Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 350, 2007 г.

В. Н. Дубинин, В. Ю. Ким

ТЕОРЕМЫ ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ И ОГРАНИЧЕННЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Введение и вспомогательные утверждения

В данной заметке рассматриваются как внутренние, так и граничные теоремы искажения для функций следующих классов: $\mathcal{B}$ – класс функций f, регулярных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию $|f(z)| < 1$ при $z \in U$; $\mathcal{B}_0$ – подкласс функций f из $\mathcal{B}$, для которых $f(0) = 0$; $\mathcal{SB}$, $\mathcal{SB}_0$ – подклассы однолистных функций соответственно из классов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_0$.

Экстремальной функцией в ряде теорем является функция Пика

$$p(z;\lambda) = -k^{-1}(\lambda k(-z)), \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

где $k(z) = z(1+z)^{-2}$ – функция Кебе. В начале первого параграфа приводится довольно общая теорема искажения в классе $\mathcal{SB}$, дополняющая некоторые классические [1, 2, 3] и современные результаты такого рода [4, 5]. Идея ее доказательства восходит к давним работам Грётша и Тейхмюллера. Однако до сих пор в литературе встречаются частные случаи этой теоремы. Далее мы доказываем граничные теоремы искажения для однолистных функций, примыкающие к результатам Поммеренке [6] и Солынина [7]. В заключение §1 приводится альтернативное доказательство одной теоремы Андерсона и Васильева [5], восходящее к Нехари [1]. Во втором параграфе приводятся новые двуточечные теоремы искажения для функций класса $\mathcal{B}$, удовлетворяющих условию $f'(0) \neq 0$. В настоящее время известно немало соответствующих теорем для однолистных функций (см., например, [8–11]), в то время как многолистные функции мало изучены. Это объясняется, в частности, тем, что некоторые двуточечные теоремы искажения можно рассматривать как условия однолистности. Приведенные результаты представляют, на наш взгляд,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00099) и ДВО РАН (грант 06-III-A-01-013).

некоторый интерес, хотя и носят условный характер. В §3 даются новые граничные теоремы искажения для функций класса $\mathcal{B}$. В частности, устанавливается неравенство для “производных”

$$Df(z) := \varliminf_{r\to 1} \frac{1-|f(rz)|}{1-r}, \quad f\in\mathcal{B}, \quad |z|=1.$$

Отметим, что по лемме Жюлиа–Вольфа существование углового предела $f(z_0)$ для функции $f\in\mathcal{B}$ в точке z_0, $|z_0|=|f(z_0)|=1$, влечет существование угловой производной $f'(z_0)$. В случае, если последняя конечна, существует угловой предел аналитической функции $f'(z)$, равный $f'(z_0)$, при $z\to z_0$ [6, с. 79–83]. Согласно определению, $|f'(z_0)|\ge Df(z_0)$. С другой стороны, по лемме Шварца–Пика

$$|f'(rz_0)| \le \frac{1-|f(rz_0)|^2}{1-r^2}.$$

Таким образом, в данных условиях

$$|f'(z_0)| = \lim_{r\to 1} |f'(rz_0)| \le Df(z_0)$$

и, следовательно, $Df(z_0)=|f'(z_0)|$. В случае $0<|f'(z_0)|<\infty$ говорят, что отображение f конформно в точке z_0.

Для изучения многолистных функций нам понадобятся следующие два утверждения.

Лемма 1. *Если функция f класса $\mathcal{B}_0$ удовлетворяет условию $f'(0)\ne 0$, то функция $w=g(z)=z^2/f(z)$ конформно и однолистно отображает область $G_0(f):=\{z\in U: |z^2/f(z)|<1\}$ на круг $|w|<1$.*

Доказательство леммы 1 вытекает из достаточного условия однолистности [12, с. 55, 63].

Лемма 2. *Пусть γ – компакт в круге U, и пусть $f\in\mathcal{B}$. Тогда для гиперболических емкостей справедливо неравенство*

$$\mathrm{cap}_h\gamma \ge \mathrm{cap}_h f(\gamma).$$

Доказательство. Рассмотрим конденсаторы $C_1=(\gamma,\ \{z: |z|\ge 1\})$ и $C_2=(f(\gamma),\ \{w:|w|\ge 1\})$ [13]. Из результатов Цудзи [14] вытекают равенства

$$(\mathrm{cap}\ C_1)^{-1} = -\frac{1}{2\pi}\log \mathrm{cap}_h\gamma, \quad (\mathrm{cap}\ C_2)^{-1} = -\frac{1}{2\pi}\log \mathrm{cap}_h f(\gamma).$$

Обозначим через u потенциальную функцию конденсатора C_1. Вспомогательная функция $v(w) = \min\{u(z) : f(z) = w\}$ допустима для конденсатора C_2. Следовательно,

$$\operatorname{cap} C_1 = \int\limits_{U_z} |\nabla u|^2 \, d\sigma_z \geq \int\limits_{U_w} |\nabla v|^2 \, d\sigma_w \geq \operatorname{cap} C_2.$$

Отсюда получаем требуемое неравенство.

Лемма 2 в частном случае восходит к работе Кубо [15].

§1. Неравенства для однолистных функций

В данном параграфе уточняются и дополняются некоторые классические и современные результаты для функций класса $\mathcal{SB}$. Начнем со следующего простого замечания. Пусть функция $f \in \mathcal{SB}$, φ – дробно-линейное отображение круга U на себя и h – мероморфная и однолистная в круге U функция. Тогда суперпозиция $h \circ f \circ \varphi$ также мероморфна и однолистна в U и, следовательно, к ней применима теорема искажения ангармонического отношения четырех точек [16]. В частности, полагая $\varphi(z) \equiv z$ и $h(w) = w(1+w)^{-2}$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in \mathcal{SB}$, и пусть $-1 \leq r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \leq 1$. Обозначим через w_2, w_3 произвольные различные точки на кривой $f([r_2, r_3])$, а через w_1 и w_4 – различные точки круга $|w| < 1$, лежащие на другой компоненте дополнения образа кольцевой области $U \setminus \{[-1, r_1] \cup [r_2, r_3] \cup [r_4, 1]\}$ при отображении f (если такие точки существуют). Тогда справедливо неравенство*

$$\left| \frac{(w_3 - w_2)(1 - w_3 w_2)(w_4 - w_1)(1 - w_4 w_1)}{(w_2 - w_1)(1 - w_2 w_1)(w_4 - w_3)(1 - w_4 w_3)} \right| \leq \left| \frac{(r_3 - r_2)(1 - r_3 r_2)(r_4 - r_1)(1 - r_4 r_1)}{(r_2 - r_1)(1 - r_2 r_1)(r_4 - r_3)(1 - r_4 r_3)} \right|. \quad (1)$$

Равенство в (1) достигается для функций Пика $p(z; \lambda)$, $0 < \lambda \leq 1$, и точек $w_k = p(r_k; \lambda)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Доказательство. Согласно неравенству (1) работы [16] выполняется

$$|(h(w_3), h(w_1), h(w_2), h(w_4))| \leq -(k(r_3), k(r_1), k(r_2), k(r_4)),$$

где (a,b,c,d) означает ангармоническое отношение четырех точек a,b,c и d на комплексной сфере [17]. Отсюда выполняется (1). Случай равенства проверяется непосредственно.

Отметим некоторые следствия неравенства (1). Предельным переходом при $r_3 \to r_2$ из неравенства (1) получим

$$|f'(r_2)| \le \left|\frac{(w_2-w_1)(1-w_2w_1)(w_4-w_2)(1-w_4w_2)(1-r_2^2)(r_4-r_1)(1-r_4r_1)}{(1-w_2^2)(w_4-w_1)(1-w_4w_1)(r_2-r_1)(1-r_2r_1)(r_4-r_2)(1-r_4r_2)}\right|,$$

где $w_2 = f(r_2)$, $-1 \le r_1 < r_2 < r_4 \le 1$. Аналогично при $r_1 \to r_2$

$$|f'(r_2)| \ge \left|\frac{(w_3-w_2)(1-w_3w_2)(w_4-w_2)(1-w_4w_2)(1-r_2^2)(r_4-r_3)(1-r_4r_3)}{(1-w_2^2)(w_4-w_3)(1-w_4w_3)(r_3-r_2)(1-r_3r_2)(r_4-r_2)(1-r_4r_2)}\right|,$$

где $w_2 = f(r_2)$, $-1 \le r_2 < r_3 < r_4 \le 1$. Наконец, предельный переход $r_1 \to r_2$, $r_4 \to r_3$ дает

$$|f'(r_2)f'(r_3)| \ge \left|\frac{(f(r_2)-f(r_3))^2(1-f(r_2)f(r_3))^2(1-r_2^2)(1-r_3^2)}{(1-f^2(r_2))(1-f^2(r_3))(r_2-r_3)^2(1-r_2r_3)^2}\right|,$$

$-1 < r_2 < r_3 < 1$. С точностью до дробно-линейного отображения круга U на себя это неравенство эквивалентно оценке Нехари [1, с. 259]. В частности, если $r_2 = 0$, $f(0) = 0$ и $r_3 = r$, то

$$|f'(0)f'(r)| \ge \left|\frac{f^2(r)(1-r^2)}{(1-f^2(r))r^2}\right|.$$

Предположим, дополнительно, что существует угловой предел $f(1) = 1$ и $f'(1) = \beta$. Тогда из предыдущего при $r \to 1$ имеем неравенство

$$|f'(0)| \ge \frac{1}{\beta^2}, \tag{2}$$

которое последнее время часто встречается в литературе (см., например, [4]). Положим

$$B_z(\zeta) = \frac{1-\overline{z}}{1-z} \cdot \frac{\zeta - z}{1-\zeta\overline{z}}.$$

Применяя неравенство (2) к функции $f = B_w \circ \psi \circ B_z^{-1}$, приходим к оценке

$$|\psi'(z)| \ge \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{(1-|z|^2)|1-\psi(z)|^4}{|1-z|^4(1-|\psi(z)|^2)}, \quad z \in U,$$

справедливой для любого конформного отображения ψ круга U в себя, нормированного условиями $\psi(1) = 1$, $\psi'(1) = \beta$ (ср. [5, теорема 4.1]). Другие многочисленные частные случаи неравенства (1) получаются аналогично тому, как это делалось в заметке [16].

Теорема 2. *Пусть функция f класса $\mathcal{SB}_0$ отображает дугу $\gamma = \{z : |z| = 1, |\arg z| < \alpha\}$, $0 < \alpha < \pi$, в смысле граничного соответствия на некоторую дугу $f(\gamma)$ длины 2β, лежащую на окружности $|w| = 1$. Тогда для любых r_1 и r_2, $-1 \le r_1 < 0 < r_2 \le 1$, справедливо неравенство*

$$\frac{(|f(r_2)| + |f(r_1)|)(1 + |f(r_2)f(r_1)|)}{|f(r_2)|(|f(r_1)|^2 + 2|f(r_1)|\cos\beta + 1)} \ge \frac{(r_2 - r_1)(1 - r_2 r_1)}{r_2(r_1^2 - 2r_1\cos\alpha + 1)}.$$

Равенство достигается для функций Пика $p(z;\lambda)$, $0 < \lambda \le 1$, при любых r_1, r_2, α, $-1 \le r_1 < 0 < r_2 \le 1$, $0 < \alpha < \pi$.

Доказательство. Рассмотрим следующие конденсаторы [18]:

$$\begin{aligned}
C_1 = (\overline{\mathbb{C}}_\zeta, \{\{\zeta : \operatorname{Im}\zeta = 0,\ \operatorname{Re}\zeta \le k(r_1)\\
&\text{либо } \operatorname{Re}\zeta \ge k(e^{i\alpha})\}, [0, k(r_2)]\}, \{0,1\}),\\
C_2 = (U_z, \{[-1, r_1] \cup [(\partial U_z) \setminus \gamma], [0, r_2]\}, \{0,1\}),\\
C_3 = (f(U_z), \{f([-1, r_1]) \cup [(\partial f(U_z)) \setminus f(\gamma)], f([0, r_2])\}, \{0,1\}),\\
C_4 = (U_w, \{[-1, -|f(r_1)|] \cup [(\partial U_w) \setminus \{w : |w| = 1, |\arg w| < \beta\}],\\
&[0, |f(r_2)|]\}, \{0,1\}),\\
C_5 = (\overline{\mathbb{C}}_\omega, \{\{\omega : \operatorname{Im}\omega = 0,\ \operatorname{Re}\omega \le k(-|f(r_1)|)\\
&\text{либо } \operatorname{Re}\omega \ge k(e^{i\beta})\}, [0, k(|f(r_2)|)]\}, \{0,1\}).
\end{aligned}$$

В силу конформной инвариантности емкости и симметрии конденсаторов C_1 и C_5 относительно вещественной оси выполняется

$$\operatorname{cap} C_1 = \operatorname{cap} C_2 = \operatorname{cap} C_3 \quad \text{и} \quad \operatorname{cap} C_4 = \operatorname{cap} C_5.$$

Пусть C_3^* – результат круговой симметризации конденсатора C_3 относительно вещественной положительной полуоси. Из теоремы Полиа–Сеге и монотонности емкости имеем

$$\operatorname{cap} C_3 \ge \operatorname{cap} C_3^* \ge \operatorname{cap} C_4.$$

Таким образом,

$$\operatorname{cap} C_1 \ge \operatorname{cap} C_5.$$

С другой стороны, емкости этих конденсаторов можно сравнить, привлекая дробно-линейные отображения соответственно

$$\xi = \frac{\zeta}{\zeta - k(r_1)} \cdot \frac{k(r_2) - k(r_1)}{k(r_2)},$$
$$\eta = \frac{\omega}{\omega - k(-|f(r_1)|)} \cdot \frac{k(|f(r_2)|) - k(-|f(r_1)|)}{k(|f(r_2)|)}.$$

Следовательно,

$$\frac{k(e^{i\alpha})\,(k(r_2) - k(r_1))}{(k(e^{i\alpha}) - k(r_1))\,k(r_2)} \le \frac{k(e^{i\beta})\,(k(|f(r_2)|) - k(-|f(r_1)|))}{(k(e^{i\beta}) - k(-|f(r_1)|))\,k(|f(r_2)|)}.$$

Прямые вычисления дают отсюда неравенство теоремы 2. Случай равенства проверяется непосредственно.

Следствие 1. *Если функция $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то*

$$\operatorname{Re} \frac{c_2}{c_1} \le 2(\cos\alpha - |c_1| \cos\beta)$$

с равенством для функций Пика.

Доказательство. Достаточно применить теорему 2 в случае $-r_1 = r_2 = r$ и перейти к пределу при $r \to 0$.

Отметим, что классическое неравенство Пика [19] в терминах функций класса $\mathcal{SB}_0$ имеет вид

$$|c_2| \le 2(1 - |c_1|)|c_1|.$$

Теорема 3. *Пусть функция f класса $\mathcal{SB}$ отображает некоторую замкнутую дугу γ длины 2α на окружности $|z| = 1$ в смысле граничного соответствия на дугу $f(\gamma) = \{w : |w| = 1,\ |\arg w| \le \beta\}$, $0 < \beta < \pi$, и пусть образы $f(z_k)$ некоторых точек $z_k \in U$, $k = 1, 2$, лежат на вещественной оси. Тогда*

$$\frac{(f^2(z_2) - 2f(z_2)\cos\beta + 1)(1 - f(z_1))^2}{(f^2(z_1) - 2f(z_1)\cos\beta + 1)(1 - f(z_2))^2} \ge \frac{(t_2^2 + 2t_2\cos\alpha + 1)(1 + t_1)^2}{(t_1^2 + 2t_1\cos\alpha + 1)(1 + t_2)^2}, \quad (3)$$

где $t_1 = \max(|z_1|, |z_2|)$ *и* $t_2 = \min(|z_1|, |z_2|)$. *Равенство достигается в случае функций Пика* $p(z;\lambda)$, $0 < \lambda \le 1$, *и* $-1 < z_1 < z_2 \le 0$.

Доказательство. Рассмотрим следующие конденсаторы:

$$\begin{aligned}
&C_1 = (\overline{\mathbb{C}}_\zeta, \{[k(f(z_1)), k(f(z_2))], [1/4, k(e^{i\beta})]\}, \{0,1\}),\\
&C_2 = (U_w, \{[f(z_1), f(z_2)], f(\gamma)\}, \{0,1\}),\\
&C_3 = (f(U_z), \{\overline{f(U_z)} \cap [f(z_1), f(z_2)], f(\gamma)\}, \{0,1\}),\\
&C_4 = (U_z, \{f^{-1}([f(z_1), f(z_2)]), \gamma\}, \{0,1\}),\\
&C_5 = (U_z, \{[-t_1, -t_2], \{z : |z| = 1, |\arg z| \le \alpha\}\}, \{0,1\}),\\
&C_6 = (\overline{\mathbb{C}}_\omega, \{[k(-t_1), k(-t_2)], [1/4, k(e^{i\alpha})]\}, \{0,1\}).
\end{aligned}$$

В силу конформной инвариантности и монотонности емкости выполняется

$$\operatorname{cap} C_1 = \operatorname{cap} C_2 \ge \operatorname{cap} C_3 = \operatorname{cap} C_4 \quad \text{и} \quad \operatorname{cap} C_5 = \operatorname{cap} C_6.$$

Пусть C_4^* – результат круговой симметризации C_4 относительно вещественной положительной полуоси. Вновь по теореме Полиа–Сеге и из монотонности емкости имеем

$$\operatorname{cap} C_4 \ge \operatorname{cap} C_4^* \ge \operatorname{cap} C_5.$$

Отсюда

$$\operatorname{cap} C_1 \ge \operatorname{cap} C_6\,.$$

Аналогично доказательству теоремы 2 для сравнения емкостей последних конденсаторов привлекаем дробно-линейные отображения

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{\zeta - k(f(z_2))}{\zeta - k(f(z_1))} \cdot \frac{1/4 - k(f(z_1))}{1/4 - k(f(z_2))},\\
\eta &= \frac{\omega - k(-t_2)}{\omega - k(-t_1)} \cdot \frac{1/4 - k(-t_1)}{1/4 - k(-t_2)}.
\end{aligned}$$

В результате получаем неравенство (3). Случай равенства проверяется непосредственно.

Применяя теорему 3 к функции f класса $\mathcal{SB}_0$, $z_2 = 0$, $f(z_2) = 0$, и устремляя $z_1 \to 0$, после несложных вычислений получаем из (3) неравенство Поммеренке

$$\sqrt{|f'(0)|}\operatorname{cap} f(\gamma) \ge \operatorname{cap} \gamma,$$

справедливое на самом деле для логарифмической емкости любого компактного подмножества γ окружности $|z| = 1$ (см. [6, с. 217]).

Теорема 4 [5, теорема 5.1]. *Если отображение f класса $\mathcal{SB}_0$ конформно в граничных точках $z_1, \ldots, z_n$ и $f(z_k) = z_k$, $k = 1, \ldots, n$, то для любых вещественных чисел α_k, $k = 1, \ldots, n$, таких, что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, имеет место неравенство*

$$|f'(0)| \geq \prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)|^{-2\alpha_k^2}. \tag{4}$$

Доказательство. В отличие от доказательства в [5], мы воспользуемся неравенством Нехари [1, с. 258]:

$$\left| \sum_{k,\,l=1}^{n} \alpha_k \alpha_l \log \frac{f(\zeta_k) - f(\zeta_l)}{\zeta_k - \zeta_l} \right| \leq \sum_{k,\,l=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_l} \log \frac{1 - f(\zeta_k)\overline{f(\zeta_l)}}{1 - \zeta_k \overline{\zeta}_l}, \tag{5}$$

справедливым для функции $f \in \mathcal{SB}$ и любых точек $\zeta_k \in U$, $k = 1, \ldots, n$, и чисел $\alpha_k \in \mathbb{C}_z$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$. Запишем это неравенство для $(n+1)$-ой точки $\zeta_0 = 0$, $\zeta_k, |\zeta_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n$, $\alpha_0 = -1$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. В результате получим

$$\Bigg| \log f'(0) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \log f'(\zeta_k) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \log \frac{f(\zeta_k)}{\zeta_k} + \sum_{\substack{k,\,l=1 \\ k \neq l}}^{n} \alpha_k \alpha_l \log \frac{f(\zeta_k) - f(\zeta_l)}{\zeta_k - \zeta_l} \Bigg| \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \log \frac{1 - |f(\zeta_k)|^2}{1 - |\zeta_k|^2} + \sum_{\substack{k,\,l=1 \\ k \neq l}}^{n} \alpha_k \alpha_l \log \frac{1 - f(\zeta_k)\overline{f(\zeta_l)}}{1 - \zeta_k \overline{\zeta_l}}.$$

Заменяя модуль слева на вещественную часть со знаком минус и устремляя точки ζ_k вдоль радиусов соответственно к точкам z_k, $k = 1, \ldots, n$, приходим в итоге к неравенству (4).

Андерсон и Васильев доказали неравенство (4) для неотрицательных α_k с помощью техники приведенных модулей двуугольников и установили все случаи равенства в этом неравенстве [5].

§2. Двуточечные теоремы искажения для регулярных функций

Хорошо известная лемма Шварца–Пика дает верхнюю оценку для модуля производной в классе $\mathcal{B}$:

$$|f'(z)| \le \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}, \quad z \in U.$$

Перемножая два таких неравенства в точках $z_1, z_2 \in U$, имеем "двуточечную теорему искажения" с равенством для конформных автоморфизмов круга U на себя. Нижняя оценка модуля производной тривиальна из-за наличия точек ветвления. Нетривиальные нижние оценки можно получить, в частности, из соответствующих оценок для однолистных функций с применением леммы 1. Разумеется в этом случае появится дополнительное ограничение на функцию f. Покажем это на примере неравенств Нехари и Робинсона, взяв в качестве одной из точек начало координат (без ограничения общности).

Теорема 5. *Если функция $f \in \mathcal{B}_0$ и $f'(0) \ne 0$, то для любой точки $z \in U$, удовлетворяющей условию $|f(z)| > |z|^2$, справедливо неравенство*

$$\frac{|2f(z) - zf'(z)|}{1-|z|^2} \le \frac{|zf^2(z)f'(0)|}{|f(z)|^2 - |z|^4}.$$

Равенство достигается для функции $f(z) \equiv z$.

Доказательство. Функция $z = h(w)$, обратная функции $w = g(z)$ из леммы 1 принадлежит классу $\mathcal{SB}_0$. Применяя к ней неравенство (5) с $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $n = 2$, получаем

$$\frac{1-|w|^2}{1-|h(w)|^2} \le \left|\frac{w^2 h'(w) h'(0)}{h^2(w)}\right|,$$

что равносильно неравенству теоремы. Случай равенства очевиден.

Отметим, что последнее неравенство было получено ранее Робинсоном (см. [3, с. 55]). В качестве следствия теоремы 5 имеем нетривиальную нижнюю оценку

$$|zf'(z)| \geq |f(z)| \left[2 - \frac{(1-|z|^2)|zf(z)f'(0)|}{|f(z)|^2 - |z|^4}\right],$$

которая содержательна по крайней мере для точек z, близких к началу координат. Оценка достигается при $f(z) \equiv z$. Аналогично доказывается

Теорема 6. *Если функция $f \in \mathcal{B}_0$ и $f'(0) \neq 0$, то для любой точки $z \in U$, удовлетворяющей условию $|f(z)| > |z|^2$, справедливо неравенство*

$$\frac{|2f(z) - zf'(z)|}{|f(z)|^2 - |z|^4} \geq \frac{|zf^{-2}(z)f'(0)|}{1-|z|^2}$$

с равенством в случае $f(z) \equiv z$.

Мы не выписываем общую двуточечную теорему, вытекающую таким образом из (5), ввиду ее громоздкости. Отметим, что дальнейшие обобщения можно получить методом [11]. В заключение рассмотрим своеобразный аналог теоремы "искажения хорд" при регулярном отображении.

Теорема 7. *Пусть функция $f \in \mathcal{B}_0$ и $f'(0) \neq 0$. Тогда для любых точек z_1, $z_2 \in U$, удовлетворяющих условию $|f(z_k)| > |z_k|^2$, $k = 1, 2$, выполняется неравенство*

$$\left|\frac{z_1 - z_2}{z_1^2 f(z_2) - z_2^2 f(z_1)}\right|^2 \leq \left|\frac{f(z_1)f(z_2)}{z_1 z_2 f'(0)}\right|^2 \frac{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}{(|f(z_1)|^2 - |z_1|^4)(|f(z_2)|^2 - |z_2|^4)}.$$

Равенство достигается для тождественного отображения $f(z) \equiv z$.

Данное утверждение вытекает из неравенства Базилевича [3, с. 54], примененного к функции h, обратной функции g из леммы 1.

§3. Граничное искажение при регулярном отображении

В работе [20] по существу было показано, что если $f \in \mathcal{B}$ и в точках z_k, $k = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$, окружности $|z| = 1$ существуют угловые пределы $f(z_k)$, $k = 1, \dots, n$, расположенные на окружности $|w| = 1$ симметричным образом, то

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f'(z_k)\right| \geq 1. \tag{6}$$

Привлекая дополнительно дробно-линейное отображение, получаем из (6) следующее неравенство

$$|f'(z_1)f'(z_2)| \geq \frac{|f(z_1) - f(z_2)|^2}{|z_1 - z_2|^2},$$

справедливое для любых различных точек z_1, z_2 на окружности $|z| = 1$, где существуют угловые пределы $f(z_1)$ и $f(z_2)$ такие, что $|f(z_1)| = |f(z_2)| = 1$. Это же неравенство вытекает из принципа гиперболической метрики. Методом [20] можно показать, что выписанное неравенство остается верным, если в нем модули производных $|f'(z_k)|$ заменить на $Df(z_k)$, при этом достаточно существование лишь радиальных пределов $f(z_k)$, $k = 1, 2$. Рассмотрим аналогичный результат в случае трех точек на окружности $|z| = 1$.

Теорема 8. *Если функция $f \in \mathcal{B}$ и для трех различных точек z_k окружности $|z| = 1$ существуют радиальные пределы $\lim\limits_{r\to 1} f(rz_k) := f(z_k)$, $|f(z_k)| = 1$, $k = 1, 2, 3$, то*

$$\prod_{k=1}^{3} Df(z_k) \geq \frac{1}{3\sqrt{3}} |(f(z_1) - f(z_2))(f(z_2) - f(z_3))(f(z_3) - f(z_1))|.$$

Равенство достигается для любого конформного автоморфизма круга U на себя.

Доказательство. Можно считать $f(z_k)$, $k = 1, 2, 3$, различными точками. Введем обозначения $w_k(r) = f(rz_k)/|f(rz_k)| \to f(z_k) := w_k(1)$, $r \to 1$, $k = 1, 2, 3$, и пусть $\Phi_r(w)$ – дробно-линейное отображение круга U_w на себя, переводящее точки $w_k(r)$ соответственно в точки $\exp(2\pi ik/3)$, $k = 1, 2, 3$, $0 < r \leq 1$. Рассмотрим континуумы $\gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{3} [0, rz_k]$ и $\gamma^* = \bigcup\limits_{k=1}^{3} [0, r\exp(2\pi ik/3)]$, $0 < r < 1$. Применяя лемму 2 данной статьи и теорему 4 работы [21], имеем последовательно

$$\mathrm{cap}_h\gamma \geq \mathrm{cap}_h f(\gamma) = \mathrm{cap}_h \Phi_r(f(\gamma)) \geq \exp\left[-\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\tau_1^2}\right)}{\mathbf{K}(\tau_1)}\right],$$

где $\mathbf{K}(\cdot)$ – полный эллиптический интеграл первого рода и

$$\tau_1^{-1/2} - \tau_1^{1/2} = \left\{\prod_{k=1}^{3}[L_k^{-1}(r) - L_k(r)]\right\}^{1/3}, \quad L_k(r) = \mathrm{Re}\,\Phi_r^{3/2}(f(rz_k)),$$
$$k = 1, 2, 3, \quad 0 \leq \tau_1 < 1.$$

С другой стороны, теорема о диссимметризации [13] и вновь теорема 4 [21] дают

$$\mathrm{cap}_h\gamma \leq \mathrm{cap}_h\gamma^* = \exp\left[-\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\tau_2^2}\right)}{\mathbf{K}(\tau_2)}\right],$$

где $\tau_2^{-1/2} - \tau_2^{1/2} = r^{-3/2} - r^{3/2}$. Следовательно,

$$\left\{\prod_{k=1}^{3}\left(L_k^{-1}(r) - L_k(r)\right)\right\}^{1/3} \geq r^{-3/2} - r^{3/2}.$$

Отсюда

$$\left\{\prod_{k=1}^{3}(1 - L_k(r))\right\}^{1/3} \geq \frac{3}{2}(1-r) + o((1-r)), \quad r \to 1.$$

Принимая во внимание

$$1 - L_k(r) = \frac{3}{2}(1 - |f(rz_k)|)|\Phi_1'(w_k(r))| + o((1-r)), \quad r \to 1,$$

имеем

$$\prod_{k=1}^{3} Df(z_k) \geq \prod_{k=1}^{3}|\Phi_1'(w_k)|^{-1},$$

что равносильно неравенству теоремы 8. В последнем проще всего убедиться, если использовать известный дробно-линейный инвариант [22, с. 87]. Этим же приемом проверяется случай равенства. Теорема доказана.

Отметим, что в случае произвольного $n \geq 2$ данный подход приводит к следующему результату.

Теорема 9. *Если $f \in \mathcal{B}$ и z_k, $k = 1, \dots, n$, – точки круга U, удовлетворяющие условиям: $|z_k| = r$, $0 < r < 1$, $|\arg f(z_k) - 2\pi k/n| < \pi/n$, $k = 1, \dots, n$, то*

$$\left\{ \prod_{k=1}^{n} |\mathrm{Re}\, f^{\frac{n}{2}}(z_k)| \right\}^{1/n} \leq r^{\frac{n}{2}}.$$

Равенство достигается для функции $f(z) \equiv z$ и точек $z_k = r\exp(2\pi i k/n)$, $k = 1, \dots, n$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8 с той лишь разницей, что вместо теоремы 4 работы [21] необходимо применить следствие 1 из той же работы.

В заключение приведем аналог теоремы Андерсона и Васильева [5, теорема 5.1] для регулярных и ограниченных в круге функций (не обязательно однолистных).

Теорема 10. *Если отображение f класса $\mathcal{B}_0$ конформно в граничных точках $z_1, \dots, z_n$ и $f(z_k) = z_k$, $k = 1, \dots, n$, $f'(0) \neq 0$, то либо в некоторой точке z_k выполняется $|f'(z_k)| \geq 2$, $1 \leq k \leq n$, либо справедливо неравенство*

$$|f'(0)| \geq \prod_{k=1}^{n} |2 - f'(z_k)|^{2\alpha_k^2}$$

для любых вещественных чисел α_k, $k = 1, \dots, n$, таких, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.

Доказательство. Пусть $h(w)$ – функция, обратная функции $g(z) = z^2/f(z)$ из леммы 1. Тогда $h(z_k) = z_k$, $k = 1, \dots, n$, и $|h'(0)| = |f'(0)|$. Принимая во внимание неравенство (28) статьи [12] и используя теорему 4 данной работы, имеем

$$|h'(0)| \geq \prod_{k=1}^{n} |h'(z_k)|^{-2\alpha_k^2} = \prod_{k=1}^{n} |2 - f'(z_k)|^{2\alpha_k^2}.$$

Что и требовалось доказать.

Литература

1. Z. Nehari, *Some inegualities in the theory of functions,* Trans. Amer. Math. Soc. **75**, No. 2 (1953), 256–286.

2. Н. А. Лебедев, *Некоторые оценки для функций, регулярных и однолистных в круге,* Вестн. Ленингр. ун-та, No. 11, сер. мат., физ., хим., вып. **4** (1955), 3–21.
3. A. W. Goodman, *Univalent functions.* I. II, Mariner Publ. Comp. Tampa, 1983.
4. Ch. Pommerenke, A. Vasil'ev, *Angular derivatives of bounded univalent functions and extremal partitions of the unit disk,* Pacific J. Math. **206**, No. 2 (2002), 425–450.
5. J. M. Anderson, A. Vasil'ev, *Lower Schwarz–Pick estimates and angular derivatives,* Ann. Acad. Sci. Fenn. (to appear). `arxiv: CV/0608531` **2** (2006), 11 pp.
6. Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps,* Springer, Berlin, 1992.
7. А. Ю. Солынин, *Граничное искажение и экстремальные задачи в некоторых классах однолистных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 115–142.
8. W. Ma, D. Minda, *Two-point distortion theorems for bounded univalent functions,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **22** (1997), 425–444.
9. J. A. Jenkins, *On two point distortion theorems for bounded univalent regular functions,* Kodai Math. J. **24** (2001), 329–338.
10. O. Roth, *A distortion theorem for bounded univalent functions,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **27** (2002), 257–272.
11. D. Kraus, O. Roth, *Weighted distortion in conformal mapping in euclidean, hyperbolic and elliptic geometry,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **31** (2006), 111–130.
12. В. Н. Дубинин, *Лемма Шварца и оценки коэффициентов для регулярных функций со свободной областью определения,* Мат. сб. **196**, No. 11 (2005), 53–74.
13. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного,* Успехи матем. наук **49**, вып. 1 (1994), 3–76.
14. M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory,* Tokyo, 1959.
15. T. Kubo, *Hyperbolic transfinite diameter and some theorems on analytic functions in an annulus,* J. Math. Soc. Japan **10** (1958), 348–364.
16. В. Н. Дубинин, Е. В. Костюченко, *Экстремальная задача Тейхмюллера и теоремы искажения в теории одолистных функций,* Сиб. мат. журн. **40**, No. 2 (1999), 302–306.
17. А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций,* Т. 1, М., 1967.
18. В. Н. Дубинин, *Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин,* Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 38–51.
19. G. Pick, *Über die Konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet,* Sitzungsber Akad. Wiss., Wien (1917), 247–263.
20. В. Н. Дубинин, *К неравенству Шварца на границе для регулярных в круге функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 74–84.
21. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов, обобщения лемм Грётша и симметризация,* Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 73–100.
22. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций,* Алгебра и анализ **9**, вып. 3 (1997), 41–103.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, Владивосток

Поступило 16 октября 2007 г.