Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 350, 2007 г.

И. Н. Демшин, В. А. Шлык

МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ОБЛАСТЕЙ С РАДИАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ, НОРМАЛЬНЫХ В СМЫСЛЕ ГРЁТША

В данной заметке продолжается исследование p-нормальных кольцевых областей в пространственном случае, $1 < p < +\infty$. Как и в плоском случае для $p = 2$ (см. [1]), доказательство существенной части результатов базируется на равенстве p-модуля и p-емкости конденсатора (см. [2]), на методе экстремальных метрик по Фюгледе (см. [3]). Отметим, что Грётш (см. [4]) был первым, кто систематически использовал метод экстремальных метрик в форме своего метода полос для изучения экстремальных свойств такого рода областей, одно из которых легло в основу определения изучаемых ниже областей.

§1. Основные определения и обозначения

Для множества F из n-мерного евклидова пространства R^n, $n \geqslant 2$, обозначим через $\bar{F}$ его замыкание в $\bar{R}^n = R^n \cup \{\infty\}$. Под кривой будем понимать образ невырожденного числового интервала при непрерывном отображении в R^n. Если Γ – семейство локально спрямляемых кривых γ, где γ содержится в области $D \subset R^n$, то через $\operatorname{adm}\Gamma$ обозначим семейство всех борелевских функций $\rho : D \to [0, +\infty]$, для которых $\int_\gamma \rho ds \geqslant 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Величину

$$m_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^p dx$$

для $p \in (1, +\infty)$ назовем p-модулем семейства Γ. Борелевскую

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ–9004.2006.1) и РФФИ (грант NC 05-01-000 99) и ДВО РАН (грант 06-III -А-01-013).

функцию $\rho_0 = \rho(x,\Gamma) : D \to [0,+\infty]$ назовем обобщенной экстремальной метрикой для Γ, если $\int\limits_D \rho_0^p dx = m_p(\Gamma)$ и существует семейство $\Gamma_0 \subset \Gamma$ такое, что $m_p(\Gamma_0) = 0$ и $\int\limits_\gamma \rho_0 ds \geqslant 1$ для всех $\gamma \in \Gamma \backslash \Gamma_0$. Множество $e \subset \bar{D}$ назовем p-исключительным относительно D, если p-модуль семейства $\Gamma(e,D)$ всех локально спрямляемых кривых γ, $\gamma \subset D$, соединяющих e с точками D, равен 0. Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для p-почти всех кривых γ из семейства Γ, если оно справедливо для всех $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, где $m_p(\Gamma_0) = 0$. Отметим, что $m_n(\Gamma^\infty) = 0$ для семейства Γ^∞ всех неспрямляемых кривых в R^n (см. [5]). Как обычно, $\mathcal{L}_n(\cdot)$ – n-мерная мера Лебега, $C^\infty(D)$ – класс бесконечно дифференцируемых функций в D ($C_0^\infty(D)$ – подкласс функций из $C^\infty(D)$ с компактным носителем в D); $L_p^1(D)$ – пространство функций $u : D \to (-\infty,+\infty)$, локально интегрируемых в D со степенью p и полунормой $\|u\| = \Big(\int\limits_D |\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. Под конденсатором будем понимать тройку (F_0, F_1, D), где $F_0, F_1 \subset \bar{D}$ – непустые непересекающиеся компакты. Определим p-емкость конденсатора (F_0, F_1, D) как величину

$$C_p(F_0, F_1, D) = \inf \int\limits_D |\nabla u|^p dx,$$

где inf берется по всем вещественнозначным функциям u таким, что $u\,|_D \in C^\infty(D) \cap L_p^1(D)$, $u = j$ в некоторой окрестности компакта F_j для $j = 1, 2$. Класс таких функций обозначим через $\mathrm{Adm}(F_0, F_1, D)$. Если $u_0 = u(x, F_0, F_1, D) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(x)$ в $L_p^1(D)$, где $u_k \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, D)$, $0 \leqslant u_k \leqslant 1$ в D, $\int\limits_D |\nabla u_0|^p dx = C_p(F_0, F_1, D)$, то u_0 назовем экстремальной функцией для $C_p(F_0, F_1, D)$. Если $v = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ в $L_p^1(D)$, $u_k \in C^\infty \cap L_p^1(D)$ и $u_k = 0$ в некотрой окрестности компакта $F_0 \cup F_1$, то v назовем пробной функцией (для $C_p(F_0, F_1, D)$).

Нам понадобится следующий критерий экстремальности функции u для $C_p(F_0, F_1, D)$ (см., например, [6]). Функция $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ в $L_p^1(D)$, $u_k \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, D)$, экстремальна для $C_p(F_0, F_1, D)$ тогда и только тогда, когда для любой пробной функции v

$$\int\limits_D |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nabla v)dx = 0, \tag{1}$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение.

Семейство всех спрямляемых кривых γ, $\gamma \subset D$, соединяющих F_0 и F_1, обозначим через $\Gamma(F_0, F_1, D)$, его p-модуль через $m_p(F_0, F_1, D)$. Положим

$$\rho(x, \Gamma(F_0, F_1, D)) = \rho(x, F_0, F_1, D).$$

Известно (см. [2]), что

$$C_p(F_0, F_1, D) = m_p(F_0, F_1, D) \tag{2}$$

и

$$\rho(x, F_0, F_1, D) = \nabla u(x, F_0, F_1, D). \tag{3}$$

Положим $C(t) = \{x \in R^n : |x| = t\}$ для $t > 0$, $K(R) = \{x : |x| < R\}$, $K(r, R) = \{x : r < |x| < R\}$. Пусть E – компакт в R^n такой, что для множества $E(r, R) = E \cap K(r, R)$ каждая его компонента связности не соединяет $C(r)$ и $C(R)$, $G(r, R) = K(r, R)\backslash E(r, R)$ – область в R^n. Через $\varkappa_1$ обозначим внешнюю граничную компоненту области $G(r, R)$, через $\varkappa_0$ – граничную компоненту этой области, которая отделяет $x = (0, \ldots, 0)$ от $\varkappa_1$.

Определение. *Область $G(r, R)$ назовем нормальной кольцевой областью с радиальными разрезами или просто нормальной кольцевой областью, если*

1) $\rho_0(x) = \rho(x, C(r), C(R), K(r, R))$ – *обобщенная экстремальная метрика для* $\Gamma(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r, R))$;

2) $m_p(C(r), C(R), K(r, R)) = m_p(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r, R))$.

Отметим, что

$$u_0 = u(x, C(r), C(R), K(r, R)) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{1-\frac{n-1}{p-1}} - r^{1-\frac{n-1}{p-1}}}{R^{1-\frac{n-1}{p-1}} - r^{1-\frac{n-1}{p-1}}}, & p \neq n, \\ \dfrac{\ln|x| - \ln r}{\ln R - \ln r}, & p = n \end{cases} \tag{4}$$

и $\rho_0(x, C(r), C(R), K(r, R)) = |\nabla u_0| > 0$ в $K(r, R)$.

§2. Свойства пространственных нормальных областей

Следующая теорема характеризует метрические свойства множеств, порождающих определеные выше нормальные области.

Теорема 1. *Если $G(r,R)$ – нормальная кольцевая область, то*

1) $\mathcal{L}_n(E(r,R))=0$ *и ни одна компонента связности множества* $E(r,R)$ *не разбивает кольцо* $K(r,R)$;

2) $(\varkappa_0\setminus C(r))\cup(\varkappa_1\setminus C(R))$ – *p-исключительное множество относительно* $G(r,R)$.

Доказательство. Поскольку в силу (4)

$$m_p(\varkappa_0,\varkappa_1,G(r,R))=\int\limits_{G(r,R)}|\nabla u_0|^p\,dx$$

$$=\int\limits_{K(r,R)}|\nabla u_0|^p\,dx=m_p(C(r),C(R),K(r,R)),$$

то $\mathcal{L}_n(G(r,R))=\mathcal{L}_n(K(r,R))$. Значит, $\mathcal{L}_n(E(r,R))=0$ и ни одна из компонент связности $E(r,R)$ не разбивает $K(r,R)$. В противном случае ни одна из кривых $\gamma\in\Gamma(\varkappa_0,\varkappa_1,G(r,R))$ не проходила бы через внутренние точки одной из областей разбиения.

Установим свойство 2). В силу (1), (2) и определения экстремальной функции (см. [7]) для $C_p(\varkappa_0,\varkappa_1,G(r,R))$ найдутся функции $u_k\in\operatorname{Adm}\big(\varkappa_0,\varkappa_1,G(r,R)\big)$, $0\leqslant u_k\leqslant 1$ в $G(r,R)$, и постоянные c_k такие, что (см. [3]) при $k\to\infty$

$$\int\limits_{G(r,R)}|\nabla u_k-\nabla u_0|^p\,dx\to 0, \tag{5}$$

$u_k+c_k\to u_0$ в $G(r,R)\setminus e_0$, где e_0 – p-исключительное множество в $G(r,R)$,

$$\int\limits_{\gamma}|\nabla u_k-\nabla u_0|ds\to 0 \tag{6}$$

для p-почти всех спрямляемых кривых $\gamma\subset G(r,R)$. Пусть для такой кривой γ точка a – её начало, b – её конец. Из (6) сразу следует, что

$$u_k(b)-u_k(a)=\int\limits_{\gamma}\frac{\partial u_k}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial u_k}{\partial x_n}dx_n\ \underset{k\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_0(b) - u_0(a) = \int\limits_{\gamma} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u_0}{\partial x_n} dx_n. \qquad (7)$$

Если теперь для спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R))$ один из её концов a, b принадлежит $(\varkappa_0 \setminus C(r)) \cup (\varkappa_1 \setminus C(R))$, то $u_k(b) - u_k(a) = 1$, $u_0(b) - u_0(a) < 1$ и, следовательно, условие (7) и, значит, (6) для этой кривой γ не выполняется. Другими словами, p-почти все кривые $\gamma \in \Gamma(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R))$ соединяют $C(r)$ и $C(R)$ в $G(r,R)$. Это влечет существование спрямляемой кривой $\gamma \subset G(r,R)$, соединяющей точку $b \in G(r,R) \setminus e_0$ с точкой $a \in C(r)$ и удовлетворяющей условию (7). Тогда при $k \to \infty$ имеем

$$u_k(b) - u_k(a) \to u_0(b) - u_0(a) = u_0(b).$$

Это позволяет считать все c_k в (5) равными 0.

Пусть теперь спрямляемая кривая $\gamma \subset G(r,R)$ соединяет точку $a \in G(r,R) \setminus e_0$ с точкой $b \in (\varkappa_0 \setminus C(r)) \cup (\varkappa_1 \setminus C(R))$. Ясно, что $u_k \to u_0$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(b)$ равен 0 или 1, $0 < u_0 < 1$ на γ. Поэтому $\lim_{k\to\infty}(u_k(b) - u_k(a)) \neq u_0(b) - u_0(a)$, следовательно, условия (6), (7) не выполняются. Тогда семейство всех таких спрямляемых кривых является p-исключительным относительно $G(r,R)$. Теорема доказана.

Приведем теперь функциональную характеристику нормальной кольцевой области.

Пусть λ – луч, исходящий из точки $x = (0,0,\dots,0)$ и пересекающий сферу $C(1)$ в точке t. Этот луч обозначим через λ_t. Площадь множества $T \subset C(1)$ обозначим через $\omega_n(T)$.

Теорема 2. *Пусть для области $G(r,R)$ множество $E(r,R)$ не разбивает кольцо $K(r,R)$, $\mathcal{L}_n(E(r,R)) = 0$, $(\varkappa_0 \setminus C(r)) \cup (\varkappa_1 \setminus C(R))$ – p-исключительное множество относительно $G(r,R)$. Область $G(r,R)$ – нормальная кольцевая область тогда и только тогда, когда любую функцию $f \in L^1_n(G(r,R))$ можно продолжить до абсолютно непрерывной функции на $\lambda_t \cap K(r,R)$ для всех $t \in C(1) \setminus C_1$, где $\omega_n(C_1) = 0$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $G(r,R)$ – нормальная кольцевая область. Тогда для достаточно больших $j \in N$ $G_j(r,R) = G(r,R) \cup \left\{x : r < |x| < r + \frac{1}{j}\right\} \cup \left\{x : R - \frac{1}{j} < |x| < R\right\}$ будет нормальной кольцевой областью. Здесь учитывается, что семейство кривых, соединяющих $C(r)$ и $C(R)$ в $G_j(r,R)$, содержит семейство кривых, соединяющих $C(r)$ и $C(R)$ в $G(r,R)$. Остальные кривые, соединяющие в $G(r,R)$ множества $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$, образуют p-исключительное семейство кривых в $G(r,R)$. Тогда функция u_0, определенная в (4), является экстремальной функцией для $C_p\big(C(r),C(R),G_j(r,R)\big)$, $\mathcal{L}_n\big(E(r,R)\big)=0$. Для точки $x\in G(r,R)$ введем сферические координаты

$$\begin{cases} x_1 = t\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k, \\ x_m = t\cos\theta_{m-1}\prod\limits_{k=m}^{n-1}\sin\theta_k, m=2,3,\ldots,n-1, \\ x_n = t\cos\theta_{n-1}, \end{cases}$$

где $t=|x|$, $\theta_1\in[0;2\pi)$, $\theta_m\in[0;\pi]$, $m=2,3,\ldots,n-1$. Положим $T_m=\{x\in K(r,R):\theta_m=0,\pi\}$, $m=1,2,\ldots,n-1$; $\tilde K(r,R)=K(r,R)\setminus\bigcup\limits_{m=1}^{n-1}T_m$; $\tilde K_j(r,R)=G_j(r,R)\setminus\bigcup\limits_{m=1}^{n-1}T_m$. Пусть w_j – функция из $C_0^\infty\big(K(r,R)\big)$, равная 1 на $\tilde K\big(r+\frac{1}{j-2},R-\frac{1}{j-2}\big)$ и 0 на $K(r,R)\setminus K\big(r+\frac{1}{j-1},R-\frac{1}{j-1}\big)$ при достаточно больших j.

Если теперь $v\in C_0^\infty(\tilde K(r,R))$, то

$$w=v\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin^{k-1}\theta_k\right)^{-1}\in C_0^\infty\big(\tilde K(r,R)\big).$$

Тогда для $f\in L_p^1(G(r,R))$ функция $f\cdot w_j\cdot w$ будет пробной для $C_p\big(C(r),C(R),G_j(r,R)\big)$. Применяя вариационное условие (1) и запись градиента функции в сферических координатах, получим

$$\int\limits_{K_j(r,R)}|\nabla u_0|^{p-2}\big(\nabla u_0,\nabla(fw_jw)\big)\,dx=$$

$$=\int\limits_{\tilde K_j(r,R)}|\nabla u_0|^{p-2}\big(\nabla u_0,\nabla(fw_jw)\big)\,dx=$$

$$=\int\limits_{\tilde K_j(r,R)}\left|\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u_0}{\partial t}\frac{\partial(fw_jw)}{\partial t}dx=0.$$

Переходя к сферическим координатам и учитывая выбор w, заключаем, что

$$\int\limits_{S(\tilde{K}_j(r,R))} \frac{\partial(fw_j w)}{\partial t} dt d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} = 0. \tag{8}$$

Здесь $S(\cdot)$ – образ $(\cdot)$ при переходе к сферическим координатам. В частности, $S(\tilde{K}(r,R))$ представляет собой n-мерный координатный прямоугольник с разрезами, лежащими на гиперплоскостях $\theta_m = 0, \pi$; $m = 1, 2, \ldots, n-1$.

Положим $f_1 = fw_j$ на $G_j(r,R)$ и 0 на $K(r,R) \setminus G_j(r,R)$; $g = \frac{\partial f_1}{\partial t}$ на $G_j(r,R)$ и 0 на $K(r,R) \setminus G_j(r,R)$. Из (8) и условия $\mathcal{L}_n(E(r,R)) = 0$ сразу следует

$$\int\limits_{S(\tilde{K}_j(r,R))} w\frac{\partial f_1}{\partial t} dt d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} = \int\limits_{S(\tilde{K}(r,R))} wg dt d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} =$$

$$- \int\limits_{S(\tilde{K}_j(r,R))} f_1 \frac{\partial w}{\partial t} dt d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} = - \int\limits_{S(\tilde{K}(r,R))} f_1 \frac{\partial w}{\partial t} dt d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}.$$

В силу произвола в выборе w функция g – обобщенная производная по t функции f_1 в $\tilde{K}(r,R)$, суммируемая в этой области со степенью p. Тогда (см. [7]) f_1 и, следовательно, функция f при $j \to \infty$ продолжается до абсолютно непрерывной функции на $\lambda_t \cap K(r,R)$ для всех $t \in C(1) \setminus C_1$, где $\omega_n(C_1) = 0$.

Достаточность. Поскольку $\mathcal{L}_n(E(r,R)) = 0$ и $E(r,R)$ не разбивает кольцо $K(r,R)$, $(\varkappa_0 \setminus C(r)) \cup (\varkappa_1 \setminus C(R))$ — p- исключительное множество, то $C(r) \subset \varkappa_0, C(R) \subset \varkappa_1$ и

$$m_p\big(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R)\big) = m_p\big(C(r), C(R), G(r,R)\big) \leqslant m_p\big(C(r), C(R), K(r,R)\big).$$

Докажем теперь противоположное неравенство. Положим

$$\Gamma_1(r,R) = \{\lambda_t \cap K(r,R) : t \in C(1)\}.$$

Известно (см. [5]), что

$$m_p(\Gamma_1(r,R)) = m_p(C(r), C(R), K(r,R)).$$

С другой стороны, пусть для $u_0 = u(x, \varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R))$ $\{u_k\}$ – последовательность функций $u_k \in \mathrm{Adm}\,\big(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R)\big)$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u_0$

в $L^1_p(G(r,R))$. Рассуждение из доказательства теоремы 1 и указанная абсолютная непрерывность функций u_k, u_0 приводят к оценке

$$1 \leqslant \int\limits_{\lambda_t \cap K(r,R)} \frac{\partial u_k}{\partial t} dt = \int\limits_{\lambda_t \cap K(r,R)} \frac{\partial u_0}{\partial t} dt \leqslant \int\limits_{\lambda_t \cap K(r,R)} |\nabla u_0| dt$$

для почти всех $t \in C(1)$ по мере ω_n.

Следовательно, $|\nabla u_0| \in \operatorname{adm}(\Gamma_1(r,R) \setminus \tilde{\Gamma}_1)$, где $m_p(\tilde{\Gamma}_1) = 0$. Отсюда

$$m_p(\Gamma_1(r,R)) \leqslant \int\limits_{G(r,R)} |\nabla u_0|^p dx = m_p(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R)).$$

Это завершает доказательство теоремы 2.

Пример. Положим $n = 3$. Пусть Kon_α – поверхность конуса с вершиной в точке $O(0,0,0)$ и углом α при вершине, $\mathrm{Kon}_\alpha(r,R)$ – поверхность конуса с вершиной в точке O, расположенная между $C(r)$ и $C(R)$,

$$E(1,3) = \mathrm{Kon}_{\frac{\pi}{2}}(2,3) \cup \Big(\bigcup_{k=10}^{\infty} \mathrm{Kon}_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{k}} \big(2, 3 - \tfrac{1}{k}\big) \Big) \cup \Big(\bigcup_{k=10}^{\infty} \mathrm{Kon}_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{k}} \big(2, 3 - \tfrac{1}{k}\big) \Big).$$

В нашем случае

$$\varkappa_1 = C(3) \cup \mathrm{Kon}_{\frac{\pi}{2}}(2,3), \;\; \varkappa_0 = C(1), \;\; G(1,3) = K(1,3) \setminus E(1,3).$$

Учитывая, что точки из $\mathrm{Kon}_{\frac{\pi}{2}}(2,3)$ недостижимы из $G(1,3)$ и $\omega_n(T) = \omega_n\big(C(1)\big) = 4\pi$, где $T = \{t \in C(1) : \lambda_t \cap K(1,3) = \lambda_t \cap G(1,3)\}$ получаем, в силу теоремы 2, что $G(1,3)$ – p-нормальная область в R^3 для всех $p \in (1, \infty)$.

Литература

1. А. С. Гуляев, В.А. Шлык, *О канонических отображениях на круговые области с радиальными разрезами*, Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 35–50.
2. И. Н. Демшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств*, Зап. науч. семин. ПОМИ **276** (2001), 52–82.

3. V. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta Math. **126**, No. 3 (1957), 171–219.
4. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2-е изд. М., 1966.
5. А. В. Сычев, *Модули и пространственные квазиконформные отображения, Новосибирск*, 1983.
6. В. А. Шлык, *Емкость конденсатора и модуль семейства разделяющих поверхностей*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 168–182.
7. В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, М., 1983.

Дальневосточный государственный университет, Владивосток
E-mail: yurakl@imcs.dvgu.ru

Поступило 19 ноября 2007 г.