Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 349, 2007 г.

А. Н. Панов

ИНВОЛЮЦИИ В S_n И АССОЦИИРОВАННЫЕ КОПРИСОЕДИНЁННЫЕ ОРБИТЫ

1. Введение и основные утверждения

Коприсоединённые орбиты играют важную роль в теории представлений, гармоническом анализе и теории симплектических многообразий [1, 6]. Для полупростых групп Ли коприсоединённые орбиты совпадают с присоединёнными и их классификация хорошо известна. Классический пример нильпотентной группы Ли – унитреугольная группа. Проблема описания коприсоединённых орбит этой группы по прежнему далека от своего решения [1, 2]. Описание регулярных орбит (т.е орбит максимальной размерности) для $\mathrm{UT}(n,K)$ было получено А. А. Кирилловым в его основополагающей работе по методу орбит [3]. Субрегулярные орбиты для произвольного n и все орбиты для размера $n \leqslant 7$ были классифицированы в [4].

Цель этой работы – расширить класс орбит, допускающих полное описание. Произвольной инволюции σ в симметрической группе S_n мы ставим в соответствие семейство коприсоединённых орбит $\{\Omega(f)|\ f \in X_\sigma\}$. Построена поляризация для канонической формы на этой орбите (теорема 1.1). Получена формула для размерности этих орбит (теорема 1.2).

Орбиты регулярного действия алгебраической унипотентной группы на произвольном аффинном алгебраическом многообразии замкнуты [6, 11.2.4]. В работе найдена система образующих в определяющем идеале орбиты $\Omega(f)$ (теорема 1.4). Заметим, что каждый из построенных образующих имеет вид $P-c$, где P – коэффициент минора характеристической матрицы и $c \in K$. Класс орбит, ассоциированных с инволюциями, содержит все регулярные и некоторые субрегулярные орбиты (см. примеры 2,3 в §1 и [4]). Отметим также, что можно установить соответствие между инволюциями и семействами присоединённых орбит, удовлетворяющих уравнению $X^2 = 0$ [5].

Статья поддержана грантами РФФИ 05-01-00313 и 06-01-00037.

Перейдём к формулировке основных результатов работы. Унитреугольной группой называют группу $N = \mathrm{UT}(n, K)$, состоящую из нижнетреугольных матриц над полем K с единицами по диагонали. Будем считать, что поле K имеет нулевую характеристику. Алгебра Ли $\mathfrak{n} = \mathfrak{ut}(n, K)$ группы N состоит из нижнетреугольных матриц с нулями по диагонали. С помощью формы Киллинга $(\cdot, \cdot)$ мы отождествим сопряженное пространство $\mathfrak{n}^*$ с подпространством $\mathfrak{n}_+$, которое состоит из верхнетреугольных матриц с нулями по диагонали. Мы также отождествим симметрическую алгебру $S(\mathfrak{n})$ с алгеброй $K[\mathfrak{n}^*]$ регулярных функций на $\mathfrak{n}^*$. Группа N действует в $\mathfrak{n}^*$ по формуле

$$\mathrm{Ad}_g^* f(x) = f(\mathrm{Ad}_g^{-1} x), \quad g \in N, f \in \mathfrak{n}^*.$$

Подалгебра $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{n}$ называется поляризацией для $f \in \mathfrak{n}^*$, если $\mathfrak{p}$ – максимальное изотропное подпространство по отношению к кососимметрической форме $f([x, y])$. Следуя методу орбит, для любой линейной формы на произвольной нильпотентной алгебре Ли можно найти ее поляризацию. Существование поляризации даёт возможность построить примитивный идеал в универсальной обёртывающей алгебре $U(\mathfrak{n})$ [6] и в случае $K = \mathbb{R}$ – неприводимое унитарное представление группы N [1].

Обозначим через Δ^+ множество положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, K)$ [7]. Отношение $>$ в Δ^+ – лексикографический порядок. Каждый положительный корень ξ имеет вид $\alpha_{ji} = \varepsilon_j - \varepsilon_i$, где $j < i$. Мы обозначим $j = j(\xi)$ и $i = i(\xi)$. По положительному корню ξ определяется отражение $r_\xi \in S_n$.

Пусть σ – инволюция в S_n (т.е. $\sigma^2 = \mathrm{id}$). Инволюция σ единственным образом разлагается в произведение коммутирующих отражений

$$\sigma = r_1 r_2 \cdots r_s, \tag{1}$$

где каждое r_m есть отражение по отношению к положительному корню ξ_m. Предположим, что $\xi_1 > \xi_2 > \ldots > \xi_s$. Поскольку отражения r_m попарно коммутируют, то $j(\xi_1) < j(\xi_2) < \ldots < j(\xi_s)$. Образуем подмножество

$$\mathcal{S} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s\}.$$

Пусть $\{y_{ij}\}_{1 \leqslant j < i \leqslant n}$ – стандартный базис в $\mathfrak{n}$. В дальнейшем мы также будем использовать обозначение y_γ для y_{ij}, если $\gamma = \varepsilon_j - \varepsilon_i$.

Рассмотрим подмножество $X_\sigma \subset \mathfrak{n}^*$, которое состоит из $f \in \mathfrak{n}^*$ таких, что $f(y_{\xi_m}) \neq 0$, $1 \leqslant m \leqslant s$, и f равно нулю на остальных векторах стандартного базиса.

Основное определение. *Будем называть орбиту $\Omega(f)$ для $f \in X_\sigma$ коприсоединённой орбитой, ассоциированной с инволюцией σ.*

Наша первая цель – построить поляризацию для любого $f \in X_\sigma$. Разложим множество положительных корней:

$$\Delta^+ = \bigsqcup_{1 \leqslant t \leqslant n-1} \Delta^{(t)}, \quad \text{где} \quad \Delta^{(t)} = \{\gamma \in \Delta^+ |\ j(\gamma) = t\}.$$

Для любого $1 \leqslant t \leqslant n-1$ обозначим

$$\sigma_t = \prod_{j(\xi_m) \leqslant t} r_m.$$

Легко видеть, что $\sigma_{n-1} = \sigma$. Положим $\sigma_0 = \mathrm{id}$. Обозначим через Π_σ следующее подмножество множества положительных корней

$$\Pi = \Pi_\sigma = \bigsqcup_{1 \leqslant t \leqslant n-1} \Pi^{(t)},$$

где

$$\Pi^{(t)} = \{\eta \in \Delta^{(t)} |\ \sigma_{t-1}(\eta) > 0\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{p}_\sigma$ линейное подпространство, натянутое на $\{y_{it} :\ \varepsilon_t - \varepsilon_i \in \Pi\}$.

Теорема 1.1. *$\mathfrak{p}_\sigma$ – поляризация для любого $f \in X_\sigma$.*

Как обычно $l(\sigma)$ (соотв. $s(\sigma)$) – число простых (соотв. произвольных) отражений в редуцированном разложении σ в произведение простых (соотв. произвольных) отражений. Легко видеть, что $s(\sigma) = s$ (см. (1)).

Теорема 1.2. *Для любого $f \in X_\sigma$ размерность орбиты $\Omega(f)$ равна $l(\sigma) - s(\sigma)$.*

Наша следующая цель – найти систему образующих в определяющем идеале $\mathcal{I}(\Omega(f))$ орбиты $\Omega(f)$ (т.е. в идеале, состоящем из всех многочленов, которые равны нулю на $\Omega(f)$). Рассмотрим следующую формальную матрицу Φ и её характеристическую матрицу $\Phi(\tau)$:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ y_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(\tau) = \tau\Phi + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \tau y_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau y_{n1} & \tau y_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Для любых подмножеств J, $I \subset \{1, \dots, n\}$, $|I| = |J|$, обозначим через M_I^J минор матрицы Φ с упорядоченными по возрастанию системами столбцов $\mathrm{ord}(J)$ и строк $\mathrm{ord}(I)$.

Обозначим через $M_I^J(\tau)$ соответствующий минор характеристической матрицы $\Phi(\tau)$. Минор $M_I^J(\tau)$ является многочленом по τ с коэффициентами в симметрической алгебре $S(\mathfrak{n})$:

$$M_I^J(\tau) = \tau^m(P_{I,0}^J + P_{I,1}^J\tau + P_{I,2}^J\tau^2 + \dots), \tag{2}$$

где m равно $|J \setminus I| = |I \setminus J|$. Коэффициент $P_{I,0}^J$ с точностью до знака совпадает с минором $M_{I\setminus J}^{J\setminus I}$ матрицы Φ (в дальнейшем этот знак мы часто будем опускать).

Замечание 1. Если $I \geqslant J$ (в смысле определения 3.4), то $M_I^J(\tau) \neq 0$ и его первый коэффициент $P_{I,0}^J$ также отличен от нуля. Если $I \not\geqslant J$, то $M_I^J(\tau) = 0$.

Заметим, что для любого $f \in \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}^*$ значение M_I^J в точке f совпадает с транспонированным минором для f, представленным верхнетреугольной матрицей. Аналогично, значения $P_{I,0}^J, P_{I,1}^J, P_{I,2}^J, \cdots$ в точке f совпадают с коэффициентами соответствующего минора характеристической матрицы $\tau f + E$.

Для любой пары $1 \leqslant k, t \leqslant n$ мы рассмотрим системы

$$J'(k,t) = \{1 \leqslant j < t : \ \sigma(j) > k\}, \quad I'(k,t) = \sigma J'(k,t),$$

$$J(k,t) = J'(k,t) \sqcup \{t\}, \quad I(k,t) = I'(k,t) \sqcup \{k\}.$$

Обозначим через $D_{k,t}$ (соотв. $D_{k,t}(\tau)$) минор матрицы Φ (соотв. $\Phi(\tau)$) с системами столбцов $J(k,t)$ и строк $I(k,t)$.

Как и в (2), мы разложим

$$D_{k,t}(\tau) = \tau^m (P_{k,t,0} + P_{k,t,1}\tau + P_{k,t,2}\tau^2 + \ldots), \qquad (3)$$

где коэффициенты $P_{k,t,i}$ – элементы $S(\mathfrak{n}) = K[\mathfrak{n}^*]$ и $P_{k,t,0} \neq 0$. Заметим, что если $k > t$, то $D_{k,t}(\tau) = \tau^m P_{k,t,0}$. Обозначим

$$\mathcal{M} = \{\gamma \in \Delta^+ | \ \sigma_t(\gamma) > 0, \quad \text{где} \quad t = j(\gamma)\}.$$

Каждому корню в $\mathcal{M}$ мы предпишем многочлен на $\mathfrak{n}^*$.

Определение 1.3. *Пусть $i > t$ и $\eta = \varepsilon_t - \varepsilon_i \in \mathcal{M}$. Будем говорить, что η имеет тип 0, если не существует $\xi \in \mathcal{S}$ такого, что $j(\xi) \leqslant t-1$ и $i(\xi) = i$. В противном случае будем говорить, что η в $\mathcal{M}$ имеет тип 1.*

Положим $k = \sigma_{t-1}(i)$. Обозначим

$$Q_{i,t} = \begin{cases} P_{k,t,0}, & \text{если} \quad \eta \text{ имеет тип } \ 0, \\ P_{k,t,1}, & \text{если} \quad \eta \text{ имеет тип } \ 1. \end{cases}$$

Заметим, что, если η имеет тип 0, то $k = i$ и $Q_{it} = P_{i,t,0}$ совпадает (с точностью до знака) с минором $D_{i,t}$ матрицы Φ . Если η имеет тип 1, то $k < t$ и $k = \sigma(t)$. Для каждого $1 \leqslant m \leqslant s$ обозначим

$$D_m = D_{i(\xi_m),j(\xi_m)}.$$

Легко видеть, что $D_m(f) \neq 0$ для любого $f \in X_\sigma$.

Теорема 1.4. *Для любого $f \in X_\sigma$ определяющий идеал коприсоединённой орбиты $\Omega(f)$ порождается $Q_{i,t}$, где $\varepsilon_t - \varepsilon_i \in \mathcal{M}$, и $D_m - D_m(f)$, где $1 \leqslant m \leqslant s$.*

Следствие 1.5. *Для любого $f \in X_\sigma$ пересечение $\Omega(f) \cap X_\sigma$ совпадает с единственным элементом f.*

Для любого $1 \leqslant t \leqslant n-1$ разложим инволюцию $\sigma = \sigma_t \sigma'_t$, где

$$\sigma'_t = \prod_{j(\xi_m) > t} r_m.$$

Обозначим

$$\Delta^+_\sigma = \{\zeta \in \Delta^+ : \ \sigma(\eta) > 0\}.$$

Из определения $|\Delta^+_\sigma| = |\Delta^+| - l(\sigma)$.

Замечание 2. Положительный корень ζ содержится в $\Delta_\sigma^{(t)} = \Delta_\sigma^+ \cap \Delta^{(t)}$ тогда и только тогда, когда $\sigma_t(\eta) > 0$, где $\eta = \sigma_t'(\zeta)$. Это показывает, что σ_t' биективно отображает $\Delta_\sigma^{(t)}$ на $\mathcal{M}^{(t)} = \mathcal{M} \cap \Delta^{(t)}$. Отсюда вытекает, что $|\mathcal{M}^{(t)}| = |\Delta_\sigma^{(t)}|$ и, следовательно, $|\mathcal{M}| = |\Delta_\sigma^+| = |\Delta^+| - l(\sigma)$. Из замечания 2 и теорем 1.2 и 1.4 получаем

Следствие 1.6. *Каждая коприсоединённая орбита $\Omega(f)$, $f \in X_\sigma$, является полным пересечением.*

Теоремы 1.1 и 1.2 доказаны в §2. Следующий §3 полностью посвящен доказательству теоремы 1.4. В заключение этого параграфа мы введём язык допустимых диаграмм и переформулируем теоремы в новых терминах. Этот подход имеет свои преимущества. Мы приведём примеры инволюций, построим их допустимые диаграммы и образующие элементы в определяющем идеале их ассоциированных орбит.

Как и выше, σ – инволюция в S_n. Рассмотрим следующие подмножества в системе положительных корней Δ^+:

$$\mathcal{C}_+ = \{\gamma \in \Delta^+ \setminus \mathcal{S} |\ \sigma_{t-1}(\gamma) > 0, \sigma_t(\gamma) < 0, \quad \text{где} \quad t = j(\gamma)\},$$

$$\mathcal{C}_- = \{\gamma \in \Delta^+ |\ \sigma_{t-1}(\gamma) < 0, \ \text{где} \quad t = j(\gamma)\}.$$

Множество положительных корней Δ^+ и его подмножество Π разлагаются: $\Delta^+ = \Pi \sqcup \mathcal{C}_-$ и $\Pi = \mathcal{S} \sqcup \mathcal{M} \sqcup \mathcal{C}_+$.

Мы начнём построение допустимой диаграммы с пустой $n \times n$-матрицы. Мы не будем заполнять клетки (i, j), $i \leqslant j$. Каждому положительному корню $\gamma = \alpha_{ji}$, $i > j$ мы поставим в соответствие квадрат (i, j). Мы поставим в квадрат (i, j) один из следующих символов $\otimes$, $+$, $-$, $\bullet$, следуя следующим правилам:

$$\begin{cases} \otimes, & \text{если} \ \ \gamma \in \mathcal{S}, \\ +, & \text{если} \ \ \gamma \in \mathcal{C}_+, \\ -, & \text{если} \ \ \gamma \in \mathcal{C}_-, \\ \bullet, & \text{если} \ \ \gamma \in M. \end{cases}$$

Эту допустимую диаграмму можно построить другим способом [4]. Рассмотрим первый корень ξ_1 в $\mathcal{S}$. Поместим символ $\otimes$ в клетку $(i(\xi_1), j(\xi_1))$. Далее мы поместим символ $+$ во все квадраты, которые лежат в столбце $j(\xi_1)$, ниже диагонали и выше квадрата $(i(\xi_1), j(\xi_1))$. Мы поместим символ $-$ во все квадраты, которые лежат в строке $i(\xi_1)$, ниже диагонали и правее квадрата $(i(\xi_1), j(\xi_1))$.

После этой процедуры мы возьмём следующий корень ξ_2 в $\mathcal{S}$. Мы поместим символ $\otimes$ в квадрат $(i(\xi_2), j(\xi_2))$, который, как легко видеть, не заполнен после первого шага. Аналогично случаю корня ξ_1 мы поместим символы $+$ и $-$ в матрицу, используя следующее дополнительное правило: если для некоторого k одна из двух клеток $(k, j(\xi_2))$, $(i(\xi_2), k)$ уже заполнена, то мы не заполняем другую клетку.

Мы продолжаем эту процедуру для всех остальных корней $\xi \in \mathcal{S}$. Мы поместим символ $\bullet$ во все незаполненные клетки ниже диагонали. Заметим, что корням из Π отвечают клетки, заполненные символами $\otimes$, $+$ и $\bullet$.

Пример 1 (начало). $\sigma = (1,4)(2,7)(3,6)$ в симметрической группе S_7 отвечает допустимой диаграмме

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
 & & & & & & \\ \hline
+ & & & & & & \\ \hline
+ & + & & & & & \\ \hline
\otimes & - & - & & & & \\ \hline
\bullet & + & + & \bullet & & & \\ \hline
\bullet & + & \otimes & \bullet & - & & \\ \hline
\bullet & \otimes & - & \bullet & - & - & \\ \hline
\end{array}
$$

Диаграмма строится в 4 шага:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
 & & & & & & & \\ \hline
+ & & & & & & & \\ \hline
+ & & & & & & & \\ \hline
\otimes & - & - & & & & & \\ \hline
 & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
 & & & & & & \\ \hline
+ & & & & & & \\ \hline
+ & + & & & & & \\ \hline
\otimes & - & - & & & & \\ \hline
 & + & & & & & \\ \hline
 & + & & & & & \\ \hline
 & \otimes & - & & - & - & \\ \hline
\end{array}
\Rightarrow
$$

$\Rightarrow$

$+$						
$+$	$+$					
$\otimes$	$-$	$-$				
	$+$	$+$				
	$+$	$\otimes$		$-$		
	$\otimes$	$-$		$-$	$-$	

$\Rightarrow$

$+$						
$+$	$+$					
$\otimes$	$-$	$-$				
$\bullet$	$+$	$+$	$\bullet$			
$\bullet$	$+$	$\otimes$	$\bullet$	$-$		
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\bullet$	$-$	$-$	

В этом примере $\mathcal{S}=\{\alpha_{14},\alpha_{27},\alpha_{36}\}$, $\mathcal{M}=\{\alpha_{15},\alpha_{16},\alpha_{17},\alpha_{45},\alpha_{46},\alpha_{47}\}$, $\Pi=\Delta^+\setminus\{\alpha_{24},\alpha_{34},\alpha_{37},\alpha_{56},\alpha_{57},\alpha_{67}\}$. В следующих замечаниях 3-5 мы переформулируем теоремы этого параграфа в терминах допустимых диаграмм.

Замечание 3. В соответствии с теоремой 1.1 поляризация $\mathfrak{p}_\sigma$ натянута на $\{y_{it}\}$, для которых квадрат (i,t) заполнен одним из символов $\otimes$, $\bullet$ или $+$ в соответствующей допустимой диаграмме.

Замечание 4. Из теоремы 1.2 и замечания 2, $\dim\Omega(f)=l(\sigma)-s=|\Delta^+|-|M|-s$. Мы видим, что $\dim\Omega(f)$ равна числу $\pm$ в допустимой диаграмме.

Замечание 5. Пусть квадрат (i,t), $t<i$, заполнен символом $\bullet$ (т.е. $\varepsilon_t-\varepsilon_i\in\mathcal{M}$). Будем говорить, что (i,t) имеет тип 0 (соотв. тип 1), если корень $\varepsilon_t-\varepsilon_i$ из $\mathcal{M}$ имеет тип 0 (соотв. тип 1). Легко видеть, что (i,t) имеет тип 0, если нет символа $\otimes$ в i-ой строке, слева от (i,t). Если такой символ $\otimes$ существует, то (i,t) имеет тип 1. В примере 1 $(5,4)$ имеет тип 0, но $(6,4)$ и $(7,4)$ имеют тип 1.

Заметим, что, если (i,t) заполнен символом $\bullet$ и имеет тип 1, то $a<k<t<i$ где $a=\sigma(t)$ и как выше $k=\sigma_{t-1}(i)=\sigma(i)$. Квадраты (t,a) и (i,k) заполнены символом $\otimes$. В примере 1 квадрат $(7,4)$ заполнен символом $\bullet$ и имеет тип 1, $a=1$ и $k=2$. Квадраты $(4,1)$ и $(7,2)$ заполнены символом $\otimes$. Конец замечания.

Пример 1 (окончание). Определяющий идеал $\mathcal{I}(\Omega(f))$ в примере 1 порождается элементами D_m-c_m, где $1\leqslant m\leqslant 3$ и $c_m\neq 0$, и $Q_{i,t}$, соответствующими парам $\{(i,t)\}$, заполненным символом $\bullet$. Вот порождающие многочлены в примере 1:

$$D_1=y_{41},\quad Q_{5,1}=y_{51},\quad Q_{6,1}=y_{61},\quad Q_{7,1}=y_{71},$$

$$D_2 = y_{72}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} y_{62} & y_{63} \\ y_{72} & y_{73} \end{vmatrix}, \quad Q_{5,4} = \begin{vmatrix} y_{52} & y_{53} & y_{54} \\ y_{62} & y_{63} & y_{64} \\ y_{72} & y_{73} & y_{74} \end{vmatrix},$$

$$Q_{6,4} = \begin{vmatrix} y_{62} & y_{64} \\ y_{72} & y_{74} \end{vmatrix} y_{41} + \begin{vmatrix} y_{62} & y_{63} \\ y_{72} & y_{73} \end{vmatrix} y_{31},$$

$$Q_{7,4} = y_{74}y_{41} + y_{73}y_{31} + y_{72}y_{21}.$$

Пример 2. σ – подстановка максимальной длины, т.е. $\sigma = (1,n)(2,n-1)\cdots(k,n-k+1)$, где $k = [\frac{n}{2}]$. Ассоциированная коприсоединённая орбита является регулярной орбитой (т.е. орбитой максимальной размерности). Определяющий идеал $\mathcal{I}(\Omega(f))$ порождается $D_{i,n-i+1} - D_{i,n-i+1}(f)$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Пример 3. $\sigma = (1,n-1)(2,n)(3,n-3)\cdots(k,k+1)$. Ассоциированная коприсоединённая орбита этой инволюции является субрегулярной орбитой (т.е. орбитой размерности $\dim(\mathrm{reg.\,orbit})-2$, см. [4]). Определяющий идеал $\mathcal{I}(\Omega(f))$ порождается

$$D_{i,n-i+1} - D_{i,n-i+1}(f), \;\; 3 \leqslant i \leqslant k,$$

y_{n1}, $y_{n-1,1} - f(y_{n-1,1})$, $y_{n2} - f(y_{n2})$, $z = y_{n,n-1}y_{n-1,1} + y_{n,n-2}y_{n-2,1} + \ldots + y_{n2}y_{21}$. Ниже приведены допустимые диаграммы для примеров 2 и 3 для $n = 6$.

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$+$	$\otimes$			
$+$	$\otimes$	$-$	$-$		
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$+$	$\otimes$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$	$\bullet$	

2. Поляризация и размерность орбиты

Цель этого параграфа – доказать теоремы 1.1 и 1.2. С помощью формы Киллинга отождествим подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ со своим сопряженным пространством. Это отождествление позволяет определить форму Киллинга на $\mathfrak{h}^*$. Заметим, что из условия $\sigma^2 = \mathrm{id}$ вытекает $(\xi_i, \xi_j) = 0$ для всех различных ξ_i, ξ_j в $\mathcal{S}$.

Лемма 2.1. *Пусть $\eta \in \Delta^+$ и $t = j(\eta)$. Мы утверждаем:*

1) если $\sigma_{t-1}(\eta) > 0$ (т.е. $\eta \in \Pi^{(t)}$), то $\sigma_k(\eta) > 0$ для всех $0 \leqslant k \leqslant t-1$;

2) если $\sigma_t(\eta) > 0$, то $\sigma_{t-1}(\eta) > 0$.

Доказательство. Мы докажем утверждение 1). Утверждение 2) доказывается аналогично. Если $\eta \in \mathcal{S}$, то $r_m(\eta) = \eta$ для всех m. Отсюда вытекает 1).

Предположим, что $\eta \in \Delta^+ \setminus \mathcal{S}$. Имеет место один из следующих случаев:

i) $(\eta, \xi) = 0$ для всех $\xi \in \mathcal{S}$;

ii) существует единственный $\xi' \in \mathcal{S}$ такой, что $(\eta, \xi') \neq 0$ и $(\eta, \xi) = 0$ для всех $\xi \in \mathcal{S} \setminus \{\xi'\}$;

iii) существуют ровно два $\xi', \xi'' \in \mathcal{S}$ такие, что $(\eta, \xi') \neq 0$, $(\eta, \xi'') \neq 0$ и $(\eta, \xi) = 0$ для всех $\xi \in \mathcal{S} \setminus \{\xi', \xi''\}$.

Утверждение 1) тривиально в случае i). В случае ii) вложим y_η в подалгебру $\mathrm{span}\{y_\gamma |\ \gamma \in \Delta^+, \gamma \in \mathbb{Z}\eta + \mathbb{Z}\xi'\}$, которая изоморфна $\mathfrak{ut}(3, K)$. Доказательство сводится к рассмотрению частного случая $\mathfrak{n} = \mathfrak{ut}(3, K)$ и $\mathcal{S} = \{\alpha\}$, где α – один из положительных корней $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$.

В случае iii) вложим y_η в подалгебру $\mathrm{span}\{y_\gamma |\ \gamma \in \Delta^+, \gamma \in \mathbb{Z}\eta + \mathbb{Z}\xi' + \mathbb{Z}\xi''\}$, которая изоморфна $\mathfrak{ut}(4, K)$. Доказательство сводится к рассмотрению частного случая $\mathfrak{n} = \mathfrak{ut}(4, K)$ и $\mathcal{S}$ совпадает с одним из следующих подмножеств $\mathcal{S}_1 = \{\alpha_{14}, \alpha_{23}\}$, $\mathcal{S}_2 = \{\alpha_{13}, \alpha_{24}\}$, $\mathcal{S}_3 = \{\alpha_{12},\ \alpha_{34}\}$. □

Лемма 2.2. *Для любого $\gamma' \in \mathcal{C}_-$ существует единственный $\gamma \in \mathcal{C}_+$ такой, что $\gamma + \gamma' \in \mathcal{S}$. Соответствие $\gamma' \mapsto \gamma$ биективно.*

Доказательство проводится аналогично лемме 2.1 с применением редукции к унитреугольной подалгебре Ли меньшего размера. □

Доказательство теоремы 1.1.

1) Покажем, что $\mathfrak{p}_\sigma$ – подалгебра. Достаточно показать, что если $\gamma, \gamma' \in \Pi$ и $\gamma + \gamma' \in \Delta^+$, то $\gamma + \gamma' \in \Pi$. Пусть $j(\gamma) = t$, $j(\gamma') = t'$ и $t < t'$. Тогда $j(\gamma + \gamma') = t$. Поскольку $\gamma \in \Pi$, то $\sigma_{t-1}(\gamma) > 0$. Из леммы 2.1 заключаем $\sigma_{t-1}(\gamma') > 0$. Следовательно, $\sigma_{t-1}(\gamma + \gamma') > 0$ и $\gamma + \gamma' \in \Pi$.

2) Покажем, что $\mathfrak{p}_\sigma$ является изотропным подпространством. Достаточно показать, что $(P + P) \cap \mathcal{S} = \emptyset$. Предположим противное: $\xi = \gamma + \gamma'$, где $\xi \in \mathcal{S}$, $\gamma, \gamma' \in \Pi$. Пусть $t = j(\gamma) < t' = j(\gamma')$.

Из леммы 2.1 вытекает $\sigma_t(\gamma') > 0$. С другой стороны, поскольку $\gamma \in \Pi$, то

$$\sigma_t(\gamma') = \sigma_{t-1} r_\xi(\gamma') = -\sigma_{t-1}(\gamma) < 0.$$

Противоречие.

3) Покажем, что $\mathfrak{p}_\sigma$ – максимальное изотропное подпространство. Предположим противное. Пусть $\mathfrak{p}_\sigma + Ka$ – изотропное подпространство, где

$$a = \sum_{\gamma' \in \mathcal{C}_-} c_{\gamma'} y_{\gamma'} \neq 0.$$

Предположим, что $c_{\gamma'_0} \neq 0$ для некоторого $\gamma'_0 \in \mathcal{C}_-$. Существует корень $\gamma_0 \in \mathcal{C}_+ \subset \Pi$ такой, что $\gamma_0 + \gamma'_0 \in \mathcal{S}$ и $\gamma_0 + \gamma' \notin \mathcal{S}$ для всех $\gamma' \in \mathcal{C}_- \setminus \{\gamma'_0\}$. Тогда

$$0 = f([y_{\gamma_0}, a]) = f\left(\sum_{\gamma' \in \mathcal{C}_-} c_{\gamma'} y_{\gamma_0 + \gamma'} \right) = c_{\gamma'_0} f(y_{\gamma_0 + \gamma'_0}).$$

Это противоречит $f(y_{\gamma_0 + \gamma'_0}) \neq 0$. Наконец, из пунктов 1,2,3 заключаем, что $\mathfrak{p}_\sigma$ – поляризация для всех $f \in X_\sigma$. □

Доказательство теоремы 1.2. Размерность любого максимального изотропного подпространства для кососимметрической формы $\langle x, y \rangle_f = f([x, y])$ равна $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{n} + \dim \mathfrak{n}^f)$, где $\mathfrak{n}^f$ – алгебра Ли стабилизатора f. Отсюда

$$\begin{aligned} \dim \Omega(f) &= \dim \mathfrak{n} - \dim \mathfrak{n}^f = 2 \ \operatorname{codim} \ \mathfrak{p}_\sigma \\ &= 2|\mathcal{C}_-| = |\mathcal{C}_+| + |\mathcal{C}_-| = |\Delta^+| - |\mathcal{M}| - |\mathcal{S}|. \end{aligned} \tag{4}$$

Из замечания 4 $|\mathcal{M}| = |\Delta^+_\sigma|$. Следовательно, $|\mathcal{M}| = |\Delta^+| - l(\sigma)$. Подставляя в (4), получаем $\dim \Omega(f) = l(\sigma) - |\mathcal{S}| = l(\sigma) - s(\sigma)$. □

3. Определяющий идеал орбиты

В этом параграфе мы докажем теорему 1.4 об определяющем идеале орбиты, ассоциированной с инволюцией. Пусть $f \in X_\sigma$. Обозначим через $\mathcal{I}$ идеал в симметрической алгебре $S(\mathfrak{n})$, порождённый $Q_{i,t}$, $\varepsilon_t - \varepsilon_i \in \mathcal{M}$, и $D_m - D_m(f)$, $1 \leqslant m \leqslant s$.

Наша цель – доказать, что $\mathcal{I}$ совпадает с определяющем идеалом $\mathcal{I}(\Omega(f))$ орбиты $\Omega(f)$. Доказательство разбивается на несколько шагов:

1) идеал $\mathcal{I}$ аннулируется в f (предложение 3.1);

2) идеал $\mathcal{I}$ простой и $\dim(\operatorname{Ann}\mathcal{I}) = \dim\Omega$ (предложение 3.7);

3) идеал $\mathcal{I}$ в $S(\mathfrak{n})$ инвариантен относительно присоединённого действия группы N (предложение 3.8).

Предложение 3.1. *Идеал $\mathcal{I}$ аннулируется в f.*

Доказательство. Легко видно, что элементы $D_m - D_m(f)$ аннулируются в f. Если квадрат (i,t), $i > t$, заполнен символом $\bullet$ и имеет тип 0, то $Q_{i,t} = D_{i,t}$. Все элементы i-ой строки $D_{i,t}$ аннулируются в f. Отсюда $Q_{i,t}(f) = 0$.

Предположим, что квадрат (i,t), $i > t$, заполнен символом $\bullet$ и имеет тип 1. Как в замечании 5, $k = \sigma_{t-1}(i) = \sigma(i)$, $a = \sigma(t)$ и $a < k < t < i$. Положим $J = J(k,t)$, $I = I(k,t)$ (см. §1). Разложим

$$\begin{aligned}
&J = \{a,t\} \sqcup \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2, \text{ где}\\
&\Lambda_1 = \{j \in J:\ k < \sigma(j) < t\}\\
&\Lambda_2 = \{j \in J:\ \sigma(j) > t\}.
\end{aligned}\tag{5}$$

Представим Λ_1 в виде объединений $\Lambda_1 = \Lambda_{1,0} \sqcup \Lambda_{1,1}$, где

$$\Lambda_{1,0} = \{j \in \Lambda_1:\ 1 \leqslant j < k\},$$

$$\Lambda_{1,1} = \{j \in \Lambda_1:\ k < j < t\}.$$

Подмножество $\Lambda_{1,1}$ инвариантно относительно действия σ.

Заметим, что поскольку $\sigma(i) = t$, то $i = \sigma(t)$ и $k \in \Lambda_2$. Имеем

$$\begin{aligned}
&J = J(k,t) = \{a,t\} \sqcup \Lambda_{1,0} \sqcup \Lambda_{1,1} \sqcup \Lambda_2,\\
&I = I(k,t) = \{k,t\} \sqcup \sigma\Lambda_{1,0} \sqcup \Lambda_{1,1} \sqcup \sigma\Lambda_2,\\
&I \cap J = \{k,t\} \sqcup \Lambda_{1,1}.
\end{aligned}\tag{6}$$

Как в (3), разложим $D_{k,t}(\tau)$ по степеням τ. Обозначим

$$\begin{aligned}
J_0 &= J \setminus I = \{a\} \sqcup \Lambda_{1,0} \sqcup \Lambda_2 \setminus \{k\},\\
I_0 &= I \setminus J = \sigma\Lambda_{1,0} \sqcup \sigma\Lambda_2.
\end{aligned}\tag{7}$$

Получаем

$$\begin{aligned}
Q_{i,t} = P_{k,t,1} &= \sum_{j \in I\cap J} \epsilon(j) M_{I_0 \sqcup \{j\}}^{J_0 \sqcup \{j\}}\\
&= \epsilon(t) M_{I_0 \sqcup \{t\}}^{J_0 \sqcup \{t\}} + \sum_{j \in I\cap J,\ j \neq t} \epsilon(j) M_{I_0 \sqcup \{j\}}^{J_0 \sqcup \{j\}},
\end{aligned}\tag{8}$$

где $\epsilon(j) = \pm 1$. Минор $M_{I_0 \sqcup \{t\}}^{J_0 \sqcup \{t\}}$ аннулируется в f, поскольку его t-ый столбец аннулируется в f. Каждый минор $M_{I_0 \sqcup \{j\}}^{J_0 \sqcup \{j\}}$, $j \in I \cap J$ и $j \neq t$, аннулируется в f, поскольку его a-ый столбец аннулируется в f. Получаем $Q_{i,t}(f) = 0$. □

Замечание 6. Если квадрат (i,t) заполнен символом • и имеет тип 1, то многочлен $P_{k,t,0}$ совпадает с $M_{I_0}^{J_0}$. Этот минор аннулируется в f, поскольку все его элементы a-го столбца аннулируются в f.

Пусть $A = (a_{ij})$ – $n \times n$-матрица с элементами a_{ij} из некоторой коммутативной области $\mathcal{C}$.

Лемма 3.2. *Пусть I, J – два подмножества в $\{1, \ldots, n\}$ и $|I| = |J|$. Предположим, что $J = J_1 \sqcup J_2$, $I = I_1 \sqcup I_2$, где $|I_1| = |J_1|$.*

1) Пусть $S \subset J_2$. Следующее тождество имеет место для миноров матрицы A:

$$M_{I_1}^{J_1} M_I^J = \sum_{T \subset I_2,\ |T| = |S|} \epsilon(T,S) M_{I_1 \sqcup T}^{J_1 \sqcup S} M_{I \setminus T}^{J \setminus S}. \tag{9}$$

2) Пусть $T \subset I_2$. Следующее тождество имеет место для миноров матрицы A:

$$M_{I_1}^{J_1} M_I^J = \sum_{S \subset J_2,\ |T| = |S|} \epsilon(T,S) M_{I_1 \sqcup T}^{J_1 \sqcup S} M_{I \setminus T}^{J \setminus S}. \tag{10}$$

Здесь $\epsilon(T,S) = \pm 1$. Знак зависит от выбора T, S, I_1, I_2, J_1, J_2.

Доказательство. Мы можем предположить, что a_{ij} – переменные. Пусть M_I^J – минор матрицы A с системой столбцов J и системой строк I. Рассмотрим определитель

$$\widetilde{M}_{I_2}^{J_2} = \det(\tilde{a}_{ij})$$

размера $|I_2| = |J_2|$ с элементами

$$\tilde{a}_{ij} = M_{I_1 \sqcup \{i\}}^{J_1 \sqcup \{j\}}, \text{ где } j \in J_2, i \in I_2.$$

Применим формулу Лапласа:

$$\widetilde{M}_{I_2}^{J_2} = \sum_{T \subset I_2,\ |T| = |S|} \pm \widetilde{M}_T^S \widetilde{M}_{I_2 \setminus T}^{J_2 \setminus S}. \tag{11}$$

Имеет место формула

$$\left(M_{I_1}^{J_1}\right)^{|J_2|-1} M_I^J = \pm \widetilde{M}_{I_2}^{J_2}. \tag{12}$$

Докажем (12). Элементарными преобразованиями можно получить нули в местах $I_1 \times J_2$ и $I_2 \times J_1$, сохраняя элементы в $I_1 \times J_1$. Тогда

$$M_I^J = \pm M_{I_1}^{J_1} \overline{M}_{I_2}^{J_2},$$

где $\overline{M}_{I_2}^{J_2} = \det(\overline{a}_{ij})$, $\overline{a}_{ij} \in \mathrm{Fract}(\mathcal{C})$ и $\tilde{a}_{ij} = \pm \overline{a}_{ij} M_{I_1}^{J_1}$. Получаем

$$\widetilde{M}_{I_2}^{J_2} = \pm \left(M_{I_1}^{J_1}\right)^{|J_2|} \overline{M}_{I_2}^{J_2} = \pm \left(M_{I_1}^{J_1}\right)^{|J_2|-1} M_{I_1}^{J_1} \overline{M}_{I_2}^{J_2}$$

$$= \left(M_{I_1}^{J_1}\right)^{|J_2|-1} M_I^J.$$

Это доказывает (12). Подставляя (12) в (11), получаем:

$$\left(M_{I_1}^{J_1}\right)^{|J_2|-1} M_I^J$$

$$= \sum_{T \subset I_2,\ |T|=|S|} \epsilon(T,S) \left(M_{I_1}^{J_1}\right)^{|S|-1} M_{I_1 \sqcup T}^{J_1 \sqcup S} \left(M_{I_1}^{J_1}\right)^{|J_2 \setminus S|-1} M_{I \setminus T}^{J \setminus S}.$$

Сокращая на $\left(M_{I_1}^{J_1}\right)^{|J_2|-2}$ в левой и правой частях этого равенства, мы получаем (9). Утверждение 2) доказывается аналогично. $\square$

Пусть $C = \tau^m(c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + \ldots)$, $c_0 \neq 0$, – ненулевой многочлен относительно τ с коэффициентами в некоторой коммутативной области $\mathcal{C}$. Будем называть m нижней степенью C. Легко видеть, что $m(AB) = m(A)m(B)$.

Определение 3.3. *Будем называть представление C в виде суммы $C = A_1 + \ldots + A_k$ многочленов $A_i \in \mathcal{C}[\tau]$ допустимым представлением, если $m(C) \leqslant m(A_i)$ для всех ненулевых A_i.*

Замечание 7. Пусть $D = \tau^m(d_0 + d_1\tau + d_2\tau^2 + \ldots)$, $A_i = \tau^{m(A_i)}(a_{i,0} + a_{i,1}\tau + \ldots)$, $B_i = \tau^{m(B_i)}(b_{i,0} + b_{i,1}\tau + \ldots)$ и C как выше. Пусть $D, C \neq 0$. Если $DC = \sum A_i B_i$ – допустимое представление, то

$$d_0 c_0 = {\sum}' a_{i,0} b_{i,0}, \tag{13}$$

$$d_0c_1 = -d_1c_0 + \sum\nolimits' (a_{i,1}b_{i,0} + a_{i,0}b_{i,1}) + \sum\nolimits'' a_{i,0}b_{i,0}, \qquad (14)$$

где сумма $\sum'$ означает сумму по тем i, что $m(D)+m(C) = m(A_i)+m(B_i)$; сумма $\sum''$ означает сумму по тем i, что $m(D)+m(C)+1 = m(A_i)+m(B_i)$.

Замечание 8. Пусть A, B, C, D как выше. Если все $a_{i,0}$, $a_{i,1}$ лежат в некотором идеале $\mathcal{I}$ кольца C и если d_0 обратим по модулю $\mathcal{I}$, то c_0, c_1 лежат в идеале $\mathcal{I}$.

Определение 3.4. *Пусть $v = (v_1 < \ldots < v_n)$ и $u = (u_1 < \ldots < u_n)$ – два возрастающих n-мерных вектора. Будем говорить, что $v \leqslant u$, если $v_i \leqslant u_i$ для всех i. Соответственно, $v < u$, если $v \leqslant u$ и $v \neq u$. Для $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I| = |J|$, будем говорить, что $I \geqslant J$, если $\mathrm{ord}(I) \geqslant \mathrm{ord}(J)$ в указанном выше смысле.*

Лемма 3.5. *Пусть I_1, J_1, I, J как в лемме 3.2. Предположим, что $I \geqslant J$ и $I_1 \geqslant J_1$. Утверждается, что разложения (9) и (10) являются допустимыми разложениями над $S(\mathfrak{n})$.*

Доказательство даётся для (9). Случай формулы (10) аналогичен. В силу предположений левая часть (9) отлична от нуля (см. замечание 1). Пусть m (соотв. m_T) нижняя степень левой части (9) (соотв. ненулевого T-го слагаемого в правой части). Покажем, что $m \leqslant m_T$. По определению

$$m = |J_1| + |J| - |I_1 \cap J_1| - |I \cap J|,$$

$$m_T = |J_1 \sqcup S| + |J \setminus S| - |(I_1 \sqcup T) \cap (J_1 \sqcup S)| - |(I \setminus T) \cap (J \setminus S)|.$$

Поскольку

$$|J_1| + |J| = |J_1 \sqcup S| + |J \setminus S|,$$

$$|(I_1 \sqcup T) \cap (J_1 \sqcup S)| = |I_1 \cap J_1| + |I_1 \cap S| + |T \cap J_1| + |T \cap S|,$$

$$(I \setminus T) \cap (J \setminus S)| = |I \cap J| - |I \cap S| - |T \cap J| + |T \cap S|,$$

то $m_T - m = |I \cap S| + |T \cap J| - |I_1 \cap S| - |T \cap J_1| - 2|T \cap S| = |I_2 \cap S| + |T \cap J_2| - 2|T \cap S| = |T \cap (J_2 \setminus S)| + |(I_2 \setminus T) \cap S| \geqslant 0$. $\square$

Лемма 3.6. *Пусть $J \subset \{1, \ldots, n\}$. Предположим, что J обладает следующим свойством: если $j \in J$ и $j' < j$, $\sigma(j') > \sigma(j)$, то $j' \in J$. Обозначим $P_\mu = P^J_{I,\mu}$, $\mu \in \{0, 1\}$ (см. (2)). Пусть $I \subset \{1, \ldots, n\}$ и $|I| = |J|$. Утверждается:*

1) *если $I = \sigma(J)$, то $P_0 - P_0(f) \in \mathcal{I}$, $P_0(f) \neq 0$ для любого $f \in X_\sigma$;*

2) *если* $I > \sigma(J)$, *то* $P_\mu \in \mathcal{I}$ *для* $\mu \in \{0,1\}$.

Доказательство. Во первых, отметим, что из условия на J вытекает, что $\sigma(J) \geqslant J$ в смысле определения 3.4. Из замечания 1 вытекает, что $M_I^J(\tau) \neq 0$ и его нижняя степень равна $|J \setminus I| = |I \setminus J|$.

Будем доказывать утверждение, применяя индукцию по $|I|$. Легко видеть, что утверждение верно для $|I| = 1$. Предположим, что утверждение верно для $|I| < m$. Докажем утверждение для $|I| = m$.

Случай 1. Пусть $I = \sigma(J)$. Легко видеть, что $P_0(f) \neq 0$. Положим $t = \max J$, $\sigma(t) = a$. Обозначим

$$J_1 = \{j \in J :\ \sigma(j) > a\}, \quad I_1 = \sigma(J_1).$$

Пункт 1a. $|J_1| < |J| - 1$. Обозначим

$$M^{(1)}(\tau) = M_{I_1}^{J_1}(\tau), \quad M(\tau) = M_I^J(\tau),$$

$$M^{(\beta)}(\tau) = M_{I_1 \sqcup \{\beta\}}^{J_1 \sqcup \{t\}}(\tau),\ M^{(*\beta)}(\tau) = M_{I \setminus \{\beta\}}^{J \setminus \{t\}}(\tau).$$

Если $J_1 = \emptyset$, то положим $M^{(1)}(\tau) = 1$. Выпишем допустимое разложение (9) с $S = \{t\}$ для матрицы $\Phi(\tau)$:

$$M^{(1)}(\tau)M(\tau) = \sum_{\beta \in I(\tau),\ \beta \leqslant a} \epsilon(\beta) M^{(\beta)}(\tau) M^{(*\beta)}(\tau) =$$

$$\pm M^{(a)}(\tau)M^{(*a)}(\tau) + \sum_{\beta \in I(\tau),\ \beta > a} \epsilon(\beta) M^{(\beta)}(\tau) M^{(*\beta)}(\tau). \tag{15}$$

Обозначим через $P_0^{(1)}$, $P_0^{(\beta)}$, $P_0^{(*\beta)}$ младшие коэффициенты для $M^{(1)}(\tau)$, $M^{(\beta)}(\tau)$, $M^{(*\beta)}(\tau)$. Напомним, что P_0 – младший коэффициент $M(\tau)$. Из (13) получаем

$$P_0^{(1)} P_0 = {\sum_{\beta \in I(\tau),\ \beta \leqslant a}}' P_0^{(\beta)} P_0^{(*\beta)}. \tag{16}$$

Подмножество J_1 также удовлетворяет условиям леммы. По предположению индукции $P_0^{(1)} - P_0^{(1)}(f) \in \mathcal{I}$, $P_0^{(1)}(f) \neq 0$. Левая часть (16) отлична от нуля в f.

Подмножество $J \setminus \{t\}$ также удовлетворяет условия леммы. Если $\beta < a$, то $I \setminus \{a\} < I \setminus \{\beta\}$ (в смысле определения 3.4). По предположению индукции $P_0^{(*\beta)} \in \mathcal{I}$ для $\beta < a$. Из леммы 3.1

$P_0^{(*\beta)}(f) = 0$. Рассматривая значения левой и правой части (16) в $f \in X_\sigma$, мы заключаем, что член $\beta = a$ встречается в $\sum'$:

$$P_0^{(1)} P_0 = \pm P_0^{(a)} P_0^{(*a)} + \sum\nolimits'_{\beta \in I, \beta < a} P_0^{(\beta)} P_0^{(*\beta)}. \qquad (17)$$

По предположению индукции $\pm P_0^{(a)}$, $\pm P_0^{(*a)}$ удовлетворяют 1). То есть $P - P(f) \in \mathcal{I}$, $P(f) \neq 0$ для любого из этих двух многочленов. Это доказывает $P_0 - P_0(f) \in \mathcal{I}$ и $P_0(f) \neq 0$ в пункте 1а.

Пункт 1б. $|J_1| = |J| - 1$. Как выше, $t = \max J$, $a = \sigma(t) = \min I$. В пункте 1б $J = J(a,t)$, $I = I(a,t)$ (см. §1). Если $a > t$, то P_0 является одним из миноров D_p, $1 \leqslant p \leqslant s$. Это доказывает утверждение 1).

Пусть $a \leqslant t$. Определим I_1 и J_1 как в пункте 1а. В пункте 1б $J_1 = J - \{t\}$, $I_1 = I - \{a\}$ и $P_0 = P_0^{(1)}$. Подмножества I_1, J_1 удовлетворяют предположениям индукции. Утверждение 1) верно для $P_0^{(1)}$. Следовательно, 1) верно для P_0.

Случай 2. $I > \sigma(J)$. Существуют $k \in I$ и $b \in J$ такие, что $k \notin \sigma(J)$ и $k > \sigma(b)$. Аналогично случаю 1 обозначим

$$J_1 = \{j \in J : \ \sigma(j) > k\}, \quad I_1 = \sigma(J_1), \quad P^{(1)} = P_{I_1,0}^{J_1}.$$

Пункт 2а. $|J_1| < |J| - 1$. Выпишем допустимое разложение (10) с $T = \{k\}$ для матрицы $\Phi(\tau)$:

$$M_{I_1}^{J_1}(\tau) M_I^J(\tau) = \sum_{\alpha \in J \setminus J_1} \epsilon(k) M_{I_1 \sqcup \{k\}}^{J_1 \sqcup \{\alpha\}}(\tau) M_{I \setminus \{k\}}^{J \setminus \{\alpha\}}(\tau). \qquad (18)$$

Пары подмножеств I_1, J_1 и $I_1 \sqcup \{k\}$, $J_1 \sqcup \{\alpha\}$ удовлетворяют условиям леммы 1) и 2) соответственно. Следовательно, $P_0^{(1)} - P_0^{(1)}(f) \in \mathcal{I}$, $P_0^{(1)}(f) \neq 0$ и

$$P_{I_1 \sqcup \{k\}, \mu}^{J_1 \sqcup \{\alpha\}} \in \mathcal{I}$$

для $\mu \in \{0, 1\}$. Из (18) и замечания 8, $P_\mu \in \mathcal{I}$.

Пункт 2б. $|J_1| = |J| - 1$. В этом случае $I = I_1 \sqcup \{k\}$ и $k = \min I$. Как выше, $t = \max J$.

Если $b < t$, то мы рассмотрим $J_2 = \{j \in J : \ 1 \leqslant j < b\}$ и $I_2 = \sigma J_2$. Выпишем (9) для подмножеств $I_2 \subset I$, $J_2 \subset J$ и $S = \{b\}$. Доказательство может быть завершено аналогично пункту 2а.

Пусть $b = t$. Отсюда $J = J(k,t)$, $I = I(k,t)$. Если $k > t$, то квадрат (k,t) заполнен символом $\bullet$ в допустимой диаграмме; квадрат

(k,t) имеет тип 0. Минор $M_I^J(\tau)$ является однородным многочленом по τ. Имеем $P_0 = Q_{k,t} \in \mathcal{I}$ и $P_1 = 0$.

Если $k \leqslant t$, то квадрат (i,t), где $i = \sigma(k)$, заполнен символом $\bullet$ в допустимой диаграмме; квадрат (i,t) имеет тип 1. Это доказывает $P_1 = Q_{i,t} \in \mathcal{I}$.

Чтобы доказать $P_0 \in \mathcal{I}$, мы напомним, что пара I_1, J_1 удовлетворяет предположениям индукции. Обозначим $I_* = (I_1 \setminus \{t\}) \sqcup \{k\}$. Заметим, что $I_* > I_1$ и $P_0 = P_{I_*,0}^{J_1}$. Предположение индукции завершает доказательство. □

Предложение 3.7. *$\mathcal{I}$ – простой идеал и* $\dim(\operatorname{Ann}\mathcal{I}) = \dim\Omega(f)$.

Доказательство. Рассмотрим линейный порядок на множестве квадратов $\{(i,t):\ t < i\}$ допустимой диаграммы такой, что

1) если $t_1 < t$, то $(i_1, t_1) < (i,t)$;

2) если квадрат (i,t) заполнен символом $\bullet$ или символом $\otimes$, то $(i,t) > (i_1,t)$ для любого квадрата (i_1,t) заполненного символом $+$ или $-$.

3) $(i_1,t) < (i,t)$, если $i_1 > i$ в любом другом случае, не упомянутом в 1) и 2).

Построим систему элементов $\{\tilde{y}_{it}|\ i > t\}$ такую, что

i) любой $\tilde{y}_{it}$ имеет вид $\tilde{y}_{it} = y_{it} + v_{it}$, где v_{it} лежит в подалгебре в $S(\mathfrak{n})$, порождённой y_{i_1,t_1}, $(i_1,t_1) < (i,t)$;

ii) идеал $\mathcal{I}$ порождается элементами $\tilde{y}_{it} - \tilde{y}_{it}(f)$, где квадрат (i,t) заполнен символом $\otimes$, и элементами $\tilde{y}_{it}$, где квадрат (i,t) заполнен символом $\bullet$.

Из условия i) вытекает, что система элементов $\{\tilde{y}_{it}|\ i > t\}$ порождает симметрическую алгебру $S(\mathfrak{n})$, и из ii) вытекает, что факторалгебра $S(\mathfrak{n})$ по идеалу $\mathcal{I}$ изоморфна алгебре многочленов, порождённой $\{y_{it}\}$, где квадрат (i,t) заполнен символом $+$ или $-$ в допустимой диаграмме. Это доказывает, что идеал $\mathcal{I}$ простой и $\dim(\operatorname{Ann}\mathcal{I})$ равна числу $\pm$ в допустимой диаграмме. В силу замечания 4 $\dim(\operatorname{Ann}\mathcal{I}) = \dim\Omega(f)$.

Таким образом, достаточно построить требуемую систему $\{\tilde{y}_{it}|\ i > t\}$, удовлетворяющую i) и ii). Во-первых, мы положим $\tilde{y}_{it} = y_{it}$, если квадрат (i,j) заполнен символом $+$ или $-$.

Предположим, что квадрат (i,t) заполнен символом $\otimes$ или символом $\bullet$ типа 0. Разлагая $D_{i,t}$ по столбцу t, мы получаем $D_{k,t} = Ay_{it} + u_{it}$, где u_{it} как в i), и A совпадает с некоторой ненулевой константой a по модулю $\operatorname{mod}\mathcal{I}$ (см. лемму 3.6(1)). Положим

$\tilde{y}_{it} = y_{it} + a^{-1}u_{it}$.

Предположим, что квадрат (i,t) заполнен символом $\bullet$ и имеет тип 1. Как в замечании 5, мы обозначим $k = \sigma(i) < t$. Сохраним обозначения (5). Применяя (6) и (7), получаем (8). Отсюда

$$Q_{i,t} = \pm M_{I_0\sqcup\{t\}}^{J_0\sqcup\{t\}} + u_{it}, \tag{19}$$

где u_{it} лежит в подалгебре, порождённой y_{cd}, $d < t$. Пусть, как в лемме 3.1, $a = \sigma(t)$. Напомним, что $J_0 = \{a\} \sqcup \Lambda_{10} \sqcup (\Lambda_2 \setminus k)$, $I_0 = \sigma\Lambda_{10} \sqcup \sigma\Lambda_2$. Разложим $\Lambda_2 = \Lambda_{2,0} \sqcup \Lambda_{2,1}$, где

$$\Lambda_{2,0} = \{j \in \Lambda_2 :\ 1 \leqslant j < a\}, \quad \Lambda_{2,1} = \{j \in \Lambda_2 :\ a < j < t\}.$$

Пусть $\Lambda_{2,1} = \{k_1, \ldots, k_p\}$ и $\sigma\Lambda_{2,1} = \{i_1, \ldots, i_p\}$, где каждый $i_b = \sigma(k_b)$. По определению, $k \in \Lambda_{2,1}$ и $i \in \sigma\Lambda_{2,1}$. Заметим, что все квадраты $\{(i_m, t)\}$ заполнены символами $\bullet$ и имеют тип 1. Для удобства читателя мы приведём прямо сейчас

Пример 4. Приведённая ниже 10×10-диаграмма – допустимая для инволюции $\sigma = (1,10)(2,5)(3,7)(4,9)(6,8)$. Мы поместили номера столбцов в квадраты первой строки и номера сторок в квадраты первого столбца. Здесь мы выписываем разложения для $t = 7$ и $i = 9$. Отсюда, $a = 3$ и $k = 4$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	$+$									
3	$+$	$+$								
4	$+$	$+$	$+$							
5	$+$	$\otimes$	$-$	$-$						
6	$+$	$\bullet$	$+$	$+$	$\bullet$					
7	$+$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\bullet$	$-$				
8	$+$	$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$\otimes$	$\bullet$			
9	$+$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$		
10	$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	

$$\Lambda_1 = \Lambda_{1,0} = \{2\},\ \sigma\Lambda_{1,0} = \{5\},$$

$$\Lambda_{2,0} = \{1\},\ \sigma\Lambda_{2,0} = \{10\}, \quad \Lambda_{2,1} = \{6\},\ \sigma\Lambda_{2,1} = \{8\},$$

$$J_0 = \{1,2,3,7\},\ I_0 = \{5,8,9,10\}, \quad M_{I_0}^{J_0} = M_{5,8,9,10}^{1,2,3,6},$$

$$Q_{9,7} = -M^{1,2,3,6,7}_{5,7,8,9,10} - M^{1,2,3,4,6}_{4,5,8,9,10}.$$

Последняя формула для $Q_{9,7}$ есть разложение (19) для $i = 9$ и $t = 7$. Конец примера.

Мы продолжим доказательство. Применяя формулу (9) с $S = \Lambda_{1,0} \sqcup \{a\}$ для матрицы Φ, получаем

$$M^{\Lambda_{2,0}}_{\sigma\Lambda_{2,0}} M^{J_0 \sqcup \{t\}}_{I_0 \sqcup \{t\}} = \sum_{T \subset \sigma\Lambda_{1,0} \sqcup \sigma\Lambda_{2,1} \sqcup \{t\}} \pm M^{\Lambda_{2,0} \sqcup \Lambda_{1,0} \sqcup \{a\}}_{\sigma\Lambda_{2,0} \sqcup T} M^{(\Lambda_2 \setminus \{k\}) \sqcup \{t\}}_{I_0 \sqcup \{t\} \setminus T}. \tag{20}$$

Поскольку t больше любого числа из $\sigma\Lambda_{1,0}$ и меньше любого числа из $\sigma\Lambda_{2,1}$, то все миноры

$$M_T := M^{\Lambda_{2,0} \sqcup \Lambda_{1,0} \sqcup \{a\}}_{\sigma\Lambda_{2,0} \sqcup T},$$

где $T \subset \sigma\Lambda_{1,0} \sqcup \sigma\Lambda_{2,1} \sqcup \{t\}$ и $T \neq \sigma\Lambda_{1,0} \sqcup \{t\}$, лежат в идеале $\mathcal{I}$. Получаем

$$M^{\Lambda_{2,0}}_{\sigma\Lambda_{2,0}} M^{J_0 \sqcup \{t\}}_{I_0 \sqcup \{t\}} = \pm M^{\Lambda_{2,0} \sqcup \Lambda_{1,0} \sqcup \{a\}}_{\sigma\Lambda_{2,0} \sqcup \sigma\Lambda_{1,0} \sqcup \{t\}} M^{(\Lambda_2 \setminus \{k\}) \sqcup \{t\}}_{\sigma\Lambda_2} \bmod \mathcal{I}. \tag{21}$$

Первые миноры в правой и левой частях (21) суть ненулевые константы по модулю идеала $\mathcal{I}$ (см. лемму 3.6(1)). Мы имеем

$$M^{J_0 \sqcup \{t\}}_{I_0 \sqcup \{t\}} = \mathrm{const} \cdot M_i, \quad \text{где } M_i = M^{(\Lambda_2 \setminus \{k\}) \sqcup \{t\}}_{\sigma\Lambda_2} \bmod \mathcal{I}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (19), мы получаем

$$Q_{it} = c_{i,t} M_i + u_{i,t} \bmod \mathcal{I} \quad \text{где } c_{i,t} \in K^*.$$

Тогда

$$c^{-1}_{i,t} Q_{it} = M_i + c^{-1}_{i,t} u_{i,t}. \tag{23}$$

Разлагая M_i по последнему t-ому столбцу, мы получаем

$$M_i = \sum_{r=1}^{p} A^{(r)}_i y_{i_r,t} + v_{i,t}, \tag{24}$$

где v_{it} лежит в подалгебре, порождённой $y_{c,d}$, $d < t$, и $y_{c,t}$, где квадрат (c,t) заполнен символом $-$. Следовательно, $v_{i,t}$ лежит в подалгебре, порождённой $y_{c,d}$, где (c,d) меньше (i,t) в смысле порядка, определённого в начале доказательства.

Заметим, что матрица $A = \det(A^{(r)}_{i_m})^p_{r,m=1}$ обратима по модулю идеала $\mathcal{I}$ (см. лемму 3.6 и формулу (12)). Обозначим через $B =$

$(B_m^{(r)})$ обратную матрицу к A. Выпишем (23) и (24) для $i = i_m$, $1 \leqslant m \leqslant p$, затем подставим (24) в (23). Далее, умножим (23) на $B_s^{(q)}$ и просуммируем:

$$\sum_{q=1}^{p} B_m^{(q)} c_{i_q,t}^{-1} Q_{i_q,t} = y_{i_m,t} + w_{i_m,t} \in \mathcal{I}.$$

Наконец, положим $\tilde{y}_{i,t} = y_{i,t} + w_{i,t}$ для любого $i \in \sigma\Lambda_{21} = \{i_1, \dots .i_p\}$. Система $\{\tilde{y}_{i,t}\}$ удовлетворяет i), ii). □

Предложение 3.8. *Идеал $\mathcal{I}$ в $S(\mathfrak{n})$ инвариантен относительно присоединённого действия группы N.*

Доказательство. Утверждение предложения эквивалентно утверждению, что идеал $\mathcal{I}$ – пуассонов идеал в $S(\mathfrak{n})$ (относительно скобки Пуассона, для которой $\{x, y\} = [x, y]$, $x, y \in \mathfrak{n}$). Пусть $y = y_{p+1,p}$, где $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Достаточно доказать, что $\{y, P\} \in \mathcal{I}$ для любого стандартного образующего элемента P. Напомним, что, по определению, идеал $\mathcal{I}$ порождается $Q_{i,t}$, $\varepsilon_t - \varepsilon_i \in \mathcal{M}$, и $D_m - D_m(f)$, $1 \leqslant m \leqslant s$.

Случай 1. P равен D_m или $Q_{i,t}$, где квадрат (i, t) заполнен символом • и имеет тип 0. Тогда P – минор M_I^J матрицы Φ, где квадраты $I \times J$ расположены ниже диагонали и $I \geqslant \sigma(J)$. Легко видеть, что

$$\{y, M_I^J\} = \epsilon_1 M_{I_*}^J - \epsilon_2 M_I^{J_*}, \text{ где}$$

$$\epsilon_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } p \in I,\ p+1 \notin I, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\epsilon_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } p+1 \in J,\ p \notin J, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$I_* = (I \setminus \{p\}) \cup \{p+1\}, \quad J_* = (J \setminus \{p+1\}) \cup \{p\}.$$

Можно видеть, что $I_* > I \geqslant \sigma(J)$ и $I > \sigma(J_*)$. Из леммы 3.2, миноры $M_{I_*}^J$, $M_I^{J_*}$ лежат в $\mathcal{I}$. Отсюда, $\{y, M_I^J\} \in \mathcal{I}$.

Случай 2. Предположим, что $P = Q_{it}$ и квадрат (i, t) заполнен символом • и имеет тип 1.

Пункт 2a. Обозначим $[t] = \{1, \dots, t\}$ и $P_\mu = P_{I,\mu}^{[t]}$, где $\mu \in \{0, 1\}$. Из леммы 3.6, P_μ, $\mu \in \{0, 1\}$, лежат в идеале $\mathcal{I}$. В этом пункте мы покажем, что

$$\{y, P_\mu\} \in \mathcal{I},\ \mu \in \{0, 1\}.$$

Более точно,

$$\{y, P_0\} = c_0(P_*)_0, \tag{25}$$

$$\{y, P_1\} = c_1(P_*)_1 + c_2 y P_0, \tag{26}$$

где $c_0, c_1, c_2 \in \{0, 1, -1\}$, $P_* = P_{I_*}^{[t]}$, $I_* = (I \setminus \{p\}) \cup \{p+1\}$. В (25) и (26) $c_0 = c_1 = 0$, если условие $p \in I$, $p+1 \notin I$ не выполняется.

Доказательство проводится отдельно в каждом из 12-ти случаев, касающихся вхождения p, $p+1$ в I, $[t]$ (заметим, что случай $p \notin [t]$, $p+1 \in [t]$ невозможен).

Здесь мы приводим полное доказательство (25) и (26) в случае $p \in I$, $p+1 \notin I$, $p, p+1 \in [t]$. В остальных случаях доказательство аналогично.

Предположим, что набор I упорядочен по возрастанию. Обозначим $\Lambda = [t]$, $\Lambda_0 = \Lambda \setminus I$, $I_0 = I \setminus \Lambda$. Многочлен P_0 совпадает с минором $M_{I_0}^{\Lambda_0}$. Поскольку $p, p+1 \notin I_0$ и $p+1 \in \Lambda_0$, $p \notin \Lambda_0$, то

$$\{y, P_0\} = -M_{I_0}^{(\Lambda_0)_*}, \text{ где } (\Lambda_0)_* = (\Lambda_0 \setminus \{p+1\}) \cup \{p\}.$$

Минор $M_{I_0}^{(\Lambda_0)_*}$ совпадает с $(P_*)_0$.

Обозначим $F_0 = \Lambda \cap I$. Из предположений $p \in F_0$, $p+1 \notin F_0$. Имеем

$$P_1 = \sum_{\alpha \in F_0} \epsilon(\alpha) M_{I_0 \sqcup \{\alpha\}}^{\Lambda_0 \sqcup \{\alpha\}} = \epsilon(p) M_{I_0 \sqcup \{p\}}^{\Lambda_0 \sqcup \{p\}} + \sum_{\alpha \in F_0,\ \alpha \neq p} \epsilon(\alpha) M_{I_0 \sqcup \{\alpha\}}^{\Lambda_0 \sqcup \{\alpha\}}.$$

Здесь $\epsilon(\alpha) = (-1)^{i+j}$, где i равен номеру α в Λ и j равен номеру α в I. Прямыми вычислениями получаем

$$\{y, P_1\} = \epsilon(p) \left(M_{I_0 \sqcup \{p+1\}}^{\Lambda_0 \sqcup \{p\}} \pm y M_{I_0}^{J_0} \right) - \sum_{\alpha \in F_0,\ \alpha \neq p} \epsilon(\alpha) M_{I_0 \sqcup \{\alpha\}}^{(\Lambda_0 \setminus \{p+1\}) \sqcup \{p, \alpha\}}. \tag{27}$$

С другой стороны,

$$(P_*)_1 = \epsilon'(p+1) M_{I_0 \sqcup \{p+1\}}^{\Lambda_0 \sqcup \{p\}} + \sum_{\alpha \in F_0,\ \alpha \neq p} \epsilon'(\alpha) M_{I_0 \sqcup \{\alpha\}}^{(\Lambda_0 \setminus \{p+1\}) \sqcup \{p, \alpha\}}. \tag{28}$$

Здесь $\epsilon'(\alpha) = (-1)^{i'+j'}$, где i' равен номеру α в Λ и j' равен номеру α в $I_* = (I \setminus \{p\}) \cup \{p+1\}$. Аналогично, $\epsilon'(p+1) = (-1)^{i'+j'}$, где i' равен номеру $p+1$ в Λ и j' равен номеру $p+1$ в I_*. Сравнивая

(27) и (28), мы заключаем, что $\epsilon(p) = -\epsilon'(p+1)$ и $\epsilon(\alpha) = \epsilon'(\alpha)$ для $\alpha \neq p$, $\alpha \in F_0$. Получаем

$$\{y, P_1\} = -(P_*)_1 \pm yP_0.$$

Это доказывает (26).

Пункт 2б. Мы завершаем доказательство случая 2. Обозначим, как выше, $k = \sigma(i)$. Обозначим $J_1 = J'(k,t)$, $I_1 = I'(k,t)$, $J(k,t) = J_1 \sqcup \{t\}$, $I(k,t) = I_1 \sqcup \{k\}$ (см. §1). Напомним, что $Q_{i,t}$ есть второй коэффициент минора с системой столбцов $J(k,t)$ и системой строк $I(k,t)$ матрицы $\Phi(\tau)$. То есть

$$Q_{i,t} = P^{J_1 \sqcup \{t\}}_{I_1 \sqcup \{k\},1}.$$

Применим (9) для $J_1 \subset [t]$, $I_1 \subset I = \sigma[t] \sqcup \{k\}$ и $S = \{t\}$:

$$M^{J_1}_{I_1}(\tau) M^{[t]}_{I}(\tau) = \sum_{\beta \geqslant k,\ \beta \in I} \epsilon(\beta) M^{J_1 \sqcup \{t\}}_{I_1 \sqcup \{\beta\}}(\tau) M^{[t-1]}_{I \setminus \{\beta\}}(\tau) =$$

$$\epsilon(k) M^{J_1 \sqcup \{t\}}_{I_1 \sqcup \{k\}}(\tau) M^{[t-1]}_{\sigma[t-1]}(\tau) + \sum_{\beta > k,\ \beta \in I} \epsilon(\beta) M^{J_1 \sqcup \{t\}}_{I_1 \sqcup \{\beta\}}(\tau) M^{[t-1]}_{I \setminus \{\beta\}}(\tau). \quad (29)$$

Обозначим $m_1 = |I_1| = |J_1|$, $m = |I| = |J|$, $q_1 = |I_1 \cap J_1|$, $q = |I \cap J|$.

В соответствии с леммой 3.5, разложение (29) – допустимое разложение. Это означает, что младшая степень каждого слагаемого в правой части (29) больше или равна младшей степени левой части.

Мы покажем, что младшая степень первого члена в правой части совпадает с младшей степенью левой части. В самом деле:

$$\operatorname{ldeg}\left(M^{J_1}_{I_1}(\tau) M^{[t]}_{I}(\tau)\right) = \operatorname{ldeg}\left(M^{J_1}_{I_1}(\tau)\right)$$

$$+ \operatorname{ldeg}\left(M^{[t]}_{I}(\tau)\right) = (m_1 - q_1) + (m - q),$$

$$\operatorname{ldeg}\left(M^{J_1 \sqcup \{t\}}_{I_1 \sqcup \{k\}}(\tau) M^{[t-1]}_{\sigma[t-1]}(\tau)\right) = \operatorname{ldeg}\left(M^{J_1 \sqcup \{t\}}_{I_1 \sqcup \{k\}}(\tau)\right)$$

$$+ \operatorname{ldeg}\left(M^{[t-1]}_{\sigma[t-1]}(\tau)\right) = [(m_1+1) - (q_1+2)] + [(m-1) - (q-2)]$$

$$= (m_1 - q_1) + (m - q).$$

Это доказывает совпадение младших степеней. Из леммы 3.6, первые коэффициенты $M^{J_1}_{I_1}(\tau)$ и $M^{[t-1]}_{\sigma[t-1]}(\tau)$ обратимы по модулю

$\mathcal{I}$. Сравнивая коэффициенты в (29), мы получаем формулы типа (13) и (14). Формула (14) даёт выражение $Q_{i,t}$ как сумму многочленов вида $P^{[t]}_{I,\mu}$ и $P^{[t-1]}_{I',\mu}$, где $I > \sigma[t]$ и $I' > \sigma[t-1]$, с коэффициентами в $S(\mathfrak{n})$. Применяя пункт 1a, мы заключаем, что $\{y, Q_{i,t}\} \in \mathcal{I}$. $\square$

Доказательство теоремы 1.4 непосредственно вытекает из предложений 3.1, 3.7 и 3.8.

Литература

1. A. A. Kirillov, *Lectures on the orbit method*. Novosibisk (2002).
2. A. A. Kirillov, *Variations on the triangular theme*. — Amer. Math. Soc., Transl., **169** (1995), 43–72.
3. А. А. Кириллов, *Унитарные представления нильпотентных групп Ли*. — УМН, **17** (1962), 57–110.
4. M. V. Ignatev and A. N. Panov, *Coadjoint orbits for the group* UT$(7,K)$. `Math.RT/0603649`.
5. A. Melnikov, *B-Orbits in solutions to the equation $X^2 = 0$ in triangular matrices*. — J. Algebra, **223** (2000), 101–108.
6. Ж. Диксмье, *Универсальные обёртывающие алгебры*. Мир, М. (1978).
7. М. Гото, Ф. Гроссханс, *Полупростые алгебры Ли*, Мир, М. (1981).

Panov A. N. Involutions in S_n and associated coadjoint orbits.

In the paper we study the coadjoint orbits of the group $\mathrm{UT}(n,K)$ associated with involutions. We obtain a formula for dimension of the orbit. We construct a polarization for the canonical element of the orbit. We find a system of generators in the defining ideal of the orbit.

Самарский
государственный университет
E-mail: apanov@list.ru

Поступило 25 сентября 2007 г.