Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 350, 2007 г.

А. С. Жук

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МЕТРИКАХ ТИПА ГЁЛЬДЕРА СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

§1. Постановка задачи. Обозначения. Вспомогательные предложения

1. В дальнейшем $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}$ суть соответственно множество комплексных, вещественных, неотрицательных вещественных, неотрицательных целых, натуральных чисел. При $1 \leqslant p < \infty$ через L_p обозначаем множество измеримых 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, у которых

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p \right)^{1/\beta} < \infty;$$

C – пространство непрерывных 2π-периодических функций f : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|;$$

M – фиксированное пространство L_p, где $1 \leqslant p < \infty$, или C. Норму функции $f \in M$ в пространстве M обозначаем просто $\|f\|$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Тогда $\delta_r^r(f)$ – центральная разность r-го порядка функции f в шагом t:

$$\delta_t^r(f, x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k f\Big(x + \Big(\frac{r}{2} - k\Big)t\Big);$$

если $f \in M$, то

$$\omega_r(f, h) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} \|\delta_t^r(f)\|$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 05-01-00742.

– ее модуль непрерывности порядка r в пространстве M.

В дальнейшем A – множество измеримых функций $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условиям: а) $\int\limits_{\mathbb{R}} \Phi = 1$, б) $\Phi(-t) = \Phi(t)$ при $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\frac{r}{2} \in \mathbb{N}$, $\Phi \in A$, $f \in L_1$. Тогда полагаем

$$U(f,x) = \frac{(-1)^{\frac{r}{2}+1}2}{C_r^{r/2}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=1}^{r/2} (-1)^{k+r/2} C_r^{k+r/2} f(x+kt) \right\} \Phi(t)dt. \quad (1)$$

Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Считаем $+\infty \cdot 0 = 0 \cdot (+\infty) = +\infty$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, функция $\varphi(t) > 0$ при $t \in (0,\infty)$, $f \in M$. По определению полагаем

$$K_m(f) = K_{m,\varphi}(f) = \sup_{0<v<\infty} \frac{\omega_m(f,v)}{\varphi(v)},$$

$$J_m(f) = J_{m,\varphi}(f) = \sup_{0<v<\infty} \frac{\|\delta_v^m(f)\|}{\varphi(v)}.$$

Очевидно, что $J_m(f) \leqslant K_m(f)$ для любой $f \in M$.

Основной целью работы является установление оценок сверху для величины $K_m(f - U(f))$ посредством модулей непрерывности функции f. Полученные общие результаты применяются к оператору $U(f)$, в котором в качестве ядра Φ берется обобщенное ядро Джексона–Валле Пуссена (в частности ядра Фейера–Валле Пуссена и Джексона–Валле Пуссена):

$$V_{n,2l}(t) = \frac{(2l-1)!2^{2l-1}}{\lambda_{2l}\pi(n+1)^{2l-1}} \left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{t} \right)^{2l}, \quad (2)$$

где $l \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\lambda_{2l} = \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k C_{2l}^k (l-k)^{2l-1}.$$

Отметим, что $\int\limits_{\mathbb{R}} V_{n,2l} = 1$,

$$V_{n,2}(t) = \frac{2}{\pi(n+1)} \left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{t} \right)^2$$

– ядро Фейера–Валле Пуссена,

$$V_{n,4}(t) = \frac{12}{\pi(n+1)^3}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{t}\right)^4$$

– ядро Джексона–Валле Пуссена, при $0 \leqslant \alpha < 2l-1$

$$\int_{\mathbb{R}_+} t^\alpha V_{n,2l}(t)dt = \frac{(2l-1)!2^\alpha}{\lambda_{2l}\pi(n+1)^\alpha}\int_{\mathbb{R}_+} t^\alpha\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2l}dt. \qquad (3)$$

2. Через H_n при $n \in \mathbb{Z}_+$ обозначаем множество тригонометрических полиномов (в дальнейшем называемых просто полиномами) порядка не выше n с комплексными коэффициентами:

$$H_n = \left\{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}\right\},$$

где $c_k \in \mathbb{C}$. Если $f \in M$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то

$$E_n(f) = \inf_{T \in H_n} \|f - T\|$$

— наилучшее приближение порядка n функции f в пространстве M. Полином $T_n(f) \in H_n$ определяется соотношением:

$$\|f - T_n(f)\| = E_n(f).$$

Он называется тригонометрическим полиномом наилучшего приближения порядка n функции f в пространстве M. Если полином $T \in H_n$ определяется равенством $\|f - T\| = E_n(f)$ неоднозначно, то через $T_n(f)$ обозначаем любой из них. Последнее соглашение не приведет к недоразумениям.

В дальнейшем $B_k(\cdot)$ – неотрицательные конечные постоянные, зависящие только от выписанных аргументов. Полагаем

$$D(r) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\sup_{f\in M}\frac{E_n(f)}{\omega_r(f,\frac{\pi}{n+1})}.$$

Пусть $f \in L_1$, $l \in \mathbb{N}$, $\frac{r}{2} \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда через $D_{n,r,l}(f)$ обозначаем обобщенный сингулярный интеграл Джексона–Валле Пуссена:

$$D_{n,r,l}(f,x) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{r}{2}+1}2}{C_r^{r/2}}\int_{\mathbb{R}}\left\{\sum_{k=1}^{r/2}(-1)^{k+r/2}C_r^{k+r/2}f(x+kt)\right\}V_{n,2l}(t)\,dt. \qquad (4)$$

Принимая во внимание (2), имеем

$$D_{n,r,l}(f,x)=\frac{(-1)^{\frac{r}{2}+1}(2l-1)!\,2^{2l}}{C_r^{r/2}\lambda_{2l}\pi(n+1)^{2l-1}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left\{\sum_{k=1}^{r/2}(-1)^{k+r/2}C_r^{k+r/2}\times\right.$$
$$\left.\times f(x+kt)\right\}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{t}\right)^{2l}dt.$$

Через $\sigma_n(f)$, $U_n(f)$, Φ_n, V_n обозначаем соответственно суммы Фейера функции f, суммы Джексона–Валле Пуссена функции f, ядра Фейера и Джексона–Валле Пуссена:

$$\sigma_n(f,x)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)c_k(f)e^{ikx},$$

$$U_n(f,x)=\sum_{k=-2n}^{2n}g\left(\frac{k}{n+1}\right)c_k(f)e^{ikx},$$

где

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}\,dt$$

– коэффициенты Фурье функции f,

$$g(t)=\begin{cases}1-\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{3}{4}|t|^3, & \text{если}\ \ |t|\leqslant 1,\\ 2-3|t|+\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{4}|t|^3, & \text{если}\ \ 1\leqslant|t|\leqslant 2;\end{cases}$$

$$\Phi_n(t)=\frac{1}{2\pi(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2,$$

$$V_n(t)=\frac{1}{2\pi(n+1)^3}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4\left(1+\frac{1}{2}\cos t\right).$$

Известно (см., например, [1, с. 142–144, 150; 2, с. 129–132; 3, с. 146, 147]), что для любых $f\in L_1$, $n\in\mathbb{Z}_+$

$$\sigma_n(f,x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\Phi_n(t)dt=D_{n,2,1}(f,x), \qquad (5)$$

$$U_n(f,x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)V_n(t)dt = D_{n,2,2}(f,x). \tag{6}$$

Пусть $r\in\mathbb{N}$. Через $M^{(r)}$ обозначаем множество функций $f\in M$, имеющих на каждом отрезке абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и таких, что $f^{(r)}\in M$. Для $f\in L_1$ при $h>0$ полагаем

$$S_{h,1}(f,x)=\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x+t)dt, \quad S_{h,2}(f)=S_{h,1}(S_{h,1}(f)).$$

Функции $S_{h,1}(f)$ и $S_{h,2}(f)$ называются функциями Стеклова для функции f соответственно первого и второго порядка.

Хорошо известно (см. [1, с. 224–226]), что для $f\in M$ имеют место соотношения: $S_{h,2}(f)\in M^{(2)}$,

$$\|f-S_{h,2}(f)\|\leqslant\frac{1}{2}\omega_2(f,h), \quad \|S''_{h,2}(f)\|\leqslant h^{-2}\omega_2(f,h). \tag{7}$$

3. Нам понадобятся следующие известные факты.

Теорема A (обобщенная теорема Джексона; см., например [4, с. 274, 338]). *Пусть $r\in\mathbb{N}$. Тогда $D(r)<\infty$.*

Теорема B (см., например, [4, с. 228, 230]). *Пусть $r\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Тогда для любого полинома $T\in H_n$ справедливо неравенство*

$$\|T^{(r)}\|\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^r\left\|\delta^r_{\frac{\pi}{n+1}}(T)\right\|.$$

Лемма A. *Пусть $r\in\mathbb{N}$, $h>0$. Тогда*

$$\omega_r(f+g,h)\leqslant\omega_r(f,h)+\omega_r(g,h)$$

для любых f, $g\in M$. Если $f\in M^{(r)}$, то

$$\omega_r(f,h)\leqslant\|f^{(r)}\|h^r.$$

Для любой $f\in M$ справедливо неравенство

$$\omega_r(f,h)\leqslant 2^r\|f\|.$$

Лемма B (см. [5, с. 30–32; 3, с. 225, 226]). *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\int_0^\pi t^\alpha \Phi_n(t)dt \leqslant \int_{\mathbb{R}_+} t^\alpha V_{n,2}(t)dt = \left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)\frac{1}{(n+1)^\alpha}, \tag{8}$$

$$\int_0^\pi t\Phi_n(t)dt \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\pi(n+1)} + \frac{31}{9\pi(n+1)}. \tag{9}$$

Доказательство. Неравенство (9) приведено в [3, с. 225, 226]. Принимая во внимание (см. [5, с. 32]), что

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin^2 t}{t^{2-\alpha}}dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{2^\alpha(1-\alpha)}\sin\frac{\alpha\pi}{2}, \tag{10}$$

в силу (5), при $\alpha \in (0,1)$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^\alpha \Phi_n(t)dt \leqslant \int_{\mathbb{R}} |t|^\alpha V_{n,2}(t)dt = \frac{2}{\pi(n+1)}\int_{\mathbb{R}} |t|^\alpha \left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{t}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi(n+1)^\alpha}\int_{\mathbb{R}_+}\frac{\sin^2 t}{t^{2-\alpha}}dt = \left(\frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)\frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Лемма C. *Пусть* $\alpha \in (0,3)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\int_0^\pi t^\alpha V_n(t)dt \leqslant \int_{\mathbb{R}_+} t^\alpha V_{n,4}(t)dt \leqslant \frac{2^{\alpha-1}3}{\pi(n+1)^\alpha}\int_{\mathbb{R}_+}\frac{\sin^4 t}{t^{4-\alpha}}dt.$$

Доказательство. В силу (6),

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^\alpha V_n(t)dt \leqslant \frac{12}{\pi(n+1)^3}\int_{\mathbb{R}} |t|^\alpha\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{t}\right)^4 dt =$$

$$= \frac{2^\alpha 3}{2\pi(n+1)^\alpha}\int_{\mathbb{R}} |t|^\alpha\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt.$$

3. Лемма 1. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$, $r, l \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in M$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_r^\alpha(f,t) V_{n,2l}(t)dt \leqslant \frac{B_1(l)}{(n+1)^{2l-1}} \sum_{k=0}^{n} (k+2)^{2l-2} \omega_r^\alpha\Big(f, \frac{\pi}{k+1}\Big).$$

Доказательство. Положим $\gamma_k = \pi/(k+1)$,

$$B(l) = \frac{(2l-1)!\, 2^{2l-1}}{\lambda_{2l}\pi}.$$

Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_r^\alpha(f,t) V_{n,2l}(t)dt = \Big\{ \int\limits_0^{\gamma_n} + \int\limits_{\gamma_n}^{\pi} + \int\limits_{\pi}^{\infty} \Big\} \omega_r^\alpha(f,t) V_{n,2l}(t)dt.$$

Так как

$$\Big| \sin \frac{(n+1)t}{2} \Big| \leqslant \frac{(n+1)|t|}{2},$$

то

$$\int\limits_0^{\gamma_n} \omega_r^\alpha(f,t) V_{n,2l}(t)dt \leqslant \frac{B(l)(n+1)^{2l} \omega_r^\alpha(f,\gamma_n)}{2^{2l}(n+1)^{2l-1}} \int\limits_0^{\gamma_n} dt = \frac{B(l)\pi}{2^{2l}} \omega_r^\alpha(f,\gamma_n).$$

Далее,

$$\int\limits_{\gamma_n}^{\pi} \omega_r^\alpha(f,t) V_{n,2l}(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{\gamma_{k+1}}^{\gamma_k} \omega_r^\alpha(f,t) V_{n,2l}(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_r^\alpha(f,\gamma_k) \int\limits_{\gamma_{k+1}}^{\gamma_k} V_{n,2l}(t)dt \leqslant \frac{B(l)}{(n+1)^{2l-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_r^\alpha(f,\gamma_k) \int\limits_{\gamma_{k+1}}^{\gamma_k} \frac{dt}{t^{2l}} =$$

$$= \frac{B(l)}{\pi^{2l-1}(2l-1)(n+1)^{2l-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_r^\alpha(f,\gamma_k) \big\{ (k+2)^{2l-1} - (k+1)^{2l-1} \big\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B(l)}{\pi^{2l-1}(n+1)^{2l-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_r^\alpha(f,\gamma_k)(k+2)^{2l-2}.$$

Так как при $t \geqslant \pi$ справедливо равенство $\omega_r(f,t) = \omega_r(f,\pi)$, то

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} \omega_r^\alpha(f,t) V_{n,2l}(t)dt = \omega_r^\alpha(f,\pi) \int\limits_{\pi}^{\infty} V_{n,2l}(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega_r^\alpha(f,\pi)B(l)}{(n+1)^{2l-1}} \int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{dt}{t^{2l}} = \frac{\omega_r^\alpha(f,\pi)B(l)}{\pi^{2l-1}(2l-1)(n+1)^{2l-1}}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_r^\alpha(f,t) V_{n,2l}(t)dt \leqslant B(l) \biggl\{ \frac{\pi}{2^{2l}} \omega_r^\alpha(f,\gamma_n) +$$

$$\frac{\omega_r^\alpha(f,\gamma_0)}{\pi^{2l-1}(2l-1)(n+1)^{2l-1}} + \frac{1}{\pi^{2l-1}(n+1)^{2l-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_r^\alpha(f,\gamma_k)(k+2)^{2l-2} \biggr\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B_1(l)}{(n+1)^{2l-1}} \sum_{k=0}^{n} (k+2)^{2l-2} \omega_r^\alpha\Bigl(f, \frac{\pi}{k+1}\Bigr).$$

Лемма 2. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in M$. *Тогда*

$$\int\limits_0^\pi \omega_r^\alpha(f,t)\Phi_n(t)dt \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_r^\alpha(f,t) V_{n,2}(t)dt \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \omega_r^\alpha(f,\gamma_k).$$

Доказательство. Рассуждая как при доказательстве леммы 1, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_r^\alpha(f,t) V_{n,2}(t)dt = \frac{2}{\pi(n+1)} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_r^\alpha(f,t) \biggl(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{t} \biggr)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\omega_r^\alpha(f,\gamma_n) + \frac{2}{\pi^2(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_r^\alpha(f,\gamma_k) + \frac{2}{\pi^2(n+1)} \omega_r^\alpha(f,\pi) \leqslant$$

$$\leqslant \Bigl(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\Bigr) \omega_r^\alpha(f,\gamma_n) + \frac{4}{\pi^2(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \omega_r^\alpha(f,\gamma_k) \leqslant$$

$$\leqslant \Bigl(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\Bigr) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \omega_r^\alpha(f,\gamma_k) \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \omega_r^\alpha(f,\gamma_k).$$

Лемма 3. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, функционал $\Psi : M \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию: существует постоянная $K \in \mathbb{R}_+$ такая, что для любых $f, g \in M$ справедливо неравенство*

$$\Psi(f+g) \leqslant K(\Psi(f) + \Psi(g)).$$

Положим

$$A_\alpha = \sup_{f \in M} \frac{\Psi(f)}{\|f\|^\alpha}, \quad N_{n,\alpha}^{(r)} = \sup_{f \in H_n} \frac{\Psi(f)}{\|f^{(r)}\|^\alpha}.$$

Тогда для любых $f \in M$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$\Psi(f) \leqslant K(D(r)+2)\left\{A_\alpha + N_{n,\alpha}^{(r)}(n+1)^{r\alpha}\right\}\omega_r^\alpha\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right).$$

Доказательство. Положим $h = \pi/(n+1)$. Имеем

$$\Psi(f) \leqslant K\{\Psi(f - T_n(f)) + \Psi(T_n(f))\} \leqslant$$
$$\leqslant K\{A_\alpha \|f - T_n(f)\|^\alpha + N_{n,\alpha}^{(r)} \|T_n^{(r)}(f)\|^\alpha\}.$$

Отсюда, применяя теорему B, находим, что

$$\Psi(f) \leqslant K\{A_\alpha E_n^\alpha(f) + N_{n,\alpha}^{(r)}(2^{-r}(n+1)^r \|\delta_h^r(T_n(f))\|)^\alpha\}.$$

Далее,

$$\|\delta_h^r(T_n(f))\| = \|\delta_h^r(T_n(f) - f + f)\| \leqslant \|\delta_h^r(T_n(f) - f)\| + \|\delta_h^r(f)\| \leqslant$$
$$\leqslant 2^r \|T_n(f) - f\| + \|\delta_h^r(f)\| = 2^r E_n(f) + \|\delta_h^r(f)\|.$$

Сопоставляя приведенные неравенства, получаем, что

$$\Psi(f) \leqslant K\{A_\alpha E_n^\alpha(f) + N_{n,\alpha}^{(r)}((n+1)^r E_n(f))^\alpha + N_{n,\alpha}^{(r)}(2^{-r}(n+1)^r \|\delta_h^r(f)\|)^\alpha\}.$$

Отсюда, применяя теорему A, имеем

$$\Psi(f) \leqslant K\{A_\alpha D^\alpha(r) + N_{n,\alpha}^{(r)}(n+1)^{r\alpha} D^\alpha(r) + 2^{-r\alpha}(n+1)^{r\alpha} N_{n,\alpha}^{(r)}\}\omega_r^\alpha(f,h) =$$
$$= K\{A_\alpha D^\alpha(r) + N_{n,\alpha}^{(r)}(n+1)^{r\alpha}(D^\alpha(r) + 2^{-r\alpha})\}\omega_r^\alpha(f,h) \leqslant$$
$$\leqslant K(D(r)+2)\{A_\alpha + N_{n,\alpha}^{(r)}(n+1)^{r\alpha}\}\omega_r^\alpha(f,h).$$

Замечание 1. При $K = 1$, $\alpha = 1$ лемма 3 имеется в книге [3, с. 201 (см. также с. 151–153, 156)]; см. также [6 или 7, с. 90].

Следствие 1. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1]$, $\Phi \in A$, $f \in M$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_r^\alpha(f,t)\Phi(t)dt \leqslant B_2(r)(1+(n+1)^{r\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}_+} t^{r\alpha}\Phi(t)dt)\omega_r^\alpha\Big(f, \frac{\pi}{n+1}\Big).$$

Доказательство. Положим

$$\Psi(f) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_r^\alpha(f,t)\Phi(t)dt.$$

Учитывая неравенство

$$\omega_r(f+g,t) \leqslant \omega_r(f,t) + \omega_r(g,t),$$

легко понять, что

$$\Psi(f+g) \leqslant \Psi(f) + \Psi(g)$$

для любых f, $g \in M$. Далее, принимая во внимание лемму А, имеем

$$\Psi(f) \leqslant \|f\|^{r\alpha} 2^{r\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \Phi(t)dt \leqslant 2^{r-1}\|f\|^{r\alpha},$$

если $f \in M$, и

$$\Psi(T) \leqslant \|T^{(r)}\|^\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+} t^{r\alpha}\Phi(t)dt$$

для любого тригонометрического полинома T. Таким образом,

$$\sup_{f\in M} \frac{\Psi(f)}{\|f\|^\alpha} \leqslant 2^{r-1}, \quad \sup_{T\in H_n} \frac{\Psi(T)}{\|T^{(r)}\|^\alpha} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_+} t^{r\alpha}\Phi(t)dt.$$

Осталось применить к рассматриваемому функционалу лемму 3.

Лемма 4. *Пусть* $0 < \alpha \leqslant 1$, *функционал* $\Psi : M \to \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условию: существует постоянная* $K \in \mathbb{R}_+$ *такая, что для любых* f, $g \in M$ *справедливо неравенство*

$$\Psi(f+g) \leqslant K(\Psi(f) + \Psi(g)).$$

Положим

$$A_\alpha = \sup_{f\in M} \frac{\Psi(f)}{\|f\|^\alpha}, \quad N_\alpha = \sup_{f\in M^{(2)}} \frac{\Psi(f)}{\|f''\|^\alpha}.$$

Тогда для любых $f \in M$ и $h > 0$ справедливо неравенство

$$\Psi(f) \leqslant K\left(A_\alpha 2^{-\alpha} + N_\alpha h^{-2\alpha}\right)\omega_2^\alpha(f,h).$$

Доказательство. Учитывая неравенства (7), имеем

$$\begin{aligned}\Psi(f) &\leqslant K\left(\Psi(f - S_{h,2}(f)) + \Psi(S_{h,2}(f))\right) \leqslant \\ &\leqslant K\left\{A_\alpha \big\|f - S_{h,2}(f)\big\|^\alpha + N_\alpha \big\|S''_{h,2}(f)\big\|^\alpha\right\} \leqslant \\ &\leqslant K\left(A_\alpha 2^{-\alpha} + N_\alpha h^{-2\alpha}\right)\omega_2^\alpha(f,h).\end{aligned}$$

Замечание 2. При $K = 1$, $\alpha = 1$ лемма 4 имеется в книге [3, с. 203].

Следствие 2. *Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$, $\gamma > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\Phi \in A$, $f \in M$. Тогда*

$$\begin{aligned}\Psi(f) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_2^\alpha(f,t)\Phi(t)dt &\leqslant \\ &\leqslant 2^{\alpha-1}\left(1 + \left(\frac{(n+1)^2}{\pi^2\gamma^2}\int\limits_{\mathbb{R}_+} t^2\Phi(t)dt\right)^\alpha\right) \leqslant \omega_2^\alpha\left(f, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right).\end{aligned}$$

Доказательство. Принимая во внимание лемму А, легко понять, что

$$A_\alpha = \sup_{f\in M}\frac{\Psi(f)}{\|f\|^\alpha} \leqslant 2^{2\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\Phi = 2^{2\alpha-1},$$

$$N_\alpha = \sup_{f\in M^{(2)}}\frac{\Psi(f)}{\|f''\|^\alpha} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_+} t^{2\alpha}\Phi(t)dt.$$

Применяя известное неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}_+} t^{2\alpha}\Phi(t)dt = \int\limits_{\mathbb{R}_+} t^{2\alpha}\Phi^\alpha(t)\Phi^{1-\alpha}(t)dt &\leqslant \\ &\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} t^2\Phi(t)dt\right)^\alpha\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+}\Phi\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} t^2\Phi(t)dt\right)^\alpha.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$N_\alpha \leqslant \frac{1}{2}\left(2\int\limits_{\mathbb{R}_+} t^2\Phi(t)dt\right)^\alpha.$$

Теперь, опираясь на лемму 4 ($h = \frac{\gamma\pi}{n+1}$), находим

$$\Psi(f) \leqslant \left(2^{\alpha-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)^2}{\gamma^2\pi^2} 2 \int\limits_{\mathbb{R}_+} t^2\Phi(t)dt\right)^\alpha\right)\omega_2^\alpha\left(f, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right) =$$

$$= 2^{\alpha-1}\left(1 + \left(\frac{(n+1)^2}{\gamma^2\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}_+} t^2\Phi(t)dt\right)^\alpha\right)\omega_2^\alpha\left(f, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right).$$

Следствие 3. *Пусть* $0 < \alpha \leqslant 1$, $\gamma > 0$, $l - 1 \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in M$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_2^\alpha(f,t)V_{n,2l}(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\alpha-1}\left(1 + \left(\frac{(2l-1)!4}{\lambda_{2l}\pi^3\gamma^2} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin^{2l} t}{t^{2l-2}}dt\right)^\alpha\right)\omega_2^\alpha\left(f, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} t^2 V_{n,2l}(t)dt = \frac{(2l-1)!4}{\lambda_{2l}\pi(n+1)^2} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin^{2l} t}{t^{2l-2}}dt.$$

Осталось воспользоваться следствием 2.

Следствие 4. *Пусть* $0 < \alpha \leqslant 1$, $\gamma > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in M$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_2^\alpha(f,t)V_{n,4}(t)dt \leqslant 2^{\alpha-1}\left(1 + \left(\frac{3}{2\pi^2\gamma^2}\right)^\alpha\right)\omega_2^\alpha\left(f, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right).$$

Для доказательства следствия 4 достаточно положить в следствии 3 $l = 2$ и принять во внимание, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin^4 t}{t^2}dt = \frac{\pi}{4} \tag{11}$$

(см. [8, с. 463]).

§2. Основные результаты

1. Теорема 1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\frac{r}{2} \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1]$, $\Phi \in A$, $f \in M$, *функция* $U(f)$ *определена формулой* (1), *функция* $\varphi(t) > 0$ *при* $t \in (0,\infty)$. *Тогда*

$$K_m(f - U(f)) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{C_r^{r/2}} \left(\sup_{0<v<\infty} \frac{(2^r \omega_m(f,v))^{1-\alpha}}{\varphi(v)} \right) \int\limits_{\mathbb{R}_+} (2^m \|\delta_t^r(f)\|)^\alpha \Phi(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $h > 0$. Тогда

$$\|\delta_h^m(f - U(f))\| = \frac{2}{C_r^{r/2}} \left\| \delta_h^m \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} \delta_t^r(f,\cdot)\Phi(t)dt \right) \right\| =$$
$$= \frac{2}{C_r^{r/2}} \left\| \int\limits_{\mathbb{R}_+} \delta_h^m(\delta_t^r(f,\cdot))\Phi(t)dt \right\| \leqslant \frac{2}{C_r^{r/2}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \|\delta_h^m(\delta_h^r(f))\|\Phi(t)dt.$$

Ясно, что

$$\|\delta_h^m(\delta_t^r(f))\| \leqslant 2^m \|\delta_t^r(f)\|, \quad \|\delta_h^m(\delta_t^r(f))\| \leqslant 2^r \|\delta_h^m(f)\|.$$

Поэтому при любом $\alpha \in [0,1]$

$$\|\delta_h^m(\delta_t^r(f))\| \leqslant \left(2^m \|\delta_t^r(f)\|\right)^\alpha \left(2^r \|\delta_h^m(f)\|\right)^{1-\alpha}.$$

Из сказанного следует, что

$$\|\delta_h^m(f - U(f))\| \leqslant \frac{2}{C_r^{r/2}} \left(2^r \|\delta_h^m(f)\|\right)^{1-\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \left(2^m \|\delta_t^r(f)\|\right)^\alpha \Phi(t)dt.$$

Учитывая определение $K_m(f)$ и применяя последнее неравенство, находим, что

$$K_m(f - U(f)) = \sup_{o<v<\infty} \frac{\omega_m(f - U(f), v)}{\varphi(v)} =$$
$$= \sup_{0<v<\infty} \frac{\sup\limits_{0<h<v} \|\delta_h^m(f - U(f))\|}{\varphi(v)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{C_r^{r/2}} \left(\sup_{0<v<\infty} \frac{(2^r \omega_m(f,v))^{1-\alpha}}{\varphi(v)} \right) \int\limits_{\mathbb{R}_+} \left(2^m \|\delta_t^r(f)\|\right)^\alpha \Phi(t)dt.$$

Следствие 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того,* $\varphi(t) = t^\delta$, *где* $\delta \geqslant 0$; $\varepsilon > \delta$,

$$Q = \sup_{0<v<\infty} \frac{\omega_m(f,v)}{v^\varepsilon} < \infty.$$

Тогда

$$K_m(f - U(f)) \leqslant \frac{2(2^r)^{\delta/\varepsilon}(2^m)^{1-\delta/\varepsilon}Q^{\delta/\varepsilon}}{C_r^{r/2}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \left\|\delta_t^r(f)\right\|^{1-\delta/\varepsilon}\Phi(t)dt.$$

Доказательство. В случае $\delta = 0$ достаточно положить $\alpha = 1$ в теореме 1. Пусть $\delta > 0$. Положим $\gamma = \frac{\delta}{\varepsilon}$, $\alpha = 1 - \gamma$. Опираясь на теорему 1, имеем

$$K_m(f - U(f)) \leqslant \frac{2}{C_r^{r/2}}(2^r)^\gamma Q^\gamma \int\limits_{\mathbb{R}_+} (2^m\|\delta_t^r(f)\|)^\alpha \Phi(t)dt =$$
$$= \frac{2(2^r)^\gamma 2^{m\alpha}Q^\gamma}{C_r^{r/2}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \left\|\delta_t^r(f)\right\|^{1-\gamma}\Phi(t)dt.$$

Следствие 6. *Пусть выполнены условия следствия* 5 *и, кроме того,* $m \leqslant r$. *Тогда*

$$K_m(f - U(f)) \leqslant \frac{2^{r+1}Q}{C_r^{r/2}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} t^{\varepsilon-\delta}\Phi(t)dt.$$

Для доказательства следствия 6 достаточно принять во внимание, что в его условиях

$$\|\delta_t^r(f)\| \leqslant 2^{r-m}Qt^\varepsilon$$

и воспользоваться следствием 5.

Следствие 7. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\frac{r}{2} \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in (0,1]$, *функция* $\varphi(t) > 0$ *при* $t \in (0,\infty)$, $f \in M$. *Тогда*

$$K_m(f - D_{n,r,l}(f)) \leqslant$$
$$\frac{2^{m\alpha+1}B_1(l)}{C_r^{r/2}(n+1)^{2l-1}}\left(\sup_{0<v<\infty}\frac{(2^r\omega_m(f,v))^{1-\alpha}}{\varphi(v)}\right)\sum_{k=0}^{n}(k+2)^{2l-2}\omega_r^\alpha\left(f, \frac{\pi}{k+1}\right).$$

Доказательство. Применяя теорему 1 к интегралу $D_{n,r,l}(f)$, имеем

$$K_m(f - D_{n,r,l}(f)) \leqslant \frac{2}{C_r^{r/2}}\left(\sup_{0<v<\infty}\frac{(2^r\omega_m(f,v))^{1-\alpha}}{\varphi(v)}\right)\int\limits_{\mathbb{R}_+}(2^m\|\delta_t^r(f)\|)^\alpha V_{n,2l}(t)dt.$$

Сопоставляя последнее неравенство с леммой 1, получаем требуемое.

Следствие 8. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\frac{r}{2} \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in (0,1]$, функция $\varphi(t) > 0$ при $t \in (0,\infty)$, $f \in M$. Тогда*

$$K_m(f - D_{n,r,1}(f)) \leqslant \leqslant \frac{2^{m\alpha+1}}{C_r^{r/2}(n+1)}\left(\sup_{0<v<\infty}\frac{(2^r\omega_m(f,v))^{1-\alpha}}{\varphi(v)}\right)\sum_{k=0}^{n}\omega_r^\alpha\left(f,\frac{\pi}{k+1}\right).$$

Доказательство следствия 8 аналогично доказательству следствия 7, но здесь вместо леммы 1 надо воспользоваться леммой 2.

Замечание 3. В связи со следствием 8 (при $r = 2$) укажем на работы [9–11].

Следствие 9. *Пусть выполнены условия следствия 5, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\Phi(t) = V_{n,2l}(t)$. Тогда*

$$K_m(f - D_{n,r,l}(f)) \leqslant \frac{2(2^r)^{\delta/\varepsilon}(2^m)^{1-\delta/\varepsilon}Q^{\delta/\varepsilon}}{C_r^{r/2}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\left\|\delta_t^r(f)\right\|^{1-\delta/\varepsilon}V_{n,2l}(t)dt.$$

Следствие 10. *Пусть выполнены условия следствия 6, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\Phi(t) = V_{n,2l}(t)$. Тогда*

$$K_m(f - D_{n,r,l}(f)) \leqslant \frac{(2l-1)!2^{r+1}2^{\varepsilon-\delta}Q}{C_r^{r/2}\pi\lambda_{2l}(n+1)^{\varepsilon-\delta}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}t^{\varepsilon-\delta}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2l}dt.$$

Для доказательства следствий 9 и 10 достаточно применить следствия 5 и 6 к оператору $U(f) = D_{n,r,l}(f)$ и принять во внимание равенство (3).

Следствие 11. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\frac{r}{2} \in \mathbb{N}$, $m \leqslant r$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\delta \geqslant 0$, $\varepsilon > \delta$, $\varphi(t) = t^\delta$, *функция* $f \in M$ *такова, что*

$$Q = \sup_{0<v<\infty} \frac{\omega_m(f, v)}{v^\varepsilon} < \infty.$$

Тогда если $\varepsilon - \delta < 1$, *то*

$$K_m(f - D_{n,r,1}(f)) \leqslant \frac{2^{r+1}\Gamma(\varepsilon-\delta)(\sin\frac{(\varepsilon-\delta)\pi}{2})Q}{C_r^{r/2}\pi(1+\delta-\varepsilon)(n+1)^{\varepsilon-\delta}}.$$

Для доказательства следствия 11 достаточно положить $l = 1$ в следствии 10 и принять во внимание равенство (10).

Следствие 12. *Пусть* $m \in \{1, 2\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\delta \geqslant 0$, $\varepsilon > \delta$, $\varphi(t) = t^\delta$, *функция* $f \in M$ *такова, что*

$$Q = \sup_{0<v<\infty} \frac{\omega_m(f, v)}{v^\varepsilon} < \infty.$$

Тогда: 1) *если* $\varepsilon - \delta < 1$, *то*

$$K_m(f - \sigma_n(f)) \leqslant \left(\frac{4\Gamma(\varepsilon-\delta)}{\pi(1+\delta-\varepsilon)} \sin\frac{(\varepsilon-\delta)\pi}{2}\right)\frac{Q}{(n+1)^{\varepsilon-\delta}};$$

2) *если* $\varepsilon - \delta = 1$, *то*

$$K_m(f - \sigma_n(f)) \leqslant \frac{4Q}{(n+1)}\left(\frac{\ln(n+1)}{\pi} + \frac{31}{9\pi}\right).$$

Для доказательства следствия 12 надо применить следствие 6 к суммам Фейера $\sigma_n(f)$ (взяв $\Phi(t) = \Phi_n(t)$ при $|t| \leqslant \pi$, $\Phi(t) = 0$ при $|t| > \pi$ и воспользоваться леммой B.

2. Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при любом* $n \in \mathbb{Z}_+$

$$K_m(f - U(f)) \leqslant B(r, m)\left(\sup_{0<v<\infty} \frac{\omega_m^{1-\alpha}(f, v)}{\varphi(v)}\right) \times$$
$$\times \left(1 + (n+1)^{r\alpha}\int_{\mathbb{R}_+} t^{r\alpha}\Phi(t)dt\right)\omega_r^\alpha\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right),$$

$$K_m(f-U(f))\leqslant B_1(r,m)\biggl(\sup_{0<v<\infty}\frac{\omega_m^{1-\alpha}(f,v)}{\varphi(v)}\biggr)\times$$
$$\times\biggl(1+(n+1)^{(r-1)\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}_+}t^{(r-1)\alpha}\Phi(t)dt\biggr)\omega_{r-1}^{\alpha}\Bigl(f,\frac{\pi}{n+1}\Bigr).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+}\|\delta_t^r(f)\|^{\alpha}\Phi(t)dt\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}_+}\omega_r^{\alpha}(f,t)\Phi(t)dt\leqslant 2^{\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\omega_{r-1}^{\alpha}(f,t)\Phi(t)dt.$$

Учитывая эти соотношения и сопоставляя теорему 1 и следствие 1, получаем требуемое.

Следствие 13. *В условиях следствия* 7

$$K_m(f-D_{n,r,l}(f))\leqslant B(r,m,l)\biggl(\sup_{0<v<\infty}\frac{\omega_m^{1-\alpha}(f,v)}{\varphi(v)}\biggr)\times$$
$$\times\biggl(1+\int\limits_{\mathbb{R}_+}t^{r\alpha}\Bigl(\frac{\sin t}{t}\Bigr)^{2l}dt\biggr)\omega_r^{\alpha}\Bigl(f,\frac{\pi}{n+1}\Bigr),$$

$$K_m(f-D_{n,r,l}(f))\leqslant B_1(r,m,l)\biggl(\sup_{0<v<\infty}\frac{\omega_m^{1-\alpha}(f,v)}{\varphi(v)}\biggr)\times$$
$$\times\biggl(1+\int\limits_{\mathbb{R}_+}t^{(r-1)\alpha}\Bigl(\frac{\sin t}{t}\Bigr)^{2l}dt\biggr)\omega_{r-1}^{\alpha}\Bigl(f,\frac{\pi}{n+1}\Bigr).$$

Для доказательства следствия 13 достаточно применить теорему 2 к оператору $U(f)=D_{n,r,l}(f)$.

Теорема 3. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $\alpha\in(0,1]$, $\gamma>0$, $l-1\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $f\in M$. *Тогда*

$$K_m(f-D_{n,2,l}(f))\leqslant 2^{(m-1)\alpha+1}\Biggl(1+\biggl(\frac{(2l-1)!4}{\lambda_{2l}\pi^3\gamma^2}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\frac{\sin^{2l}t}{t^{2l-2}}dt\biggr)^{\alpha}\Biggr)\times$$
$$\times\biggl(\sup_{0<v<\infty}\frac{\omega_m^{1-\alpha}(f,v)}{\varphi(v)}\biggr)\omega_2^{\alpha}\Bigl(f,\frac{\gamma\pi}{n+1}\Bigr).$$

Для доказательства теоремы 3 достаточно применить теорему 1 к интегралу $D_{n,2,l}(f)$ и воспользовться слествием 3.

Следствие 14. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1]$, $\gamma > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in M$. *Тогда*

$$K_m(f - D_{n,2,2}(f)) \leqslant 2^{(m-1)\alpha+1}\left(1 + \left(\frac{3}{2\pi^2\gamma^2}\right)^{\alpha}\right) \times \\ \times \left(\sup_{0<v<\infty} \frac{\omega_m^{1-\alpha}(f,v)}{\varphi(v)}\right)\omega_2^{\alpha}\left(f, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right).$$

Для доказательства следствия 14 достаточно положить $l = 2$ в теореме 3 и воспользоваться равенством (11).

Литература

1. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М., 1965.
2. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* Харьков, 1940.
3. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.
4. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного.* М., 1960.
5. С. М. Никольский, *Избранные труды. Т. 1: Теория приближений.* М., 2006.
6. С. Б. Стечкин, *О приближении периодических функций суммами Фейера,* Тр. Мат. ин-та АН СССР **62** (1961), 48–60.
7. С. Б. Стечкин, *Избранные труды: Математика.* М., 1998.
8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М., 1971.
9. S. Prössdorf, *Zur Konvergenz der Fourierreichen Hölderstetiger Funktionen,* Math. Nachrichten **69** (1975), 7–14.
10. P. N. Mohapatra, P. Chandra, *Degree of approximation of functions in the Hölder metric,* Acta Math. Hungar. **41**, No. 1–2 (1983), 67–76.
11. Р. А. Ласурия, *О приближении функций, заданных на всей оси, операторами типа Фейера в обобщенной гёльдеровской метрике,* Мат. заметки **81**, No. 4 (2007), 547–552.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: zhuk@math.spbu.ru

Поступило 14 сентября 2007 г.