Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 349, 2007 г.

В. А. Койбаев

ГРУППА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТЯХ

1. Введение

Сети над полем [1] представляются как квадратные матрицы порядка n, элементами которых являются 0 или 1. Симметрическая группа S_n действует на множестве всех сетей (см.[1]), и это дает возможность получения информации о числе сетей [2]. Далее, можно показать ([1, 2]), что изучение всех D-сетей сводится к исследованию множества треугольных сетей. С другой стороны, группа S_n не действует на множестве треугольных сетей.

В настоящей заметке мы предлагаем свой взгляд на критерий сети, позволяющий определить группу $G(n)$, действующую на множестве всех треугольных сетей. Как оказалось, группа $G(n)$ совпадает с диэдральной группой (теорема 2). В заключение мы приводим пример, показывающий как введенная группа дает возможность извлечения количественной информации о некоторых множествах треугольных сетей.

В работе приняты следующие обозначения.

Отождествим некоторое множество с 1, а пустое подмножество с 0, определив порядок $0 < 1$, и рассмотрим множество $F = \{0, 1\}$, на котором операции сложения и умножения определим соответствующими объединению и пересечению, положив $ab = \min(a, b)$, $a + b = \max(a, b)$, $a, b \in F$. Все рассматриваемые матрицы являются $\{0, 1\}$-матрицами, то есть матрицами с элементами из F. Умножение матриц мы определяем обычной формулой для элементов матрицы произведения. Для матриц A и B одинакового размера будем писать $A \leq B$, если $a_{ij} \leq b_{ij}$ для всех i, j.

На F определим "отрицание", полагая $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$. Для всякой матрицы $B = (b_{ij})$ через $\bar{B}$ мы обозначаем матрицу с элементами $(\bar{B})_{ij} = \bar{b}_{ij}$.

Для матрицы A через A^T мы обозначаем транспонированную матрицу.

π_m – квадратная матрица порядка m, у которой на побочной диагонали стоят 1, а на остальных местах нули. Для всякого $m \leqslant n$ положим $\pi^{(m)} = \mathrm{diag}(\pi_m, \pi_{n-m})$.

§2. Сети

Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n, $a_{ij} \in \{0, 1\}$. Очевидно, что условие

$$a_{ir}a_{rj} \leqslant a_{ij}, \qquad 1 \leqslant i, r, j \leqslant n,$$

на элементы матрицы A эквивалентно условию

$$AA \leqslant A.$$

Определение. *Квадратная матрица A порядка n, $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in F = \{0, 1\}$, называется сетью порядка n, если она удовлетворяет одному из двух приведенных условий. Сеть $A = (a_{ij})$ называется D-сетью, если $a_{ii} = 1$ для всех $i = \overline{1, n}$. В дальнейшем все рассматриваемые сети являются D-сетями.*

Предложение 1. *Пусть $A = (a_{ij})$, $a_{ii} = 1$, $i = \overline{1, n}$. Матрица A является D-сетью тогда и только тогда, когда $A^2 = A$.*

Пусть $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ – разбиение числа n. Тогда всякая матрица $A = (a_{ij})$ порядка n может быть записана в клеточном виде $A = (A^{ij})$, соответствующим разбиению, где A^{rs} – $(n_r \times n_s)$-матрица.

Предложение 2. *Матрица A является сетью тогда и только тогда, когда*

$$A^{ir}A^{rj} \leqslant A^{ij}, \quad 1 \leqslant i, r, j \leqslant k.$$

Займемся теперь формированием сети по заданной блочной сети. Пусть$(m, n-m)$ – разбиение натурального числа n, $1 \leq m \leq n$,

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \tag{1}$$

– блочная матрица порядка n, соответствующая этому разбиению.

Теорема 1. *Матрица X является сетью тогда и только тогда, когда сетью является матрица*

$$\begin{pmatrix} \pi_m A^T \pi_m & \pi_m \bar{B} \pi_{n-m} \\ 0 & \pi_{n-m} C^T \pi_{n-m} \end{pmatrix} = \pi^{(m)} \begin{pmatrix} A^T & \bar{B} \\ 0 & C^T \end{pmatrix} \pi^{(m)}.$$

Лемма 1. *Пусть $x, y, z \in F = \{0, 1\}$. Тогда условие $xy \leqslant z$ эквивалентно условию $x\bar{z} \leqslant \bar{y}$.*

Лемма 2. *Пусть A, B, C – произвольные (не обязательно квадратные) матрицы. Тогда условие $AB \leqslant C$ эквивалентно условию $A^T\bar{C} \leqslant \bar{B}$ (или условию $\bar{C}B^T \leqslant \bar{A}$).*

Для доказательства теоремы 1 теперь достаточно воспользоваться леммой 2, заметив при этом, что так как матрица X является сетью, то $X^2 = X$, а потому $AA \leq A$, $CC \leq C$, $AB \leq B$, $BC \leq B$.

§3. Диэдральная группа, действующая на треугольных сетях

Определение. *Сеть $A = (a_{ij})$ называется треугольной, если $a_{ij} = 0$ для всех $i > j$. Множество всех треугольных сетей обозначим через $T_0(n)$.*

Пусть $m \in N$ и $1 \leqslant m \leqslant n$. Определим биективное отображение Ω_m, действующее на множестве всех треугольных сетей $T_0(n)$ порядка n.

Для произвольной треугольной сети $X \in T_0(n)$ порядка n, записанной в блочном виде (1), положим (см. (2))

$$\Omega_m(X) = \pi^{(m)} \begin{pmatrix} A^T & \bar{B} \\ 0 & C^T \end{pmatrix} \pi^{(m)}.$$

Нетрудно видеть, что если X – треугольная матрица, то $\Omega_m(X)$ также является треугольной. Согласно теореме 1 матрица $\Omega_m(X)$ является сетью, $\Omega_m(X) \in T_0(n)$. Далее, нетрудно видеть, что $\Omega_m^2(X) = X$, а потому $\Omega_m^{-1} = \Omega_m$.

Доказательство следующего утверждения проводится непосредственными вычислениями.

Предложение 3. *Положим $\Omega_n = \Omega$. Тогда*

(a) если $1 \leqslant m \leqslant n-1$, то

$$\Omega\Omega_m\Omega = \Omega_{n-m}$$

(b) если $2 \leqslant m \leqslant n$, то

$$\Omega_1\Omega_m\Omega_1 = \Omega_{n-(m-2)}$$

Предложение 4. *Положим* $a = \Omega_1\Omega_n$, $b = \Omega_1$. *Тогда* $abab = baba = b^2 = 1$. *Далее, если* $1 \leqslant m \leqslant n$, *то* $a^m = \Omega_1\Omega_{n-(m-1)}$, *в частности,* $|a| = n$, *причем*

$$\Omega_i \in \langle a, b\rangle, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

при этом $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{1\}$ *и* $\langle a\rangle \trianglelefteq \langle a, b\rangle$.

Доказательство предложения 4 проводится с использованием предложения 3.

В группе всех биективных отображений множества $T(n)$ рассмотрим подгруппу $G(n)$, порожденную всеми отображениями Ω_m:

$$G(n) = \langle \Omega_m : 1 \leqslant m \leqslant n \rangle.$$

Из предложения 4 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Группа* $G(n)$ *изоморфна диэдральной группе, в частности,* $|G(n)| = 2n$.

Пример. Пусть $k < l$. Через S_{kl} обозначим множество всех треугольных сетей $A = (a_{ij})$ порядка n, для которых $a_{kl} = 0$. Покажем, что $|S_{kl}| \geq |S_{rp}|$ в том и только в том случае, когда $l - k \leq p - r$. Действительно, нетрудно видеть, что $|S_{1i}| \geq |S_{1j}|$ тогда и только тогда, когда $i \leq j$. Наше утверждение вытекает теперь из того, что $\Omega_l(S_{kl}) = S_{1\,l-k+1}$, $\Omega_p(S_{rp}) = S_{1\ p-r+1}$.

Литература

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. З. И. Боревич, *К вопросу перечисления конечных топологий.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **71** (1977), 47–65.

Koibaev V. A. A group acting on the triangle nets.

In the present paper a group $G(n)$, acting on the set of the all triangle nets is determined.

Северо-Осетинский
государственный университет

Поступило 8 октября 2007 г.