Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 350, 2007 г.

В. В. Жук

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МЕТРИКАХ ТИПА ГЁЛЬДЕРА СУММАМИ ФУРЬЕ И СРЕДНИМИ РИССА

Пусть M – фиксированное пространство 2π-периодических функций L_p или C, $\omega_r(f,h)$ – модуль непрерывности порядка r функции f в пространстве M, функция $\varphi(t)>0$ при $t>0$; $S_n(f)$ – суммы Фурье, $R_{n,r}(f)$ – суммы Рисса (при $r=1$ суммы Фейера) функции f. Положим

$$K_m(f)=K_{m,\varphi}(f)=\sup_{0<v<\infty}\frac{\omega_m(f,v)}{\varphi(v)}.$$

В работе исследуется вопрос как связано поведение величин

$$K_m(f-S_n(f)),\quad K_m(f-R_{n,r}(f))$$

при $n\to\infty$ со структурными свойствами функции f, определяемыми посредством модулей непрерывности. При этом устанавливаются результаты общего характера, применимые и к другим методам приближения.

§1. Обозначения. Вспомогательные предложения

1. В дальнейшем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ суть соответственно множества комплексных, вещественных, неотрицательных целых, натуральных чисел. При $1\leqslant p<\infty$ через L_p обозначаем пространство вещественных, измеримых, 2π-периодических функций f, у которых

$$\|f\|_p=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f|^p\right)^{1/p}<\infty;$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 05-01-00742.

$L_\infty = C$ – пространство вещественных, непрерывных, 2π-периодических функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

M – фиксированное пространство L_p, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Норму функции $f \in M$ в пространстве M обозначаем просто $\|f\|$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Тогда $\delta_t^r(f)$ – центральная разность r-го порядка функции f с шагом t:

$$\delta_t^r(f,x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k f(x + (\frac{r}{2} - k)t);$$

если $f \in M$, то

$$\omega_r(f,h) = \sup_{0\leqslant t\leqslant h} \|\delta_t^r(f)\|$$

– ее модуль непрерывности порядка r в пространстве M.

Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Считаем $+\infty \cdot 0 = 0 \cdot (+\infty) = +\infty$.

Через H_n при $n \in \mathbb{Z}_+$ обозначаем множество тригонометрических полиномов (в дальнейшем называемых просто полиномами) порядка не выше n:

$$H_n = \{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\},$$

где $c_k \in \mathbb{C}$, $c_{-k} = \overline{c_k} \quad (k = \overline{0,n})$.

Если $f \in M$, то

$$E_n(f) = \inf_{T\in H_n} \|f - T\|$$

– наилучшее приближение порядка n функции f в пространстве M. Полином $T_n(f) \in H_n$ определяется соотношением

$$\|f - T_n(f)\| = E_n(f).$$

Он называется тригонометрическим полиномом наилучшего приближения порядка n функции f в пространстве M. Если полином $T \in H_n$ определяется равенством $\|f - T\| = E_n(f)$ неоднозначно, то через $T_n(f)$ обозначаем любой из них. Последнее соглашение не приведет к недоразумениям. Если $f \in L_1$, то $\tilde{f}$ – функция, тригонометрически сопряженная с f. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Тогда $C^{(r)} = \{f \in C : \exists f^{(r)} \in C\}$.

В дальнейшем $B_k(\cdot)$ – положительные конечные постоянные, зависящие только от выписанных аргументов. Для $U : M \to M$ полагаем

$$\|U\| = \sup_{f \in M} \{\|U(f)\| \,/\, \|f\|\}.$$

Через A обозначаем множество линейных операторов $U : M \to M$ таких, что $U(f(\cdot + t), x) = U(f, x + t)$ для всех $f \in M$, x, $t \in \mathbb{R}$.

Далее $S_n(f)$, $\sigma_n(f)$, $\tau_n(f)$, $R_{n,r}(f)$ суть соответственно суммы Фурье, Фейера, Валле Пуссена, Рисса функции f:

$$S_n(f, x) = \sum_{h=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx},$$

$$\sigma_n(f, x) = \sum_{h=-n}^{n} \big(1 - \frac{|k|}{n+1}\big) c_k(f) e^{ikx},$$

$$\tau_n(f, x) = 2\sigma_{2n+1}(f, x) - \sigma_n(f, x),$$

$$R_{n,r}(f, x) = \sum_{h=-n}^{n} \big(1 - \frac{|k|^r}{(n+1)^r}\big) c_k(f) e^{ikx},$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

– коэффициенты Фурье функции f.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, функция $\varphi(t) > 0$ при $t \in (0, \infty)$, $f \in M$. По определению полагаем:

$$K_m(f) = K_{m,\varphi}(f) = \sup_{0<v<\infty} \frac{\omega_m(f, v)}{\varphi(v)},$$

$$J_m(f) = J_{m,\varphi}(f) = \sup_{0<v<\infty} \frac{\|\delta_v^m(f)\|}{\varphi(v)}.$$

Очевидно, что $J_m(f) \leqslant K_m(f)$.

Условимся, что когда надо будет подчеркнуть конкретность рассматриваемого пространства L_p, в обозначения добавлять параметр p. Так, например, $\omega_r(f,h)_p$ обозначает модуль непрерывности порядка r функции f в пространстве L_p, $E_n(f)_p = \inf_{T\in H_n}\|f-T\|_p$ – наилучшее приближение в L_p,

$$K_m(f)_p = \sup_{0<v<\infty}\frac{\omega_m(f,v)_p}{\varphi(v)}$$

и т.д.

2. Нам понадобятся следующие известные факты.

Теорема A (обобщенная теорема Джексона, см., например, [1, с. 274, 338]). *Пусть $n\in\mathbb{Z}_+$, $r\in\mathbb{N}$, $f\in M$. Тогда*

$$E_n(f)\leqslant B(r)\omega_r\big(f,\frac{\pi}{n+1}\big).$$

Теорема B (см. [2, с. 159, 151]). *Пусть $n\in\mathbb{Z}_+$, $r\in\mathbb{N}$, $f\in M$. Тогда*

$$E_n(f)\leqslant B_1(r)\sup_{0\leqslant t\leqslant\pi/(n+1)}E_n(\delta_t^r(f)).$$

Теорема C (см., например, [1, с. 228, 230]). *Пусть $n\in\mathbb{Z}_+$, $r\in\mathbb{N}$. Тогда для любого полинома $T\in H_n$ справедливо неравенство*

$$\|T^{(r)}\|\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^r\|\delta^r_{\frac{\pi}{n+1}}(T)\|.$$

Теорема D (см., например, [3, с. 190]). *Пусть $n\in\mathbb{Z}_+$, $T\in H_n$. Тогда $\|\tilde{T}'\|\leqslant n\|T\|$.*

Теорема E (см., например, [2, с. 65]). *Пусть $n\in\mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$\|S_n\|\leqslant\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)+1,4.$$

Теорема F([4, с. 56]). *Пусть $n\in\mathbb{Z}_+$, $r\in\mathbb{N}$, $f\in M$. Тогда*

$$\|f-S_n(f)\|\leqslant\frac{1}{2^r}\left\{\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)+B_2(r)\right\}\omega_r\big(f,\frac{\pi}{n+1}\big).$$

Теорема G (см., например, [5, с. 593]). *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$\|S_n\|_p = \sup_{f \in L_p} \{\|S_n(f)\|_p / \|f\|_p\} \leqslant B_3(p).$$

Следствие A. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 < p < \infty$, $f \in L_p$. *Тогда*

$$\|f - S_n(f)\|_p \leqslant (B_3(p) + 1)\ E_n(f)_p,$$

$$\|f - S_n(f)\|_p \leqslant B(r,p)\omega_r\big(f, \frac{\pi}{n+1}\big)_p,$$

где

$$B(r,p) \leqslant (B_3(p) + 1)B(r).$$

Теорема H (см. [2, с. 234]). *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $f \in C$. *Тогда*

$$\|S_n^{(r)}(f)\|_\infty$$
$$\leqslant \frac{(n+1)^r}{2^r}\{\frac{4}{\pi^2}\ln(1 + n\big(\frac{2^r E_n(f)_p}{\omega_r(f, \pi/(n+1))_\infty}\big)^p) + B_4(p)\}\omega_r\big(f, \frac{\pi}{n+1}\big)_\infty.$$

Теорема I (см. [2, с.237]). *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $f \in C$. *Тогда*

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^r}\left\{\frac{4}{\pi^2}\ln\big(1 + n\left(\frac{2^r E_n(f)_p}{\omega_r(f, \pi/(n+1))_\infty}\right)^p\big)\right.$$
$$+ B_1(r,p)\}\omega_r\big(f, \frac{\pi}{n+1}\big)_\infty.$$

Теорема J (см., например, [2, с. 117, 118]). *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in M$. *Тогда*

$$\|f - \tau_n(f)\| \leqslant 3E_{n+1}(f) \leqslant 3B(r)\omega_r\big(f, \frac{\pi}{n+1}\big).$$

Теорема K (см. [6, с. 227]). *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in M$. *Тогда* $\|R_{n,r}\| \leqslant B_5(r)$,

$$\omega_{2r}\big(f, \frac{\pi}{n+1}\big) \leqslant B_6(r)\|f - R_{n,2r}(f)\|,$$

$$\|f - R_{n,2r}(f)\| \leqslant B_7(r)\omega_{2r}\big(f, \frac{\pi}{n+1}\big).$$

Теорема L (см. [2, с. 298, 299]). *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $f \in L_p$. *Тогда*

$$\|f - R_{n,r}(f)\|_p \leqslant B_2(r,p)\omega_r\big(f, \frac{\pi}{n+1}\big)_p,$$

$$\omega_r\big(f, \frac{\pi}{n+1}\big)_p \leqslant B_3(r,p)\|f - R_{n,r}(f)\|_p.$$

Теорема M (см. [6, с. 233]). *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $r < 2l$,

$$Q(r,l) = (-1)^{l+1}2^{r-2l}\bigg(\int\limits_0^\infty t^{-r-1}\sin^{2l} t dt\bigg)^{-1}.$$

Тогда для любой $f \in M$

$$\|f - R_{n,r}(f) + \frac{Q(r,l)}{(n+1)^r}\int\limits_{\pi/(n+1)}^\infty \frac{\delta_t^{2l}(f,\cdot)}{t^{r+1}}dt\| \leqslant B_4(l,r)\omega_{2l}\big(f, \frac{\pi}{n+1}\big).$$

Теорема N ([7]). *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; $\beta = p$, *если* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\beta = 2$, *если* $2 < p < \infty$, $\beta = 1$, *если* $p = \infty$, $f \in L_p$. *Тогда*

$$\omega_r\big(f, \frac{1}{n+1}\big)_p \leqslant B_5(r,p)\bigg\{\sum_{k=n+1}^\infty (k+1)^{-r\beta-1}\|\sigma_k^{(r)}(f)\|_p^\beta\bigg\}^{1/\beta}.$$

Лемма A. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $h \geqslant 0$. *Тогда*

$$\omega_r(f+g,h) \leqslant \omega_r(f,h) + \omega_r(g,h)$$

для любых f, $g \in M$. *Если* $f \in C^{(r)}$, *то*

$$\omega_r(f,h) \leqslant \|f^{(r)}\|h^r.$$

Для любой $f \in M$ *справедливо неравенство*

$$\omega_r(f,h) \leqslant 2^r\|f\|.$$

Лемма 1. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, линейный оператор $U : M \to M$ удовлетворяет условиям:* а) $E_n(g) \leqslant B\|g - U(g)\|$ *для любой функции $g \in M$;* б) *для любого полинома $T \in H_n$*

$$\|T^{(k)}\| \leqslant B_8(n)\|T - U(T)\|.$$

Тогда для любой функции $f \in M$ справедливо неравенство

$$\omega_k\bigl(f, \frac{\pi}{2n+2}\bigr)$$
$$\leqslant \{2^k B + \bigl(\frac{\pi}{2n+2}\bigr)^k B_8(n)(B(1 + \|U\|) + 1)\}\|f - U(f)\|.$$

Доказательство. Положим $h = \pi/(2n+2)$. Опираясь на лемму А, имеем

$$\begin{aligned}\omega_k(f,h) &\leqslant \omega_k(f - T_n(f), h) + \omega_k(T_n(f), h)\\ &\leqslant 2^k\|f - T_n(f)\| + h^k\|T^{(k)}(f)\|\\ &= 2^k E_n(f) + h^k\|T^{(k)}(f)\| \leqslant 2^k E_n(f)\\ &\quad + h^k B_8(n)\|T_n(f) - U(T_n(f))\|.\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\|T_n(f) - U(T_n(f))\| &= \|T_n(f) - f + f - U(f) + U(f)\\ &\quad - U(T_n(f))\| \leqslant (1 + \|U\|)\|f - T_n(f)\| + \|f - U(f)\|\\ &\leqslant \{(1 + \|U\|)B + 1\}\|f - U(f)\|.\end{aligned}$$

Сопоставляя полученные соотношения, находим

$$\omega_k(f,h) \leqslant \{2^k B + h^k B_8(n)((1 + \|U\|)B + 1)\}\|f - U(f)\|.$$

Следствие 1. *В условиях леммы 1 для любого полинома $T \in H_{2n+1}$ справедливо неравенство*

$$\|T^{(k)}\| \leqslant \{2^k B(n+1)^k + \bigl(\frac{\pi}{2}\bigr)^k B_8(n)(B(1 + \|U\|) + 1)\}$$
$$\times\|T - U(T)\|.$$

Доказательство. На основании теоремы С имеем

$$\|T^{(k)}\| \leqslant (n+1)^k\|\delta^k_{\frac{\pi}{2n+2}}(T)\|.$$

Осталось воспользоваться леммой 1.

Лемма 2. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, m, $k \in \mathbb{N}$, *функция* $\varphi(t) > 0$ *при* $t > 0$, *оператор* $U : M \to M$ *удовлетворяет условиям:* а) $U \in A$, б) $U'(f) = U(f')$ *для любой функции* $f \in C^{(1)}$, в) $\sigma_n(U(f)) = U(\sigma_n(f))$ *для любой функции* $f \in M$, г) *для любого полинома* $T \in H_n$ *имеет место неравенство*

$$\|T^{(k)}\| \leqslant B_9(n)\|T - U(T)\|.$$

Тогда для любой функции $f \in M$ *справедливо соотношение*

$$J_m(f - U(f)) \geqslant \frac{2^m \|\sigma_n^{(m+k)}(f)\|}{B_9(n)(n+1)^m \varphi\big(\frac{\pi}{n+1}\big)}.$$

Доказательство. Положим $h = \pi/(n+1)$. Так как $\|\sigma_n\| = 1$, то при любом $t \in \mathbb{R}$

$$\|\delta_t^m(f - U(f))\| \geqslant \|\sigma_n(\delta_t^m(f - U(f)))\| = \|\delta_t^m(\sigma_n(f - U(f))\|.$$

Теперь, применяя теорему C, имеем

$$\begin{aligned} J_m(f - U(f)) &\geqslant \frac{\|\delta_h^m(f - U(f))\|}{\varphi(h)} \geqslant \frac{\|\delta_h^m(\sigma_n(f - U(f)))\|}{\varphi(h)} \\ &\geqslant \frac{2^m\|\sigma_n^{(m)}(f - U(f))\|}{(n+1)^m\varphi(h)} = \frac{2^m\|\sigma_n^{(m)}(f) - U(\sigma_n^{(m)}(f))\|}{(n+1)^m\varphi(h)} \\ &\geqslant \frac{2^m\|\sigma_n^{(m+k)}(f)\|}{B_9(n)(n+1)^m\varphi(h)}. \end{aligned}$$

Следствие 2. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, m, $r \in \mathbb{N}$, *функция* $\varphi(t) > 0$ *при* $t > 0$, $f \in M$. *Тогда*

$$J_m(f - R_{n,2r}(f)) \geqslant \frac{2^m\|\sigma_n^{(m+2r)}(f)\|}{(n+1)^{m+2r}\varphi(\pi/(n+1))}.$$

Для доказательства следствия 2 достаточно принять во внимание, что для любого полинома $T \in H_n$

$$(n+1)^{2r}\|T - R_{n,2r}(T)\| = \|T^{(2r)}\|, \tag{1}$$

и применить лемму 2 к оператору $U(f) = R_{n,2r}(f)$.

Следствие 3. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, m, $r \in \mathbb{N}$, *функция* $\varphi(t) > 0$ *при* $t > 0$, φ *возрастает на* $(0, \infty)$, $f \in M$. *Тогда*

$$J_m(f - R_{n,2r}(f)) \geqslant \frac{B_6(r,m)\|\sigma_{2n+1}^{(m+2r)}(f)\|}{(n+1)^{m+2r}\varphi(\pi/(n+1))}.$$

Доказательство. Опираясь на следствие 1, равенство (1) и неравенство $\|R_{n,r}\| \leqslant B_5(r)$, для любого $T \in H_{2n+1}$ имеем

$$\|T^{(2r)}\| \leqslant \{2^{2r}(n+1)^{2r} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r}(n+1)^{2r}(2 + \|R_{n,2r}\|)\}$$
$$\times\|T - R_{n,2r}(T)\| \leqslant (n+1)^{2r}B_{10}(r)\|T - R_{n,2r}(T)\|.$$

Следовательно, на основании леммы 2

$$J_m(f - R_{n,2r}(f)) \geqslant \frac{2^m\|\sigma_{2n+1}^{(m+2r)}(f)\|}{B_{10}(r)(n+1)^{m+2r}\varphi(\pi/(2n+2))}$$
$$\geqslant \frac{B_6(r,m)\|\sigma_{2n+1}^{(m+2r)}(f)\|}{(n+1)^{m+2r}\varphi(\pi/(n+1))}.$$

Следствие 4. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, m, $r \in \mathbb{N}$, *функция* $\varphi(t) > 0$ *при* $t > 0$, $f \in M$. *Тогда*

$$J_m(f - R_{n,2r-1}(f)) \geqslant \frac{2^m\|\sigma_n^{(m+2r)}(f)\|}{(n+1)^{m+2r}\varphi(\pi/(n+1))}.$$

Доказательство. Принимая во внимание теорему D, для любого полинома $T \in H_n$ имеем

$$\|T - R_{n,2r-1}(T)\| = (n+1)^{-2r+1}\|\tilde{T}^{(2r-1)}\| \geqslant (n+1)^{-2r}\|T^{(2r)}\|. \quad (2)$$

Учитывая это неравенство и применяя лемму 2 к оператору $U(f) = R_{n,2r-1}(f)$, получаем требуемое.

Следствие 5. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, m, $r \in \mathbb{N}$, *функция* $\varphi(t) > 0$ *при* $t > 0$, φ *возрастает на* $(0, \infty)$, $f \in M$. *Тогда*

$$J_m(f - R_{n,2r-1}(f)) \geqslant \frac{B_7(r,m)\|\sigma_{2n+1}^{(m+2r)}(f)\|}{(n+1)^{m+2r}\varphi(\pi/(n+1))}.$$

Доказательство. Опираясь на следствие 1, неравенство (2) и соотношение $\|R_{n,r}\| \leqslant B_5(r)$, для любого $T \in H_{2n+1}$ имеем

$$\|T^{(2r)}\| \leqslant \{2^{2r}(n+1)^{2r} + (\frac{\pi}{2})^{2r}(n+1)^{2r}(2+\|R_{n,2r-1}\|)\}$$
$$\times\|T - R_{n,2r-1}(T)\| \leqslant (n+1)^{2r}B_{11}(r)\|T - R_{n,2r-1}(T)\|.$$

Следовательно, на основании леммы 2

$$J_m(f - R_{n,2r-1}(f)) \geqslant \frac{2^m\|\sigma_{2n+1}^{(m+2r)}(f)\|}{B_{11}(r)(n+1)^{m+2r}\varphi(\pi/(2n+2))}$$
$$\geqslant \frac{B_7(r,m)\|\sigma_{2n+1}^{(m+2r)}(f)\|}{(n+1)^{m+2r}\varphi(\pi/(n+1))}.$$

Лемма 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, функция $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$, φ возрастает на $(0,\infty)$, оператор $U : M \to H_n$ принадлежит множеству A. Тогда для любой функции $f \in M$*

$$E_n(f) \leqslant \varphi(\frac{\pi}{n+1})B_1(m)J_m(f - U(f)).$$

Доказательство. Положим $h = \pi/(n+1)$. Имеем

$$J_m(f - U(f)) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\|\delta_t^m(f - U(f))\|}{\varphi(t)}$$
$$\geqslant \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\|\delta_t^m(f - U(f))\|}{\varphi(t)} \geqslant \frac{1}{\varphi(h)} \sup_{0<t\leqslant h} \|\delta_t^m(f - U(f))\|$$
$$\geqslant \frac{1}{\varphi(h)} \sup_{0<t\leqslant h} E_n(\delta_t^m(f)).$$

Осталось воспользоваться теоремой B.

§2. Основные результаты

1. Теорема 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, функция $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$, φ возрастает на $(0,\infty)$, оператор $U \in A$, $f \in M$. Тогда*

$$K_m(f - U(f)) \leqslant \inf\nolimits_{\delta>0} \max\left\{(1+\|U\|)\sup_{0<t\leqslant\delta}\frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)},\right.$$
$$\left.\frac{2^m\|f-U(f)\|}{\varphi(\delta)}\right\}. \tag{3}$$

Доказательство. Принимая во внимание, что

$$\omega_m(\varphi+\psi,t)\leqslant\omega_m(\varphi,t)+\omega_m(\psi,t)$$

для любых φ, $\psi\in M$, имеем

$$\alpha=\sup_{0<t\leqslant\delta}\frac{\omega_m(f-U(f),t)}{\varphi(t)}\leqslant\sup_{0<t\leqslant\delta}\frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)}+\sup_{0<t\leqslant\delta}\frac{\omega_m(U(f),t)}{\varphi(t)}.$$

Так как $U\in A$, то

$$\omega_m(U(f),t)=\sup_{0\leqslant h\leqslant t}\|\delta_h^r(U(f))\|=\sup_{0\leqslant h\leqslant t}\|U(\delta_h^r(f))\|\leqslant\|U\|\sup_{0\leqslant h\leqslant t}\|\delta_h^r(f)\|=\|U\|\omega_r(f,t).$$

Значит,

$$\alpha\leqslant\sup_{0<t\leqslant\delta}\frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)}+\sup_{0<t\leqslant\delta}\frac{\|U\|\omega_m(f,t)}{\varphi(t)}=(1+\|U\|)\sup_{0<t\leqslant\delta}\frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)}.$$

Далее, применяя неравенство

$$\omega_m(\varphi,t)\leqslant 2^m\|\varphi\|,$$

если $\varphi\in M$, имеем

$$\sup_{\delta\leqslant t<\infty}\frac{\omega_m(f-U(f),t)}{\varphi(t)}\leqslant\sup_{\delta\leqslant t<\infty}\frac{2^m\|f-U(f)\|}{\varphi(t)}=\frac{2^m\|f-U(f)\|}{\varphi(\delta)}.$$

На основании сказанного можно написать

$$K_m(f-U(f))\leqslant\max\left\{(1+\|U\|)\sup_{0<t\leqslant\delta}\frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)},\ \frac{2^m\|f-U(f)\|}{\varphi(\delta)}\right\}$$

при любом $\delta>0$. Отсюда сразу следует неравенство (3).

Следствие 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того, при некотором* $\gamma > 0$ *для любой функции* $g \in M$ *имеет место неравенство*

$$\|g - U(g)\| \leqslant B_{11}(m)\omega_m(g,\gamma).$$

Тогда

$$K_m(f - U(f)) \leqslant \max\{(1 + \|U\|), \quad 2^m B_{11}(m)\} \sup_{0<t\leqslant\gamma} \frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)}.$$

Укажем некоторые приложения теоремы 1 к вопросу приближения функций суммами Фурье и Рисса.

Следствие 7. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, *функция* $\varphi(t) > 0$ *при* $t > 0$, φ *возрастает на* $(0,\infty)$, $f \in L_p$. *Тогда*

$$K_m(f - S_n(f))_p \leqslant B_8(m,p) \sup_{0<t\leqslant\pi/(n+1)} \frac{\omega_m(f,t)_p}{\varphi(t)}.$$

Доказательство. Положим $h = \pi/(n+1)$. В силу теоремы 1

$$K_m(f - S_n(f))_p \leqslant \max\left\{(1 + \|S_n\|_p) \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f,t)_p}{\varphi(t)}, \frac{2^m\|f - S_n(f)\|_p}{\varphi(h)}\right\}.$$

Отсюда, принимая во внимание теорему G и следствие A, находим, что

$$K_m(f - S_n(f))_p \leqslant \max\left\{(1 + B_3(p)) \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f,t)_p}{\varphi(t)}, \frac{2^m B(m,p)\omega_m(f,h)_p}{\varphi(h)}\right\} \leqslant B_8(m,p) \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f,t)_p}{\varphi(t)}.$$

Следствие 8. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$. $m \in \mathbb{N}$, *функция* $\varphi(t) > 0$ *при* $t > 0$, φ *возрастает на* $(0,\infty)$, $f \in M$. *Тогда*

$$K_m(f - S_n(f)) \leqslant \left\{\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) + B_{12}(m)\right\} \sup_{0<t\leqslant\pi/(n+1)} \frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)}.$$

Доказательство. Положим $h=\pi/(n+1)$. В силу теоремы 1

$$K_m(f-S_n(f))\leqslant\max\left\{(1+\|S_n\|)\sup_{0<t\leqslant h}\frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)},\ \frac{2^m\|f-S_n(f)\|}{\varphi(h)}\right\}.$$

Отсюда, принимая во внимание теоремы E и F, находим, что

$$K_m(f-S_n(f))\leqslant\max\left\{\Bigl(\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)+2,4\Bigr)\sup_{0<t\leqslant h}\frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)},\ \Bigl(\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)+B_2(m)\Bigr)\frac{\omega_m(f,h)}{\varphi(h)}\right\}\leqslant\Bigl(\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)+B_{12}(m)\Bigr)\sup_{0<t\leqslant h}\frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)}.$$

Следствие 9. *Пусть $n\in\mathbb{Z}_+$, r, $m\in\mathbb{N}$, $\gamma=\min\{m,2r\}$, функция $\varphi(t)>0$, φ возрастает на $(0,\infty)$, $f\in M$. Тогда*

$$K_m(f-R_{n,2r}(f))\leqslant B_9(m,r)\sup_{0<t\leqslant\pi/(n+1)}\frac{\omega_\gamma(f,t)}{\varphi(t)}.$$

Доказательство. Положим $h=\pi/(n+1)$. В силу теоремы 1

$$K_m(f-R_{n,2r}(f))\leqslant\max\left\{(1+\|R_{n,2r}\|)\sup_{0<t\leqslant h}\frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)},\ \frac{2^m\|f-R_{n,2r}(f)\|}{\varphi(h)}\right\}.$$

Отсюда, принимая во внимание теорему K, находим, что

$$K_m(f-R_{n,2r}(f))\leqslant\max\left\{(1+B_5(2r))\sup_{0<t\leqslant h}\frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)},\ \frac{2^mB_7(r)\omega_{2r}(f,h)}{\varphi(h)}\right\}\leqslant\max\left\{(1+B_5(2r))2^{m-\gamma}\sup_{0<t\leqslant h}\frac{\omega_\gamma(f,t)}{\varphi(t)},\ \frac{2^mB_7(r)2^{2r-\gamma}\omega_\gamma(f,h)}{\varphi(h)}\right\}\leqslant B_9(m,r)\sup_{0<t\leqslant h}\frac{\omega_\gamma(f,t)}{\varphi(t)}.$$

Следствие 10. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, m, $r \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\gamma = \min\{m, r\}$, *функция* $\varphi(t) > 0$ *при* $t > 0$, φ *возрастает на* $(0, \infty)$, $f \in L_p$. *Тогда*

$$K_m(f - R_{n,r}(f))_p \leqslant B(m,r,p) \sup_{0<t\leqslant \pi/(n+1)} \frac{\omega_\gamma(f,t)_p}{\varphi(t)}.$$

Доказательство. Положим $h = \pi/(n+1)$. В силу теоремы 1

$$K_m(f - R_{n,r}(f))_p$$
$$\leqslant \max\left\{(1 + \|R_{n,r}\|) \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f,t)_p}{\varphi(t)}, \frac{2^m \|f - R_{n,r}(f)\|_p}{\varphi(h)}\right\}.$$

Отсюда, принимая во внимание теоремы K и L, находим, что

$$K_m(f - R_{n,r}(f))_p \leqslant \max\left\{(1 + B_5(r)) \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f,t)_p}{\varphi(t)},\right.$$
$$\left.\frac{2^m B_2(r,p)\omega_r(f,h)_p}{\varphi(h)}\right\} \leqslant \max\left\{(1 + B_5(r))2^{m-\gamma} \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_\gamma(f,t)_p}{\varphi(t)},\right.$$
$$\left.\frac{2^m B_2(r,p)2^{r-\gamma}\omega_\gamma(f,h)_p}{\varphi(h)}\right\}$$
$$\leqslant B(m,r,p) \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_\gamma(f,t)_p}{\varphi(t)}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того,* $n \in \mathbb{Z}_+$, $U : M \to H_n$, *функция* $q(t) = \frac{t^m}{\varphi(t)}$ *возрастает на* $(0, \infty)$. *Тогда*

$$K_m(f - U(f)) \leqslant \max\left\{\sup_{0<t\leqslant \pi/(n+1)} \frac{\omega_r(f,t)}{\varphi(t)} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \|U\| \frac{\|\delta^m_{\pi/(n+1)}(f)\|}{\varphi(\pi/(n+1))},\right.$$
$$\left.\frac{2^m \|f - U(f)\|}{\varphi(\pi/(n+1))}\right\}.$$

Доказательство. Положим $h = \pi/(n+1)$. Принимая во внимание неравенство

$$\omega_m(g,t) \leqslant t^m \|g^{(m)}\|,$$

если $g \in C^{(m)}$, имеем

$$\alpha = \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f-U(f),t)}{\varphi(t)} \leqslant \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)}$$

$$+ \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(U(f),t)}{\varphi(t)} \leqslant \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)} + \big(\sup_{0<t\leqslant h} \frac{t^m}{\varphi(t)}\big)\|U^{(m)}(f)\|.$$

В силу теоремы C

$$\|U^{(m)}(f)\| \leqslant \frac{(n+1)^m}{2^m}\|\delta_h^m(U(f))\| = \frac{(n+1)^m}{2^m}\|U(\delta_h^m(f))\|$$

$$\leqslant \|U\|\frac{(n+1)^m}{2^m}\|\delta_h^m(f)\|.$$

Сопоставляя полученные неравенства, находим

$$\alpha \leqslant \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)} + \left(\sup_{0<t\leqslant h} \frac{t^m}{\varphi(t)}\right)\|U\|\frac{(n+1)^m}{2^m}\|\delta_h^m(f)\|$$

$$= \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)} + \big(\frac{\pi}{2}\big)^m\|U\|\frac{\|\delta_h^m(f)\|}{\varphi(h)}.$$

Осталось принять во внимание, что

$$\sup_{h\leqslant t<\infty} \frac{\omega_m(f-U(f),t)}{\varphi(t)} \leqslant \frac{2^m\|f-U(f)\|}{\varphi(h)}.$$

2. Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, m, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, функция $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$, операторы $U_l : M \to M$, где $l \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условиям:* а) $U_l \in A_p$, б) $U_l'(f) = U(f')$ *для любой функции* $f \in C^{(1)}$, в) $\sigma_l(U_l(f)) = U_l(\sigma_l(f))$ *для любой функции* $f \in L_p$, г) *для любого полинома $T \in H_l$ имеет место неравенство*

$$\|T^{(k)}\|_p \leqslant B_{10}(l,p)\|T-U_l(T)\|_p.$$

Пусть, далее, $\beta = p$ при $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\beta = 2$ при $2 < p < \infty$, $\beta = 1$ при $p = \infty$. Тогда для любой $f \in L_p$ справедливо соотношение

$$\omega_{m+k}\big(f, \frac{1}{n+1}\big)_p$$

$$\leqslant \frac{B_5(m+k,p)}{2^m}\left\{\sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{\varphi^\beta(\pi/(l+1))B_{10}^\beta(l,p)J_m^\beta(f-U_l(f))_p}{(l+1)^{k\beta-1}}\right\}^{1/\beta}.$$

Доказательство. В силу леммы 2 в условиях теоремы 3 имеем

$$J_m(f - U_l(f))_p B_{10}(l,p)(l+1)^m \varphi(\pi/(l+1))2^{-m} \geqslant \|\sigma_n^{(m+k)}(f)\|_p.$$

Сопоставляя последнее неравенство с теоремой N, получаем требуемое.

3. Дополним установленные выше результаты, относящиеся к приближению функций суммами Фурье.

Теорема 4. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $f \in C$, функция $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям: $\varphi(t) > 0$, функции φ и $q(t) = \frac{t^m}{\varphi(t)}$ возрастают. Тогда*

$$K_m(f - S_n(f))_\infty \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \left\{ \frac{4}{\pi^2} \ln \left(1 + n\left(\frac{2^m E_n(f)_p}{\omega_m(f,\pi/(n+1))_\infty}\right)^p\right) + B_{11}(m,p)\right\} \frac{\omega_m(f,\pi/(n+1))_\infty}{\varphi(\pi/(n+1))} + \sup_{0<t\leqslant \pi/(n+1)} \frac{\omega_m(f,t)_\infty}{\varphi(t)}.$$

Доказательство. Положим $h = \pi/(n+1)$,

$$\gamma = n\left(\frac{2^m E_n(f)_p}{\omega_m(f,h)_\infty}\right)^p.$$

Применяя лемму A, находим, что

$$\sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f - S_n(f),t)_\infty}{\varphi(t)} \leqslant \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f,t)_\infty}{\varphi(t)} + \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(S_n(f),t)_\infty}{\varphi(t)} \leqslant \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f,t)_\infty}{\varphi(t)} + \left(\sup_{0<t\leqslant h} \frac{t^m}{\varphi(t)}\right)\|S_n^{(m)}(f)\|_\infty.$$

Отсюда на основании теоремы H имеем

$$\sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f - S_n(f),t)_\infty}{\varphi(t)} \leqslant \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\omega_m(f,t)_\infty}{\varphi(t)} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \left\{\frac{4}{\pi^2}\ln(1+\gamma) + B_4(p)\right\} \frac{\omega_m(f,h)_\infty}{\varphi(h)}.$$

Далее, применяя теорему 1, получаем, что

$$\sup_{h\leqslant t<\infty}\frac{\omega_m(f-S_n(f),t)_\infty}{\varphi(t)}\leqslant\sup_{h\leqslant t<\infty}\frac{2^m\|f-S_n(f)\|_\infty}{\varphi(t)}$$
$$=\frac{2^m\|f-S_n(f)\|_\infty}{\varphi(h)}\leqslant\{\frac{4}{\pi^2}\ln(1+\gamma)+B_1(m,p)\}\frac{\omega_m(f,h)_\infty}{\varphi(h)}.$$

Из приведенных соотношений следует, что

$$K_m(f-S_n(f))_\infty\leqslant\sup_{0<t\leqslant h}\frac{\omega_m(f,t)}{\varphi(t)}+(\frac{\pi}{2})^m\left\{\frac{4}{\pi^2}\ln(1+\gamma)\right.$$
$$\left.+B_{11}(m,p)\right\}\frac{\omega_m(f,h)_\infty}{\varphi(h)}.$$

4. Остановимся на вопросе приближения функций средними Рисса.

Теорема 5. *Пусть* $n\in\mathbb{Z}_+$, l, r, $m\in\mathbb{N}$, $r<2l$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, *функция* $\varphi(t)>0$ *при* $t>0$. *Тогда для любой функции* $f\in M$

$$K_m(f-R_{n,r}(f))\leqslant B_1(m,r,l)\left(\sup_{0<t<\infty}\frac{\omega_m^{1-\alpha}(f,t)}{\varphi(t)}\right)$$
$$\times\left\{\frac{1}{(n+1)^r}\int\limits_{\pi/(n+1)}^{\infty}\frac{\|\delta_v^{2l}(f)\|^\alpha}{v^{r+1}}dv+\omega_{2l}^\alpha(f,\frac{\pi}{n+1})\right\}.$$

Доказательство. Положим $h=\pi/(n+1)$,

$$K=\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\|\delta_u^m(\delta_v^{2l}(f))\|,\quad L=\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\omega_{2l}(\delta_u^m(f),h).$$

Принимая во внимание неравенство $\omega_p(g,t)\leqslant2^p\|g\|$, справедливое для любой функции $g\in M$, нетрудно понять, что

$$K\leqslant2^m\|\delta_v^{2l}(f)\|,\quad K\leqslant2^{2l}\omega_m(f,t),$$
$$L\leqslant2^m\omega_{2l}(f,h),\quad L\leqslant2^{2l}\omega_m(f,t).$$

Из сказанного следует, что

$$K\leqslant(2^{2l}\omega_m(f,t))^{1-\alpha}(2^m\|\delta_v^{2l}(f)\|)^\alpha,$$
$$L\leqslant(2^{2l}\omega_m(f,t))^{1-\alpha}(2^m\omega_{2l}(f,h))^\alpha.$$

В силу теоремы M

$$\omega_m(f-R_{n,r}(f),t)\leqslant \sup_{0\leqslant u\leqslant t}\frac{|Q(r,l)|}{(n+1)^r}\|\int\limits_h^\infty \frac{\delta_u^m(\delta_v^{2l}(f),\cdot)}{v^{r+1}}dv\|$$
$$+\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\omega_{2l}(\delta_u^m(f),h).$$

Сопоставляя приведенные неравенства, находим, что

$$\omega_m(f-R_{n,r}(f),t)$$
$$\leqslant B_1(m,r,l)\omega_m^{1-\alpha}(f,t)\Big\{\frac{1}{(n+1)^r}\int\limits_h^\infty\frac{\|\delta_v^{2l}(f)\|^\alpha}{v^{r+1}}dv+\omega_{2l}^\alpha(f,h)\Big\}.$$

Остальная часть доказательства очевидна.

Теорема 6. *Пусть $n\in\mathbb{Z}_+$, m, $r\in\mathbb{N}$, $f\in M$, функция $\varphi(t)>0$ при $t>0$, φ возрастает на $(0,\infty)$. Тогда*

$$\omega_{m+2r}\big(f,\frac{\pi}{n+1}\big)\leqslant B_{12}(m,r)\varphi\big(\frac{\pi}{n+1}\big)J_m(f-R_{n,2r}(f)),\tag{4}$$

$$\omega_{m+2r}\big(f,\frac{\pi}{n+1}\big)\leqslant B_{13}(m,r)\varphi\big(\frac{\pi}{n+1}\big)J_m(f-R_{n,2r-1}(f)).\tag{5}$$

Доказательство. Положм $h=\pi/(n+1)$. На основании леммы 3

$$E_n(f)\leqslant B_1(m)\quad\varphi\big(\frac{\pi}{n+1}\big)\quad J_m(f-R_{n,r}(f))$$

при любом $r\in\mathbb{N}$. Докажем (4). Принимая во внимание лемму A, теорему J, следствия 2 и 3, имеем

$$\omega_{m+2r}(f,h)\leqslant\omega_{m+2r}(f-\tau_n(f),h)+\omega_{m+2r}(\tau_n(f),h)$$
$$\leqslant 2^{m+2r}\|f-\tau_n(f)\|+h^{m+2r}\|\tau_n^{(m+2r)}(f)\|\leqslant 2^{m+2r+2}E_n(f)$$
$$+h^{m+2r}\{\|\sigma_n^{(m+2r)}(f)\|+2\|\sigma_{2n+1}^{(m+2r)}(f)\|\}$$
$$\leqslant B_{12}(m,r)\varphi(h)\|f-R_{n,2r}(f)\|.$$

Неравенство (5) доказывается аналогично, но здесь вместо следствий 2 и 3 применяются следствия 4 и 5.

В заключение работы отметим, что вопросы связанные с приближением функций в метриках типа Гельдера ранее рассматривались рядом авторов (см., например, [8–10] и указанную там литературу).

Литература

1. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного.* М., 1960.
2. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.
3. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М., 1965.
4. В. В. Жук, *О точности представления непрерывной 2π-периодической функции при помощи линейных методов аппроксимации*, Изв. вузов. Математика **8** (123) (1972), 46–59.
5. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды.* М., 1961.
6. В. В. Жук, В. Ф. Кузютин, *Аппроксимация функций и численное интегрирование.* С.-П., 1995.
7. В. В. Жук, Г. И. Натансон, *Свойства функций и рост производных приближающих полиномов*, Докл. АН СССР **212**, No. 1 (1973), 19–22.
8. S. Prössdorf, *Zur Konvergenz der Fourierreihen Hölderstetiger Funktionen*, Math. Nachr. **69** (1975), 7–14.
9. R. N. Mohapatra, P. Chandra, *Degree of approximation of functions in the Hölder metric*, Acta Math. Hungar. **41**, No. 1–2 (1983), 67–76.
10. Р. А. Ласурия, *О приближении функций, заданных на всей оси, операторами типа Фейера в обобщенной гёльдеровой метрике*, Мат. заметки **81**, No. 4 (2007), 547–552.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: zhuk@math.spbu.ru

Поступило 14 сентября 2007 г.