Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 350, 2007 г.

Е. Г. Голузина

ОБ ОДНОМ МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Пусть T – класс функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, регулярных и типично вещественных в круге $U=\{z:|z|<1\}$.

Пусть $\{z_j\}_{j=1}^m$ и $\{r_j\}_{j=1}^n$ – заданные различные точки круга U, $\operatorname{Im} z_j \neq 0$, $j=1,2,\dots,m$, $0<r_j<1$, $j=1,2,\dots,n$.

Обозначим через $D_{m,n}(T)$ множество значений системы

$$I(f)=\{f(z_1),f(z_2),\dots,f(z_m),f(r_1),f(r_2),\dots,f(r_n)\}$$

на классе T.

В [1] найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых точка $X\in\mathbb{R}^{2m+n}$ принадлежит множеству $D_{m,n}(T)$ в случае $m\geqslant 1$, $n>1$. В настоящей работе подробно рассмотрен случай $m=1$, $n\geqslant 2$. Найдены также множества значений системы $\{f(r_1),f(r_2),\dots,f(r_n)\}$ $(n\geqslant 2)$ и величины $f(z_1)$ при фиксированных значениях $f(r_1),f(r_2),\dots,f(r_n)$ на классе T.

Для алгебраической характеристики множеств значений систем, рассмотренных в этой работе, использовано интегральное представление класса T, которое позволило свести задачу к обобщенной проблеме моментов и использовать известные критерии разрешимости проблемы моментов.

§1. Обозначения и формулировка результатов

Введем следующие обозначения

$$\zeta_1=z_1+\frac{1}{z_1},\quad w_1=f(z_1)=x_1+iy_1,$$
$$\rho_j=r_j+\frac{1}{r_j},\quad x'_j=x_{j+1}=f(r_j),\quad j=1,2,\dots,n;$$

$$g_j^{(1)} = \prod_{\substack{j'=1\\ j'\neq j}}^{n} (\rho_{j'} - \rho_j)^{-1}, \quad c_1^{(1)} = \prod_{j'=1}^{n} (\rho_{j'} - \zeta_1)^{-1},$$

$$g_j^{(2)} = g_j^{(1)}(4-\rho_j^2), \quad c_1^{(2)} = c_1^{(1)}(4-\zeta_1^2),$$

$$g_j^{(s')} = [2+(-1)^{s'}\rho_j]g_j^{(1)}, \quad c_1^{(s')} = [2+(-1)^{s'}\zeta_1]c_1^{(1)}, \quad s' = 3,4;$$

$$g_{kl}^{(s)} = \begin{cases} (-1)^{s+1} & \text{при} \quad k+l = 2N_s \\ 0 & \text{при} \quad k+l < 2N_s \end{cases} \qquad s = 1,2,3,4;$$

$$N_1 = N, \quad N_2 = N-1, \quad N_3 = N_4 = N.$$

Полученный в [1] результат сформулируем в случае $m = 1$ в виде следующей теоремы.

Теорема 1. 1. *Множество значений $D_{1,n}(T)$ $(n \geqslant 2)$ системы*

$$\{f(z_1), f(r_1), f(r_2), \dots, f(r_n)\} \tag{1}$$

на классе T есть множество всех точек

$$X = X(x_1, y_1, x_2, x_3 \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}, \tag{2}$$

в которых неотрицательны эрмитовы формы H_1 и H_2, если $n = 2N$, эрмитовы формы H_3 и H_4, если $n = 2N+1$, где

$$H_s = \sum_{k,l=0}^{N_s} \left(\sum_{j=1}^{n} g_j^{(s)} \rho_j^{k+l} x_{j+1} + g_{kl}^{(s)} \right) \overline{\xi}_k \xi_l +$$

$$+2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{N_s} \left(\sum_{j=1}^{n} g_j^{(s)} \rho_j^k \frac{x_{j+1}}{\zeta_1 - \rho_j} + c_1^{(s)} \zeta_1^k w_1 \right) \overline{\xi}_k \xi_{N_s+1} \right] +$$

$$+\left[\sum_{j=1}^{n} g_j^{(s)} \frac{x_{j+1}}{|\zeta_1 - \rho_j|^2} - \frac{\mathrm{Im}(c_1^{(s)}\, w_1)}{\mathrm{Im}\,\zeta_1} \right] |\xi_{N_s+1}|^2, \quad s = 1,2,3,4. \tag{3}$$

2. *Для того чтобы некоторая точка (2) была внутренней точкой множества $D_{1,n}(T)$, необходимо и достаточно, чтобы были положительно определенными эрмитовы формы H_1 и H_2, если $n = 2N$, H_3 и H_4, если $n = 2N+1$.*

3. *Каждой точке* $X \in \partial D_{1,n}(T)$ *соответствует только одна функция класса* T *и она имеет вид*

$$f_X(z) = \sum_{k=1}^{N+2} \frac{\lambda_k z}{1 - 2t_k z + z^2}, \tag{4}$$

где $\lambda_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{N+2} \lambda_k = 1$, $t_j \neq t_k$ *при* $j \neq k$,

и если $n = 2N$, *то*

или $-1 < t_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots, N+1$, $\lambda_{N+2} = 0$,

или $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $-1 < t_k < 1$, $k = 3, 4, \ldots, N+2$,

а если $n = 2N+1$, *то*

$t_1 = \pm 1$, $-1 < t_k < 1$, $k = 2, 3, \ldots, N+2$.

В случае $m = 0$ имеет место следующая

Теорема 2. 1. *Множество значений* $D_{0,n}(T)$ $(n \geqslant 2)$ *системы*

$$\{f(r_1), f(r_2), \ldots, f(r_n)\} \tag{5}$$

на классе T *есть множество всех точек*

$$X = X(x'_1, , x'_2, \ldots, x'_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

в которых неотрицательны вещественные квадратичные формы H'_1 *и* H'_2, *если* $n = 2N$, H'_3 *и* H'_4, *если* $n = 2N+1$, *где*

$$H'_s = \sum_{k,l=0}^{N_s} \left(\sum_{j=1}^{n} g_j^{(s)} \rho_j^{k+l} x'_j + g_{kl}^{(s)} \right) \xi_k \, \xi_l, \quad s = 1, 2, 3, 4. \tag{7}$$

2. $\operatorname{Int} D_{0,n}(T)$ *есть множество всех точек* (6), *в которых положительно определены вещественные квадратичные формы* H'_1 *и* H'_2, *если* $n = 2N$, *и* H'_3 *и* H'_4, *если* $n = 2N+1$

Из утверждения 2 теоремы 2 следует (см. [2, с. 300]), что $\operatorname{Int} D_{0,n}(T)$ есть множество всех точек (6), удовлетворяющих системе неравенств

$$\det A_{N'}^{(s)} > 0, \quad N' = 0, 1, \ldots, N_s, \tag{8}$$

при $s=1,2$, если $n=2N$, и при $s=3,4$, если $n=2N+1$, где

$$A_{N'}^{(s)}=(a_{kl}^{(s)})_{k,l=0}^{N'}=$$
$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)}x_j' & \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)}x_j'\rho_j & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)}x_j'\rho_j^{N'} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)}x_j'\rho_j & \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)}x_j'\rho_j^2 & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)}x_j'\rho_j^{N'+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)}x_j'\rho_j^{N'} & \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)}x_j'\rho_j^{N'+1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)}x_j'\rho_j^{2N'}+g_{N'N'}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Пусть $A^{(s)}=(a_{kl}^{(s)})$ $(k,l=0,1,\dots,N_s+1)$ – матрица эрмитовой формы H_s $(s=1,2,3,4)$. Фиксируем $x_2,x_3,\dots,x_{n+1}$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства (8), и пусть $D_n(f)$ $(n\geqslant 2)$ – множество значений $f(z_1)$ на подклассе всех функций из класса T, удовлетворяющих условию

$$f(r_j)=x_{j+1}\equiv x_j' \quad (j=1,2,\dots,n).$$

Обозначим

$$\widehat{A}_1^{(s)}=(\widehat{a}_{kl}^{(s)}) \quad (k,l=1,2,\dots,N_s), \quad \text{где}$$
$$\widehat{a}_{kl}^{(s)}=\sum_{j=1}^{n} x_{j+1}\,g_j^{(s)}|\rho_j-\zeta_1|^2\rho_j^{k+l-2}+g_{kl}^{(s)};$$

$$\widehat{A}_2^{(s)}=(\widehat{a}_{kl}^{(s)}) \quad (k,l=0,1,\dots,N_s), \quad \text{где}$$
$$\widehat{a}_{kl}^{(s)}=\sum_{j=1}^{n} x_{j+1}\,g_j^{(s)}\rho_j^{k+l}+g_{kl}^{(s)};$$

$$\widehat{A}_0^{(s)}=(\widehat{a}_{kl}^{(s)}) \ \ (k=0,1,\dots,N_s;\ l=1,2,\dots,N_s+1), \quad \text{где}$$
$$\widehat{a}_{0\,N_s+1}^{(s)}=0, \quad \widehat{a}_{kl}^{(s)}=\sum_{j=1}^{n} x_{j+1}\,g_j^{(s)}(\rho_j-\overline{\zeta}_1)\rho_j^{k+l-1}+g_{kl}^{(s)},$$
$$\widehat{a}_{lk}^{(s)}=\overline{\widehat{a}_{kl}^{(s)}} \quad (k=0,1,\dots,N_s;\ l=1,2,\dots,N_s),$$
$$\widehat{a}_{k(N_s+1)}^{(s)}=\sum_{j=1}^{n} x_{j+1}\,g_j^{(s)}(\rho_j^k-\zeta_1^k)\frac{\rho_j-\overline{\zeta}_1}{\rho_j-\zeta_1}, \quad (k=1,2,\dots,N_s).$$

При введенных выше обозначениях имеем

Следствие 1.

$$D_n(f) = \{w : |w - O_s^{(n)}| \leqslant R_s^{(n)},\ s = 1, 2\}, \quad \textit{если} \quad n = 2N,$$

и

$$D_n(f) = \{w : |w - O_s^{(n)}| \leqslant R_s^{(n)},\ s = 3, 4\}, \quad \textit{если} \quad n = 2N + 1,$$

где

$$O_s^{(n)} = \frac{i}{2c_1^{(s)} \operatorname{Im} \zeta_1} \left[\sum_{j=1}^{n} x_{j+1}\, g_j^{(s)} \frac{\rho_j - \overline{\zeta}_1}{\zeta_1 - \rho_j} + (-1)^{N_s+1} \frac{\det \widehat{A}_0^{(s)}}{\det \widehat{A}_1^{(s)}} \right],$$

$$R_s^{(n)} = \frac{\det \widehat{A}_2^{(s)}}{2|c_1^{(s)} \operatorname{Im} \zeta_1| \det \widehat{A}_1^{(s)}}.$$

В случае $n = 2$ ($N = 1$) теорема 1 и следствие 1 приводят к следующим результатам.

Теорема 3 [3]. 1. *Множество значений $D_{1,2}(T)$ системы $\{f(z_1), f(r_1), f(r_2)\}$ на классе T есть множество всех точек $X = X(x_1, y_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, в которых неотрицательны эрмитовы формы H_1 и H_2:*

$$H_1 = \left[\frac{1}{\rho_2 - \rho_1} (x_2(4 - \rho_1^2) - x_3(4 - \rho_2^2)) - 1 \right] |\xi_0|^2 +$$

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \left(\frac{x_2(4 - \rho_1^2)}{\zeta_1 - \rho_1} - \frac{x_3(4 - \rho_2^2)}{\zeta_1 - \rho_2} \right) + \frac{w_1(4 - \zeta_1^2)}{(\rho_1 - \zeta_1)(\rho_2 - \zeta_1)} \right] \overline{\xi}_0\, \xi_1 \right\} +$$

$$\left[\frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \left(\frac{x_2(4 - \rho_1^2)}{|\zeta_1 - \rho_1|^2} - \frac{x_3(4 - \rho_2^2)}{|\zeta_1 - \rho_2|^2} \right) + 2 \operatorname{Re} \frac{w_1(4 - \zeta_1^2)}{(\rho_1 - \zeta_1)(\rho_2 - \zeta_1)(\overline{\zeta}_1 - \zeta_1)} \right] |\xi_1|^2,$$

$$H_2 = \frac{x_2 - x_3}{\rho_2 - \rho_1} |\eta_0|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\rho_1 x_2 - \rho_2 x_3}{\rho_2 - \rho_1} \overline{\eta}_0 \eta_1 \right) +$$

$$+2 \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \left(\frac{x_2}{\zeta_1 - \rho_1} - \frac{x_3}{\zeta_1 - \rho_2} \right) + \frac{w_1}{(\rho_1 - \zeta_1)(\rho_2 - \zeta_1)} \right] \overline{\eta}_0\, \eta_2 \right\} +$$

$$+ \left(1 + \frac{\rho_1^2 x_2 - \rho_2^2 x_3}{\rho_2 - \rho_1} \right) |\eta_1|^2 +$$

$$+2 \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \left(\frac{\rho_1 x_2}{\zeta_1 - \rho_1} - \frac{\rho_2 x_3}{\zeta_1 - \rho_2} \right) + \frac{w_1 \zeta_1}{(\rho_1 - \zeta_1)(\rho_2 - \zeta_1)} \right] \overline{\eta}_1 \eta_2 \right\} +$$

$$+\left[\frac{1}{\rho_2-\rho_1}\left(\frac{x_2}{|\zeta_1-\rho_1|^2}-\frac{x_3}{|\zeta_1-\rho_2|^2}\right)+2\operatorname{Re}\frac{w_1}{(\rho_1-\zeta_1)(\rho_2-\zeta_1)(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}\right]|\eta_2|^2.$$

2. *Для того, чтобы некоторая точка* $X = X(x_1, y_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ *была внутренней точкой множества значений* $D_{1,2}(T)$, *необходимо и достаточно, чтобы эрмитовы формы* H_1 *и* H_2 *были положительно определенными.*

Следствие 2 [3]. $D_2(f) = \{w : |w - O_s^{(2)}| \leqslant R_s^{(2)},\ s = 1, 2\}$, *где*

$$O_1^{(2)} = \frac{i(\rho_1-\zeta_1)(\rho_2-\zeta_1)}{(\rho_2-\rho_1)2\operatorname{Im}\zeta_1}\left[x_3\frac{\rho_2-\overline{\zeta}_1}{\rho_2-\zeta_1}-x_2\frac{\rho_1-\overline{\zeta}_1}{\rho_1-\zeta_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{(x_2(\rho_1-\overline{\zeta}_1)-x_3(\rho_2-\overline{\zeta}_1))^2}{\rho_2-\rho_1+x_2|\rho_1-\zeta_1|^2-x_3|\rho_2-\zeta_1|^2}\right],$$

$$R_1^{(2)} = \frac{(x_2-x_3-x_2x_3(\rho_2-\rho_1))}{\rho_2-\rho_1+x_2|\rho_1-\zeta_1|^2-x_3|\rho_2-\zeta_1|^2}\cdot\frac{|\rho_1-\zeta_1|\ |\rho_2-\zeta_1|}{2|\operatorname{Im}\zeta_1|},$$

$$O_1^{(2)} = \frac{i(\rho_1-\zeta_1)(\rho_2-\zeta_1)}{(\zeta_1^2-4)2\operatorname{Im}\zeta_1}\times$$
$$\times\left[-1+\frac{1}{\rho_2-\rho_1}\left(x_2(4-\rho_1^2)\frac{\rho_1-\overline{\zeta}_1}{\rho_1-\zeta_1}+x_3(\rho_2^2-4)\frac{\rho_2-\overline{\zeta}_1}{\rho_2-\zeta_1}\right)\right],$$

$$R_2^{(2)} = \frac{|\rho_1-\zeta_1|\ |\rho_2-\zeta_1|}{2|\operatorname{Im}\zeta_1|\ |\zeta_1^2-4|}\left[\frac{1}{\rho_2-\rho_1}(x_2(4-\rho_1^2)-x_3(4-\rho_2^2))-1\right].$$

Замечание 1. При формулировке теоремы 3 в [3] потеряно одно обозначение: выражение для α_{12}. Здесь ему соответствует коэффициент при $\overline{\xi}_0\xi_1$.

Замечание 2. В случае $n = 3$ множество значений $D_n(f)$ найдено в [1].

§2. Доказательства

1. Доказательство теоремы 2. Для класса T имеет место следующее интегральное представление [4, 5]:

$$f(z) \in T \Leftrightarrow f(z) = \int_{-1}^{1} z(1-2tz+z^2)^{-1}d\alpha(t), \quad \alpha(t) \in M_1, \qquad (9)$$

где M_1 – класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на отрезке $[-1,1]$ и таких, что $\int\limits_{-1}^{1} d\alpha(t) = 1$.

Используя представление (9), получаем для системы (5) интегральное представление

$$f(r_j) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\rho_j - 2t}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha(t) \in M_1. \tag{10}$$

Образуем функцию

$$\varphi(t) \equiv \delta_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j}{\rho_j - 2t} \geqslant 0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \quad \delta_0 \neq 0, \quad \delta_j \in \mathbb{R},$$

и запишем $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = A_n(t) \Big/ \prod_{j=1}^{n} (\rho_j - 2t),$$

где $A_n(t)$ – неотрицательный на отрезке $[-1,1]$ алгебраический многочлен от t степени n.

Используя представление Маркова–Лукача для полиномов, неотрицательных на отрезке $[-1,1]$ (см. [6, с. 89]), имеем

$$\varphi(t) = \sum_{k,l=0}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n} g_j^{(1)} \frac{\rho_j^{k+l}}{\rho_j - 2t} + g_{kl}^{(1)} \right) \xi_k \xi_l + \\ + \sum_{k,l=0}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{n} g_j^{(2)} \frac{\rho_j^{k+l}}{\rho_j - 2t} + g_{kl}^{(2)} \right) \eta_k \eta_l \geqslant 0,$$

если $n = 2N$,
и

$$\varphi(t) = \sum_{k,l=0}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n} g_j^{(3)} \frac{\rho_j^{k+l}}{\rho_j - 2t} + g_{kl}^{(3)} \right) \xi_k \xi_l + \\ + \sum_{k,l=0}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n} g_j^{(4)} \frac{\rho_j^{k+l}}{\rho_j - 2t} + g_{kl}^{(4)} \right) \eta_k \eta_l \geqslant 0,$$

если $n = 2N + 1$,

где $\{\xi_k\}$ и $\{\eta_k\}$ – некоторые вещественные числв.

По теореме 1.1 в [6, с. 84–85], для того чтобы имело место представление (10), необходимо и достаточно, чтобы из справедливости неравенства $\varphi(t) \geqslant 0$ для всех $t \in [-1,1]$ вытекали неравенства $H'_s \geqslant 0$ при $s = 1,2$, если $n = 2N$, и при $s = 3,4$, если $n = 2N+1$.

Утверждение 1 теоремы 2 доказано. Утверждение 2 доказывается аналогично утверждению 2 теоремы 1 в [7].

2. Доказательство следствия 1. В силу утверждения 2 теоремы 1 имеем

$$D_n(f) = \{w : \det A^{(s)} > 0,\ s = 1,2\}, \quad \text{если} \quad n = 2N$$

и

$$D_n(f) = \{w : \det A^{(s)} > 0,\ s = 3,4\}, \quad \text{если} \quad n = 2N+1.$$

Все элементы последнего столбца и последней строки определителя $\det A^{(s)}$ зависят от w_1.

Перейдем от матрицы $A^{(s)} = (a_{kl}^{(s)})_0^{N_s+1}$ к матрице $\widetilde{A}^{(s)} = (\widetilde{a}_{kl}^{(s)})_0^{N_s+1}$, используя следующие формулы:

$$1)\ a_{kl}^{(s)} + a_{0l}^{(s)}(-\zeta_1^k) = \alpha_{kl}^{(s)} \quad (k = 1,2,\ldots,N_s;\ l = 0,1,\ldots,N_s+1),$$

$$2)\ \alpha_{kl}^{(s)} + \alpha_{k0}^{(s)}(-\overline{\zeta}_1^l) = \widetilde{a}_{kl}^{(s)} \quad (k = 0,1,\ldots,N_s+1;\ l = 1,2,\ldots,N_s),$$

где $\alpha_{kl}^{(s)} = a_{kl}^{(s)}$ при $k = 0, N_s+1$ и $l = 0,1,\ldots,N_s+1$.

$$3)\ a_{(N_s+1)(N_s+1)}^{(s)} + a_{0(N_s+1)}^{(s)}\frac{1}{\zeta_1 - \overline{\zeta}_1} = \alpha_{(N_s+1)(N_s+1)}^{(s)},$$

$$\alpha_{(N_s+1)l}^{(s)} + \alpha_{0l}^{(s)}\frac{1}{\zeta_1 - \overline{\zeta}_1} = \widetilde{a}_{(N_s+1)l}^{(s)} \quad (l = 1,2,\ldots,N_s),$$

$$a_{(N_s+1)0}^{(s)} + a_{00}^{(s)}\frac{1}{\zeta_1 - \overline{\zeta}_1} = \widetilde{a}_{(N_s+1)0}^{(s)}$$

$$4)\ \alpha_{(N_s+1)(N_s+1)}^{(s)} + \widetilde{a}_{(N_s+1)0}^{(s)}\frac{1}{\overline{\zeta}_1 - \zeta_1} = \widetilde{a}_{(N_s+1)(N_s+1)}^{(s)},$$

$$\alpha_{k(N_s+1)}^{(s)} + \alpha_{k0}^{(s)}\frac{1}{\overline{\zeta}_1 - \zeta_1} = \widetilde{a}_{k(N_s+1)}^{(s)} \quad (k = 1,2,\ldots,N_s),$$

$$a_{0(N_s+1)}^{(s)} + a_{00}^{(s)}\frac{1}{\overline{\zeta}_1 - \zeta_1} = \widetilde{a}_{0(N_s+1)}^{(s)}, \quad \widetilde{a}_{00}^{(s)} = a_{00}^{(s)}.$$

В результате имеем

$$\det A^{(s)} \equiv \det \left[\left(a_{kl}^{(s)} \right)_{k,l=0}^{N_s+1} \right] = \det \left[\left(\alpha_{kl}^{(s)} \right)_{k,l=0}^{N_s+1} \right] =$$
$$= \det \left[\left(\widetilde{a}_{kl}^{(s)} \right)_{k,l=0}^{N_s+1} \right] \equiv \det \widetilde{A}^{(s)},$$

где

$$\widetilde{a}_{0(N_s+1)}^{(s)} = c_1^{(s)} w_1 + \frac{1}{\overline{\zeta}_1 - \zeta_1} \sum_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_{j+1} \frac{\overline{\zeta}_1 - \rho_j}{\zeta_1 - \rho_j}, \qquad (11)$$

$$\widetilde{a}_{00}^{(s)} = \sum_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_{j+1},$$
$$\widetilde{a}_{0l}^{(s)} = \sum_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_{j+1} (\rho_j^l - \overline{\zeta}_1^l), \quad l = 1, 2, \dots, N_s;$$
$$\widetilde{a}_{kl}^{(s)} = \sum_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_{j+1} (\rho_j^l - \overline{\zeta}_1^l)(\rho_j^k - \zeta_1^k), \quad k, l = 1, 2, \dots, N_s,$$

при $k + l \neq 2N_s$;

$$\widetilde{a}_{N_s N_s}^{(s)} = \sum_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_{j+1} |\rho_j^{N_s} - \zeta_1^{N_s}|^2 + (-1)^{s+1},$$
$$\widetilde{a}_{k(N_s+1)}^{(s)} = \sum_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_{j+1} (\rho_j^k - \zeta_1^k) \frac{\overline{\zeta}_1 - \rho_j}{\zeta_1 - \rho_j}, \quad k = 1, 2, \dots, N_s;$$
$$\widetilde{a}_{kl}^{(s)} = \overline{\widetilde{a}_{lk}^{(s)}}, \quad l, k = 0, 1, \dots, N_s + 1;$$
$$\widetilde{a}_{(N_s+1)(N_s+1)}^{(s)} = \widetilde{a}_{00}^{(s)}.$$

Заметим, что только два элемента определителя $\det \widetilde{A}^{(s)}$ зависят от w_1. Это элементы $\widetilde{a}_{0(N_s+1)}^{(s)}$ и $\widetilde{a}_{(N_s+1)0}^{(s)} = \overline{\widetilde{a}_{0(N_s+1)}^{(s)}}$. Запишем неравенство $\det \widetilde{A}^{(s)} > 0$ в виде

$$-\left| \widetilde{a}_{0(N_s+1)}^{(s)} \right|^2 \det \widetilde{A}_1^{(s)} + (-1)^{N_s+1} 2 \operatorname{Re} \left(\overline{\widetilde{a}^{(s)}}_0 \det \widetilde{A}_0^{(s)} \right) + \det \widetilde{A}_{00}^{(s)} > 0, \quad (12)$$

где

$$\widetilde{A}_1^{(s)} = (\widetilde{a}_{kl}^{(s)}) \quad (k, l = 1, 2, \dots, N_s),$$

$$\widetilde{A}_0^{(s)} = \begin{pmatrix} & 0 \\ \big(\widetilde{a}_{kl}^{(s)}\big)_{\substack{k=0,1,\dots,N_s-1\\ l=1,2,\dots,N_s}} & \widetilde{a}_{1(N_s+1)}^{(s)} \\ & \vdots \\ & \widetilde{a}_{(N_s-1)(N_s+1)}^{(s)} \\ \widetilde{a}_{N_s1}^{(s)} \cdots \widetilde{a}_{N_sN_s}^{(s)} & \widetilde{a}_{N_s(N_s+1)}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{00}^{(s)} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & \big(\widetilde{a}_{kl}^{(s)}\big)_0^{N_s} & \widetilde{a}_{1(N_s+1)}^{(s)} \\ & & \vdots \\ & & \widetilde{a}_{N_s(N_s+1)}^{(s)} \\ 0 & \widetilde{a}_{(N_s+1)1}^{(s)} \cdots \widetilde{a}_{(N_s+1)N_s}^{(s)} & \widetilde{a}_{(N_s+1)(N_s+1)}^{(s)} \end{pmatrix},$$

В силу утверждений 2 теоремы 2 и [2, с. 277–278],

$$\det \widetilde{A}_1^{(s)} = \det \big[\big(\widetilde{a}_{kl}^{(s)}\big)_{k,l=1}^{N_s}\big] > 0.$$

Используя детерминантное тождество Сильвестра (см. [2, с. 48]), получим, что соотношение (12) равносильно неравенству

$$\left|\widetilde{a}_{0(N_s+1)}^{(s)} - (-1)^{N_s+1}\frac{\det \widetilde{A}_0^{(s)}}{\det \widetilde{A}_1^{(s)}}\right|^2 < \frac{\det \widetilde{A}_3^{(s)} \det \widetilde{A}_4^{(s)}}{(\det \widetilde{A}_1^{(s)})^2}, \qquad (13)$$

где

$$\widetilde{A}_3^{(s)} = (\widetilde{a}_{kl}^{(s)})_0^{N_s}, \quad \widetilde{A}_4^{(s)} = (\widetilde{a}_{kl}^{(s)})_1^{N_s+1}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\det \widetilde{A}_3^{(s)} = \det \big[\big(a_{kl}^{(s)}\big)_0^{N_s}\big] = \det \widehat{A}_2^{(s)}.$$

Докажем теперь, что $\det \widetilde{A}_4^{(s)} = \det \widehat{A}_2^{(s)}$.

Имеем

$$\det \widetilde{A}_4^{(s)} = \det \big[\big(b_{kl}^{(s)}\big)_1^{N_s+1}\big] = \det \big[\big(\widehat{a}_{kl}^{(s)}\big)_1^{N_s+1}\big],$$

где

$$
\begin{aligned}
&b_{kl}^{(s)} = \widetilde{a}_{kl}^{(s)} - \zeta_1 \widetilde{a}_{(k-1)l}^{(s)} \quad \text{при} \quad k = N_s, N_s - 1, \ldots, 2,\\
&b_{1l}^{(s)} = \widetilde{a}_{1l}^{(s)}, \quad b_{(N_s+1)l}^{(s)} = \widetilde{a}_{(N_s+1)l}^{(s)}, \quad l = 1, 2, \ldots, N_s + 1;\\
&\widehat{a}_{kl}^{(s)} = b_{kl}^{(s)} - \overline{\zeta}_1 b_{k(l-1)}^{(s)} \quad \text{при} \quad l = N_s, N_s - 1, \ldots, 2,\\
&\widehat{a}_{k1}^{(s)} = b_{k1}^{(s)}, \quad \widehat{a}_{k(N_s+1)}^{(s)} = b_{k(N_s+1)}^{(s)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N_s + 1.
\end{aligned}
$$

Перейдем от матрицы $\big(\widehat{a}_{kl}^{(s)}\big)_{k,l=1}^{N_s+1} =$

$$
\begin{pmatrix}
\sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_j' |\rho_j - \zeta_1|^2 & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_j' |\rho_j - \zeta_1|^2 \rho_j^{l-1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_j' (\rho_j - \overline{\zeta}_1)\\
\sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_j' |\rho_j - \zeta_1|^2 \rho_j & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_j' |\rho_j - \zeta_1|^2 \rho_j^{l} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_j' (\rho_j - \overline{\zeta}_1)\rho_j\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
\sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_j' |\rho_j - \zeta_1|^2 \rho_j^{N_s-1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_j' |\rho_j - \zeta_1|^2 \rho_j^{N_s+l-2} + g_{N_s l} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_j' (\rho_j - \overline{\zeta}_1)\rho_j^{N_s-1}\\
\sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_j' (\rho_j - \zeta_1) & \cdots & \underbrace{\sum\limits_{j=1}^{n} g_j^{(s)} x_j' (\rho_j - \zeta_1)\rho_j^{l-1}}_{l=2,3,\ldots,N_s} & \cdots & \sum g_j^{(s)} x_j'
\end{pmatrix}
$$

к матрице $\big(\widetilde{\alpha}_{kl}^{(s)}\big)_{k,l=1}^{N_s+1}$ по формулам

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\alpha}_{1l}^{(s)} = \widehat{a}_{1l}^{(s)} + \widehat{a}_{(N_s+1)l}^{(s)} \overline{\zeta}_1,\\
&\widetilde{\alpha}_{2l}^{(s)} = \widehat{a}_{2l}^{(s)} + \widehat{\alpha}_{1l}^{(s)} \overline{\zeta}_1,\\
&\quad\vdots\\
&\widetilde{\alpha}_{N_s l}^{(s)} = \widehat{a}_{N_s l}^{(s)} + \widetilde{\alpha}_{(N_s-1)l}^{(s)} \overline{\zeta}_1, \quad l = 1, 2, \ldots, N_s + 1.
\end{aligned}
$$

Затем перейдем от матрицы $\big(\widetilde{\alpha}_{kl}^{(s)}\big)_{k,l=1}^{N_s+1}$ к матрице $\big(\widetilde{\beta}_{kl}^{(s)}\big)_{k,l=1}^{N_s+1}$ по формулам

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\beta}_{k1}^{(s)} = \widetilde{\alpha}_{k1}^{(s)} + \widehat{a}_{k(N_s+1)}^{(s)} \zeta_1,\\
&\widetilde{\beta}_{k2}^{(s)} = \widetilde{\alpha}_{k2}^{(s)} + \widetilde{\beta}_{k1}^{(s)} \zeta_1,\\
&\quad\vdots\\
&\widetilde{\beta}_{kN_s}^{(s)} = \widetilde{\alpha}_{kN_s}^{(s)} + \widetilde{\beta}_{k(N_s-1)}^{(s)} \zeta_1, \quad k = 1, 2, \ldots, N_s + 1.
\end{aligned}
$$

В результате получаем

$$
\det \widetilde{A}_4^{(s)} = \det\big[\big(\widetilde{\beta}_{kl}^{(s)}\big)_{k,l=1}^{N_s+1}\big] = \det \widehat{A}_2^{(s)}.
$$

Аналогичным образом докажем, что

$$\det \widetilde{A}_1^{(s)} = \det \widehat{A}_1^{(s)}, \quad \det \widetilde{A}_0^{(s)} = \det \widehat{A}_0^{(s)}.$$

Используя выражение (11) для $\widetilde{a}_{0(N_s+1)}^{(s)}$, из неравенства (13) получаем следствие 1.

Литература

1. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы* $\{f(z_1), \dots, f(z_n)\}$ *в классе типично вещественных функций. III,* Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 23–34.
2. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц,* 3-е изд., М., 1967.
3. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы* $\{f(z_1), f(z_2), f(z_3)\}$ *в классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 5–17.
4. M. S. Robertson, *On the coefficients of typically-real functions,* Bull. Amer. Math. Soc. **41**, No. 8 (1935), 565–572.
5. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях,* Мат. сб. **27(69)**, No. 2 (1950), 201–218.
6. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи,* М., 1973.
7. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы* $\{f(z_1), \dots, f(z_n)\}$ *в классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), 41–51.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 12 ноября 2007 г.