$ для уровней $m \neq 0, 2$, и равна τ^{-2} или 0 для уровней $m = 2$ или $m = 0$ соответственно. Так как $f_{m+2} = [F_{m+2}/2]$, то, используя явную формулу для чисел Фибоначчи $F_{m+2} = (\tau^{m+2} - (-1)^{m+2}\tau^{-(m+2)})/\sqrt{5}$, для значений $P(\varepsilon_m)$ получаем следующую оценку сверху

$$P(\varepsilon_m) \leq \frac{\tau + \tau^{-9}}{2\sqrt{5}}$$

для уровней $m \geq 3$ и равенства $P(\varepsilon_1) = P(\varepsilon_2) = \tau^{-2}$, $P(\varepsilon_0) = P(0) = 0$. Наконец, используя неравенство $\tau^3 + \tau^{-6} < 2\sqrt{5}$, завершаем доказательство неравенства (7.10).

7.3. Локализация глубоких дыр. С помощью метрики $\rho(x, y) = ||x - y||$ определим расстояние

$$\rho(Dh(\varepsilon), \alpha) = \max_{x \in Dh(\varepsilon)} \rho(x, \alpha) \tag{7.12}$$

от глубокой дыры $Dh(\varepsilon)$ (6.4) до некоторого числа α из I. Будем говорить, что $Dh(\varepsilon)$ стремится к α при $\varepsilon \uparrow 1$ и записывать

$$Dh(\varepsilon) \xrightarrow{\rho} \alpha \quad \text{при} \quad \varepsilon \uparrow 1, \tag{7.13}$$

где $\varepsilon, \alpha \in I$, если $\rho(Dh(\varepsilon), \alpha) \to 0$ при $\varepsilon \uparrow 1$. Любое ε из I принадлежит некоторому полуинтервалу $J^m = (\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m]$ из разбиения (6.15). Если при этом $\varepsilon \uparrow 1$, то соответствующий индекс $m = m(\varepsilon) \to \infty$ и мера $|J^m| \to 0$, так как $|J^m| = \tau^{-(m+1)}$.

Покажем, что для глубокой дыры $Dh(\varepsilon)$ существует предел при $\varepsilon \uparrow 1$. Не уменьшая общности, можем считать индекс m достаточно большим. Согласно формуле (7.3), мера глубокой дыры $|Dh(\varepsilon)|$ равна $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_{m-1}$ и, следовательно, $|Dh(\varepsilon)| \to 0$ при $\varepsilon \uparrow 1$. Ранее в п. 7.1 было получено представление глубокой дыры $Dh(\varepsilon)$ в терминах операторов обрезания $\overleftarrow{\Delta}$ (5.9), $\overrightarrow{\Delta}$ (5.16) и δ-разбиений Фибоначчи $\mathrm{Til}\,(\varepsilon_m, \delta)$ (2.5). Из определения параметра сдвига δ (2.6), (2.7) следует, что $\delta \to 0$ при $\varepsilon \uparrow 1$. Поэтому для доказательства существования предела (7.13) достаточно для каждого $\varepsilon \in I$ выбрать удобную точку x_ε, принадлежащую глубокой дыре $Dh(\varepsilon)$, и показать, что $x_\varepsilon \to \alpha$ при $\varepsilon \uparrow 1$ в метрике $\rho(x, y)$. При этом можем полагать $\delta = 0$.

Пусть уровень $m \equiv 1 \bmod 6$ и ε принадлежит полуинтервалу J^m, J^{m+1} или J^{m+2}. Тогда во всех трех случаях ввиду представлений (7.2), (7.3) и (7.5) пересечение $E_2^m(\delta) \cap Dh(\varepsilon)$ – непустое множество для некоторого ε из соответствующего полуинтервала. По формулам (1.12) полуинтервал E_2^m имеет глобальные координаты

$$E_2^m = I[2^=, 2) = [\langle (2 - F_{m+2})\tau \rangle, \langle 2\tau \rangle). \tag{7.14}$$

Если уровень $m \equiv 4 \bmod 6$, то, применяя представление (7.7), убеждаемся, что в этом случае пересечение $G^m_{F_{m-1}+2}(\delta) \cap Dh(\varepsilon)$ – непустое множество для некоторого ε из полуинтервалов J^m, J^{m+1} или J^{m+2}, где в силу формул (1.8)

$$G^m_{F_{m-1}+2} = I[(F_{m-1} + 2)^+, (F_{m-1} + 2)^-).$$

Поскольку $(F_{m-1} + 2)^+ = F_{m+1} + 2$, $(F_{m-1} + 2)^- = -F_m + 2$, то последний полуинтервал можем переписать в виде

$$G^m_{F_{m-1}+2} = [\langle (F_{m+1} + 2)\tau \rangle, \langle (-F_m + 2)\tau \rangle). \tag{7.15}$$

К вычислению координат полуинтервала $G^m_{F_{m-1}+2}$ применим известную формулу $\langle F_m \tau \rangle = 1 - ||F_m \tau|| = 1 - \tau^{-m}$ для четных $m \geq 2$. Из данной формулы вытекает $\langle -F_m \tau \rangle = ||F_m \tau|| = \tau^{-m}$. По условию m является достаточно большим четным числом и поэтому можем записать

$$\langle(-F_m+2)\tau\rangle = \langle -F_m\tau\rangle + \langle 2\tau\rangle = \tau^{-m} + \langle 2\tau\rangle. \tag{7.16}$$

Из равенств (7.14)–(7.16) следует, что для каждого ε можно выбрать некоторую точку $x_\varepsilon \in Dh(\varepsilon)$, стремящуюся к $\alpha = \langle 2\tau\rangle$ при $\varepsilon \uparrow 1$. Отсюда получаем следующий результат о локализации глубоких дыр.

Предложение 7.2. *Имеет место явление локализации глубоких дыр*

$$Dh(\varepsilon) \xrightarrow{\rho} \langle 2\tau\rangle \quad \textit{при} \quad \varepsilon \uparrow 1. \tag{7.17}$$

□

8. Скорость сжатия единичного полуинтервала

8.1. Сжимающее отображение. Согласно теореме 4.1, имеет место строго убывающая последовательность

$$I = S_\varepsilon^0(I) \supset S_\varepsilon^1(I) \supset \ldots \supset S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(I) = \mathrm{Att}_\varepsilon, \tag{8.1}$$

где аттрактор Att_ε является несжимаемым множеством $S_\varepsilon(\mathrm{Att}_\varepsilon) = \mathrm{Att}_\varepsilon$ и степенной показатель $k(\varepsilon)$ равен $d_\varepsilon(\mathrm{Spir}_\varepsilon) = f_{m+2}$ (6.13), (6.14) – динамической длине множества спиралей $\mathrm{Spir}_\varepsilon = I \setminus \mathrm{Att}_\varepsilon$, если параметр ε принадлежит полуинтервалу $J^m = (\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m]$ (6.15). Следовательно, функция

$$\mathrm{mes}_\varepsilon(t) = |S_\varepsilon^{[t]}(I)|,$$

равная мере множества $S_\varepsilon^{[t]}(I)$, является невозрастающей, кусочно-постоянной функцией переменной t из $[0,\infty)$. Так как в силу (8.1) выполняется неравенство $\mathrm{mes}_\varepsilon(t) \geq |\mathrm{Att}_\varepsilon|$, а по предложению 3.1 мера аттрактора $|\mathrm{Att}_\varepsilon| \geq 1/2$, то функция $\mathrm{mes}_\varepsilon(t)$ удовлетворяет неравенствам $1/2 \leq \mathrm{mes}_\varepsilon(t) \leq 1$ для всех $\varepsilon \in I$ и $t \in [0,\infty)$. Исследуем поведение функции $\mathrm{mes}_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \in I$ и $\varepsilon \uparrow 1$.

8.2. Собственные глобальные спирали.. Для этой цели нам потребуется знать строение глобальных спиралей из п.п. 5.2–5.3. Вначале ограничимся собственными значениями $\varepsilon = \varepsilon_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ и рассмотрим отвечающие им собственные глобальные спирали.

Случай $m \equiv 1 \bmod 6$, $m > 1$ и $\varepsilon = \varepsilon_{m+1}$ из полуинтервала $J^{m+1} = (\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}]$. Согласно формулам (5.10) и определению операторов обрезания $\overleftarrow{\Delta}$, $\overleftarrow{\Delta}^c$ (5.9), существуют две *собственные глобальные спирали*

$$s_{\min} = s(E^m_{\underset{\text{—}\,\cdot}{2}}(\delta)), \tag{8.2}$$

$$s_{\max} = s(E^m_{\underset{\cdot\,-}{2}}(\delta) \oplus G^m_{\underset{\text{—}\,\cdot\,\cdot}{F_m+2}}(\delta)) \longrightarrow s(G^m_{\underset{\cdot\,-\,\text{—}}{F_m+2}}(\delta)),$$

имеющие соответственно длины $\sharp s_{\min} = f_{m+2}$ и $\sharp s_{\max} = f_{m+3}$, где $f_n = [F_n/2]$. Из разбиений (5.3) и формул (1.4) следует, что меры полуинтервалов равны

$$|\,E^m_{\underset{\text{—}\,\cdot}{2}}(\delta)\,| = |\,E^m_{\underset{\text{—}\,\cdot}{2}}\,| = |G^{m+2}_k| = \tau^{-(m+3)},$$

$$|\,E^m_{\underset{\cdot\,-}{2}}(\delta) \oplus G^m_{\underset{\text{—}\,\cdot\,\cdot}{F_m+2}}(\delta)| = |\,E^m_{\underset{\text{—}\,-}{2}}\,| = \tau^{-(m+2)}.$$

Если $\varepsilon = \varepsilon_{m+2}$ из полуинтервала $J^{m+2} = (\varepsilon_{m+1}, \varepsilon_{m+2}]$, то в силу (5.11) существуют спирали

$$s_{\min} = s(E^m_{\underset{\cdot\,-}{2}}(\delta)) \longrightarrow s(G^m_{\underset{\cdot\,-\,\cdot}{F_m+2}}(\delta)), \tag{8.3}$$

$$s_{\max} = s(E^m_{\underset{\text{—}\,\cdot}{2}}(\delta)) \longrightarrow s(G^m_{\underset{\text{—}\,\cdot\,\cdot}{F_m+2}}(\delta)) \longrightarrow s(G^m_{\underset{\cdot\,\cdot\,\text{—}}{F_m+2}}(\delta)),$$

имеющие соответственно длины $\sharp s_{\min} = f_{m+3}$, $\sharp s_{\max} = f_{m+4}$ и меры полуинтервалов

$$|\,E^m_{\underset{\cdot\,-}{2}}(\delta)\,| = |\,E^m_{\underset{\cdot\,-}{2}}\,| = |E^{m+2}_k| = \tau^{-(m+4)},$$

$$|\,E^m_{\underset{\text{—}\,\cdot}{2}}(\delta)\,| = |\,E^m_{\underset{\text{—}\,\cdot}{2}}\,| = |G^{m+2}_k| = \tau^{-(m+3)}.$$

Если $\varepsilon = \varepsilon_{m+2}$ из $J^m = (\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m]$, то из формул (5.18), (5.19) и определения операторов обрезания $\overrightarrow{\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta}^c$ (5.16) вытекает существование спиралей

$$s_{\min} = s(G^m_{\underset{\cdot\,-\,\text{—}}{F_m+2}}(\delta)), \tag{8.4}$$

$$s_{\max} = s(E^m_{\underset{\text{—}\,-}{2}}(\delta) \oplus G^m_{\underset{\text{—}\,\cdot\,\cdot}{F_m+2}}(\delta)) \longrightarrow s(G^m_{\underset{\text{—}\,-\,-}{1}}(\delta)),$$

имеющие длины $\sharp s_{\min} = f_{m+1}$, $\sharp s_{\max} = f_{m+2}$ и меры полуинтервалов

$$|\,G^m_{\underset{\cdot\,-\,\text{—}}{F_m+2}}(\delta)\,| = |\,G^m_{\underset{\cdot\,-\,\text{—}}{F_m+2}}\,| = |E^{m+2}_k| + |G^{m+2}_k| = |E^{m+1}_k| = \tau^{-(m+2)},$$

$$|\,E^m_{\underset{\text{—}\,-}{2}}(\delta) \oplus G^m_{\underset{\text{—}\,\cdot\,\cdot}{F_m+2}}(\delta)\,| = |\,G^m_{\underset{\text{—}\,-\,\text{—}}{F_m+2}}\,| = \tau^{-(m+1)}.$$

Случай $m \equiv 4 \bmod 6$ и $\varepsilon = \varepsilon_{m+1}$ из полуинтервала J^{m+1}. Согласно формулам (5.23), имеем следующие собственные глобальные спирали

$$
\begin{aligned}
s_{\min} &= s(G^m_{\underset{\cdot\,\text{—}}{F_{m-1}+2}}(\delta)), &(8.5)\\
s_{\max} &= s(E^m_{\underset{\cdot\cdot\,-}{F_{m+1}+2}}(\delta) \oplus G^m_{\underset{-\,\cdot}{F_{m-1}+2}}(\delta)) \longrightarrow s(E^m_{\underset{\text{—}\,-\,\cdot}{F_{m+1}+2}}(\delta))
\end{aligned}
$$

с длинами $\sharp s_{\min} = f_{m+2}$ и $\sharp s_{\max} = f_{m+3}$ соответственно. Из разбиений (5.4) и формул (1.4) следует, что меры полуинтервалов спиралей (8.5) равны

$$
\begin{aligned}
&|\,G^m_{\underset{\cdot\,\text{—}}{F_{m-1}+2}}(\delta)\,| = |\,G^m_{\underset{\cdot\,\text{—}}{F_{m-1}+2}}\,| = |E^{m+2}_k| = \tau^{-(m+3)},\\
&|\,E^m_{\underset{\cdot\cdot\,\text{—}}{F_{m+1}+2}}(\delta) \oplus G^m_{\underset{-\,\cdot}{F_{m-1}+2}}(\delta)\,| = |G^m_k| = \tau^{-(m+2)}.
\end{aligned}
$$

Если $\varepsilon = \varepsilon_{m+2}$ из J^{m+2}, то по формулам (5.24) существуют спирали

$$
\begin{aligned}
s_{\min} &= s(G^m_{\underset{-\,\cdot}{F_{m-1}+2}}(\delta)) \longrightarrow s(E^m_{\underset{\cdot-\,\cdot}{F_{m+1}+2}}(\delta)), &(8.6)\\
s_{\max} &= s(G^m_{\underset{\cdot\,\text{—}}{F_{m-1}+2}}(\delta)) \longrightarrow s(E^m_{\underset{\cdot\cdot\,\text{—}}{F_{m+1}+2}}(\delta)) \longrightarrow s(E^m_{\underset{\text{—}\cdot\,\cdot}{F_{m+1}+2}}(\delta)),
\end{aligned}
$$

с длинами $\sharp s_{\min} = f_{m+3}$ и $\sharp s_{\max} = f_{m+4}$ и мерами полуинтервалов

$$
\begin{aligned}
&|\,G^m_{\underset{-\,\cdot}{F_{m-1}+2}}(\delta)\,| = |\,G^m_{\underset{-\,\cdot}{F_{m-1}+2}}\,| = |G^{m+2}_k| = \tau^{-(m+4)},\\
&|\,G^m_{\underset{\cdot\,\text{—}}{F_{m-1}+2}}(\delta)\,| = |\,G^m_{\underset{\cdot\,\text{—}}{F_{m-1}+2}}\,| = |E^{m+2}_k| = \tau^{-(m+3)}.
\end{aligned}
$$

Если же $\varepsilon = \varepsilon_m$ из J^m, то по формулам (5.27) получаем спирали

$$
\begin{aligned}
s_{\min} &= s(E^m_{\underset{\text{—}\,-\,\cdot}{F_{m+1}+2}}(\delta)), &(8.7)\\
s_{\max} &= s(E^m_{\underset{\cdot\cdot\,\text{—}}{F_{m+1}+2}}(\delta) \oplus G^m_{\underset{-\,\text{—}}{F_{m-1}+2}}(\delta)) \longrightarrow s(E^m_{\underset{\text{—}\,-\,\text{—}}{1}}(\delta)),
\end{aligned}
$$

имеющие длины $\sharp s_{\min} = f_{m+1}$, $\sharp s_{\max} = f_{m+2}$ и меры полуинтервалов

$$
\begin{aligned}
&|\,E^m_{\underset{\text{—}\,-\,\cdot}{F_{m+1}+2}}(\delta)\,| = |\,E^m_{\underset{\text{—}\,-\,\cdot}{F_{m+1}+2}}\,| = |E^{m+2}_k| + |G^{m+2}_k| = |G^{m+1}_k| = \tau^{-(m+2)},\\
&|\,E^m_{\underset{\cdot\cdot\text{—}}{F_{m+1}+2}}(\delta) \oplus G^m_{\underset{-\,\text{—}}{F_{m-1}+2}}(\delta)\,| = |\,E^m_{\underset{\text{—}\,-\,\text{—}}{F_{m+1}+2}}\,| = \tau^{-(m+1)}.
\end{aligned}
$$

Из (8.2)–(8.7) вытекает следующее утверждение

Лемма 8.1. *Пусть* ε *принадлежит спектру* $E = \{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$. *Тогда* $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ *состоит из двух собственных глобальных спиралей* $s_{\min}$ *и* $s_{\max}$ *соответственно с динами* $\sharp s_{\min} = f_{m+1}$ *и* $\sharp s_{\max} = f_{m+2}$, *где* $f_m = [F_m/2]$. *При этом спираль* $s_{\min}$ *состоит из полуинтервалов меры* $\tau^{-(m+2)}$, *а* $s_{\max}$ — *меры* $\tau^{-(m+1)}$.

8.3. Скорость сжатия: вырожденный случай. Согласно лемме 8.1, множество $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ состоит из двух глобальных спиралей вида

$$s_{\min} = X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_{f_{m+1}}, \quad s_{\max} = Y_1 \to Y_2 \to \cdots \to Y_{f_{m+2}}.$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} s_{\min}(X_k) &= X_k \to \cdots \to X_{f_{m+1}} \quad \text{для} \quad 1 \le k \le f_{m+1}, \\ s_{\max}(Y_k) &= Y_k \to \cdots \to Y_{f_{m+2}} \quad \text{для} \quad 1 \le k \le f_{m+2}. \end{aligned}$$

Полагаем $s_{\min}(X_k) = \emptyset$, если $k > f_{m+1}$, и $s_{\max}(Y_k) = \emptyset$, если $k > f_{m+2}$. Из динамических графов D_c^m, D_v^m рис. 2.1–2.4 следует, что двухцветный сдвиг S_ε действует на спирали $s_{\min}$, $s_{\max}$ по следующим правилам

$$\begin{aligned} S_\varepsilon^k(s_{\min}) &= S_\varepsilon^k(s_{\min}(X_1)) = s_{\min}(X_{k+1}) \bmod \mathrm{Att}_\varepsilon, \\ S_\varepsilon^k(s_{\max}) &= S_\varepsilon^k(s_{\min}(Y_1)) = s_{\min}(Y_{k+1}) \bmod \mathrm{Att}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Кроме того, имеют место разбиения

$$I = \mathrm{Spir}_\varepsilon \sqcup \mathrm{Att}_\varepsilon = s_{\min} \sqcup s_{\max} \sqcup \mathrm{Att}_\varepsilon.$$

При этом полуинтервалы из спиралей $s_{\min}$, $s_{\max}$ не пересекаются между собою и по теореме 4.1.1 выполняется равенство $S_\varepsilon^k(\mathrm{Att}_\varepsilon) = \mathrm{Att}_\varepsilon$ для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ Используя разбиение полуинтервала I и указанные правила, записываем

$$\begin{aligned} S_\varepsilon^k(I) &= s_{\min}(X_{k+1}) \sqcup s_{\max}(Y_{k+1}) \sqcup \mathrm{Att}_\varepsilon = \\ &= I \setminus (\{X_1 \to \cdots \to X_k\} \sqcup \{Y_1 \to \cdots \to Y_k\}). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Теперь вычислим меру $\mathrm{mes}_\varepsilon(tf_{m+2})$ п. 8.1 образа единичного полуинтервала $S_\varepsilon^k(I)$ для $k = [tf_{m+2}]$. Применяя последнее разбиение для $S_\varepsilon^k(I)$ из (8.8) и лемму 8.1, находим:

$$\mathrm{mes}_\varepsilon(tf_{m+2}) = 1 - (|X_1| + |Y_1|)[tf_{m+2}], \tag{8.9}$$

если $[tf_{m+2}] \le f_{m+1}$;

$$\mathrm{mes}_\varepsilon(tf_{m+2}) = 1 - |X_1|f_{m+1} - |Y_1|[tf_{m+2}], \tag{8.10}$$

если $f_{m+1} < [tf_{m+2}] \le f_{m+2}$; и

$$\mathrm{mes}_\varepsilon(tf_{m+2}) = |\mathrm{Att}_\varepsilon|, \tag{8.11}$$

если $[tf_{m+2}] > f_{m+2}$. В этих равенствах $|X_1| = \tau^{-(m+2)}$, $|Y_1| = \tau^{-(m+1)}$, $|X_1| + |Y_1| = \tau^{-(m)}$. По условию считаем параметр ε равным собственным значениям $\varepsilon_m = 1-\tau^{-m}$, $\varepsilon \uparrow 1$ и, значит, $m \to \infty$. Так как $\tau^{-m} = 1 - \varepsilon$, то справедливы следующие оценки

$$\tau^{-m} = O(1-\varepsilon), \quad |X_1| + |Y_1| = O(1-\varepsilon). \tag{8.12}$$

По определению имеем $f_{m+2} = [F_{m+2}/2]$. Представляя число Фибоначчи F_{m+2} в виде

$$F_{m+2} = \frac{\tau^{m+2} - (-\tau^{-1})^{m+2}}{\sqrt{5}} = \frac{\tau^{m+2}}{\sqrt{5}} + O(1-\varepsilon), \tag{8.13}$$

выводим асимптотическое равенство

$$\tau^{-m} f_m = \frac{1}{2\sqrt{5}} + O(1-\varepsilon). \tag{8.14}$$

Если его подставить в равенства (8.9)–(8.11) и использовать оценки (8.12), то преобразуем меры (9.9)–(8.11) к следующему виду:

$$\mathrm{mes}_\varepsilon(tf_{m+2}) = 1 - \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}}t + O(1-\varepsilon), \tag{8.15}$$

если $[tf_{m+2}] \le f_{m+1}$;

$$\mathrm{mes}_\varepsilon(tf_{m+2}) = 1 - \frac{\tau^{-1}}{2\sqrt{5}} - \frac{\tau}{2\sqrt{5}}t + O(1-\varepsilon), \tag{8.16}$$

если $f_{m+1} < [tf_{m+2}] \le f_{m+2}$; и

$$\mathrm{mes}_\varepsilon(tf_{m+2}) = |\mathrm{Att}_\varepsilon| = \frac{1}{2} + O(1-\varepsilon), \tag{8.17}$$

если $[tf_{m+2}] > f_{m+2}$. Последнее равенство для меры аттрактора $|\mathrm{Att}_\varepsilon|$ вытекает из предложения 3.1.

Из неравенства $[tf_{m+2}] \le f_{m+1}$ в силу (8.12) и (8.13) для t следует неравенство

$$t \le \tau^{-1} + O\Big(\frac{1}{f_{m+2}}\Big) = \tau^{-1} + O(1-\varepsilon).$$

Поэтому, если ограничение в (8.15) заменить неравенством $t \le \tau^{-1}$, то аргумент tf_{m+2} изменится на $O(1)$ и формула (8.15) сохранится ввиду (8.8) и (8.12). Снова используя (8.13), записываем

$$tf_{m+2} = \frac{\tau^{m+2}}{2\sqrt{5}}t + O(1-\varepsilon) = \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}(1-\varepsilon)}t + O(1-\varepsilon).$$

Следовательно, если аргумент tf_{m+2} заменить на $\frac{\tau^2}{2\sqrt{5}(1-\varepsilon)}t$ в (8.15), то формула (8.15) также сохранится. Применяя аналогичные рассуждения к формулам (8.16) и (8.17), получаем следующий результат.

Предложение 8.1. *Пусть параметр ε принадлежит спектру $E = \{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ (1.1), и пусть*

$$\mathrm{mes}_\varepsilon\left(\frac{\tau^2 t}{2\sqrt{5}(1-\varepsilon)}\right) = \left|S_\varepsilon^{[\tau^2 t/(2\sqrt{5}(1-\varepsilon))]}(I)\right| \tag{8.18}$$

– мера образа единичного полуинтервала I при отображении двухцветным сдвигом S_ε. Тогда для меры (8.18) имеет место предельное распределение

$$\mathrm{mes}_\varepsilon\left(\frac{\tau^2 t}{2\sqrt{5}(1-\varepsilon)}\right) = L(t) + O(1-\varepsilon) \tag{8.19}$$

при $\varepsilon \uparrow 1$, где $L(t)$ – непрерывная, вогнутая, кусочно-линейная функция, равная

$$\begin{aligned} L_1(t) &= 1 - \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}}t && \text{для} \quad 0 \le t \le \tau^{-1}, \\ L_2(t) &= \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2\sqrt{5}}(1-t) && \text{для} \quad \tau^{-1} \le t \le 1, \\ L_3(t) &= \frac{1}{2} && \text{для} \quad 1 \le t < \infty. \end{aligned}$$

8.4. Скорость сжатия: общий случай. Пусть $m \equiv 1 \bmod 6$, $m > 1$ и параметр ε принадлежит полуинтервалу $J^m = (\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m]$. В этом случае, согласно (5.18) и (5.19), существуют три глобальные спирали

$$\overrightarrow{\Delta}^c s(G_2^m(\delta)), \tag{8.20}$$

$$\overrightarrow{\Delta}^c s(E_2^m(\delta) \oplus G_{F_m+2}^m(\delta)) \oplus s(G_{F_m+2}^m(\delta)),$$

$$\overrightarrow{\Delta} s(E_2^m(\delta) \oplus G_{F_m+2}^m(\delta)) \longrightarrow \overrightarrow{\Delta} s(G_1^m(\delta)),$$

длины которых соответственно равны f_m, f_{m+1}, f_{m+2}. При этом $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_{m-1}$, $\Delta^c = \varepsilon_m - \varepsilon$ и операторы обрезания $\overrightarrow{\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta}^c$ определены в (5.16). Так как $\Delta > 0$, то третья максимальная спираль в (8.20) непустая. Начальные полуинтервалы спиралей (8.20) имеют меры Δ^c, $|\,G_{F_m+2}^m(\delta)\,| + \Delta^c$, Δ. Поскольку в силу (5.3) и (1.4)

$$|\,G_{F_m+2}^m(\delta)\,| = |E_k^{m+2}| + |G_k^{m+2}| = |E_k^{m+1}| = \tau^{-(m+2)},$$

$$\Delta + \Delta^c = |J^m| = \tau^{-(m+1)},$$

то меры начальных полуинтервалов можем переписать в виде

$$\tau^{-(m+1)} - \Delta, \quad \tau^{-m} - \Delta, \quad \Delta. \tag{8.21}$$

Вычислим скорость убывания меры $\operatorname{mes}_\varepsilon(tf_{m+2}) = \left|S_\varepsilon^{[tf_{m+2}]}(I)\right|$, когда целая часть аргумента $[tf_{m+2}]$ принадлежит одному из трех промежутков

$$[0, f_m], \quad (f_m, f_{m+1}], \quad (f_{m+1}, f_{m+2}]. \tag{8.22}$$

Первому промежутку в (8.22) отвечает *суммарная мера* полуинтервалов из спиралей (8.20), равная сумме всех мер (8.21). Второму промежутку в (8.22) соответствует суммарная мера, равная сумме второй и третьей меры из (8.21), а третьему – соответствует последняя мера из (8.21). Представим суммарные меры в векторной форме

$$M = (\tau^{-(m-1)} - \Delta, \tau^{-m}, \Delta) = \tau^{-(m+2)}(\tau^3 - \tau\Delta_1, \tau^2, \tau\Delta_1),$$

где приращения Δ и Δ_1 связаны соотношением $\Delta = \tau^{-(m+1)}\Delta_1$, $0 < \Delta_1 \leq 1$. Чтобы, аналогично (8.19), вычислить коэффициенты в $\mathrm{mes}_\varepsilon(tf_{m+2})$ при t, найдем асимптотическое разложение для произведения $f_{m+2}M$ при $\varepsilon \uparrow 1$. Используя формулы (8.14), получаем

$$f_{m+2}M = K + O(1-\varepsilon), \tag{8.23}$$

при этом

$$K = \left(\frac{\tau^3}{2\sqrt{5}} - \frac{\tau}{2\sqrt{5}}\Delta_1, \quad \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}}, \quad \frac{\tau}{2\sqrt{5}}\Delta_1\right) = \Delta_1 K_1 + (1-\Delta_1)K_2,$$

где

$$K_1 = \left(\frac{\tau^2}{2\sqrt{5}}, \quad \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}}, \quad \frac{\tau}{2\sqrt{5}}\right), \quad K_2 = \left(\frac{\tau^3}{2\sqrt{5}}, \quad \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}}, \quad 0\right).$$

Теорема 8.1. *Пусть единичный полуинтервал $I = [0,1)$ разбит (6.15) на полуинтервалы $J^m = (\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m]$ уровней $m = 0,1,2,\ldots$, где $\varepsilon_m = 1 - \tau^{-m}$ – собственные значения B-процесса, и для $\varepsilon \in J^m$ обозначим*

$$\mathrm{mes}_\varepsilon\left(\frac{\tau^{m+2}t}{2\sqrt{5}}\right) = \left|S_\varepsilon^{[\tau^{m+2}t/(2\sqrt{5})]}(I)\right| \tag{8.24}$$

меру образа I при отображении двухцветным сдвигом S_ε (1). Тогда для нее имеет место предельное распреление

$$\mathrm{mes}_\varepsilon\left(\frac{\tau^{m+2}t}{2\sqrt{5}}\right) = \lambda_m(\varepsilon)L(t) + (1-\lambda_m(\varepsilon))L(\tau t) + O(1-\varepsilon) \tag{8.25}$$

при $\varepsilon \uparrow 1$, где $L(t)$ – кусочно-линейная функция из предложения 8.1 и вес $\lambda_m(\varepsilon)$ в разложении (8.25) равен

$$\lambda_m(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{m-1}}{|J^m|} = \tau^{m+1}(\varepsilon - \varepsilon_{m-1}).$$

Доказательство. Предположим, что $m \equiv 1 \bmod 6$ и $\varepsilon \in J^m$. Тогда формула (8.26) получается по схеме доказательства предложения 8.1, если воспользоваться разложением $K = \Delta_1 K_1 + (1 - \Delta_1)K_2$ (8.23), где $\Delta_1 = (\varepsilon - \varepsilon_{m-1})/|J^m|$. Доказательства в остальных случаях также основаны на разложениях векторной меры K из (8.23), если воспользоваться структурой глобальных спиралей из множества $\mathrm{Spir}_\varepsilon$ (см. п.п. 5.2–5.3). $\square$

Из предельной формулы (8.25) следует, что с точностью до слагаемого $O(1-\varepsilon)$ сжатие единичного полуинтервала I при многократном действии на него двухцветного сдвига S_ε осуществляется в четырех *линейных режимах*. Согласно (8.23) и (8.25), коэффициенты сжатия при t в нормировке $\tau^{m+2}t/(2\sqrt{5})$ соответственно равны

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\tau^3}{2\sqrt{5}} - \frac{\tau}{2\sqrt{5}}\Delta_1 && \text{для} && 0 \le t \le \tau^{-2},\\
k_2 &= \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}} && \text{для} && \tau^{-2} \le t \le \tau^{-1},\\
k_3 &= \frac{\tau}{2\sqrt{5}}\Delta_1 && \text{для} && \tau^{-1} \le t \le 1,\\
k_4 &= 0 && \text{для} && 1 \le t < \infty.
\end{aligned}$$

Нулевой коэффициент $k_4 = 0$ для $t \ge 1$ означает несжимаемость аттрактора $S_\varepsilon(\mathrm{Att}_\varepsilon) = \mathrm{Att}_\varepsilon$. В частном случае, когда параметр ε принадледит спектру $E = \{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$, процесс сжатия вырождается и становится трехрежимным (8.19). Заметим, что три числа

$$k_1 + k_3 = \frac{\tau^3}{2\sqrt{5}}, \quad k_2 = \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}}, \quad k_4 = 0$$

не зависят от параметра $\varepsilon \in I$ и поэтому являются асимптотическими *инвариантами* процесса сжатия единичного полуинтервала I двухцветным сдвигом S_ε при $\varepsilon \uparrow 1$.

Литература

1. M. Boshernitzan, I. Kornfeld, *Interval translation mappings*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **15** (1995), 821–831.
2. H. Bruin, S. Troubetzkoy, *The Gauss map on a class of interval translation mappings*, Israel J. Math. **137** (2003), 125–148.
3. H. Suzuki, S. Ito, K. Aihara, *Double rotations*, Univ. Tokio, Bunkyo-Ku **113-8656** (2003), 1–23.
4. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи*, Изв. РАН. Сер. мат. **71**, No. 2 (2007), 287–321.
5. V. G. Zhuravlev, *One-dimensional Fibonacci tilings and derivatives of two-colour rotations of a circle*, preprint Max-Planck-Institut für Mathematik **59** (2004), 1–43.
6. В. Г. Журавлев, *Двухцветные повороты единичной окружности*, Изв. РАН. Сер. мат. (2007), в печати.

7. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, Эргодическая теория. М., 1980.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 14 сентября 2007 г.