Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 349, 2007 г.

А. Л. Смирнов

ГРАДУИРОВАННЫЕ МОНАДЫ И КОЛЬЦА ПОЛИНОМОВ

Введение

Теория обобщенных колец и схем Н. Дурова [1] представляет собой основу алгебро-геометрического подхода к арифметике. Для приложений этого подхода к конкретным проблемам особенно важно понимать структуру проективных спектров градуированных обобщенных колец. Например, весьма интересными представляются простейшие пространства такого типа, а именно обобщенные проективные пространства. Эти пространства определены как проективные спектры колец обобщенных полиномов, порожденных, например, над $\mathbb{F}_1$, переменными произвольных арностей.

Теория градуированных обобщенных колец и проективных обобщенных схем построена в [1, 6.6]. При этом существование градуированных колец, заданных образующими и соотношениями, подразумевается, например, в [1, 6.6.2], но явно не проверено. Кроме того, для простейших вычислений требуется не только существование, но и явные модели свободных градуированных колец и их факторов по соотношениям. Первый раздел данной работы в основном и посвящен построению таких моделей в терминах деревьев.

Во втором разделе некоторые градуированные обобщенные кольца, и в частности $\mathbb{F}_{1^n}\langle t\rangle$, где t – свободная переменная произвольной арности, реализованы как подкольца классических колец некоммутативных полиномов. Преимущество такого описания состоит в том, что с полиномами – даже некоммутативными – работать проще, чем с деревьями.

В третьем разделе рассматриваются естественные гомоморфизмы колец обобщенных полиномов в кольца обычных коммутативных полиномов. Оказывается, такие гомоморфизмы как пра-

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 06–01–00471) и INTAS (грант 05-1000008-8118).

вило не являются вложениями. Например, естественный гомоморфизм $\mathbb{F}_{1^2}[t] \to \mathbb{Z}[A, B]$, $t \mapsto (A, B)$, где t – бинарная переменная, не является вложением, даже если наложить на t соотношение альтернативности. Это означает, что обобщенные аффинные пространства содержательнее, чем их классическая часть.

Автор благодарит Н. Дурова за возможность ознакомиться с работой [1] до ее публикации, а также за многочисленные неформальные разъяснения, комментарии и обсуждения.

1. Общие сведения

В этом разделе приведены основные определения, построены свободные монады и их факторы по соотношениям.

1.1. Определения

С категорной точки зрения кольцо – моноид в $\otimes$-категории $\mathbb{Z}\,\mathrm{Mod}$. Имитация на категорном уровне понятия Δ-градуированного кольца (Δ – коммутативный, аддитивно записываемый моноид) приводит к следующему определению Δ-градуированного моноида в моноидальной категории $\mathcal{C}$ [1, 6.6.2]: Δ-градуированный моноид Σ в $\mathcal{C}$ представляет собой набор объектов $\{\Sigma_a\}_{a\in\Delta}$ и морфизмов $\varepsilon : \mathbf{1} \to \Sigma_0$, $\mu_{a,b} : \Sigma_a \otimes \Sigma_b \to \Sigma_{a+b}$ с естественными условиями ассоциативности и нейтральности единицы (слева и справа).

Так как монада над $\mathcal{S}$ – моноид в $\mathrm{Endof}\,\mathcal{S}$, то понятие Δ-градуированной монады естественно определить как специализацию понятия Δ-градуированного моноида. Таким образом, Δ-градуированная монада Σ представляет собой набор эндофункторов $\{\Sigma_a\}_{a\in\Delta}$ и морфизмов $\varepsilon : \mathrm{Id} \to \Sigma_0$, $\mu_{a,b} : \Sigma_a \circ \Sigma_b \to \Sigma_{a+b}$ с соответствующими свойствами.

1.1.1. Действия. По умножениям $\mu_{a,b}$ строятся действия $\alpha_{a,b}$, то есть отображения

$$\Sigma_a(Y) \times \Sigma_b(X)^Y \xrightarrow{\alpha_{a,b}} \Sigma_{a+b}(X), \quad \sigma \times f \mapsto \mu_{a,b}[\Sigma_a(f)\sigma]. \qquad (1)$$

Нейтральность умножения на единицу слева влечет тривиальность действия образа ε, то есть коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} Y \times \Sigma_d(X)^Y \arrow[rr, "\varepsilon\times id"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}"'] & & \Sigma_0(Y) \times \Sigma_d(X)^Y , \arrow[dl, "\alpha_{0,d}"] \\ & \Sigma_d(X) & \end{tikzcd} \qquad (2)$$

где $\mathrm{ev}(y \times f) = f(y)$.

Нейтральность умножения на единицу справа влечет тривиальность действия на образе ε, то есть коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \Sigma_d(Y) \times X^Y \arrow[rr, "id\times\varepsilon^Y"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}"'] & & \Sigma_d(Y) \times \Sigma_0(X)^Y , \arrow[dl, "\alpha_{d,0}"] \\ & \Sigma_d(X) & \end{tikzcd} \tag{3}$$

где $\mathrm{ev}(\sigma \times f) = \Sigma_d(f)(\sigma)$.

Ассоциативность умножений влечет ассоциативность действий, то есть коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \Sigma_a(Z) \times \Sigma_b(Y)^Z \times \Sigma_c(X)^Y \arrow[r, "\mathrm{id}\times\alpha^Z_{b,c}"] \arrow[d, "(\alpha_{a,b})\times\mathrm{id}"'] & \Sigma_a(Z) \times \Sigma_{b+c}(X)^Z, \arrow[d, "a_{a,b+c}"] \\ \Sigma_{a+b}(Y) \times \Sigma_c(X)^Y \arrow[r, "\alpha_{a+b,c}"] & \Sigma_{a+b+c}(X), \end{tikzcd} \tag{4}$$

где $\alpha^Z_{b,c}(u \times v)(z) = \alpha_{b,c}(u(z) \times v)$.

По действиям $\alpha_{a,b}$ восстанавливаются умножения $\mu_{a,b}$. Действительно, $\mu_{a,b}(\sigma) = \alpha_{a,b}(\sigma \times f)$, где $Y = \Sigma X$, а $f : Y \to \Sigma X$ – тождественное отображение. Таким образом, задание действий со свойствами (2), (3), (4) представляет собой иной (несимметричный) способ задания монады.

Морфизм градуированных монад $\varphi : \Lambda \to \Sigma$ определяется как набор морфизмов $\varphi_d : \Lambda_d \to \Sigma_d$, коммутирующий со структурными морфизмами, то есть должны быть верны равенства $\varepsilon \circ \varphi_0 = \varphi_0 \circ \varepsilon$ и

$$\varphi_{a+b}\mu_{a,b} = \mu_{a,b}(\varphi_a \circ \varphi_b). \tag{5}$$

Условие (5) равносильно коммутативности диаграммы функторов

$$\begin{tikzcd} \Lambda_a(Y) \times \Lambda_b(X)^Y \arrow[r, "\alpha_{a,b}"] \arrow[d, "\varphi_a\times\varphi_b^Y"'] & \Lambda_{a+b}(X) \arrow[d, "\varphi_{a+b}"] \\ \Sigma_a(Y) \times \Sigma_b(X)^Y \arrow[r, "\alpha_{a,b}"] & \Sigma_{a+b}(X). \end{tikzcd} \tag{6}$$

Действительно, коммутативность (6) вытекает из (5) и коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_a(Y)\times\Lambda_b(X)^Y & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & \Lambda_a(\Lambda_b X)\\
{\scriptstyle \varphi_a\times\varphi_b^Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_a\Lambda_a\varphi_b}\\
\Sigma_a(Y)\times\Sigma_b(X)^Y & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & \Sigma_a(\Sigma_b X).
\end{array}$$

где $\mathrm{ev}:\sigma\times f\mapsto\Lambda_a(f)\sigma$. Коммутативность этой диаграммы – следствие того, что φ_d – морфизмы функторов. Наоборот, чтобы получить (5), достаточно применить коммутативность (6) для $Y=\Lambda_b(X)$ и $f=\mathrm{id}_Y$.

1.1.2. Градуированные модули. Пусть Σ – градуированная монада. Понятие градуированного (скажем, левого) Σ-модуля введено в [1, 6.6.2].

Для определения такого понятия рассматривается некоторая категория $\mathcal{M}$ вместе с (левым) действием на ней моноидальной категории $\mathrm{Endof}(\mathcal{S}\mathrm{ets})$, $(\Sigma,M)\mapsto\Sigma\otimes M$. Имеется, по меньшей мере, два естественных выбора $\mathcal{M}$: категория эндофункторов $\mathrm{Endof}(\mathcal{S}\mathrm{ets})$ и категория множеств $\mathcal{S}\mathrm{ets}$. В первом случае $\Sigma\otimes M=\Sigma\circ M$, а во втором $\Sigma\otimes M=\Sigma(M)$. Эти два выбора ведут соответственно к понятию большого Σ-модуля и малого Σ-модуля. Далее рассматриваются малые модули.

Таким образом, градуированный Σ-модуль M представляет собой семейство множеств $\{M_d\}$ $(d\in\Delta)$ вместе с умножениями $\mu_{a,b}:\Sigma_a(M_b)\to M_{a+b}$, удовлетворяющими естественным условиям ассоциативности и нейтральности единицы.

Например, семейство $\{M_d\}$, где $M_d=\Sigma_d(n)$, является Σ-модулем относительно структурных морфизмов Σ. Этот модуль трактуется как свободный модуль ранга n.

Градуированным (левым) идеалом в Σ называется градуированный подмодуль $\Sigma(1)$, то есть семейство множеств $I_d\subset\Sigma_d(1)$, выдерживающее умножения $\mu_{a,b}$.

1.1.3. Алгебраичность. Градуированная монада Λ называется алгебраической, если алгебраичны все эндофункторы Λ_a [1, 6.6.5]. Если Λ – алгебраическая монада и диаграмма (6) коммутативна для всех стандартных конечных множеств $X=\mathbf{m}$, $Y=\mathbf{n}$, то (6) коммутативна и для произвольных X,Y.

1.2. Свободная градуированная монада

Пусть $U = \{U_d(n)\}$ – биградуированное множество, где $n \in \mathbb{N}_0$, $d \in \Delta$, а $U_d(n)$ рассматривается как множество операций арности n и степени d. Градуированная монада, свободно порожденная U, представляет собой градуированную монаду Λ вместе с отображениями $U_d(n) \to \Lambda_d(n)$ и является начальным объектом категории градуированных монад с такими дополнительными данными. Градуированная монада, свободно порожденная U, обозначается $\mathbb{F}_\emptyset\langle U\rangle$.

Существование $\mathbb{F}_\emptyset\langle U\rangle$ требует проверки. Аналогичный вопрос для неградуированного случая рассмотрен в [1, 4.5], где свободная монада $\mathbb{F}_\emptyset\langle U\rangle$ строится как подмонада в монаде слов W_U, состоящая из "правильных" слов – термов. Ниже приведено более традиционное для структур такого рода описание с помощью деревьев [2, 4.1.11]. Некоторое отличие состоит в том, что ниже операциями маркируются ребра (а не вершины). Кроме того, имеется градуировка, которую удобно описывать с помощью градуировки вершин (особенно в случае, когда моноид Δ не обладает свойством сокращения).

1.2.1. Деревья. Деревом ниже называется конечное ориентированное локально упорядоченное дерево, ребра которого могут не иметь начала или конца.

Точнее говоря, граф T, представленный конечными множествами вершин $\mathrm{V}(T)$, ребер $\mathrm{E}(T)$ и отображениями $\mathrm{source}, \mathrm{target} : \mathrm{E}(T) \to \mathrm{V}(T) \sqcup \{\emptyset\}$, называется деревом, если T односвязен, из каждой вершины выходит единственное ребро и существует ровно одно ребро $\mathrm{out}(T)$, не имеющее конца ($\mathrm{target}(e) = \emptyset$). Арностью $\mathrm{ar}(v)$ вершины v называется число входящих в v ребер. Обозначим $\mathrm{In}(T)$ множество входящих ребер, то есть ребер e, не имеющих начала ($\mathrm{source}(e) = \emptyset$).

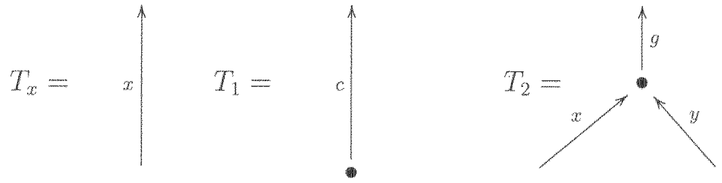
Дерево T локально упорядочено, если для каждой вершины v фиксирован полный порядок на множестве $\mathrm{In}(v) = \{e \in \mathrm{E}(G) | \mathrm{target}(e) = v\}$ ребер, входящих в v.

На множестве ребер локально упорядоченного дерева имеется канонический (глобальный) порядок. Этот порядок определен тем, что всякое ребро, исходящее из вершины, больше всякого ребра, входящего в эту вершину, и $e_1 \le e_2$, если для каждой вершины $v \in \mathrm{V}(T)$ выполнено следующее свойство: завершающее ребро пути к v, стартующего с e_1 (если такой есть), не превосходит завершающего ребра пути к v, стартующего с e_2 (если такой есть). Далее считается, что каждое дерево снабжено каноническим глобальным порядком.

1.2.2. Маркированные деревья. Пусть $U = \{U(n)\}_{n\geq 0}$ – градуированное множество, $\|U\| = \coprod U(n)$ и $\mathrm{ar} : \|U\| \to \mathbb{N}_0$ – функция, принимающая значение n на компоненте $U(n)$. Дерево T называется (U, X)-маркированным (или (U, X)-деревом), где X – множество, если задано отображение $\sigma : \mathrm{E}(T) \to \|U\| \sqcup X$ такое, что

1. $\sigma(e) \in X$ тогда и только тогда, когда $e \in \mathrm{In}(T)$;
2. $\mathrm{ar}(\sigma e) = \mathrm{ar}(\mathrm{source}\, e)$ для всякого ребра $e \notin \mathrm{In}(T)$.

Примеры таких деревьев, где $g \in U(2)$, $c \in U(0)$, $x, y \in X$, изображены на картинке



, (7)

причем локальный порядок представлен расположением на плоскости (больше то ребро, которое левее).

Пусть $\mathrm{Trees}^U(X)$ – множество классов изоморфизма непустых (U, X)-деревьев.

1.2.3. Монада Trees^U. Рассмотрим соответствие $X \mapsto \mathrm{Trees}^U(X)$ как эндофунктор категории множеств. Для превращения этого эндофунктора в монаду введем морфизмы $\varepsilon : \mathrm{Id} \to \mathrm{Trees}^U$ и $\mu : \mathrm{Trees}^U \circ \mathrm{Trees}^U \to \mathrm{Trees}^U$.

Морфизм $\varepsilon : X \to \mathrm{Trees}^U(X)$ сопоставляет элементу $x \in X$ дерево T_x из (7). Это дерево не имеет вершин и состоит из одного ребра, маркированного x.

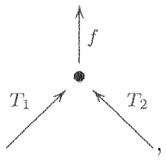
Морфизм $\mu : \mathrm{Trees}^U(\mathrm{Trees}^U(X)) \to \mathrm{Trees}^U(X)$ наращивает $(U, \mathrm{Trees}^U(X))$-маркированное дерево T, заменяя каждое входящее ребро $e \in \mathrm{In}(T)$ на дерево σe, приписанное e маркировкой σ. Иначе говоря,

$$\mathrm{V}(\mu T) = \mathrm{V}(T) \sqcup \coprod_{e\in \mathrm{In}(T)} \mathrm{V}(\sigma e), \quad \mathrm{E}(\mu T) = \mathrm{E}(T) - \mathrm{In}(T) \sqcup \coprod_{e\in \mathrm{In}(T)} \mathrm{E}(\sigma e),$$

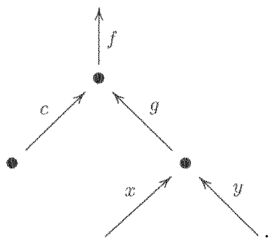
где функция $\mathrm{source}_{\mu T}$ наследуется из функций source_T и $\mathrm{source}_{\sigma e}$, а функция $\mathrm{target}_{\mu T}$ наследуется из функций деревьев target_T и

$\mathrm{target}_{\sigma e}$, за исключением ребер вида $\mathrm{out}(\sigma e)$. В этом случае $\mathrm{target}_{\mu T}(\mathrm{out}(\sigma e)) = \mathrm{target}_T(e)$. Кроме того, маркировка $\sigma_{\mu T}$ наследуется из маркировок σ_T и $\sigma_{\sigma e}$. Наконец, локальный порядок на μT индуцирован локальными порядками на деревьях T и $\sigma(e)$.

Например, для $(U, \mathrm{Trees}^U(X))$-маркированного дерева T



где $f \in U(2)$, T_1 и T_2 – деревья из (7), дерево μT имеет вид



(8)

Введенные морфизмы ε и μ превращают Trees^U в монаду на категории множеств. Более того, Trees^U изоморфна свободной монаде $\mathbb{F}_\emptyset\langle U\rangle$. Чтобы увидеть это, установим изоморфизм Trees^U с моделью свободной монады $W_{U,r}$ из [1, 4.5.2]. Рассмотрим отображение $w : \mathrm{Trees}^U(X) \to W_U(X)$, $T \mapsto \sigma(e_n)\ldots\sigma(e_1)$, где $e_n > \cdots > e_1$ – все ребра T, расположенные в соответствии с глобальным порядком (см. 1.2.1). Например, на дереве из (8) отображение w принимает значение $fcgxy$, которое может трактоваться как операция $f(c, g(x, y))$. Можно проверить, что w – гомоморфизм монад и биекция на множество термов.

1.2.4. Градуированная монада деревьев $\mathrm{GrTrees}^U$**.** Пусть $U = \{U_d(n)\}$ – биградуированное множество ($d \in \Delta$, $n \geq 0$), $\|U\| = \coprod U_d(n)$, $\mathrm{ar} : \|U\| \to \mathbb{N}_0$ и $\deg_U : \|U\| \to \Delta$ – функции, принимающие значения n и d, соответственно, на компоненте $U_d(n)$.

Дерево T называется (U, X)-маркированным, где X – множество, если заданы отображения $\sigma : \mathrm{E}(T) \to \|U\| \sqcup X$ и $\deg_T : \mathrm{V}(T) \to \Delta$, такие что

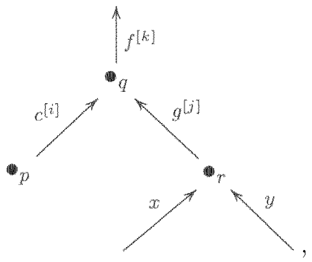
1. $\sigma(e) \in X$ тогда и только тогда, когда $e \in \mathrm{In}(T)$;
2. $\mathrm{ar}(\sigma e) = \mathrm{ar}(\mathrm{source}\, e)$ для всякого ребра $e \notin \mathrm{In}(T)$;
3. $\deg_T(s) + \deg_U(\sigma e) = \deg_T(t)$ для всякого ребра e с началом s и концом t;
4. $\deg_T(v) = 0$ для всякой вершины, хотя бы одно из входящих ребер которой не имеет начала.

Распространим функцию $\deg_U$ на $\|U\| \sqcup X$, полагая $\deg x = 0$ для $x \in X$. Распространим также функцию $\deg_T$ с $\mathrm{V}(T)$ на $\mathrm{V}(T) \sqcup \{\emptyset\}$, полагая $\deg_T(\emptyset) = 0$. Далее как вместо $\deg_U$, так и вместо $\deg_T$ может быть использовано обозначение $\deg$.

Для (U, X)-маркированного дерева T положим

$$\deg T = \deg(\sigma(\mathrm{out}\, T)) + \deg(\mathrm{source}(\mathrm{out}\, T)).$$

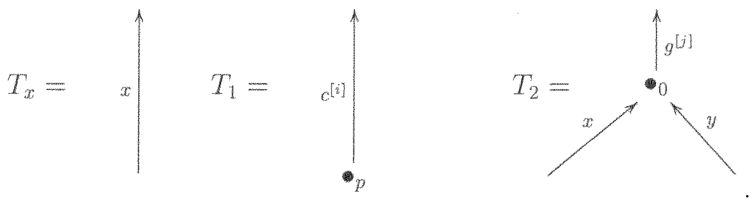
Например, рассмотрим дерево T



, (9)

где $\Delta = \mathbb{Z}$, надписи вида $[i]$ обозначают степень операции, а надписи $\bullet_p$ – степень вершин. Таким образом, $c \in U_i(0)$, $g \in U_j(2)$, $f \in U_k(2)$, $x, y \in X$. Это дерево считается маркированным, если $r = 0$, $q = p + i$ и $q = r + j$. В таком случае $\deg T = q + k$.

Вот еще несколько примеров:



. (10)

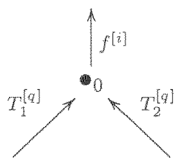
Здесь $\deg T_x = 0$ (по соглашению о распространении функции $\deg_U$ на X), $\deg T_1 = p + i$, $\deg T_2 = j$.

Пусть $\mathrm{GrTrees}_d^U(X)$ – множество классов изоморфизма непустых (U, X)-деревьев степени d. Рассмотрим соответствие $X \mapsto$

$\mathrm{GrTrees}^U_d(X)$ как эндофунктор категории множеств. Для превращения набора $\{\mathrm{GrTrees}^U_d\}$ в градуированную монаду введем морфизмы $\varepsilon : \mathrm{Id} \to \mathrm{GrTrees}^U_0$ и $\mu : \mathrm{GrTrees}^U_a \circ \mathrm{GrTrees}^U_b \to \mathrm{GrTrees}^U_{a+b}$.

Морфизм $\varepsilon : X \to \mathrm{GrTrees}^U_0(X)$ сопоставляет элементу $x \in X$ дерево T_x из (10). Морфизм $\mu : \mathrm{GrTrees}^U_a(\mathrm{GrTrees}^U_b(X)) \to \mathrm{GrTrees}^U_{a+b}(X)$, во-первых, наращивает $(U, \mathrm{GrTrees}^U(X))$-маркированное дерево T, заменяя каждое входящее ребро $e \in \mathrm{In}(T)$ на дерево σe, приписанное e маркировкой σ, а во-вторых, сдвигает подходящим образом степени вершин T. Первая процедура описана в 1.2.3. Процедура сдвига, то есть введения функции $\deg_{\mu T}$, такова: $\deg_{\mu T}$ совпадает с функцией $\deg_{\sigma e}$ на деревьях вида σe, входящих в μT (то есть для $e \in \mathrm{In}(T)$). Для $v \in T$ полагаем $\deg_{\mu T}(v) = \deg_T(v) + b$.

Например, для $(U, \mathrm{GrTrees}^U_b(X))$-маркированного дерева T



,

где T_1, T_2 – деревья из (10) и $q = p + i = j$, дерево μT указано в (9), причем $r = 0$.

Введенные морфизмы ε и μ превращают $\mathrm{GrTrees}^U$ в градуированную монаду на категории множеств. Монада $\mathrm{GrTrees}^U$, очевидно, алгебраична.

1.2.5. Сдвиг констант по степени. Во избежание путаницы отметим одну тонкость, отсутствующую в неградуированном случае. А именно, если забыть про градуировку, то операцию, соответствующую дереву (9), можно записать в виде $f(c, g(x, y))$. В градуированном случае такая запись может привести к путанице, поскольку вместо x и y на вход операции могут быть поданы аргументы степени d из градуированного модуля $\{M_d\}$. В этом случае $\deg(g(x, y)) = d + \deg g$, что противоречит фиксированности степени c как аргумента f. Поэтому более корректно обозначить указанную операцию как $f(c[p], g(x, y))$ или даже $f(c[p](*^{[?]}), g(x, y))$, где $[p] : M^0_d \to M^0_{d+p}$ – операция, переводящая $*^{[d]}$ (единственный 0-арный аргумент степени d) в $*^{[d+p]}$.

Это обозначение согласовано с тем, что для всякой градуированной монады Σ действие $\Sigma_a(0) \times \Sigma_p(m)^0 \to \Sigma_{a+p}(m)$ индуцирует отображение $\Sigma_a(0) \to \Sigma_{a+p}(m)$, которое можно обозначить $c \mapsto c[p]$. А именно, имеется ассоциативность $c([p]*^{[d]}) = (c[p])*^{[d]}$. При вычислении действия f на наборе аргументов из M_d вместо $*^{[?]}$ следует подставить $*^{[d]} \in M_d^0$. Тогда $c[p](*^{[d]}) \in M_{d+p+\deg c}$ имеет ту же степень, что и $g(x, y)$.

1.2.6. Свободность $\mathrm{GrTrees}^U$. Ниже доказывается теорема 1.2.7, утверждающая, что $\mathrm{GrTrees}^U$ изоморфна свободной градуированной монаде $\mathbb{F}_\emptyset\langle U\rangle$. Чтобы аккуратно сформулировать и доказать эту теорему, временно положим $\mathrm{GrTrees}^U = \Lambda$ и рассмотрим отображение $U_d(n) \to \Lambda_d(\mathbf{n})$, $u \mapsto T_u$, где

$$T_u = \begin{tikzcd} & {} & \\ & \bullet_0 \arrow[u, "u"'] & \\ {} \arrow[ur, "1"] & \cdots & {} \arrow[ul, "n"'] \end{tikzcd}$$

при $n > 0$ и $T_u = (\bullet_0 \xrightarrow{u})$ при $n = 0$.

1.2.7. Теорема. *Утверждается, что* $\mathrm{GrTrees}^U$ *изоморфна свободной градуированной монаде* $\mathbb{F}_\emptyset\langle U\rangle$*. Точнее говоря, утверждается, что пара* $(\Lambda, u \mapsto T_u)$ *свободна, то есть для всякой градуированной монады* $\Sigma = \{\Sigma_d\}$ *и всякого отображения* $\phi_{d,n} : U_d(n) \to \Sigma_d(\mathbf{n})$ *существует единственный гомоморфизм монад* $\varphi : \Lambda \to \Sigma$*, согласованный с* ϕ*, то есть такой, что* $\varphi_d(T_u) = \phi_{d,n}(u)$ *для всех* $u \in U_d(n)$.

Доказательство. Сначала проверим единственность. Пусть φ и ψ – два таких гомоморфизма. Покажем, что $\varphi(T) = \psi(T)$ для всякого дерева $T \in \Lambda(X)$, индукцией по числу вершин $\operatorname{card} \mathrm{V}(T)$. При $\operatorname{card} \mathrm{V}(T) = 0$ (база индукции) $T = (\xrightarrow{x}) = \varepsilon_\Lambda(x)$, где $x \in X$ (см. 1.2.4). Из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varepsilon_\Lambda"'] \arrow[dr, "\varepsilon_\Sigma"] & \\ \Lambda_0(X) \arrow[rr, "\varphi"] & & \Sigma_0(X) \end{tikzcd} \tag{11}$$

получаем

$$\varphi(T) = \varepsilon_\Sigma(x) \tag{12}$$

и аналогично для ψ. Таким образом, $\varphi(T) = \varepsilon_\Sigma(x) = \psi(T)$.

Предположим, что $\operatorname{card} \mathrm{V}(T) > 0$. В этом случае единственное исходящее ребро T имеет начало – обозначим его v.

Если вершина v не имеет входящих ребер, то $T = (\bullet_b \xrightarrow{u})$, где $u \in U_a(0)$. Для вычисления $\varphi(T)$ заметим, что $T = \alpha_\Lambda(T_u \times *_\Lambda^{[b]})$, где $T_u = (\bullet_0 \xrightarrow{u}) \in U_a(0)$ ($*_M^{[d]}$ – единственный элемент M_d^0 для градуированного множества M). Из коммутативности (см. 1.1) диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_a(n) \times \Lambda_b(X)^n & \xrightarrow{\alpha_\Lambda} & \Lambda_{a+b}(X) \\ {\scriptstyle \varphi_a \times \varphi_b^n}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_{a+b}} \\ \Sigma_a(n) \times \Sigma_b(X)^n & \xrightarrow{\alpha_\Sigma} & \Sigma_{a+b}(X) \end{array} \tag{13}$$

при $n = 0$ получаем

$$\varphi_{a+b}(T) = \alpha_\Sigma(\phi_{a,0}(u) \times *_\Sigma^{[b]}). \tag{14}$$

Так как аналогичная формула верна и для $\psi(T)$, то $\varphi(T) = \psi(T)$.

Осталось рассмотреть случай, когда вершина v имеет входящие ребра $e_1 < \cdots < e_n$, занумерованные в соответствии с порядком на $\mathrm{E}(T)$ (см. 1.2.1). В этом случае $T = \alpha_\Lambda(u \times T_1 \times \cdots \times T_n)$, где $u \in U_a(n)$ – значение маркировки на исходящем ребре дерева T, а T_i – максимальное поддерево T с исходящим ребром e_i. Из коммутативности диаграммы (13) при $b = \deg T_1 = \cdots = \deg T_n$ получаем

$$\varphi_{a+b}(T) = \alpha_\Sigma(\phi_{a,n}(u) \times \varphi_b(T_1) \times \cdots \times \varphi_b(T_n)). \tag{15}$$

Так как аналогичная формула верна и для ψ, а по индукционному предположению $\varphi(T_i) = \psi(T_i)$, то $\varphi(T) = \psi(T)$. Таким образом, единственность φ проверена.

Покажем существование φ, определив $\varphi(T)$ рекурсивно: если $\operatorname{card} V(T) = 0$, то применяется (12); если $\operatorname{card} V(T) > 0$ и начало исходящего ребра $\operatorname{out} T$ не имеет входящих ребер, то применяется (14). В остальных случаях применяется (15).

Проверим условие согласованности φ и ϕ, то есть что при $u \in U_d(n)$

$$\varphi_d(T_u) = \phi_{d,n}(u). \tag{16}$$

Если $n = 0$, то $T_u = (\bullet_0 \xrightarrow{u})$. Равенство (14), использованное в этом случае для определения φ, влечет равенство $\varphi_{d,0}(T_u) =$

$\alpha_\Sigma(g \times *_\Sigma^{[0]})$, где $g = \phi_{d,0}(u)$. Таким образом, (16) сводится к равенству $\alpha_\Sigma(g \times *_\Sigma^{[0]}) = g$. Это равенство верно для всякой монады Σ и всякого $g \in \Sigma_d(0)$ ввиду тривиальности действия образа ε (см.(2)).

Если $n > 1$, то равенство (15), использованное в этом случае для определения φ, влечет равенство $\varphi_d(T_u) = \alpha_\Sigma(g \times \varphi_0(T_1) \times \cdots \times \varphi_0(T_n))$, где $g = \phi_{d,n}(u)$, а $T_i = (\xrightarrow{i})$. Кроме того, $\varphi_0(T_i) = \varepsilon_\Sigma(i)$ ввиду (12), использованного в этом случае для определения φ. Поэтому (16) сводится к равенству $\alpha_\Sigma(g \times \varepsilon_\Sigma(1) \times \cdots \times \varepsilon_\Sigma(n)) = g$. Это равенство верно для всякой монады Σ и всякого $g \in \Sigma_d(n)$ ввиду тривиальности действия на образе ε (см. (3)).

Проверим, что ϕ – гомоморфизм, что ввиду алгебраичности Λ сводится (см. 1.1) к коммутативности диаграмм (11) и (13). Коммутативность (11) прямо следует из равенства (12), использованного для рекурсивного определения φ.

Проверим коммутативность (13) для $A \in \Lambda_a(n)$ и $f : \mathbf{n} \to \Lambda_b(X)$, используя индукцию по $\operatorname{card} \mathrm{V}(A)$. База индукции – случаи $\operatorname{card} \mathrm{V}(A) = 0$ и $\operatorname{card} \mathrm{V}(A) = 1$. В случае $\operatorname{card} \mathrm{V}(A) > 0$ пусть v – начало единственного исходящего ребра дерева A.

Если $\operatorname{card} \mathrm{V}(A) = 0$, то $n > 0$ (так как деревьев без вершин в $\Lambda_a(\emptyset)$ нет), $A = (\xrightarrow{i})$, где $i \in \mathbf{n}$ и $a = \deg S = 0$. Следовательно, $\alpha_\Lambda(A \times f) = \mu_{a,b}(\Lambda_a(f)(A)) = T_i$, где $T_i = f(i)$. Кроме того, $S = \varepsilon_\Lambda(i)$, $\varphi_a(S) = \varepsilon_\Sigma(i)$ (по уже установленному взаимодействию φ и ε) и коммутативность (13) – следствие равенства $\mu : \varepsilon_\Sigma(i) \times g_1 \times \cdots \times g_n \mapsto g_i$ верного для любой монады и примененного к $g_j = \varphi_b(T_j)$.

Если $\operatorname{card} \mathrm{V}(A) = 1$ и A не имеет входящих ребер, то

$$A = (\bullet_p \xrightarrow{u}),$$

где $u \in U_q(0)$ и $p + q = a$. В этом случае $\varphi_a(A) = \alpha_\Sigma(\phi_{q,0}(u) \times *_\Sigma^{[p]})$ по равенству (14), использованному для определения $\varphi_{q+p}(A)$. Таким образом, $(\varphi_a \times \varphi_b^n)(A \times f) = \alpha_\Sigma(\phi_{q,0}(u) \times *_\Sigma^{[p]}) \times (\varphi_b \circ f)$ и

$$\alpha_\Sigma(\varphi_a \times \varphi_b^n)(A \times f) = \alpha_\Sigma[\alpha_\Sigma(\phi_{q,0}(u) \times *_\Sigma^{[p]}) \times (\varphi_b \circ f)]. \qquad (17)$$

С другой стороны, используя определение α (см. (1)), получаем $\alpha_\Lambda(A \times f) = \mu_{a,b}(\Lambda_a(f)(A)) = \mu_{a,b}(A')$, где A' – то же самое дерево A, но рассмотренное как элемент $\Lambda_a(\Lambda_b(X))$ (а не $\Lambda_a(n)$). Используя определение μ (см. 1.2.4), получаем, что $\alpha_\Lambda(A \times f) = T$, где $T = (\bullet_{p+b} \xrightarrow{u}) \in \Lambda_{a+b}(X)$. Следовательно,

$$\varphi_{a+b}[\alpha_\Lambda(A \times f)] = \varphi_{a+b}(T) = \alpha_\Sigma(\phi_{q,0}(u) \times *_\Sigma^{[p+b]}) \tag{18}$$

по равенству (14), использованному для определения $\varphi_{q+(p+b)}(T)$.

Таким образом, коммутативность диаграммы (13) для $A \times f$ свелась к равенству

$$\alpha_{a,b}[\alpha_{q,p}(g \times *_\Sigma^{[p]}) \times h] = \alpha_{q,p+b}(g \times *_\Sigma^{[p+b]}),$$

где $\alpha = \alpha_\Sigma$, $g = \phi_{q,0}(u) \in \Sigma_q(0)$, $h = \varphi_b \circ f \in [\Sigma_b(X)]^n$. Это равенство верно для любой монады Σ и любых $g \in \Sigma_q(0)$, $h \in \Sigma_b(X)^n$ ввиду ассоциативности действий α (см. 1.1), то есть коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma_q(0) \times \Sigma_p(n)^0 \times \Sigma_b(X)n & \xrightarrow{\mathrm{id} \times \alpha^0} & \Sigma_q(0) \times \Sigma_{p+b}(X)^0 \\
{\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\
\Sigma_{q+p}(n) \times \Sigma_b(X)^n & \xrightarrow{\alpha} & \Sigma_{q+p+b}(X).
\end{array}$$

Если $\operatorname{card} \mathrm{V}(A) = 1$ и A имеет входящие ребра, то $A = T_u$, где $u \in U_a(n)$. В этом случае $\varphi_a(A) = \phi_{a,n}(u)$ по (16), $(\varphi_a \times \varphi_b^n)(A \times f) = \phi_{a,n}(u) \times (\varphi_b \circ f)$ и $\alpha_\Sigma(\varphi_a \times \varphi_b^n)(A \times f) = \alpha_\Sigma(\phi_{a,n}(u) \times \varphi_b(T_1) \times \cdots \times \varphi_b(T_n))$, где $T_i = f(i) \in \Lambda_b(X)$. Эта жа формула верна и для $\varphi_{a+b}\alpha_\Lambda(A \times f)$ ввиду равенства (15), использованного в этом случае для определения φ. Таким образом, коммутативность (13) в этом случае проверена.

Проведем индукционный переход при $\operatorname{card} V(A) > 1$. В этом случае вершина v имеет входящие ребра – занумеруем их $e_1 < \cdots < e_m$ в соответствии с порядком на $\mathrm{E}(A)$ (см. 1.2.1). В этом случае $A = \alpha_\Lambda(u \times A_1 \times \cdots \times A_m)$, где $u \in U_q(m)$ – значение маркировки на исходящем ребре дерева A, а A_i – максимальное поддерево A с исходящим ребром e_i. Тогда $a = q + p$ для $p = \deg v$, и по равенству (15), использованному для определения $\varphi_{q+p}(A)$, получаем $\varphi_a(A) = \alpha_\Sigma(\phi_{q,m}(u) \times \varphi_p(A_1) \times \cdots \times \varphi_p(A_m))$. Таким образом, $(\varphi_a \times \varphi_b^n)(A \times f) = \alpha_\Sigma(\phi_{q,m}(u) \times \varphi_p(A_1) \times \cdots \times \varphi_p(A_m)) \times (\varphi_b \circ f)$ и

$$\alpha_\Sigma(\varphi_a \times \varphi_b^n)(A \times f) = \alpha_\Sigma[\alpha_\Sigma(\phi_{q,n}(u) \times \varphi_p(A_1) \times \cdots \times \varphi_p(A_m)) \times (\varphi_b \circ f)].$$

С другой стороны, $\alpha_\Lambda(A \times f) = \alpha_\Lambda(\alpha_\Lambda(u \times A_1 \times \dots \times A_m) \times f) = \alpha_\Lambda(u \times \alpha_\Lambda(A_1 \times f) \times \dots \times \alpha_\Lambda(A_m \times f))$ ввиду ассоциативности действий α (см. 1.1). Поэтому

$$\varphi_{a+b}\alpha_\Lambda(A \times f) = \varphi_{q+p+b}\alpha_\Lambda(u \times \alpha_\Lambda(A_1 \times f) \times \dots \times \alpha_\Lambda(A_m \times f)) =$$
$$= \alpha_\Sigma(\varphi_q(u) \times \varphi_{p+b}(A_1 \times f) \times \dots \times \varphi_{p+b}(A_m \times f))$$

по индукционному предположению, примененному к паре $T_u \times s$, где $s \in \Lambda_p(n)^m$ таково, что $s(i) = A_i$ (это возможно, так как $\operatorname{card} \mathrm{V}(T_u) = 1$).

Таким образом, коммутативность диаграммы (13) для $A \times f$ свелась к равенству

$$\alpha_\Sigma[\alpha_\Sigma(g \times \varphi_p(A_1) \times \dots \times \varphi_p(A_m)) \times (\varphi_b \circ f)]$$
$$= \alpha_\Sigma(g \times \varphi_{p+b}(A_1 \times f) \times \dots \times \varphi_{p+b}(A_m \times f)),$$

где $g = \phi_{q,n}(u)$. С учетом того, что $\varphi_{p+b}(A_i \times f) = \alpha_\Sigma[\varphi_p(A_i) \times (\varphi_b \circ f)]$ по индукционному предположению, примененному к парам $A_i \times f$ (это возможно, поскольку $\operatorname{card} \mathrm{V}(A_i) < \operatorname{card} \mathrm{V}(A)$), это равенство равносильно равенству

$$\alpha_\Sigma[\alpha_\Sigma(g \times h_1 \times \dots \times h_m) \times f_\Sigma] = \alpha_\Sigma(g \times \alpha_\Sigma[h_1 \times f_\Sigma] \times \dots \times \alpha_\Sigma[h_m \times f_\Sigma]),$$

где $h_i = \varphi_p(A_i)$, а $f_\Sigma = \varphi_b \circ f \in \Sigma_b(X)^n$. Это равенство вытекает из ассоциативности действий α (см. 1.1).

Таким образом, свободность $\Lambda = \mathrm{GrTrees}^U$ проверена. $\square$

1.3. Представление образующими и соотношениями

Цель этого раздела – описать градуированную монаду $\Sigma\langle U|E\rangle$, порожденную над Σ образующими U и уравнениями E. Для этого потребуется несколько шагов.

1.3.1. Градуированная монада Σ/R. Существуют произвольные пределы и копределы градуированных эндофункторов категории множеств – их можно вычислить покомпонентно в каждой степени. В частности, для морфизма градуированных эндофункторов $i : R \to \Sigma \times \Sigma$ существует коуравнитель $\varphi : \Sigma \to \Lambda$ и его ядерная пара $\mathrm{EqRel}(R) \subset \Sigma \times \Sigma$, причем $i(R) \subset \mathrm{EqRel}(R)$. Иначе говоря, $\mathrm{EqRel}(R)$ – минимальное отношение эквивалентности, порожденное $i(R)$ (отношение эквивалентности R может быть описано как набор отношений эквивалентности $R_d(X) \subset \Sigma_d(X) \times \Sigma_d(X)$ –

функториальный по X). Для отношения эквивалентности R пусть Σ/R – коуравнитель вложения $R \subset \Sigma \times \Sigma$.

Пусть Σ – градуированная монада, R – отношение эквивалентности на Σ, $p : \Sigma \to \Sigma/R$ – проекция. Стрелка $p \circ p$ – эпиморфизм градуированных функторов и для каждой пары $a, b \in \Delta$ существует не более одной пунктированной стрелки, для которой коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_a \circ \Sigma_b & \xrightarrow{\mu_{a,b}} & \Sigma_{a+b} \\ {\scriptstyle p\circ p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ (\Sigma/R)_a \circ (\Sigma/R)_b & - - - > & (\Sigma/R)_{a+b}. \end{array}$$

Если такая стрелка существует для всех a, b, то говорим, что R согласовано с умножением μ. В этом случае Σ/R – монада, а p – гомоморфизм монад.

Как и в неградуированном случае [1, 4.4.8], для проверки того, что некоторое отношение эквивалентности R совместимо с умножением, полезно сформулировать критерий на языке действий: R совместимо с умножениями тогда и только тогда, когда

$$\sigma \underset{R_a}{\sim} \sigma', f \underset{R_b}{\sim} f' \Rightarrow \alpha_{a,b}(\sigma, f) \underset{R_{a+b}}{\sim} \alpha_{a,b}(\sigma', f') \tag{19}$$

всякий раз, когда $\sigma, \sigma' \in \Sigma_a(Y)$, $f, f' \in \Sigma_b(X)^Y$. При этом сравнимость f и f' означает сравнимость $f(y)$ и $f'(y)$ для всех $y \in Y$.

Действительно, в этом случае имеется фактор-действие и, следовательно (см. 1.1), фактор-умножение.

Отметим, что если R алгебраично (является градуированным алгебраическим функтором), то (19) достаточно проверять только для конечных Y. Действительно, в этом случае для произвольного Y существует конечное множество Z, отображение $i : Z \to Y$ и $\tau, \tau' \in \Sigma_a(Z)$, такие, что σ и σ' индуцированы τ и τ' с помощью отображения $\Sigma_a(i)$, причем $\tau \sim \tau' \mod R_a$. Тогда соотношение (19) для σ, σ', f, f' вытекает из такого же соотношения для $\tau, \tau', f \circ i, f' \circ i$.

1.3.2. Конструкция совместимого отношения эквивалентности. Для отношения эквивалентности $R \subset \Sigma \times \Sigma$ на градуированной монаде пусть (R) – пересечение всех отношений эквивалентности, содержащих R и совместимых с умножением.

Для конструктивного описания (R) определим $CR \subset \Sigma \times \Sigma$, полагая

$$CR_d(X) = \bigcup_{Y,\, a+b=d} \gamma^l_{a,b}(\Sigma_a(Y) \times R_b(X)^Y) \cup \bigcup_{Y,\, a+b=d} \gamma^r_{a,b}(R_a(Y) \times \Sigma_b(X)^Y),$$

где $\gamma^l_{a,b} : \Sigma_a(Y) \times \Sigma_b(X)^Y \times \Sigma_b(X)^Y \to \Sigma_{a+b}(X)$ переводит (f, u, v) в $\mu_{a,b}(f, u) \times \mu_{a,b}(f, v)$, а $\gamma^r_{a,b} : \Sigma_a(Y) \times \Sigma_a(Y) \times \Sigma_b(X)^Y \to \Sigma_{a+b}(X)$ переводит (f, g, u) в $\mu_{a,b}(f, u) \times \mu_{a,b}(g, u)$.

Отметим, что $R \subset CR$. Действительно, если $(x, y) \in R_d(X)$, то $(x, y) = \gamma^l_{0,d}(f, u, v) \in CR_d(X)$, где $Y = \{1\}$, f – тождественная операция (индуцирована единственным элементом Y при отображении $\varepsilon : \mathrm{Id}(Y) \to \Sigma_0(Y))$, $u, v : Y \to \Sigma_d(X)$ переводят 1 в (x, y).

Рассмотрим цепочку градуированных подфункторов $\Sigma \times \Sigma$

$$R \subset SR \subset S^2 R \subset \ldots,$$

где $SR = \mathrm{EqRel}(CR)$, и положим $S^\infty R = \cup S^i R$.

1.3.3. Предложение. *Утверждается, что в случае алгебраичности монады Σ и отношения R*

$$(R) = S^\infty R.$$

Доказательство. Для проверки включения $S^\infty R \subset (R)$ достаточно проверить, что включение градуированных функторов $T \subset (R)$ влечет включение $CT \subset (R)$. Это верно, так как $C(R) = (R)$ ввиду (19) и совместимости (R) с умножением.

Для проверки включения $(R) \subset S^\infty R$ достаточно проверить, что $S^\infty R$ – отношение эквивалентности, совместимое с умножением, то есть проверить соотношение (19) для $S^\infty R$. Соотношения $\sigma \sim \sigma' \mod [S^\infty R]_b$ и $f(y) \sim f'(y) \mod [S^\infty R]_b$ выполнены на некотором конечном уровне. В силу алгебраичности Σ и R градуированный функтор $S^\infty R$ также алгебраичен. В силу этого можно считать, что Y – конечно (см. 1.3.1), и поэтому соотношение $f \sim f' \mod [S^\infty R]_b$ выполнено уже на некотором конечном уровне. То есть можно считать, что $\sigma \sim \sigma' \mod [S^l R]_a$ и $f \sim f' \mod [S^l R]_b$. Но тогда $\alpha_{a,b}(\sigma, f) \sim \alpha_{a,b}(\sigma, f') \mod [S^{l+1} R]_{a+b}$, поскольку в определение C включены образы при $\gamma^l_{a,b}$, и $\alpha_{a,b}(\sigma, f') \sim \alpha_{a,b}(\sigma', f') \mod [S^{l+1} R]_{a+b}$, поскольку в определение C включены образы при $\gamma^r_{a,b}$. Следовательно, $\alpha_{a,b}(\sigma, f) \sim \alpha_{a,b}(\sigma', f') \mod [S^{l+1} R]_{a+b}$, поскольку $S^{l+1} R$ – отношение эквивалентности.

1.3.4. Градуированная монада Σ^{alg}. Пусть Σ – градуированная монада и S – биградуированное множество, для которого $S_d(n) = \Sigma_d(n)$. Тавтологическим морфизмом $S_d(n) \to \Sigma_d(n)$ индуцируется гомоморфизм монад $\tilde{\rho} : \mathbb{F}_\emptyset\langle S\rangle \to \Sigma$ и, следовательно, гомоморфизм $\rho : \mathbb{F}_\emptyset\langle S\rangle/R \to \Sigma$, где R – ядерная пара $\tilde{\rho}$. Таким образом, ρ индуцирует изоморфизм $\mathbb{F}_\emptyset\langle S\rangle/R \to \Sigma^{alg}$, где $\Sigma^{alg} \subset \Sigma$ – образ ρ.

Утверждается, что для всякого гомоморфизма $\varphi : \Lambda \to \Sigma$, где Λ – алгебраическая монада, $\varphi(\Lambda) \subset \Sigma^{alg}$. В частности, если Σ алгебраична, то $\Sigma^{alg} = \Sigma$ и ρ – изоморфизм.

Действительно, $\Lambda_d(X) = \varinjlim \Lambda_d(\mathbf{n})$, где индуктивный предел берется по категории стрелок $f : \mathbf{n} \to X$. Таким образом, достаточно проверить, что образ отображения $\varphi_d\Lambda_d(f) : \Lambda_d(n) \to \Sigma_d(X)$ содержится в $\Sigma_d^{alg}(X)$. Это так, потому что этот образ накрывается отображением $\Sigma_d(f)\tilde{\rho}_d\phi_{d,n} : S_d(n) \to \Sigma_d(X)$, где $\phi_{d,n} : S_d(n) \to \mathbb{F}_\emptyset\langle S\rangle_d(n)$ – структурные отображения свободной монады.

1.3.5. Градуированная монада $\Sigma\langle\emptyset|R\rangle$. Пусть Σ – градуированная монада, а $R = \{R_d\}$ – градуированный эндофунктор категории множеств, заданный вместе с морфизмом $i : R \to \Sigma \times \Sigma$.

Градуированная монада, свободно порожденная над Σ соотношениями R, представляет собой градуированную монаду Λ вместе с гомоморфизмом $\varphi : \Sigma \to \Lambda$, таким, что φ совместимо с R (то есть $\varphi_d(pr_1 ir) = \varphi_d(pr_2 ir)$ для всякого $r \in R_d(X)$), и является начальным объектом категории градуированных монад с такими дополнительными данными. Градуированная монада, свободно порожденная над Σ соотношениями R, обозначается $\Sigma\langle\emptyset|R\rangle$ или $\Sigma\langle\emptyset|R\rangle_\bullet$.

Существование $\Sigma\langle\emptyset|R\rangle$ вытекает из явной формулы $\Sigma\langle\emptyset|R\rangle = \Sigma/(\mathrm{EqRel}\, R)$, где $\mathrm{EqRel}\, R$ – отношение эквивалентности на Σ, порожденное R, а $(\mathrm{EqRel}\, R)$ – совместимое с умножением отношение эквивалентности на Σ, порожденное $\mathrm{EqRel}\, R$ (см. 1.3.1).

1.3.6. Градуированная монада $\Sigma\langle U\rangle$. Пусть Σ – градуированная монада, а $U = \{U_d(n)\}$ – биградуированное множество, где $n \in \mathbb{N}_0$, $d \in \Delta$. Градуированная монада, свободно порожденная U над Σ, представляет собой градуированную монаду Λ вместе с гомоморфизмом $\varphi : \Sigma \to \Lambda$ и отображениями $\phi_{d,n} : U_d(n) \to \Lambda_d(n)$ и является начальным объектом категории градуированных монад с такими данными.

Для алгебраической Σ существование Λ вытекает из существования свободной монады над $\mathbb{F}_\emptyset$. Действительно, положим $\Lambda = \mathbb{F}_\emptyset\langle S \sqcup U\rangle/(\bar{R})$, где $S_d(n) = \Sigma_d(n)$, а R – ядерная пара морфизма $\tilde{\rho} : \mathbb{F}_\emptyset\langle S\rangle \to \Sigma$ (см. 1.3.4).

Структурный морфизм $\varphi : \Sigma \to \Lambda$ устроен так: вложение $S \to S \sqcup U$ индуцирует морфизм $\mathbb{F}_\emptyset\langle S\rangle \to \mathbb{F}_\emptyset\langle S \sqcup U\rangle/(\bar{R})$, причем композиция $R \rightrightarrows \mathbb{F}_\emptyset\langle S\rangle \to \mathbb{F}_\emptyset\langle S \sqcup U\rangle$ переводит R в $\bar{R}$ по определению $\bar{R}$. Таким образом, возникает морфизм $\psi : \mathbb{F}_\emptyset\langle S\rangle/R \to \mathbb{F}_\emptyset\langle S \sqcup U\rangle/(\bar{R})$ и, в силу алгебраичности Σ, морфизм $\varphi = \psi\rho^{-1}$ (см. 1.3.4). Структурные отображения $\phi_{d,n}$ индуцированы структурными отображениями $U_d(n) \to \mathbb{F}_\emptyset\langle S \sqcup U\rangle_d(n)$ свободной монады. Универсальность Λ очевидна.

Градуированная монада, свободно порожденная U над Σ, обозначается $\Sigma\langle U\rangle$.

1.3.7. Градуированная монада $\Sigma\langle U|E\rangle$. Пусть Σ – алгебраическая градуированная монада, $U = \{U_d(n)\}$, $\{E_d(n)\}$ – биградуированные множества ($n \in \mathbb{N}_0$, $d \in \Delta$), причем $E_d(n) \subset \mathbb{F}_\emptyset\langle S \sqcup U\rangle \times \mathbb{F}_\emptyset\langle S \sqcup U\rangle$, где $S_d(n) = \Sigma_d(n)$. Положим $\Sigma\langle U|E\rangle = \Sigma\langle U\rangle/(\mathrm{EqRel}\, R)$, где $R_d(X) = \varinjlim E_d(n)$, а копредел берется по категории стрелок $f : \mathbf{n} \to X$.

$\Sigma\langle U|E\rangle$ называется градуированной монадой, порожденной образующими U и уравнениями E, поскольку она является начальным объектом категории монад Λ, со следующими данными: гомоморфизм $\varphi : \Sigma \to \Lambda$ и отображение биградуированных множеств $\phi_{n,d} : U_d(n) \to \Lambda_d(n)$. Эти данные должны удовлетворять условию: $E_d(n)$ содержится в ядерной паре композиции $\mathbb{F}_\emptyset\langle S \sqcup U\rangle \to \Sigma\langle U\rangle \to \Lambda$, где первая стрелка индуцирована тавтологическим отображением $S \sqcup U$, а вторая – φ и $\{\phi_{d,n}\}$.

1.3.8. Обозначения. При представлении монад в виде $\Sigma\langle U|E\rangle$ уравнения из $E_d(n)$ обычно записываются в виде $f = g$, где $(f, g) \in \mathbb{F}_\emptyset\langle S \sqcup U\rangle \times \mathbb{F}_\emptyset\langle S \sqcup U\rangle$ (см. 1.3.7) – элемент $E_d(n)$. Кроме того, тот факт, что некоторая операция $\vee$ имеет арность n, может быть подчеркнут либо обозначением $\vee^{\mathrm{ar}=n}$, либо обозначением $(\vee, \mathrm{ar} \vee = n)$. Соответственно, тот факт, что некоторая операция $\vee$ имеет степень d, может быть подчеркнут либо обозначением $\vee^{\deg=d}$, либо обозначением $(\vee, \deg \vee = n)$. Например,

$$\mathbb{F}_{1^2}\langle \vee^{\deg=1,\mathrm{ar}=2} | x \vee x = 0[2]\rangle = \mathbb{F}_{1^2}\langle \vee^{\mathrm{ar}=2}, \deg \vee = 1 | x \vee x = 0[2]\rangle,$$

где $0[2]$ – результат сдвига $0 \in \mathbb{F}_{1^2}$ в степень 2 (см. 1.2.5).

В [1] тот факт, что некоторая операция $\vee$ имеет арность n, отмечается обозначением $\vee^{[n]}$. Будем избегать такого обозначения, поскольку квадратные скобки естественно использовать для операции сдвига по степеням.

1.4. Коммутативные градуированные монады. Коммутативность монады Σ выражается в терминах, внешних по отношению к категории $\operatorname{Endof}\mathcal{S}$ [1, 5.1, 5.2.4], и означает коммутативность диаграммы функторов

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X \times \Sigma Y & \xrightarrow{\rho^{X,Y}} & \Sigma(X \times Y) \\ {\scriptstyle \tau_{\Sigma X, \Sigma Y}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\circ\tau_{X,Y}} \\ \Sigma Y \times \Sigma X & \xrightarrow{\rho^{Y,X}} & \Sigma(Y \times X), \end{array} \tag{20}$$

где τ – перестановка, а стрелка $\rho^{X,Y}$ определена композицией

$$\Sigma X \times \Sigma Y \xrightarrow{\mathrm{id}\times\Delta\times e} \Sigma X \times (\Sigma Y)^X \times Z^{X\times Y} \xrightarrow{\mathrm{id}\times\nu} \Sigma X \times [\Sigma Y \times Z^Y]^X$$
$$\xrightarrow{\mathrm{id}\times\alpha} \Sigma X \times Z^X \xrightarrow{\mu} Z, \tag{21}$$

При этом $Z = \Sigma(X \times Y)$, $e \in Z^{X\times Y}$ представлено структурным отображением монады $\varepsilon_{X\times Y} : X \times Y \to \Sigma(X \times Y)$, $\Delta : S \to S^X$ – диагональ, ν – естественный морфизм $\underline{\mathrm{Hom}}(X, A) \times \underline{\mathrm{Hom}}(X, B) \to \underline{\mathrm{Hom}}(X, A \times B)$ для $A = \Sigma Y$, $B = Z^Y$, а α используется для обозначения действия $\Sigma X \times (\Sigma S)^X \to \Sigma S$, где $\alpha(f \times \phi)$ – результат применения композиции $\Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma\Sigma S \xrightarrow{\mu} \Sigma S$ к $\phi \in \Sigma X$.

1.4.1. Данные для коммутативности монады. Приведенная конструкция использует симметрическую $\otimes$-структуру ($\otimes = \times$ для $\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathrm{ets}$), внутренний Hom и “диагонали” $\Delta : X \to X^Y$. Среди таких диагоналей имеется морфизм $\mathbf{1} \to \mathbf{1}^Y$, по сопряженности индуцирующий морфизм $p_Y : Y \to \mathbf{1}$. С другой стороны, если имеется p_Y, то морфизм $X \otimes p_Y$ по сопряженности индуцирует диагональ $X \to X^Y$. Таким образом, понятие коммутативности может быть определено для монад на категории с симметрической $\otimes$-структурой, внутренним Hom’ом и ”структурными” морфизмами $Y \to \mathbf{1}$. Более общо можно было бы говорить о коммутативности моноидов для пары $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$, где $\mathcal{A}$ – $\otimes$-категория, $\mathcal{M}$ – левый $\mathcal{A}$-модуль, снабженный к тому же своей симметрической $\otimes$-структурой с подходящими свойствами. Далее эта точка зрения не развивается, поскольку не видно естественных примеров таких ситуаций (кроме случая $\otimes = \times$).

1.4.2. Коммутативность градуированных монад. Коммутативность градуированной монады Σ определена в [1, 6.6.5] по аналогии с (20) и означает коммутативность диаграмм

$$\begin{tikzcd} \Sigma_a X \times \Sigma_b Y \arrow[r, "\rho_{a,b}^{X,Y}"] \arrow[d, "\tau_{\Sigma_a X, \Sigma_b Y}"'] & \Sigma_{a+b}(X \times Y) \arrow[d, "\Sigma_{a+b} \circ \tau_{X,Y}"] \\ \Sigma_b Y \times \Sigma_a X \arrow[r, "\rho_{b,a}^{Y,X}"] & \Sigma_{b+a}(Y \times X), \end{tikzcd} \tag{22}$$

где $a, b \in \Delta$, τ – перестановка, а стрелка $\rho_{a,b}^{X,Y}$ определена композицией

$$\Sigma_a X \times \Sigma_b Y \xrightarrow{\mathrm{id} \times \Delta \times e} \Sigma_a X \times (\Sigma_b Y)^X \times Z^{X \times Y} \xrightarrow{\mathrm{id} \times \nu} \Sigma_a X \times [\Sigma_b Y \times Z^Y]^X$$

$$\xrightarrow{\mathrm{id} \times \alpha} \Sigma_a X \times \Sigma_b (X \times Y)^X \xrightarrow{\mu} \Sigma_{a+b}(X \times Y).$$

При этом $Z = \Sigma_0(X \times Y)$, $e = \varepsilon_{X \times Y} \in Z$, Δ и ν указаны при описании (21), а α используется для обозначения действия $\Sigma_a X \times (\Sigma_b S)^X \to \Sigma_{a+b} S$, где $\alpha(f \times \phi)$ – результат применения композиции $\Sigma_a X \xrightarrow{\Sigma_a f} \Sigma_a \Sigma_b S \xrightarrow{\mu_{a,b}} \Sigma_{a+b} S$ к $\phi \in \Sigma_a X$.

Отметим, что существование правой стрелки в (22) опирается на равенство $\Sigma_{a+b} = \Sigma_{b+a}$, вытекающее из коммутативности Δ.

1.4.3. Коммутирование операций малых арностей. Коммутирование операций малых арностей для неградуированных монад описано в [1, 5.1.7]. Градуированный случай отличается только некоторыми тонкостями, связанными с константами. А именно, коммутирование $f \in \Sigma_a(n)$ $(n > 0)$ и $v \in \Sigma_b(0)$ означает, что $f(v, \ldots, v) = v[a]$, где $v[a] \in \Sigma_{a+b}(0)$ – результат сдвига v на степень a (см. 1.2.5). Коммутирование $u \in \Sigma_a(0)$ и $v \in \Sigma_b(0)$ означает, что $u[b] = v[a]$.

В частности, если Σ коммутативна и $\Sigma_0(0) \neq \emptyset$, то все константы совпадают в том смысле, что $\Sigma_d(0) = \{c[d]\}$, где c – произвольный элемент $\Sigma_0(0)$ (следовательно, все константы одинаковой степени совпадают буквально). В этом случае называем c нулем и обозначаем 0.

Если Δ – группа и $\Sigma_d(0) \neq \emptyset$ хотя бы для одного d, то и $\Sigma_0(0) \neq \emptyset$. В нестабильном случае (Δ – не группа) в Σ могут быть различные константы одинаковой степени при условии $\Sigma_0(0) = \emptyset$. Например, для $\Delta = \mathbb{N}_0$ градуированная монада $R = \mathbb{F}_\emptyset\langle u, v, \operatorname{ar} u = \operatorname{ar} v = 0, \deg u = \deg v = 1 | u[1] = v[1]\rangle$ – коммутативна.

1.4.4. Обозначения. Для коммутативной градуированной монады R градуированная монада $R[U|E]$ (в обозначениях из 1.3.8) определяется как $R\langle U|E\rangle/(C)$, где C состоит из уравнений вида $u \boxtimes v \sim v \boxtimes u$. При этом $u \boxtimes v$ (соответственно, $v \boxtimes u$) – результат движения вправо-вниз (соответственно, вниз-влево) по диаграмме (22). Например, R из 1.4.3 можно описать как $\mathbb{F}_\emptyset[u, v, \operatorname{ar} u = \operatorname{ar} v = 0, \deg u = \deg v = 1]$.

2. Монады и некоммутативные полиномы

Пусть R – классическое кольцо, возможно некоммутативное, F – монада, порожденная операциями арности ≤ 1, и $\phi_0 : F \to R$ – мономорфизм. Далее для упрощения обозначений считаем, что ϕ_0 – вложение и $F \subset R$. Для $\Delta = \mathbb{N}_0$ и $r \geq 2$ рассмотрим градуированную монаду

$$\Lambda = F\langle t, \operatorname{ar} t = r, \deg t = 1 | t \text{ коммутирует с } F\rangle$$

и градуированное кольцо некоммутативных полиномов $\Sigma = R\langle t_1, \ldots, t_r\rangle$, где по определению константы, то есть элементы R, коммутируют с t_i и $\deg t_i = 1$. Рассмотрим гомоморфизм F-алгебр

$$\phi : \Lambda \to \Sigma, \quad t \mapsto (t_1, \ldots, t_r).$$

Цель этого раздела – показать, что ϕ – вложение и описать образ ϕ. Преимущество такого описания состоит в том, что с полиномами (даже некоммутативными) работать проще, чем с деревьями.

2.0.1. Случай $0 \notin F(1)$. Пусть $\Phi_d(0) = \emptyset$, а при $n \geq 1$ множество $\Phi_d(n)$ состоит из наборов $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \Sigma_d(n)$, таких, что каждый моном степени d входит ровно в один из f_i, причем с коэффициентом из $F(1)$. Утверждается, что $\phi\Lambda_d(n) = \Phi_d(n)$.

Поскольку Φ – градуированная подмонада в Σ (очевидно), $F(n) \subset \Phi_0(n)$ и $\phi t \in \Phi_1(r)$, то и $\phi\Lambda_d(n) \subset \Phi_d(n)$. Для проверки того, что ϕ – инъективно, и того, что $\phi\Lambda_d(n) \supset \Phi_d(n)$, рассмотрим свободную градуированную монаду

$$\tilde{\Lambda} = \mathbb{F}_{\emptyset}\langle U \sqcup \{t\}\rangle,$$

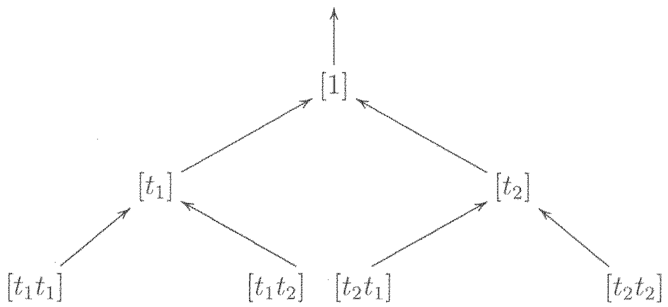
где U состоит из символов $[u]$ для всех $u \in F(1)$. При этом $\deg[u] = 0, \deg t = 1, \operatorname{ar}[u] = 1, \operatorname{ar} t = r$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Lambda} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{\phi}"'] & & \Lambda \arrow[dl, "\phi"] \\
& \Sigma &
\end{tikzcd},$$

где $\pi[u] = u$, $\pi t = t$.

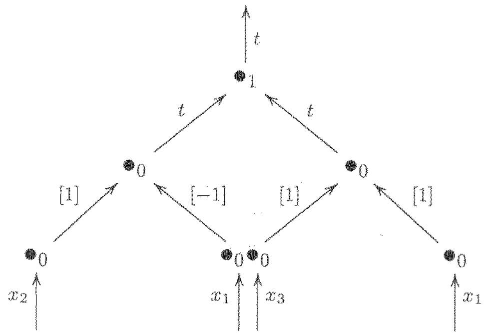
Для проверки инъективности ϕ укажем морфизм градуированных функторов (не являющийся, вообще говоря, гомоморфизмом монад) $\sigma : \Phi \to \tilde{\Lambda}$. Монада $\tilde{\Lambda}$, будучи свободной, описывается в терминах деревьев (см. 1.2.4) и, в частности, n-арные операции степени d представлены маркированными градуированными деревьями, причем входящие ребра дерева маркируются n аргументами (скажем, $x_1, \ldots, x_n$).

Нам потребуется "полное r-арное дерево высоты d" (обозначим его T), то есть дерево, множество вершин которого занумеровано некоммутативными мономами m степени $\leq d$ от переменных $t_1, \ldots, t_r$. При этом из вершины $[t_i m]$ выходит одно ребро, заканчивающееся в $[m]$, из $[1]$ выходит одно ребро без конца, а ребра, входящие в $[m]$, упорядочены в соответствии со следующим порядком их начал $[t_1 m] > \cdots > [t_r m]$. Например, при $d = 2$ и $r = 2$ получаем дерево



Для $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \Phi_d(n)$ положим $\sigma(f) = \tilde{T}_f$, где $\tilde{T}_f$ – дерево $\tilde{T}$, маркированное и градуированное следующим образом. Ребру, исходящему из $[m]$, при $\deg m < d$ сопоставим t; ребру, исходящему из $[m]$, при $\deg m = d$ сопоставим $[u]$, где $u \in F(1)$ – коэффициент при мономе m в полиноме $f_1 + \cdots + f_n$; ребру, входящему в $[m]$, при $\deg m = d$ сопоставим x_i, где f_i – единственный полином из набора f, содержащий m. Градуируем $\tilde{T}$, полагая $\deg[m] = d - \deg m - 1$ при $\deg m < d$ и $\deg[m] = 0$ при $\deg m = d$.

Например, при $F(1) = \{\pm 1\}$, $d = 2$, $r = 2$ и $f = (t_2^2 - t_1 t_2, t_1^2, t_2 t_1)$ дерево $\tilde{T}_f$ имеет вид



В общем случае очевидно, что $\tilde{\phi}(\tilde{T}_f) = f$. Таким образом, $\phi\Lambda_d(n) = \Phi_d(n)$, и описание образа ϕ завершено.

Для проверки инъективности ϕ убедимся, что всякое дерево $Q \in \tilde{\Lambda}$ эквивалентно дереву вида $\tilde{T}_f$ относительно отношения эквивалентности, порожденного условиями: $[u]$ коммутирует с t и $[u_2][u_1] \sim [u_2 u_1]$. Редукция Q к $\tilde{T}_f$ происходит с помошью перестроек, заменяющих дерево на эквивалентное, и содержит следующие шаги.

1. Получаем дерево, у которого все t-ребра выше $[u]$-ребер, то есть в дереве нет фрагментов вида $\xrightarrow{t} \bullet_a \xrightarrow{[u]}$.
2. Получаем дерево, у которого нет двух подряд идущих $[u]$-ребер.

При этом каждый шаг сохраняет свойства дерева, достигнутые на предыдущих шагах. Проверяется, что полученное в итоге дерево изоморфно $\tilde{T}_f$, где $f = \phi(Q)$.

С каждой вершиной v дерева Q связано поддерево $Q(v)$, состоящее из всех предков v и всех ребер, начало или конец которых является одним из таких предков.

Для проведения первого шага предположим, что Q содержит вершину v, окрестность которой имеет вид $\xrightarrow{t} v_a \xrightarrow{[u]}$. Таким образом, поддерево $Q(v)$ имеет вид

$$\begin{tikzcd}
& {} & \\
& v_a \arrow[u, "{[u]}"] & \\
& w_{a-1} \arrow[u, "t"] & \\
\square \arrow[ur, "\lambda_1"] & \cdots & \square \arrow[ul, "\lambda_r"']
\end{tikzcd},$$

где $\square \xrightarrow{\lambda_1}, \ldots, \square \xrightarrow{\lambda_r}$ – некоторые деревья. Рассмотрим дерево, полученное из Q вклейкой вместо $Q(v)$ дерева

$$\begin{tikzcd}
& {} & \\
& v_{a-1} \arrow[u, "t"] & \\
x_{a-1} \arrow[ur, "{[u]}"] & \cdots & z_{a-1} \arrow[ul, "{[u]}"'] \\
\square \arrow[u, "\lambda_1"] & \cdots & \square \arrow[u, "\lambda_r"']
\end{tikzcd}$$

Полученное дерево эквивалентно исходному ввиду коммутирования t и $[u]$. Применяя такую перестройку несколько раз, завершим первый шаг.

Для проведения второго шага предположим, что Q содержит фрагмент $w_a \xrightarrow{[u_1]} v_a \xrightarrow{[u_2]}$. Рассмотрим дерево, полученное из Q заменой указанного фрагмента на $w_a \xrightarrow{[u_2 u_1]}$. Полученное дерево эквивалентно исходному ввиду соотношения $[u_2][u_1] \sim [u_2 u_1]$. Применяя такую перестройку несколько раз, завершим второй шаг.

Для завершения проверки инъективности ϕ осталось убедиться, что полученное в итоге дерево Q изоморфно $\tilde{T}_f$.

Докажем это индукцией по d. При $d = 0$ (база индукции) всякое дерево из $\tilde{\Lambda}_0(n)$ не содержит $[t]$-ребер и имеет вид $\xrightarrow{x_i} \bullet_0 \xrightarrow{[u_1]}$

$\cdots \bullet_0 \xrightarrow{[u_m]}$. В силу условия шага 2 (см. выше) дерево Q имеет вид $\xrightarrow{x_i} \bullet_0 \xrightarrow{[u]}$ и, таким образом, $\tilde{\phi}(Q) = (0, \ldots, 0, u, 0, \ldots, 0)$ и $f = (0, \ldots, 0, u, 0, \ldots, 0)$. Для такого f находим $\tilde{T}_f$ и видим, что оно совпадает с Q.

Пусть $d \geq 1$. Тогда в силу условия шага 2 (см. выше) Q имеет вид

$$\begin{tikzcd} & {} & \\ & \bullet_{d-1} \arrow[u, "t"] & \\ \square \arrow[ur, "\lambda_1"] & \cdots & \square \arrow[ul, "\lambda_r"'] \end{tikzcd},$$

где $Q_1 = \square \xrightarrow{\lambda_1}, \ldots, Q_r = \square \xrightarrow{\lambda_r}$ – некоторые деревья. Иными словами, $Q = t(Q_1, \ldots, Q_r)$. По индукционному предположению, $Q_i = \tilde{T}_{g_i}$, где $g_i = \tilde{\phi}(Q_i)$. Осталось убедиться, что $\tilde{T}_f = t(\tilde{T}_{g_1}, \ldots, \tilde{T}_{g_r})$. Это вытекает из того, что $f = \tilde{\phi}(Q) = t(g_1, \ldots, g_r)$.

2.0.2. Случай $0 \in F(1)$**.** В этом случае возможны два варианта: $F(0) = \emptyset$ и $F(0) = \{0\}$. Покажем сначала, что инъективность ϕ для первого варианта сводится к инъективности ϕ для второго. Действительно, пусть $F(0) = \emptyset$. Рассмотрим монаду $\tilde{F}$, для которой $\tilde{F}(n) = F(n)$ при $n > 0$ и $\tilde{F}(0) = \{0\}$. Покажем, что гомоморфизм

$$F\langle t, \operatorname{ar} t = r, \deg t = 1 | t \text{ комм. с } F\rangle \to \tilde{F}\langle t, \operatorname{ar} t = r, \deg t = 1 | t \text{ комм. с } \tilde{F}\rangle$$

является вложением. Это вытекает из того, что коммутирование с $\tilde{F}$ не добавляет условий, поскольку единственный 0-арный элемент коммутирует с чем угодно.

Далее считаем, что $0 \in F(0)$. Пусть $\Phi_d(0) = \{0\}$, а при $n \geq 1$ множество $\Phi_d(n)$ состоит из наборов $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \Sigma_d(n)$, таких, что каждый моном степени d входит не более чем в один из f_i, причем с коэффициентом из $F(1)$. Утверждается, что $\phi\Lambda_d(n) = \Phi_d(n)$.

Поскольку Φ – градуированная подмонада в Σ (очевидно), $F(n) \subset \Phi_0(n)$ и $\phi t \in \Phi_1(r)$, то и $\phi\Lambda_d(n) \subset \Phi_d(n)$. Для проверки того, что ϕ – инъективно, и того, что $\phi\Lambda_d(n) \supset \Phi_d(n)$, рассмотрим свободную градуированную монаду

$$\tilde{\Lambda} = \mathbb{F}_\emptyset\langle \{z\} \sqcup U \sqcup \{t\}\rangle,$$

где U состоит из символов $[u]$ для всех $u \in F(1)$. При этом $\deg[u] = 0$, $\deg t = 1$, $\deg z = 0$, $\operatorname{ar}[u] = 1$, $\operatorname{ar} t = r$, $\operatorname{ar} z = 0$. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Lambda} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{\phi}"'] & & \Lambda , \arrow[dl, "\phi"] \\
& \Sigma &
\end{tikzcd}$$

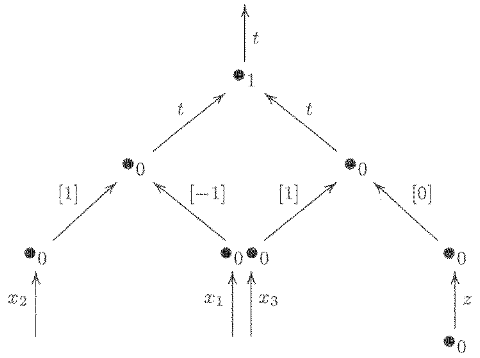
где $\pi[u] = u$, $\pi t = t$, $\pi z = 0$.

Для проверки инъективности ϕ укажем морфизм градуированных функторов (не являющийся, вообще говоря, гомоморфизмом монад) $\sigma : \Phi \to \tilde{\Lambda}$. Монада $\tilde{\Lambda}$, будучи свободной, описывается в терминах деревьев (см. 1.2.4) и, в частности, n-арные операции степени d представлены маркированными градуированными деревьями, причем входящие ребра дерева маркируются n аргументами (скажем, $x_1, \ldots, x_n$).

Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \Phi_d(n)$. Рассмотрим дерево $\tilde{T}$ из 2.0.1 и для монома m степени d обозначим e_m ребро, входящее в m. Построим из $\tilde{T}$ (с использованием f) дерево $\hat{T}$, добавляя вершины в начало тех ребер e_m, для которых m не входит ни в один из f_i. Положим $\sigma(f) = \hat{T}_f$, где $\hat{T}_f$ – дерево $\hat{T}$, маркированное и градуированное следующим образом. Ребру, исходящему из $[m]$, где $\deg m < d$, сопоставим t; ребру, исходящему из $[m]$, где $\deg m = d$, сопоставим $[u]$, где $u \in F(1)$ – коэффициент при мономе m в полиноме $f_1 + \cdots + f_n$; ребру, входящему в $[m]$, где $\deg m = d$, сопоставим x_i, где f_i – единственный полином из набора f, содержащий m, если такой есть, и z – если такого индекса i нет. Градуируем $\hat{T}$, полагая $\deg[m] = d - \deg m - 1$ при $\deg m < d$, $\deg[m] = 0$ при $\deg m = d$ и $\deg v = 0$ для вершин v, добавленных к $\tilde{T}$.

Например, при $F(1) = \{0, \pm 1\}$, $d = 2$, $r = 2$ и $f = (-t_1 t_2, t_1^2, t_2 t_1)$

дерево $\hat{T}_f$ имеет вид



В общем случае очевидно, что $\tilde{\phi}(\hat{T}_f) = f$. Таким образом, $\phi\Lambda_d(n) = \Phi_d(n)$, и описание образа ϕ завершено.

Для проверки инъективности ϕ убедимся, что всякое дерево $Q \in \tilde{\Lambda}$ эквивалентно дереву вида $\hat{T}_f$ относительно отношения эквивалентности, порожденного условиями: z коммутирует с $[u]$ и t, $[u]$ коммутирует с t и $[u_2][u_1] \sim [u_2 u_1]$. Редукция Q к $\hat{T}_f$ происходит с помошью перестроек, заменяющих дерево на эквивалентное, и содержит следующие шаги:

1. получаем дерево, все вершины которого без входящих ребер имеют степень 0;

2. получаем дерево, у которого все t-ребра выше $[u]$-ребер, то есть в дереве нет фрагментов вида $\xrightarrow{t} \bullet_a \xrightarrow{[u]}$;

3. получаем дерево, у которого за каждым z-ребром следует $[0]$-ребро;

4. получаем дерево, у которого нет двух подряд идущих $[u]$-ребер.

При этом каждый шаг сохраняет свойства дерева, достигнутые на предыдущих шагах. Проверяется, что полученное в итоге дерево изоморфно $\tilde{T}_f$, где $f = \phi(Q)$.

Для проведения первого шага предположим, что Q содержит вершину v без входящих ребер степени $a > 0$. Таким образом, поддерево $Q(v)$ имеет вид $v_a \xrightarrow{z}$. Рассмотрим дерево, полученное из Q вклейкой вместо $Q(v)$ дерева

$$
\begin{tikzcd}
& {} \\
& v_{a-1} \arrow[u, "t"'] & \\
\bullet_{a-1} \arrow[ur, "z"] & \cdots & \bullet_{a-1} \arrow[ul, "z"']
\end{tikzcd}
$$

Полученное дерево эквивалентно исходному ввиду коммутирования t и z. Применяя такую перестройку несколько раз, завершим первый шаг. Второй шаг проводится так же, как и в 2.0.1. Для проведения третьего шага фрагменты вида $\bullet_0 \xrightarrow{z}$ заменяются на фрагменты вида $\bullet_0 \xrightarrow{z} \bullet_0 \xrightarrow{[0]}$. Полученное дерево эквивалентно исходному ввиду коммутирования z и $[0]$. Четвертый шаг проводится так же, как и в 2.0.1. Завершение доказательства инъективности ϕ проводится так же, как и в 2.0.1.

3. Полиномы от одной r-арной переменой

3.1. Истинная арность операций и уравнений

При описании конкретных монад с помощью образующих и соотношений удобно использовать понятие истинной арности операций и соотношений.

Пусть R – эндофунктор категории множеств. Говорим, что отображение множеств $\phi : Y \to X$ доминирует $f \in R(X)$, если f лежит в образе отображения $R(\phi) : R(Y) \to R(X)$. Положим

$\operatorname{Supp} f =$

$\{x \in X | x$ лежит в образе всякого отображения, доминирующего $f\}$

и определим истинную арность f формулой

$$\operatorname{tr.ar}(f) = \operatorname{card} \operatorname{Supp} f. \tag{23}$$

Для алгебраичных R истинная арность всегда конечна.

Элемент $f \in R(X)$ называется невырожденным, если $\operatorname{Supp} f = X$. Для конечного X невырожденность f равносильна равенству $\operatorname{tr.ar}(f) = \operatorname{card} X$.

3.1.1. Носитель и арность индуцированного элемента. Пусть $\phi : X \to Y$ – отображение множеств, $f \in R(X)$, $g = R(\phi)(f) \in R(Y)$. Тавтологическое следствие определения носителя состоит в том, что

$$\operatorname{Supp} g \subset \phi(\operatorname{Supp} f).$$

Отсюда вытекает, что

$$\operatorname{tr.ar}(g) \leq \operatorname{tr.ar}(f).$$

Носитель образа может быть меньше образа носителя. Например, пусть R – эндофунктор, соответствующий обобщенному кольцу $\mathbb{Z}$, $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1\}$, ϕ – единственное отображение $X \to Y$, $f = (1, -1) \in R(2)$. Тогда $g = 0 \in R(1)$, $\operatorname{Supp} g = \emptyset \neq Y$.

3.1.2. Лемма. *Пусть R алгебраичен, $f \in R(X)$, $S = \operatorname{Supp} \alpha$. Тогда f лежит в образе $R(S)$ при отображении $R(i)$, где i – включение $S \subset X$.*

Доказательство. Ввиду алгебраичности R можно считать, что X конечно. По индукции достаточно проверить, что если $S \neq X$, то f индуцировано операцией из $R(T)$ для некоторого T, такого, что $S \subset T \subset X$ и $T \neq X$.

Пусть $x \in X - S$. По определению носителя найдется отображение $\phi : Y \to X - \{x\}$ и $g \in R(Y)$, так что $R(\phi) : g \mapsto f$. Пусть $T = \operatorname{Im} \phi$ и h – образ g в $R(T)$, полученный с помощью отображения $\phi : Y \to T$. Тогда $T \neq X$, так как $T \subset X - \{x\}$, операция f приходит из $h \in R(T)$ и $T \supset S$ по определению носителя.

3.1.3. Следствие. *Для алгебраического R, инъекции $\phi : Y \to X$ и $f \in R(Y)$ носитель образа f при отображении $R(\phi)$ совпадает с образом носителя f.*

3.2. Кольцо $\mathbb{F}_\emptyset[t]$, $\operatorname{ar} t = r$, $\deg t = 1$

Пусть $\Delta = \mathbb{N}_0$, а t – переменная арности r $(r \geq 2)$ и степени 1. Рассмотрим гомоморфизм $\psi : \mathbb{F}_\emptyset[t] \to \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_r]$, при котором $t \mapsto (T_1, \ldots, T_r)$. Цель этого раздела – описать образ ψ и показать, что ψ – вложение для $r = 2$ (этот факт автор узнал от Н. Дурова) и не является вложением при $r \geq 3$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \Phi \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma = \mathbb{Z}\langle T_1, \dots, T_r\rangle \arrow[d, "\rho"] \\ L = \mathbb{F}_\emptyset[t] \arrow[r, "\psi"] & S = \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_r], \end{tikzcd}$$

где Φ – образ $\mathbb{F}_\emptyset\langle t\rangle$ при гомоморфизме ϕ, для которого $\phi(t) = (T_1, \dots, T_r)$. Гомоморфизм π – композиция ϕ^{-1} и естественной проекции (ϕ^{-1} определен на Φ ввиду инъективности ϕ – см. раздел 2).

Таким образом, инъективность ψ равносильна равенству $\pi u = \pi v$ для всяких $u, v \in \Phi_d(n)$, таких, что $\rho u = \rho v$. Далее $n \geq 1$, так как при $n = 0$ это условие пропадает ($\Phi_d(0) = \emptyset$).

Напомним (см. 2.0.5), что $\Phi_d(n)$ состоит из наборов $f = (f_1, \dots, f_n) \in \Sigma_d(n)$, таких, что каждый моном степени d входит ровно в один из f_i, причем с коэффициентом 1. Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\operatorname{tr.ar}(f) \leq r^d \tag{24}$$

для $f \in \Phi_d(n)$ (понятие истинной арности элемента введено в 3.1).

3.2.1. Неинъективность ψ при $r \geq 3$. Проведем доказательство неинъективности ψ при $r = 3$ (случай более высокой арности рассматривается аналогично). Пусть $T_1 = A, T_2 = B, T_3 = C$. Рассмотрим операции из $\Phi_2(9)$

$$u = (AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC),$$

$$v = (AA, BA, AC, AB, BB, BC, CA, CB, CC).$$

Ясно, что $\rho u = \rho v$. Покажем, что $\pi u \neq \pi v$.

Для этого надо проверить, что соотношение $u \sim v$ не лежит в отношении эквивалентности Q, порожденном соотношением автокоммутирования операции $(A, B, C) = \phi(t)$ и совместимом с умножением. Соотношение автокоммутирования с точностью до перестановки аргументов имеет вид

$$u \sim (AA, BA, CA, AB, BB, CB, AC, BB, CC). \tag{25}$$

Смысл следующих рассуждений состоит в том, что в степени 2 все следствия (25) получаются из условия функториальности (вытекает из конструктивного описания Q в 1.2.3), хотя в степени ≥ 3 имеется много нетривиальных следствий. Соотношение $u \sim v$ не происходит, таким образом, из (25), например, потому, что в u и v имеется два различия, а в левой и правой части (25) – шесть. Перейдем к более аккуратному изложению.

Покажем сначала, что для $f, g \in \Phi_d(n)$

$$\operatorname{tr.ar}(f \sim g) \leq r^d, \tag{26}$$

где $f \sim g$ символизирует пару $(f, g) \in Q_d(n)$, а понятие истинной арности элемента (f, g) введено в 3.1. Действительно, если $f \sim g$, то $\rho f = \rho g$. Поскольку $\operatorname{tr.ar}(f) \leq r^d$ (см. (24)), то при $n > r^d$ найдется индекс i, такой, что $f_i = 0$, где $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Тогда $\rho g_i = \rho f_i = 0$ и, следовательно, $g_i = 0$, так как g_i – сумма мономов с неотрицательными коэффициентами. Пусть $f' = (f_1, \ldots, \hat{f_i}, \ldots, f_n)$ и $g' = (g_1, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n)$, где компоненты $\hat{*}$ пропущены. Соотношение $f' \sim g'$ лежит в $Q_d(n-1)$, будучи индуцированным из соотношения $f \sim g$ с помощью отображения $\varphi : \mathbf{n} \to \{1, \ldots, n-1\}$, для которого $\varphi(j) = j$ при $j < i$, $\varphi(j) = j - 1$ при $j > i$ и $\varphi(i) = *$, где $*$ – произвольный индекс в $\{1, \ldots, n-1\}$. С другой стороны, соотношение $f \sim g$ индуцировано из соотношения $f' \sim g'$ с помощью отображения $\varphi : \{1, \ldots, n-1\} \to \mathbf{n}$, для которого $\varphi(j) = j$ при $j < i$, $\varphi(j) = j + 1$ при $j \geq i$. Таким образом, при $n > r^d$ арность соотношения $f \sim g$ можно уменьшить, что и доказывает (26).

Пусть для каждого $n \geq 0$ в $Q_2(n)$ выделено подмножество $E_2(n)$. Пусть $R_2(n)$ – минимальное функториальное отношение эквивалентности (без совместимости с умножением), для которого $E_2(n) \subset R_2(n)$.

$$\begin{gathered}\text{Если ни одно из} (r^2)! - \text{соотношений, индуцированных из } u \sim v \\ \text{перестановками множества } \mathbf{r}^2, \text{ не лежит в } E_2(r^2), \\ \text{то ни одно из этих соотношений не лежит и в } R_2(r^2). \quad (27)\end{gathered}$$

Это утверждение вытекает из (26), поскольку $\operatorname{tr.ar}(u \sim v) = r^2$ – максимально возможная истинная арность в степени 2 и, таким образом, соотношение $u \sim v$ при функториальном расширении E_2 может быть получено только из соотношений арности r^2 с помощью биекций. Все соотношения истинной арности r^2 либо тривиальны, либо получаются из соотношений, лежащих в $E_2(r)$, с помощью перестановок аргументов. Поскольку соотношение $u \sim v$ не таково, то оно не лежит в $R_2(r^2)$.

Из конструктивного описания Q (см. 1.3.2) вытекает, что Q – объединение последовательности отношений эквивалентности (без совместимости с умножением)

$$Q^0 \subset Q^1 \subset \dots .$$

При этом Q^0 – функториальное отношение эквивалентности, порожденное (25), а Q^{i+1} – функториальное отношение эквивалентности, порожденное CQ^i (функтор CQ^i описан в 1.3.2 и представляет собой, неформально говоря, результат расширения Q^i с помощью левых и правых умножений на операции из Φ).

Покажем индукцией по i, что соотношение $u \sim v$ не лежит в Q^i. В случае $i = 0$ (база индукции) функтор Q^0 порожден $E_2(n)$, где $E_2(r^2)$ состоит из соотношения автокоммутирования (25), а $E_2(n) = \emptyset$ при $n \neq r^2$. Из (27) вытекает, что соотношение $u \sim v$ не лежит в $Q_2^0(r^2)$, поскольку ни одна из перестановок аргументов в этом соотношении не приводит к соотношению автокоммутирования (в u и v – два различия, а в левой и правой частях (25) – шесть).

Предположим, что соотношение $u \sim v$ и все соотношения, полученные из него перестановкой аргументов, не лежат в $Q_2^i(r^2)$. Проверим, что они не лежат и в $Q_2^{i+1}(r^2)$. Ввиду (27) достаточно проверить, что они не лежат в $CQ_2^i(r^2)$. Согласно 1.3.2,

$$CQ_2^i(r^2) = \bigcup_{Y,\, a+b=2} \gamma_{a,b}^l(\Phi_a(Y) \times Q_b^i(r^2)^Y) \cup \bigcup_{Y,\, a+b=2} \gamma_{a,b}^r(Q_a^i(Y) \times \Phi_b(r^2)^Y).$$

Таким образом, надо показать, что соотношение $u \sim v$ (и соотношения, полученные из него перестановкой аргументов) не лежат ни в одной из компонент объединения. Компоненты $\gamma_{0,2}^l(\Phi_0(Y) \times Q_2^i(r^2)^Y)$ и $\gamma_{2,0}^r(Q_2^i(Y) \times \Phi_0(r^2)^Y)$ равны $Q_2^i(r^2)$, поскольку $\Phi_0(Y) = \mathbb{F}_\emptyset(Y)$. Компоненты $\gamma_{1,1}^l(\Phi_1(Y) \times Q_1^i(r^2)^Y)$, $\gamma_{2,0}^l(\Phi_2(Y) \times Q_0^i(r^2)^Y)$, $\gamma_{1,1}^r(Q_1^i(Y) \times \Phi_1(r^2)^Y)$, $\gamma_{0,2}^r(Q_0^i(Y) \times \Phi_2(r^2)^Y)$ состоят из тривиальных соотношений, поскольку Q_1^i и Q_0^i состоят из тривиальных соотношений (следствие того, что соотношение автокоммутативности имеет степень 2).

Таким образом, соотношение $u \sim v$ не принадлежит $Q = \cup Q_i$, что и завершает доказательство неинъективности ψ.

3.2.2. Инъективность ψ при $r = 2$. Пусть $T_1 = A$, $T_2 = B$, Q – совместимое с умножением отношение эквивалентности, порожденное соотношением автокоммутирования операции t. Условие автокоммутирования t имеет вид

$$(AA, AB, BA, BB) \sim (AA, BA, AB, BB). \tag{28}$$

Надо проверить, что для $f = (f_1, \dots, f_n)$, $g = (g_1, \dots, g_n) \in \Phi_d(n)$ условие $\rho f = \rho g$ влечет равенство $f \sim g \mod Q$.

Покажем, что это утверждение достаточно проверять для "специальных" f и g, то есть в случае, когда $n = r^d$, а f_i (и, соответственно, g_i) пробегает все некоммутативные мономы степени d. Действительно, если $f_i = f_i' + u$ для некоторого монома u, то из условия $\rho f = \rho g$ и описания Φ (см. начало 3.2) вытекает, что $g_i = g_i' + v$ для некоторого монома v, такого, что $\rho u = \rho v$. Но тогда операции f и g индуцированы операциями $f' = (f_1, \dots, f_n, u)$ и $g' = (g_1, \dots, g_n, v)$, причем $\rho f' = \rho g'$. Итерация расщепления на мономы сводит ситуацию к случаю "специальных" f и g. Далее f и g специальны.

Покажем, что в Q лежит соотношение $f \sim g$, где g получается из f перестановкой двух составляющих, причем эти составляющие почти совпадают, то есть

$$f = (\dots, UABV, \dots, UBAV, \dots) \text{ и } g = (\dots, UBAV, \dots, UABV, \dots),$$

где U, V – мономы, а на позициях, отмеченных многоточием, f и g совпадают. Проверим это утверждение индукцией по d. При $d = 2$ (база индукции) утверждение сводится к соотношению автокоммутирования (28). При $d > 2$ либо U, либо V – непустое слово. Разберем случай, когда U – непусто и начинается с A (остальные случаи разбираются аналогично). В этом случае с помощью подходящей перестановки можно считать, что $f = (Au, Bu)$ и $g = (Av, Bu)$, где u,v удовлетворяют индукционному предположению. Поэтому $g = (Av, Bu) \sim (Au, Bu) = f$.

Покажем теперь, что в Q лежит соотношение $f \sim g$, где g получается из f перестановкой двух произвольных составляющих, то есть $f = (\dots, U, \dots, V, \dots)$ и $g = (\dots, V, \dots, U, \dots)$, где U, V – мономы с условием $\rho U = \rho V$, а на позициях, отмеченных многоточием, f и g совпадают. Это утверждение вытекает из предыдущего, поскольку от U к V можно добраться транспозициями соседних вхождений A и B в соответствующие мономы.

Общее утверждение вытекает из только что доказанного, поскольку любые две расстановки мономов с одинаковыми значениями ρ на каждой позиции можно соединить транспозициями мономов, сохраняющими значения ρ.

3.2.3. Образ ψ. Рассмотрим отображение $S \to S$, $f = \sum a_m T^m \mapsto \|f\| = \sum |a_m| T^m$, где $m \in \mathbb{N}_0^l$ – мультистепень. Так же обозначаем и отображение $S_d(n) \to S_d(1)$, $f = (f_1, \ldots, f_n) \mapsto \|f\| = \|f_1\| + \cdots + \|f_n\|$, где $S_d(n) = S_1(1)^n$, а $S_d(1)$ – множество полиномов в S степени d.

Из описания Φ (см. начало 3.2) тотчас вытекает, что

$$\psi L_d(n) = \{f = (f_1, \ldots, f_n) \in S_d(n) | f_1, \ldots, f_n \preceq 0 \text{ и } \|f\| = (T_1 + \cdots + T_r)^d\},$$

где $f \preceq g$ тогда и только тогда, когда f не превосходит g покоэффициентно.

3.3. Кольцо $\mathbb{F}_1[t]$, $\operatorname{ar} t = r$, $\deg t = 1$ Пусть $\Delta = \mathbb{N}_0$, а t – переменная арности r ($r \geq 2$) и степени 1. Рассмотрим гомоморфизм $\psi : \mathbb{F}_1[t] \to \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_r]$, при котором $t \mapsto (T_1, \ldots, T_r)$. Цель этого раздела – описать образ ψ и показать, что ψ – вложение для $r = 2$ (этот факт автор узнал от Н. Дурова) и не является вложением при $r \geq 3$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Phi \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma = \mathbb{Z}\langle T_1, \ldots, T_r\rangle \arrow[d, "\rho"] \\
L = \mathbb{F}_1[t] \arrow[r, "\psi"] & S = \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_r],
\end{tikzcd}$$

где Φ – образ $\mathbb{F}_1\langle t | t$ коммутирует с $\mathbb{F}_1\rangle$ при гомоморфизме ϕ, для которого $\phi(t) = (T_1, \ldots, T_r)$. Гомоморфизм π – композиция ϕ^{-1} и естественной проекции (ϕ определен на Φ ввиду инъективности ϕ – см. раздел 2).

Таким образом, инъективность ψ равносильна равенству $\pi u = \pi v$ для всяких $u, v \in \Phi_d(n)$, таких, что $\rho u = \rho v$. Далее $n \geq 1$, так как при $n = 0$ это условие пропадает ($\Phi_d(0) = \{0\}$).

Напомним (см. 2.0.6), что $\Phi_d(n)$ состоит из наборов $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \Sigma_d(n)$, таких, что каждый моном степени d входит не более чем в один из f_i, причем с коэффициентом 1.

Тот же пример, что и в 3.2.1, показывает неинъективность ψ при $r \geq 3$. Инъективность ψ при $r = 2$ проверяется аналогично 3.2.2.

Из описания Φ (см. начало 3.3) тотчас вытекает, что

$$\psi L_d(n) = \{f = (f_1, \ldots, f_n) \in S_d(n) | f_1, \ldots, f_n \succeq 0 \text{ и } \|f\| \preceq (T_1 + \cdots + T_r)^d\}.$$

3.4. Кольцо $\mathbb{F}_{1^2}[t|alt]$, $\operatorname{ar} t = r$, $\deg t = 1$

Пусть $\Delta = \mathbb{N}_0$, а t – переменная арности r ($r \geq 2$) и степени 1. Рассмотрим кольцо $\mathbb{F}_{1^2}[t|alt]$, где alt – условие альтернированности операции t (см. [1, 5.5.4] и ниже), и гомоморфизм $\psi : \mathbb{F}_{1^2}[t|alt] \to \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_r]$, $t \mapsto (T_1, \dots, T_r)$. Кольцо $\mathbb{F}_{1^2}[t|alt]$ является альтернирующим, как и всякое кольцо, порожденное альтернирующими операциями [1, 5.5.5].

Цель этого раздела – описать образ ψ и показать, что ψ не является вложением.

3.4.1. Альтернирующие операции. Пусть R/F – коммутативное обобщенное кольцо и $t \in R(n)$. Операция t – альтернирующая (см. [1, 5.5.4]), если для нее выполнено соотношение $w(x, y, z, u, \dots, v) = 0$, где w проще всего описывается картинкой

$$\begin{array}{cccccccccl}
0 & x & y & \dots & \dots & z & \to & w_1 & = & t(0,x,y,\dots\dots,z) \\
-x & 0 & u & \dots & \dots & \dots & \to & w_2 & = & t(-x,0,u,\dots\dots) \\
-y & -u & 0 & \dots & \dots & \dots & \to & w_3 & = & t(-y,-u,0,\dots) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \to & & \dots & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & 0 & v & \to & w_{n-1} & = & t(\dots\dots\dots\dots,0,v) \\
-z & \dots & \dots & \dots & -v & 0 & \to & w_n & = & t(-z,\dots,-v,0) \\
 & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & & w & = & t(w_1,\dots\dots\dots,w_n).
\end{array}$$

В силу коммутативности R значение $w(x, y, z, u, \dots, v)$ можно вычислять сначала по столбцам, а затем по строкам. Кроме того, константы и 1-операции являются альтернирующими.

При рассмотрении градуированного случая по существу ничего не меняется, за исключением того, что вместо соотношения $w = 0$ более корректно писать соотношение $w = 0[2 \deg t]$ (см. 1.2.5).

3.4.2. Неинъективность ψ. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\Phi & \xrightarrow{\subset} & \Sigma = \mathbb{Z}\langle T_1, \dots, T_r\rangle \\
{\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho} \\
L = \mathbb{F}_1[t|alt] & \xrightarrow{\psi} & S = \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_r],
\end{array}$$

где Φ – образ $\mathbb{F}_{1^2}\langle t|t$ коммутирует с $\mathbb{F}_{1^2}\rangle$ при гомоморфизме ϕ, для которого $\phi(t) = (T_1, \dots, T_r)$. Гомоморфизм π – композиция ϕ^{-1} и естественной проекции (ϕ определен на Φ ввиду инъективности ϕ – см. раздел 2).

Напомним (см. 2.0.2), что $\Phi_d(n)$ состоит из наборов $f = (f_1, \dots, f_n) \in \Sigma_d(n)$, таких, что каждый моном степени d входит не более чем в один из f_i, причем с коэффициентом 1 или -1.

Тот же пример, что и в 3.2.1, показывает неинъективность ψ при $r \geq 3$. Далее $r = 2$, $T_1 = A$, $T_2 = B$. Пусть Q – отношение эквивалентности, порожденное соотношениями автокоммутирования и альтернированности операции t и совместимое с умножением. Условие автокоммутирования t имеет вид

$$(AA, AB, BA, BB) \sim (AA, BA, AB, BB). \tag{29}$$

Соотношение альтернированности имеет вид

$$AB - BA \sim 0[2]. \tag{30}$$

Рассмотрим операции $f = (AA, AB - BA, BB)$ и $g = (AA, 0[2], BB)$ из $\Phi_2(3)$. Ясно, что $\rho f = \rho g$. Покажем, что $\pi f \neq \pi g$, то есть что соотношение $f \sim g$ не лежит в Q.

Рассуждая как в 3.2.1, видим, что соотношение альтернативности (30) имеет истинную арность 1 и не участвует в формировании соотношений степени 2 истинной арности ≥ 2. Утверждение о том, что истинная арность любого соотношения степени 2 не превосходит 4, верно, хотя его доказательство слегка отличается от доказательства (26). А именно, истинная арность любого соотношения степени 2 не превосходит 8, поскольку истинная арность операции степени 2 не превосходит 4. После этого требуется небольшой перебор в арностях $8, 7, 6, 5$. Таким образом, все нетривиальные соотношения степени 2 и истинной арности 3 индуцированы с помощью отображений $\mathbf{4} \to \mathbf{3}$ и $\mathbf{3} \to \mathbf{3}$ из соотношения автокоммутативности (29) и соотношений, полученных из (29) применением унарных операций степени 0 к компонентам (29) (например, соотношения $(AA, -AB, BA, -BB) \sim (AA, -BA, AB, -BB)$). Простой перебор показывает, что соотношение $f \sim g$ не может быть получено таким образом.

3.4.3. Образ ψ. Из описания Φ (см. начало 3.4.2) тотчас вытекает, что

$$\psi L_d(n) = \{f = (f_1, \dots, f_n) \in S_d(n) \mid \|f\| \preceq (T_1 + \dots + T_r)^d\}.$$

По определению, кольцо ψL конечнопорождено. Вопрос о его конечнопредставимости остается открытым.

Литература

1. N. Durov, *New Approach to Arakelov Geometry*. arXiv: 0704.2030 v1 [math AG] 16 Apr 2007.
2. T. Leinster, *Higher Operads, Higher Categories*. arXiv: math.CT/0305049 v1,2 May 2003.

Smirnov A. L. Graded monads and rings of polynomials.

Models for free graded monads over the category of sets are constructed. Certain rings of generalized noncommutative polynomials, generated by an operation of arbitrary arity, are implemented as subrings of classical rings of noncommutative polynomials. It is shown, that natural homomorphisms from rings of generalized polynomials to rings of the usual commutative polynomials are not inclusions as a rule. For instance, a natural homomorphism $\mathbb{F}_{1^2}[t] \to \mathbb{Z}[A, B]$, $t \mapsto (A, B)$, where t is a binary variable, isn't an inclusion, even if t is subjected to the alternating condition.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru

Поступило 30 октября 2007 г.