Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 349, 2007 г.

А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР КВАТЕРНИОННОГО ТИПА. II. СЕРИЯ $Q(2\mathcal{B})_1$ В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 2

Введение

Пусть R – конечномерная алгебра над полем K, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R\otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – её обёртывающая алгебра, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R,R)$ – n-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R (с коэффициентами в R-бимодуле R). Прямая сумма

$$\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{HH}^n(R) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R,R)$$

относительно $\smile$-произведения является ассоциативной K-алгеброй (см.[1, §5], [2, Гл. XI], [3]), которую называют *алгеброй когомологий Хохшильда*. Алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ градуированно коммутативная [3]; кроме того, известно (см., например, [4, стр. 120]), что $\smile$-произведение на $\mathrm{HH}^*(R)$ совпадает с произведением Йонеды на Ext-алгебре $\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathrm{Ext}^n_\Lambda(R,R)$ Λ-модуля R.

В последнее время значительно возрос интерес к исследованию мультипликативной структуры алгебры когомологий Хохшильда конечномерных алгебр. Для коммутативной конечной группы G в работах [5, 6] доказано, что $\mathrm{HH}^*(K[G]) \simeq \mathrm{H}^*(G)\otimes_K K[G]$. В [7] было получено описание алгебры когомологий Хохшильда для симметрической группы S_3 над полем $\mathbb{F}_3$, а также для знакопеременной группы A_4 и для диэдральных 2-групп над полем $\mathbb{F}_2$. В [8] алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для случая, когда R – полуцепная QF-алгебра. В работах одного из авторов [9, 10] алгебра когомологий Хохшильда описана для алгебр диэдрального типа из серии $D(3\mathcal{K})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 и для одной из серий локальных алгебр кватернионного

Первый из авторов выражает признательность за поддержку гранту РФФИ 06-01-00200.

типа соответственно. Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления (см. [11]). Алгебра когомологий Хохшильда для так называемой алгебры Лю–Шульца вычислена в [12]. Имеются также частичные результаты, относящиеся к описанию алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, полученные для так называемой алгебры Мёбиуса (см. [13, 14]), а также для групповых блоков ручного типа представления, имеющих один или три простых модуля (см. [15]).

В настоящей работе мы, используя технику работы [9], вычисляем алгебру когомологий Хохшильда для значительной части алгебр кватернионного типа из серии $Q(2\mathcal{B})_1$ (в обозначениях из [11]) в случае, когда основное поле K – это алгебраически замкнутое поле характеристики два. В этом вычислении мы используем построенную нами 4-периодическую минимальную Λ-проективную резольвенту модуля R (см. раздел 2) (здесь основное поле K может иметь произвольную характеристику). В работе [16] такая резольвента описана для представителей классов производной эквивалентности алгебр кватернионного типа, за исключением некоторых алгебр с малыми параметрами. Однако для алгебр с двумя вершинами обоснование точности последовательности из [16] содержит некоторые неточности. Поэтому мы даем независимое от [16] доказательство точности нашей последовательности; конечно, она изоморфна резольвенте из [16], если в последнюю внести уточнения.

С использованием построенной нами резольвенты мы выделяем (конечное) множество образующих для алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ и находим соотношения, которым удовлетворяют эти образующие (см. разделы 3, 4).

Основной результат работы – теорема 1.1 – применяется к ещё одной серии алгебр кватернионного типа, а именно к алгебрам серии $Q(2\mathcal{A})$ (в обозначениях [11]): из результатов [17] следует, что любая алгебра из серии $Q(2\mathcal{A})$ производно эквивалентна подходящей алгебре из серии $Q(2\mathcal{B})_1$.

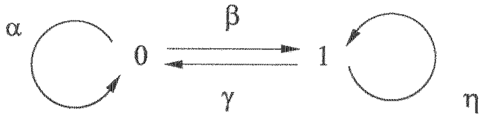
Отметим также, что классификация по модулю Морита-эвивалентности, представленная в [11], для алгебр кватернионного типа остается неполной до настоящего времени. Используя полученное описание $\mathrm{HH}^*(R)$, нам удалось показать, что некоторые алгебры из списка в [11] действительно не являются попарно

Морита-эквивалентными.

1. Формулировка основного результата

Алгебры серии $Q(2\mathcal{B})_1$ (над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики) описываются с помощью следующего колчана с соотношениями:

$Q^{(\mathcal{B})}$:



$$\left.\begin{aligned} &\eta\beta = \beta\alpha(\gamma\beta\alpha)^{k-1}, \quad \gamma\eta = \alpha\gamma(\beta\alpha\gamma)^{k-1}, \quad \beta\gamma = \eta^{s-1}, \\ &\alpha^2 = a\gamma\beta(\alpha\gamma\beta)^{k-1} + c(\alpha\gamma\beta)^k, \quad \beta\alpha^2 = 0, \quad \alpha^2\gamma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

где $k, s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 3$, $a, c \in K$, $a \neq 0$ (композицию путей мы записываем справа налево). Алгебры этой серии обозначаем через $Q(2\mathcal{B})_1(k, s, a, c)$, а также более кратко через $Q(2\mathcal{B})_1$. В настоящей работе мы исследуем такие алгебры только для $k \geqslant 2$.

Отметим, что в случае, когда $k + s > 4$, можно ограничиться рассмотрением алгебр $Q(2\mathcal{B})_1(k, s, a, c)$, для которых $a = 1$; кроме того, если $\operatorname{char} K \neq 2$, то можно считать, что $c = 0$ (см. [16]). Таким образом, поскольку мы изучаем когомологии алгебр $Q(2\mathcal{B})_1$ с $k \geqslant 2$, то далее в (1.1) полагаем $a = 1$.

Через e_i, $i = 0, 1$, обозначим идемпотенты алгебры $R = Q(2\mathcal{B})_1(k, s, 1, c)$, соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{B})}$. Тогда

$$P_{ij} = \Lambda(e_i \otimes e_j), \quad i, j \in \{0, 1\},$$

составляют полное множество представителей главных неразложимых левых Λ-модулей, где $\Lambda = R^{\mathrm{e}}$.

Умножение справа на элемент $w \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм w^* левого Λ-модуля Λ, кроме того, если $w \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_k \otimes e_l)$, то w^* индуцирует гомоморфизм $w^*\colon P_{ij} \to P_{kl}$; в дальнейшем ради простоты мы будем часто гомоморфизм умножения (справа) на $w \in \Lambda$ также обозначать через w.

Далее в этом разделе предполагаем, что K – алгебраически замкнутое поле характеристики два. Для описания алгебры когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(Q(2\mathcal{B})_1)$ для алгебр $Q(2\mathcal{B})_1$ мы построим несколько градуированных алгебр.

Пусть
$$\mathcal{X}_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, w_1, t\}. \tag{1.2}$$
На алгебре $K[\mathcal{X}_1]$ введем градуировку так, что
$$\begin{aligned} &\deg p_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \deg u_j = 1 \quad (j = 1, 2), \\ &\deg v_l = 2 \quad (l = 1, 2, 3), \quad \deg w_1 = 3, \quad \deg t = 4. \end{aligned} \tag{1.3}$$
Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_1 = K[\mathcal{X}_1]/I_1$, где идеал I_1 алгебры $K[\mathcal{X}_1]$ порожден следующими однородными элементами

– степени 0:
$$p_i p_j \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 4; \quad p_1^k + p_2^s,\ p_3^2,\ p_4^2; \tag{1.4}$$
– степени 1:
$$\left.\begin{matrix} p_1 u_1 + c p_1 u_2 + p_2^{s-1} u_2, \quad p_2 u_1 + p_1^{k-1} u_2, \\ p_1^k u_2, \quad p_3 u_2, \quad p_4 u_2; \end{matrix}\right\} \tag{1.5}$$
– степени 2:
$$\left.\begin{matrix} p_3 v_1,\ p_4 v_1,\ p_3 v_3,\ p_4 v_3, \\ p_1 v_2,\ p_2 v_2,\ p_4 v_2, \\ p_1 v_1 + p_3 v_2,\ p_3 v_2 + p_2 v_3; \end{matrix}\right\} \tag{1.6}$$
$$p_3 u_1^2,\ p_2 v_3 + p_4 u_1^2, \tag{1.7}$$
$$\left.\begin{matrix} p_2^{s-1} v_1 + p_1^{k-1} v_3 + c p_4 u_1^2, \\ u_2^2 + (\theta_k + \theta_s) p_1^{k-1} v_3 + c\theta_s p_1 v_1, \\ u_1 u_2 + c\theta_k p_1^{k-1} v_3, \end{matrix}\right\} \tag{1.8}$$
где для чётного n мы определяем следующую константу основного поля K
$$\theta_n = \sum_{i=1}^{n-1} i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n \equiv 2 \pmod 4, \\ 0, & \text{если} \quad n \equiv 0 \pmod 4; \end{cases} \tag{1.9}$$
– степени 3:
$$p_3 w_1,\ p_4 w_1, \tag{1.10}$$
$$p_1 w_1 + u_2 v_3,\ p_2 w_1 + u_2 v_1,\ u_1 v_1 + p_1^{k-2} u_2 v_3,\ u_2 v_2, \tag{1.11}$$
$$p_1^{k-2} u_1 v_3 + c u_1 v_1,\ p_2^{s-2} u_2 v_1 + u_1 v_3 + c u_2 v_3; \tag{1.12}$$
– степени 4:
$$u_1 w_1 + c\theta_k p_1^k t, \quad u_2 w_1 + (\theta_k + \theta_s) p_1^k t, \tag{1.13}$$

$$\left.\begin{array}{c} v_1^2 + p_2^2(1+cp_2)t, \quad v_3^2 + p_1^2 t, \\ v_1v_2,\ v_1v_3, \quad v_2^2,\ v_2v_3, \end{array}\right\} \tag{1.14}$$

$$u_1^2 v_2, \quad u_1^4; \tag{1.15}$$

– степени 5:

$$v_1w_1 + p_2u_2t + cp_2^2u_2t, \quad v_3w_1 + p_1u_2t,\ v_2w_1; \tag{1.16}$$

– степени 6:

$$w_1^2 + (\theta_k + \theta_s)p_1^{k-1}v_3t + \theta_s p_1 v_1 t. \tag{1.17}$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_1$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_1]$.

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_2 = \Big(\mathcal{X}_1 \setminus \{u_2, w_1\}\Big) \cup \{u_2', u_3, w_2, w_3\} \tag{1.18}$$

и на алгебре $\mathcal{K}[\mathcal{X}_2]$ введем градуировку, совпадающую с (1.3) для элементов из $\mathcal{X}_1 \setminus \{u_2, w_1\}$, и такую, что

$$\deg u_2' = \deg u_3 = 1, \quad \deg w_j = 3\ (j = 2, 3).$$

Определим алгебру $\mathcal{A}_2 = K[\mathcal{X}_2]/I_2$, где идеал I_2 алгебры $K[\mathcal{X}_2]$ порожден элементами из (1.4), (1.6), (1.7), (1.14), (1.15), а также элементами

$$\left.\begin{array}{c} p_1u_1 + p_2^{s-2}u_2' + cu_3, \quad p_2u_1 + p_1^{k-2}u_3, \\ p_3u_2',\ p_4u_2',\ p_2u_3,\ p_3u_3,\ p_4u_3; \end{array}\right\} \tag{1.19}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_2^{s-1}v_1,\ p_1^{k-1}v_3 + cp_4u_1^2, \\ u_1u_2',\ (u_2')^2,\ u_1u_3,\ u_3^2,\ u_2'u_3; \end{array}\right\} \tag{1.20}$$

$$p_1w_2,\ p_3w_2,\ p_4w_2,\ p_2w_3,\ p_3w_3,\ p_4w_3, \tag{1.21}$$

$$u_3v_1,\ u_2'v_2,\ u_3v_2,\ u_2'v_3,\ u_3v_3 + p_1w_3, \tag{1.22}$$

$$u_1v_1 + p_1^{k-2}w_3,\ u_2'v_1 + p_2w_2, \tag{1.23}$$

$$p_2^{s-3}u_2'v_1 + u_1v_3 + cw_3; \tag{1.24}$$

$$p_2^s t;\ u_1w_i,\ u_2'w_i,\ u_3w_i \quad \text{для} \quad i \in \{2, 3\}; \tag{1.25}$$

$$v_1w_3,\ v_2w_2,\ v_2w_3,\ v_3w_2, \tag{1.26}$$

$$v_1w_2 + (p_2 + cp_2^2)u_2't; \tag{1.27}$$

$$v_3w_3 + p_1u_3t,\ w_2^2,\ w_3^2,\ w_2w_3. \tag{1.28}$$

В силу однородности идеала I_2 алгебра $\mathcal{A}_2$ наследует градуировку с алгебры $K[\mathcal{X}_2]$.

Далее, рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_3 = \Big(\mathcal{X}_1 \setminus \{u_1, u_2, w_1\}\Big) \cup \{\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2', u_3, w_2, w_3\} \tag{1.29}$$

и на алгебре $\mathcal{K}[\mathcal{X}_3]$ введем градуировку, совпадающую с (1.3) для элементов из $\mathcal{X}_1 \setminus \{u_1, u_2, w_1\}$, и такую, что

$$\deg \widetilde{u}_1 = \deg \widetilde{u}_2' = \deg u_3 = 1, \quad \deg w_j = 3\ (j = 2, 3).$$

Определим алгебру $\mathcal{A}_3 = K[\mathcal{X}_3]/I_3$, где идеал I_3 алгебры $K[\mathcal{X}_3]$ порожден элементами из (1.4), (1.6), (1.14), (1.21), (1.26), (1.28), а также элементами

$$\left.\begin{array}{c} p_1\widetilde{u}_1 + p_2^{s-2}\widetilde{u}_2',\ p_2\widetilde{u}_1 + c\widetilde{u}_2' + p_1^{k-2}u_3, \\ p_1\widetilde{u}_2',\ p_3\widetilde{u}_2',\ p_4\widetilde{u}_2',\ p_2u_3,\ p_3u_3,\ p_4u_3; \end{array}\right\} \tag{1.30}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_2^{s-1}v_1 + cp_2v_3,\ p_1^{k-1}v_3, \\ p_3\widetilde{u}_1^2,\ p_4\widetilde{u}_1^2 + p_3v_2, \\ \widetilde{u}_1\widetilde{u}_2',\ (\widetilde{u}_2')^2,\ \widetilde{u}_1u_3,\ u_3^2,\ \widetilde{u}_2'u_3; \end{array}\right\} \tag{1.31}$$

$$u_3v_1,\ \widetilde{u}_2'v_2,\ u_3v_2,\ \widetilde{u}_2'v_3, \tag{1.32}$$

$$\widetilde{u}_1v_1 + cw_2 + p_1^{k-2}w_3,\ \widetilde{u}_2'v_1 + p_2w_2, \tag{1.33}$$

$$\widetilde{u}_1v_3 + p_2^{s-3}\widetilde{u}_2'v_1,\ u_3v_3 + p_1w_3, \tag{1.34}$$

$$p_2^st,\ \widetilde{u}_1w_i,\ \widetilde{u}_2'w_i,\ u_3w_i \quad \text{для} \quad i \in \{2, 3\}; \tag{1.35}$$

$$\widetilde{u}_1^4,\ \widetilde{u}_1^2v_2, \tag{1.36}$$

$$v_1w_2 + (p_2 + cp_2^2)\widetilde{u}_2't. \tag{1.37}$$

В силу однородности идеала I_3 алгебра $\mathcal{A}_3$ наследует градуировку с алгебры $K[\mathcal{X}_3]$.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_4 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, \widetilde{u}_2, v_1, v_3, w_1, t\} \tag{1.38}$$

и на алгебре $\mathcal{K}[\mathcal{X}_4]$ введем градуировку, такую, что

$$\deg p_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \deg u_1 = \deg \widetilde{u}_2 = 1,$$
$$\deg v_1 = \deg v_3 = 2, \quad \deg w_1 = 3, \quad \deg t = 4.$$

Определим алгебру $\mathcal{A}_4 = K[\mathcal{X}_4]/I_4$, где идеал I_4 алгебры $K[\mathcal{X}_4]$ порожден элементами из (1.4), а также элементами

$$\left.\begin{array}{c} p_1u_1 + p_2^{s-1}\widetilde{u}_2, \quad p_2u_1 + p_1^{k-1}\widetilde{u}_2, \\ p_1^k\widetilde{u}_2, \quad p_4\widetilde{u}_2, \quad p_4u_1 + p_3\widetilde{u}_2; \end{array}\right\} \tag{1.39}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_3v_1, \quad p_4v_1, \quad p_3v_3,\, p_4v_3, \\ p_1v_1 + p_2v_3, \quad p_1v_1 + p_3u_1\widetilde{u}_2; \end{array}\right\} \tag{1.40}$$

$$p_3u_1^2 + p_2^{s-1}v_1,\, p_2v_3 + p_4u_1^2, \tag{1.41}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_2^{s-1}v_1 + p_1^{k-1}v_3, \\ \widetilde{u}_2^2 + \theta_{k+s}p_1^{k-1}v_3, \end{array}\right\} \tag{1.42}$$

$$p_3w_1, \quad p_4w_1, \tag{1.43}$$

$$p_1w_1 + \widetilde{u}_2v_3,\, p_2w_1 + \widetilde{u}_2v_1,\, u_1v_1 + p_1^{k-2}\widetilde{u}_2v_3, \tag{1.44}$$

$$u_1v_3 + p_2^{s-1}w_1, \tag{1.45}$$

$$u_1^4,\, u_1^3\widetilde{u}_2 + p_1^kt, \tag{1.46}$$

$$\left.\begin{array}{c} v_1^2 + p_2^2t, \quad v_3^2 + p_1^2t, \quad v_1v_3, \\ u_1w_1 + p_3t, \quad \widetilde{u}_2w_1 + (p_4 + \theta_{k+s}p_1^k)t, \end{array}\right\} \tag{1.47}$$

$$v_1w_1 + p_2\widetilde{u}_2t, \quad v_3w_1 + p_1\widetilde{u}_2t, \tag{1.48}$$

$$w_1^2 + \theta_{k+s}p_1^{k-1}v_3t. \tag{1.49}$$

В силу однородности идеала I_4 алгебра $\mathcal{A}_4$ наследует градуировку с алгебры $K[\mathcal{X}_4]$.

Наконец, рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_5 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_2', u_3, u_4, u_5, v_0, v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_4, t\} \tag{1.50}$$

и на алгебре $\mathcal{K}[\mathcal{X}_5]$ введем градуировку, такую, что

$$\begin{array}{ll} \deg p_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), & \deg u_2' = \deg u_3 = \deg u_4 = \deg u_5 = 1, \\ \deg v_j = 2 \quad (j = 0, 1, 2, 3), & \deg w_0 = \deg w_1 = \deg w_4 = 3,\ \deg t = 4. \end{array}$$

Определим алгебру $\mathcal{A}_5 = K[\mathcal{X}_5]/I_5$, где идеал I_5 алгебры $K[\mathcal{X}_5]$ порожден элементами из (1.4), а также элементами

$$\left.\begin{array}{c} p_1u_2',\, p_3u_2',\, p_4u_2',\, p_2^{s-1}u_2', \\ p_2u_3,\, p_3u_3,\, p_4u_3,\, p_1^{k-1}u_3, \\ p_1u_4,\, p_2u_4,\, p_3u_4,\, p_4u_4,\, p_1u_5,\, p_2u_5,\, p_3u_5,\, p_4u_5; \end{array}\right\} \tag{1.51}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_1v_0,\ p_2v_0,\ p_3v_0,\ p_4v_0,\\ p_1v_1,\ p_3v_1,\ p_4v_1,\ p_2^{s-1}v_1,\\ p_1v_2,\ p_2v_2,\ p_3v_2,\ p_4v_2,\\ p_2v_3,\ p_3v_3,\ p_4v_3,\ p_1^{k-1}v_3,\\ (u_2')^2,\ u_3^2,\ u_4^2,\ u_5^2,\\ u_4u_5,\ u_4u_3,\ u_4u_2',\ u_5u_3,\ u_5u_2',\ u_3u_2'; \end{array}\right\} \tag{1.52}$$

$$p_1w_0,\ p_2w_0,\ p_3w_1,\ p_4w_1,\ p_1w_4,\ p_2w_4,\ p_4w_4, \tag{1.53}$$

$$p_4w_0+p_3w_4,\ cp_3w_4+p_3w_0,\ p_3w_0+cp_1^kw_1, \tag{1.54}$$

$$cp_1^kw_1+u_4v_0,\ u_4v_0+cu_5v_0,\ u_5v_0+u_4v_2, \tag{1.55}$$

$$u_2'v_0,\ u_3v_0,\ u_2'v_2,\ u_3v_2,\ u_5v_2, \tag{1.56}$$

$$u_3v_1,\ u_4v_1,\ u_5v_1,\ u_2'v_3,\ u_4v_3,\ u_5v_3, \tag{1.57}$$

$$u_2'v_1+p_2^2w_1,\ u_3v_3+p_1^2w_1; \tag{1.58}$$

$$\left.\begin{array}{c} v_2^2,\ v_1v_2,\ v_3v_2,\ v_3v_1,\ v_3v_0,\ v_1v_0,\\ v_0^2+cv_0v_2,\ v_0v_2+p_1^kt,\ v_1^2+(p_2^2+cp_2^3)t,\ v_3^2+p_1^2t,\\ u_2'w_0,\ u_3w_0,\ u_4w_0,\ u_5w_0,\\ u_2'w_1,\ u_3w_1,\ u_4w_1,\ u_5w_1,\\ u_2'w_4,\ u_3w_4,\ u_4w_4,\ u_5w_4, \end{array}\right\} \tag{1.59}$$

$$v_0w_0,\ v_1w_0,\ v_2w_0,\ v_3w_0,\ v_0w_4,\ v_1w_4,\ v_2w_4,\ v_3w_4, \tag{1.60}$$

$$v_0w_1+u_4t,\ v_1w_1+(1+cp_2)u_2't,\ v_2w_1+u_5t,\ v_3w_1+u_3t; \tag{1.61}$$

$$w_0^2,\ w_1^2,\ w_4^2,\ w_0w_1,\ w_0w_4,\ w_1w_4. \tag{1.62}$$

Алгебра $\mathcal{A}_5$ наследует естественную градуировку с алгебры $K[\mathcal{X}_5]$.

Теорема 1.1. *Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики два, и пусть $R = Q(2\mathcal{B})_1(k,s,1,c)$, где $k \geqslant 2$.*

1) *Если k и s чётны, то алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}_1$.*
2) *Если k чётно, а s нечётно, то $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_2$ как градуированные K-алгебры.*
3) *Если k нечётно, а s чётно, то $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_3$ как градуированные K-алгебры.*
4) *Если k и s нечётны, а $c = 0$, то $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_4$ как градуированные K-алгебры.*

5) *Если k и s нечётны, а $c \neq 0$, то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_5$ *как градуированные K-алгебры.*

Заметим, что из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_2$ следует, что при $c \neq 0$ образующие w_3 и u_3 могут быть исключены, так как выражаются через остальные элементы множества $\mathcal{X}_2$. Аналогично при $c \neq 0$ в описании алгебры $\mathcal{A}_3$ из множества $\mathcal{X}_3$ можно исключить $\tilde{u}'_2$ и w_2.

В процессе доказательства теоремы 1.1 мы вычисляем группы $\mathrm{HH}^n(R)$. Соответствующие результаты представляют самостоятельный интерес, и мы их объединим в следующем утверждении.

Предложение 1.2. *Пусть $R = Q(2\mathcal{B})_1(k, s, 1, c)$, где $k \geqslant 2$. Тогда:*
а) $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + s + 2$;
б) *для $t \geqslant 0$*

$$\dim_K \mathrm{HH}^{4t+1}(R) = \dim_K \mathrm{HH}^{4t+2}(R) = \begin{cases} k+s+2, & \text{если } k \text{ и } s \text{ чётны} \\ & \text{или } k \text{ и } s \text{ нечётны и } c = 0, \\ k+s+1, & \text{если } k+s \text{ нечётно}, \\ k+s, & \text{если } k \text{ и } s \text{ нечётны и } c \neq 0; \end{cases}$$

в) *для $t \geqslant 0$*

$$\dim_K \mathrm{HH}^{4t+3}(R) = \dim_K \mathrm{HH}^{4t+4}(R) = \begin{cases} k+s+2, & \text{если } k+s \text{ чётно}, \\ k+s+1, & \text{если } k+s \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Из предложения 1.2, б) немедленно вытекает следующее утверждение, дополняющее классификацию К. Эрдман, представленную в книге [11].

Следствие 1.3. *Пусть $k, s \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $s \geqslant 3$. Предположим, что k и s нечётны. Тогда алгебра $Q(2\mathcal{B})_1(k, s, 1, c)$, где $c \neq 0$, не является производно эквивалентной (и, в частности, не Морита-эквивалентна) алгебре $Q(2\mathcal{B})_1(k, s, 1, 0)$.*

Аналогичный результат для некоторых других значений k и s можно вывести из описания определяющих соотношений алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$.

Предложение 1.4. *Пусть $k, s \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $s \geqslant 3$.*
а) Предположим, что k и s чётны и таковы, что $\theta_k = \theta_s = 1$ (в K). Тогда алгебра $Q(2\mathcal{B})_1(k, s, 1, c)$, где $c \neq 0$, не является производно эквивалентной (и, в частности, не Морита-эквивалентна) алгебре $Q(2\mathcal{B})_1(k, s, 1, 0)$.
б) Предположим, что $k+s$ нечётно. Тогда алгебра $Q(2\mathcal{B})_1(k, s, 1, c)$, где $c \neq 0$, не является производно эквивалентной (и, в частности, не Морита-эквивалентна) алгебре $Q(2\mathcal{B})_1(k, s, 1, 0)$.

Теорема 1.1 может быть применена к ещё одной серии алгебр кватернионного типа с двумя простыми модулями, а именно, к серии $Q(2\mathcal{A})$ (в обозначениях из [11]). Ввиду [17] алгебра из серии $Q(2\mathcal{A})$ с параметрами $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $c \in K$ производно эквивалентна алгебре $Q(2\mathcal{B})_1(2, k, 1, c)$. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Следствие 1.5. *Пусть R – алгебра из серии $Q(2\mathcal{A})$ с параметрами $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $c \in K$. Тогда*

$$\mathrm{HH}^*(R) \simeq \begin{cases} \mathcal{A}_1, & \text{если } k \text{ чётно,} \\ \mathcal{A}_2, & \text{если } k \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Отметим также, что из предложения 1.2 легко получается описание групп $\mathrm{HH}^n(R)$ для алгебр серии $Q(2\mathcal{A})$.

2. Резольвента

Сначала докажем вспомогательное утверждение, касающееся произвольных конечномерных алгебр.

Предложение 2.1. *Пусть S – конечномерная K-алгебра с радикалом Джекобсона J. Пусть $P = \bigoplus_{i=1}^r P_i$, где $\{P_i\}_{i=1}^r$ – множество попарно неизоморфных неразложимых проективных S-модулей, $\pi\colon P \to X$ – эпиморфизм, и пусть $f\colon P \to X$ – гомоморфизм такой, что для любого i $f(P_i) \not\subset JX$. Тогда f – эпиморфизм.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon P \to P$ – гомоморфизм такой, что $\pi\varphi = f$. Гомоморфизм φ можно представить в виде матрицы $\varphi = (\varphi_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$, где $\varphi_{ij} \in \mathrm{Hom}_S(P_j, P_i)$. Если для некоторого i $\varphi_{ii}\colon P_i \to P_i$ – не изоморфизм, то $\varphi_{ii}(P_i) \subset JP_i \subset JP$. Так как для $j \neq i$ имеем $\varphi_{ji}(P_i) \subset JP_j \subset JP$, то $\varphi(P_i) \subset JP$, следовательно, $f(P_i) = \pi\varphi(P_i) \subset JX$. Полученное противоречие показывает, что

φ_{ii} – изоморфизм для любого i. Так как

$$\varphi - \bigoplus_{i=1}^{r} \varphi_{ii} \in \operatorname{Rad}\operatorname{End}(P) = \operatorname{Hom}_S(P, JP),$$

то отсюда следует, что φ – изоморфизм, и тогда f – эпиморфизм. $\square$

Пусть $R = Q(2\mathcal{B})_1(k, s, 1, c)$, где $k \geqslant 2$, $s \geqslant 3$. Введем краткие обозначения для некоторых элементов этой алгебры:

$$a = \alpha\gamma\beta, \quad b = \beta\alpha\gamma, \quad g = \gamma\beta\alpha.$$

Стандартным базисом алгебры R будем называть множество $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{00} \cup \mathcal{B}_{10} \cup \mathcal{B}_{01} \cup \mathcal{B}_{11}$, где

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{00} &= \{a^{i+1},\ g^i,\ \gamma\beta a^i,\ \alpha g^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{01} &= \{\gamma b^i,\ \alpha\gamma b^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{10} &= \{\beta a^i,\ \beta\alpha g^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{11} &= \{b^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{\eta^i \mid 1 \leqslant i \leqslant s-1\}.
\end{aligned}$$

Положим $Q_0 := Q_3 := P_{00} \oplus P_{11}$, $Q_1 := Q_2 := P_{00} \oplus P_{10} \oplus P_{01} \oplus P_{11}$ и $Q_{n+4} := Q_n$ для $n \geqslant 0$. Рассмотрим гомоморфизмы $d_i \in \operatorname{Hom}(Q_{i+1}, Q_i)$ $(i \geqslant 0)$, определяемые матрицами:

$$d_0 = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 - e_0 \otimes \alpha & \beta \otimes e_0 & e_0 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & -e_1 \otimes \beta & -\gamma \otimes e_1 & \eta \otimes e_1 - e_1 \otimes \eta \end{pmatrix},$$

$$d_1 =$$
$$\begin{pmatrix}
\star & \sum\limits_{i=1}^{k} \beta a^{i-1} \otimes g^{k-i} & \sum\limits_{i=1}^{k} a^{i-1} \otimes \gamma b^{k-i} & 0 \\
\star & \sum\limits_{i=1}^{k} b^{i-1} \otimes \alpha g^{k-i} - \eta \otimes e_0 & \sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha\gamma b^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} & -e_1 \otimes \gamma \\
\star & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} \beta\alpha g^{i-1} \otimes \beta\alpha g^{k-i-1} & e_1 \otimes \eta - \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha g^{i-1} \otimes b^{k-i} & \beta \otimes e_1 \\
c\gamma \otimes \beta & -e_1 \otimes \beta & \gamma \otimes e_1 & \sum\limits_{i=1}^{s-1} \eta^{i-1} \otimes \eta^{s-i-1}
\end{pmatrix},$$

где

$$(d_1)_{11} = \alpha \otimes e_0 + e_0 \otimes \alpha - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma\beta a^{i-1} \otimes \gamma\beta a^{k-i-1}$$

$$+c\sum_{i=1}^{k}\gamma\beta a^{i-1}\otimes g^{k-i}+c\sum_{i=1}^{k}a^{i-1}\otimes\gamma\beta a^{k-i},$$

$$(d_1)_{21}=-\sum_{i=1}^{k}\gamma b^{i-1}\otimes a^{k-i}+c\sum_{i=1}^{k}\gamma b^{i-1}\otimes\alpha g^{k-i}+c\sum_{i=1}^{k-1}\alpha\gamma b^{i-1}\otimes a^{k-i},$$

$$(d_1)_{31}=\sum_{i=1}^{k}g^{i-1}\otimes\beta a^{k-i}+c\sum_{i=1}^{k}\alpha g^{i-1}\otimes\beta a^{k-i}+c\sum_{i=1}^{k-1}g^{i}\otimes\beta\alpha g^{k-i-1};$$

$$d_2=\begin{pmatrix}\alpha\otimes e_0-e_0\otimes\alpha & 0\\ -\gamma\otimes e_0+c\gamma\otimes\alpha & -e_1\otimes\gamma\\ e_0\otimes\beta+c\alpha\otimes\beta & \beta\otimes e_1\\ 0 & \eta\otimes e_1-e_1\otimes\eta\end{pmatrix};$$

d_3 – это 2×2-матрица, у которой

$$(d_3)_{11}=\sum_{i=1}^{k}a^{i-1}\otimes a^{k-i+1}+\sum_{i=1}^{k}\gamma\beta a^{i-1}\otimes\alpha g^{k-i}+\sum_{i=1}^{k}g^{i}\otimes g^{k-i}$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\alpha g^{i-1}\otimes\gamma\beta a^{k-i}+c\sum_{i=1}^{k-1}g^{i}\otimes\alpha g^{k-i}$$

$$+c\sum_{i=1}^{k-1}\alpha g^{i}\otimes a^{k-i}+c\sum_{i=1}^{3}\alpha^{i}\otimes\alpha^{4-i}$$

$$+c\gamma\beta a^{k-1}\otimes\gamma\beta a^{k-1}+c\alpha g^{k-1}\otimes\alpha^{3}+c\alpha^{3}\otimes\alpha g^{k-1},$$

$$(d_3)_{12}=\sum_{i=1}^{k}\beta\alpha g^{i-1}\otimes\gamma b^{k-i}+\sum_{i=1}^{k}\beta a^{i-1}\otimes\alpha\gamma b^{k-i}$$

$$+c\sum_{i=1}^{k}\beta\alpha g^{i-1}\otimes\alpha\gamma b^{k-i}+c\beta\alpha g^{k-1}\otimes\alpha\gamma b^{k-1},$$

$$(d_3)_{21}=-\sum_{i=1}^{k}\alpha\gamma b^{i-1}\otimes\beta a^{k-i}-\sum_{i=1}^{k}\gamma b^{i-1}\otimes\beta\alpha g^{k-i}+c\alpha\gamma b^{k-1}\otimes\beta\alpha g^{k-1},$$

$$(d_3)_{22}=-\sum_{i=1}^{k}b^{i-1}\otimes b^{k-i+1}-\sum_{i=1}^{s}\eta^{i}\otimes\eta^{s-i}+c\sum_{i=1}^{s}\eta^{i}\otimes\eta^{s-i+1},$$

наконец, для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$d_{n+4} = d_n.$$

Непосредственно проверяется, что $d_i d_{i+1} = 0$, и, таким образом, мы получаем комплекс $Q_\bullet = \Big(Q_n,\, d_n\Big)_{n \geqslant 0}$.

Замечание 2.2. Здесь и далее важно отметить, что если $c \neq 0$, то $\operatorname{char} K = 2$.

Обозначим через $\mu : Q_0 \to R$ гомоморфизм умножения, то есть гомоморфизм, для которого $\mu \begin{pmatrix} x_0 \otimes y_0 \\ x_1 \otimes y_1 \end{pmatrix} = x_0 y_0 + x_1 y_1$.

Точность последовательности (d_0, μ) – это стандартное утверждение (см., например, [18, предложение 2.1]). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} Q_1 \arrow[r, "d_0"] & Q_0 \arrow[r, equal] & Q_4 \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, "\mu"] & Q_3 \arrow[d, equal] \\ & & R \arrow[r, dotted, "j"] & Q_3; \end{tikzcd}$$

здесь, поскольку $\mu = \operatorname{coker}(d_0)$ и $d_3 d_0 = 0$, существует единственный гомоморфизм $j : R \to Q_2$ такой, что $j\mu = d_3$.

Предложение 2.3. *j – мономорфизм.*

Доказательство. Сначала построим линейное отображение $f : R \to K$, задав его на стандартном базисе, а именно, для $x \in \mathcal{B}$ положим

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x \in \{a^k,\ b^k\}, \\ 0, & \text{если } \ x \in \mathcal{B} \setminus \{a^k,\ b^k\}. \end{cases}$$

Теперь построим линейное отображение $G : P_{00} \oplus P_{11} \to R$ следующим образом:

$$G \begin{pmatrix} x_0 \otimes y_0 \\ x_1 \otimes y_1 \end{pmatrix} = f(x_0)(e_0 + c\,\alpha + c\,\alpha g^{k-1} + c^3 \alpha^3) y_0 - f(x_1)\Big(\sum_{i=0}^{s} c^i \eta^i\Big) y_1.$$

Докажем, что $Gj = \mathrm{id}_R$, из этого будет следовать, что j – мономорфизм. Из определения G ясно, что G является гомоморфизмом правых R-модулей.

Далее, из того, что $j\mu = d_3$, следует, что $j(e_0) = (d_3)_{*1}$ и $j(e_1) = (d_3)_{*2}$, тогда прямым вычислением легко проверяется, что

$G(j(e_0)) = e_0$ и $G(j(e_1)) = e_1$, а значит, $G(j(1)) = 1$. Тогда для любого $x \in R$, имеем $Gj(x) = G(j(1))x = x$. □

Предложение 2.4. *Комплекс $Q_\bullet \xrightarrow{\mu} R$, является минимальной Λ-проективной резольвентой алгебры R.*

Доказательство. Так как комплекс периодический, с периодом 4, точность достаточно доказать в членах Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4. Точность в члене Q_0 мы уже отмечали.

Пусть J – радикал Λ. С помощью леммы Хаппеля [19] (см. также уточнение в [20]) получаем, что $\operatorname{coim} d_0 \colon Q_1 \to \operatorname{Ker}\mu$ – проективное накрытие, следовательно, $\operatorname{Ker} d_0 \subset JQ_1$. Вновь по лемме Хаппеля, проективное накрытие модуля $\operatorname{Ker} d_0$ имеет вид $\nu \colon Q_2 \to \operatorname{Ker} d_0$. Пусть $d_1 = \psi\varphi \colon Q_2 \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Im} d_1 \xrightarrow{\psi} \operatorname{Ker} d_0$ – эпи-моно-разложение. Так как $d_0 d_1 = 0$, то $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im} d_1 \subset \operatorname{Ker} d_0$. Посмотрев на столбцы матрицы d_1, легко увидеть, что $d_1(e_i \otimes e_j) \in JQ_1 \setminus J^2 Q_1$ для $(i, j) \in \{0, 1\}^2$. Так как $\operatorname{Ker} d_0 \subset J \cdot Q_1$, то $\varphi(e_i \otimes e_j) \not\subset J \cdot \operatorname{Ker} d_0$. Используя предложение 2.1, получаем, что $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker} d_0$. Точность в члене Q_1 доказана. Аналогично доказывается точность в члене Q_2.

Теперь докажем точность в члене Q_4. Мы знаем, что $d_3 = j\mu$, причем j – мономорфизм, следовательно, $\operatorname{Ker} d_3 = \operatorname{Ker}\mu = \operatorname{Im} d_0$.

Наконец, заметим, что так как μ – эпиморфизм, $\operatorname{Im} d_3 \cong R$.

Осталось доказать точность рассматриваемого комплекса в члене Q_3. Для этого достаточно доказать, что $\dim(\operatorname{Im} d_3) = \dim(\operatorname{Ker} d_2)$.

Имеем

$$\dim(\operatorname{Ker} d_2) = \dim(Q_3) - \dim(Q_2) + \dim(Q_1) - \dim(Q_0) + \dim(\operatorname{Im}\mu).$$

Вспомнив, что $Q_3 = Q_0$ и $Q_2 = Q_1$, получим

$$\dim(\operatorname{Ker} d_2) = \dim(\operatorname{Im}\mu) = \dim(R) = \dim(\operatorname{Im} d_3).$$

□

3. Аддитивная структура алгебры когомологий

Далее всюду предполагаем, что $\operatorname{char} K = 2$.

Пусть $Q_\bullet \xrightarrow{\mu} R$ – минимальная Λ-проективная резольвента из раздела 2. Тогда

$$\mathrm{HH}^n(R) = \operatorname{Ext}^n_\Lambda(R, R) = \mathrm{H}^n(\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R)),$$

где $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R)$ – это комплекс

$$\Big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R), \quad \delta^n = \mathrm{Hom}_\Lambda(d_n, R)\Big)_{n\geqslant 0}. \tag{3.1}$$

Пусть $Z^n(R)$ (соответственно $B^n(R)$) обозначает пространство n-коциклов (соответственно пространство n-кограниц), т.е. $Z^n(R) = \mathrm{Ker}\,\delta^n$, $B^n(R) = \mathrm{Im}\,\delta^{n-1}$.

Поскольку $P_{ij} = \Lambda\cdot(e_i\otimes e_j)$, то всякий Λ-гомоморфизм $f\colon Q_n \to R$ определяется набором своих значений на соответствующих образующих $e_i\otimes e_j$, при этом $f(e_i\otimes e_j) \in e_iRe_j$. В дальнейшем мы отождествляем f с этим набором значений; кроме того, указанные наборы значений заключаем в квадратные скобки и часто будем писать $f = [f(e_i\otimes e_j)]_{i,j}$.

После такого отождествления дифференциал $\delta^0\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_0, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, R)$ описывается так: для $r_i \in e_iRe_i$ $(i = 0, 1)$

$$\delta^0(r_0, r_1) = (\alpha r_0 - r_0\alpha, \beta r_0 - r_1\beta, r_0\gamma - \gamma r_1, \eta r_1 - r_1\eta). \tag{3.2}$$

Предложение 3.0.1. *$\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + s + 2$, $\dim B^1(R) = 4k - 2$.*

Доказательство. Ввиду [11, IX.1.2] центр $Z(R) = Z^0(R)$ алгебры R допускает в качестве базиса следующее множество

$$\begin{aligned}&\{a^i + g^i + b^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\} \cup \{\eta^i \mid 2 \leqslant i \leqslant s\}\\ &\cup \{1,\ \alpha g^{k-1} + \eta,\ \gamma\beta a^{k-1},\ a^k\}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Таким образом, $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + s + 2$ и

$$\dim B^1(R) = \dim \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_0, R) - \dim_K Z^0(R) = 4k - 2.$$

□

Замечание 3.0.2. В дальнейшем для некоторых элементов из (3.3) будем использовать следующие сокращенные обозначения:

$$p_1 := a + g + b, \quad p_2 := \alpha g^{k-1} + \eta, \quad p_3 := \gamma\beta a^{k-1},\ p_4 := a^k. \tag{3.4}$$

Отметим, что $a^i + g^i + b^i = p_1^i$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$ и $\eta^i = p_2^i$ для $2 \leqslant i \leqslant s$.

Замечание 3.0.3. Если в (3.2) в качестве r_0 и r_1 брать подходящие элементы стандартного базиса алгебры R (принадлежащие e_0Re_0 и e_1Re_1 соответственно), то непосредственно проверяется, что $B^1(R)$ допускает в качестве базиса множество следующих элементов:

$$[a^i - g^i, 0, 0, 0], \quad [\alpha g^i, \beta a^i, 0, 0], \quad [\alpha g^i, 0, \gamma b^i, 0], \qquad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.5}$$

$$[0, \beta\alpha g^i, \alpha\gamma b^i, 0], \quad \text{где} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1; \quad [0, \beta, \gamma, 0]. \tag{3.6}$$

3.1. Дифференциал δ^1.

Дифференциал

$$\delta^1\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_2, R)$$

после указанных выше отождествлений может быть описан следующим образом: для $r_{ij} \in e_i R e_j$ $(i, j \in \{0, 1\})$ имеем

$$\delta^1(r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}) = (t_{00}, t_{10}, t_{01}, t_{11}),$$

где

$$t_{00} = \alpha \cdot r_{00} + r_{00} \cdot \alpha + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma\beta a^{i-1} \cdot r_{00} \cdot \gamma\beta a^{k-1-i} + c\sum_{i=1}^{k} \gamma\beta a^{i-1} \cdot r_{00} \cdot g^{k-i}$$

$$+c\sum_{i=1}^{k} a^{i-1} \cdot r_{00} \cdot \gamma\beta a^{k-i} + \sum_{i=1}^{k} \gamma b^{i-1} \cdot r_{10} \cdot a^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k} \gamma b^{i-1} \cdot r_{10} \cdot \alpha g^{k-i}$$

$$+c\sum_{i=1}^{k-1} \alpha\gamma b^{i-1} \cdot r_{10} \cdot a^{k-i} + \sum_{i=1}^{k} g^{i-1} \cdot r_{01} \cdot \beta a^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k} \alpha g^{i-1} \cdot r_{01} \cdot \beta a^{k-i}$$

$$+c\sum_{i=1}^{k-1} g^i \cdot r_{01} \cdot \beta\alpha g^{k-1-i} + c\gamma \cdot r_{11} \cdot \beta,$$

$$t_{10} = \sum_{i=1}^{k} \beta a^{i-1} \cdot r_{00} \cdot g^{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1} b^i \cdot r_{10} \cdot \alpha g^{k-1-i}$$

$$+\eta \cdot r_{10} + \sum_{i=0}^{k-2} \beta\alpha g^i \cdot r_{01} \cdot \beta\alpha g^{k-2-i} + r_{11} \cdot \beta,$$

$$t_{01} = \sum_{i=0}^{k-1} a^i \cdot r_{00} \cdot \gamma b^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-2} \alpha\gamma b^i \cdot r_{10} \cdot \alpha\gamma b^{k-2-i}$$

$$+r_{01}\cdot\eta+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha g^i\cdot r_{01}\cdot\beta^{k-1-i}+\gamma\cdot r_{11},$$

$$t_{11}=r_{10}\cdot\gamma+\beta\cdot r_{01}+\sum_{i=0}^{s-2}\eta^i\cdot r_{11}\cdot\eta^{s-2-i}.$$

Предположим, что $q=(r_{00},r_{10},r_{01},r_{11})\in Z^1(R)$. Представим компоненты этого 1-коцикла в виде

$$\begin{aligned} r_{00}&=\sum_{w\in\mathcal{B}_{00}}\lambda_w w, & r_{10}&=\sum_{w\in\mathcal{B}_{10}}\mu_w w,\\ r_{01}&=\sum_{w\in\mathcal{B}_{01}}\nu_w w, & r_{11}&=\sum_{w\in\mathcal{B}_{11}}\sigma_w w \end{aligned}\tag{3.7}$$

$(\lambda_w,\mu_w,\nu_w,\sigma_w\in K)$. Тогда условие $t_{10}=0$ равносильно системе следующих уравнений для координат разложений из (3.7) (для удобства читателя мы указываем в скобках, при каких элементах стандартного базиса R сравниваются соответствующие скаляры):

$$\sigma_{b^i}=0\quad\text{для}\quad 0\leqslant i\leqslant k-2\qquad\left(\gamma b^i\right);\tag{3.8}$$

$$\lambda_{e_0}+\sigma_{b^{k-1}}=0\qquad\left(\gamma b^{k-1}\right);\tag{3.9}$$

$$k\lambda_\alpha+(k-1)\mu_\beta+(k-1)\nu_\gamma+\sigma_\eta=0\qquad\left(\alpha\gamma b^{k-1}\right).\tag{3.10}$$

Аналогично условие $t_{11}=0$ равносильно следующим соотношениям (вновь мы указываем соответствующие базисные элементы алгебры R):

$$\mu_\beta+\nu_\gamma+(s-1)\sigma_\eta=0\qquad\Big(\beta\gamma\Big);\tag{3.11}$$

$$\mu_{\beta\alpha g^i}+\nu_{\alpha\gamma b^i}=0\quad\text{для}\quad 0\leqslant i\leqslant k-2\qquad\Big(b^{i+1}\Big);\tag{3.12}$$

$$\mu_{\beta\alpha g^{k-1}}+\nu_{\alpha\gamma b^{k-1}}+(s-1)\sigma_{\eta^2}=0\qquad\Big(b^k\Big);\tag{3.13}$$

$$(s-1)\sigma_{e_1}=0\qquad\Big(\eta^{s-2}\Big).\tag{3.14}$$

Далее, условие $t_{00} = 0$ равносильно соотношениям

$$\lambda_{\gamma\beta a^i} = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-2 \qquad \left(a^{i+1}\right);$$

$$\lambda_{g^i} + \lambda_{a^i} = 0 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1 \qquad \left(\alpha g^i\right);$$

$$c\sigma_{b^i} = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-2 \qquad \left(\gamma\beta a^i\right); \tag{3.15}$$

$$(k-1)\lambda_\alpha + k\mu_\beta + k\nu_\gamma + c\sigma_{b^{k-1}} = 0 \qquad \left(\gamma\beta a^{k-1}\right); \tag{3.16}$$

$$\mu_{\beta\gamma} + \nu_{\alpha\gamma} + c\mu_\beta + c\nu_\gamma + c\sigma_\eta = 0 \qquad \left(a^k\right). \tag{3.17}$$

Наконец, условие $t_{01} = 0$ равносильно соотношениям (3.8)–(3.10). Отметим, что соотношение (3.15) следует из (3.8), а соотношение (3.14) – также из (3.8) (при $i = 0$). Кроме того, ввиду соотношения (3.12) (при $i = 0$) соотношение (3.17) принимает вид

$$c\mu_\beta + c\nu_\gamma + c\sigma_\eta = 0. \tag{3.18}$$

Дальнейшее исследование дифференциала δ^1 мы будем проводить, накладывая дополнительные условия на параметры k и s (из (1.1)).

Случай 1. k и s чётны.

Предложение 3.1.1. *Если k и s чётны, то пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве K-базиса набор когомологических классов следующих элементов из* $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, R)$*:*

$$[e_0 + c\alpha, 0, 0, b^{k-1}]; \tag{3.19}$$

$$[\gamma\beta a^{k-1}, 0, 0, 0], \quad [a^k, 0, 0, 0]; \tag{3.20}$$

$$[0, \beta, 0, \eta], \quad [0, 0, \alpha\gamma b^{k-1}, \eta^2]; \tag{3.21}$$

$$[\alpha g^i, 0, 0, 0] \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.22}$$

$$[0, 0, 0, \eta^i] \quad \text{для} \quad 3 \leqslant i \leqslant s. \tag{3.23}$$

Доказательство. При чётном k соотношение (3.16) принимает вид

$$\lambda_\alpha + c\sigma_{b^{k-1}} = 0,$$

а тогда ввиду (3.9) получаем, что

$$\lambda_\alpha + c\lambda_{e_0} = 0.$$

Кроме того, оба соотношения (3.10) и (3.11) принимают вид

$$\mu_\beta + \nu_\gamma + \sigma_\eta = 0, \tag{3.24}$$

и, следовательно, уравнение (3.18) сейчас может быть опущено. Теперь непосредственно проверяется, что множество элементов из (3.5)–(3.6) и (3.19)–(3.23) составляет базис пространства $Z^1(R)$, и требуемое утверждение следует отсюда с учетом замечания 3.0.3. □

Следствие 3.1.2. *Если k и s чётны, то*

$$\dim_K Z^1(R) = 5k + s, \quad \dim_K \mathrm{HH}^1(R) = k + s + 2, \quad \dim_K B^2(R) = 4k.$$

Замечание 3.1.3. Непосредственно проверяется, что $B^2(R)$ порождается элементами:

$$[a^i + g^i, 0, 0, 0], \quad [\alpha g^i, 0, 0, 0], \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.25}$$

$$[c\gamma\beta a^i, \beta a^i, \gamma b^i, 0], \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-2,$$

$$[0, 0, 0, b^i], \quad \text{где} \quad 2 \leqslant i \leqslant k, \tag{3.26}$$

$$[c\gamma\beta, \beta, \gamma, \eta^{s-2}], \tag{3.27}$$

$$[cg^k, \beta\alpha g^{k-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, \eta^{s-1}], \tag{3.28}$$

$$[0, \beta a^{k-1}, \gamma b^{k-1}, 0], \quad [\gamma\beta a^{k-1}, 0, 0, 0], \quad [g^k, 0, 0, b],$$

и поскольку их число равно $4k$, то они составляют базис $B^2(R)$.

Замечание 3.1.4. В дальнейшем для n-коцикла $f \in Z^n(R)$ его когомологический класс $\mathrm{cl}\, f \in \mathrm{HH}^n(R)$ часто обозначаем также через f.

Случай 2. k чётно, s нечётно.

Предположим, что k чётно, а s нечётно. Тогда уравнения (3.10), (3.11) и (3.13) принимают следующий вид соответственно:

$$\mu_\beta + \nu_\gamma + \sigma_\eta = 0, \tag{3.29}$$

$$\mu_\beta + \nu_\gamma = 0, \tag{3.30}$$

$$\mu_{\beta\alpha g^{k-1}} + \nu_{\alpha\gamma b^{k-1}} = 0. \tag{3.31}$$

Отметим, что из (3.29) и (3.30) следует, что $\sigma_\eta = 0$; кроме того, соотношение (3.18) следует из (3.29). Теперь аналогично предложению 3.1.1 доказывается следующее утверждение.

Предложение 3.1.5. *Если k чётно, а s нечётно, то пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве K-базиса набор когомологических классов элементов из* (3.19), (3.20), (3.22) *и* (3.23), *а также элемента* $[0,0,0,\eta^2]$.

Следствие 3.1.6. *Если k чётно, а s нёчетно, то*

$$\dim_K Z^1(R) = 5k+s-1, \quad \dim_K \mathrm{HH}^1(R) = k+s+1,$$
$$\dim_K B^2(R) = 4k+1.$$

Замечание 3.1.7. В условиях предложения 3.1.5 для получения базиса $B^2(R)$ надо в множестве, указанном в замечании 3.1.3, элементы из (3.27) и (3.28) заменить на следующие три элемента:

$$[c\gamma\beta,\beta,\gamma,0], \quad [cg^k,\beta\alpha g^{k-1},\alpha\gamma b^{k-1},0], \quad [0,0,0,\eta^{s-1}].$$

Случай 3. k нечётно, s чётно.

Предложение 3.1.8. *Если k нечётно, а s чётно, то пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве K-базиса набор когомологических классов элементов из* (3.20), (3.22) *и* (3.23), *а также элементов*

$$[e_0+c\alpha,c\beta,0,c\eta+b^{k-1}], \quad [0,0,\alpha\gamma b^{k-1},\eta^2]. \tag{3.32}$$

Доказательство. При нечётном k и чётном s уравнения (3.10), (3.11), (3.13) и (3.16) принимают соответственно следующий вид:

$$\lambda_\alpha + \sigma_\eta = 0, \tag{3.33}$$
$$\mu_\beta + \nu_\gamma + \sigma_\eta = 0, \tag{3.34}$$
$$\mu_{\beta\alpha g^{k-1}} + \nu_{\alpha\gamma b^{k-1}} + \sigma_{\eta^2} = 0, \tag{3.35}$$
$$\mu_\beta + \nu_\gamma + c\sigma_{b^{k-1}} = 0. \tag{3.36}$$

С учетом рассуждений из доказательства предложения 3.1.1 отсюда легко получаем, что в качестве базиса пространства $Z^1(R)$ можно взять множество, состоящее из элементов (3.20), (3.22), (3.23), (3.32) и (3.5)–(3.6). Для завершения доказательства остается использовать замечание 3.0.3.

□

Следствие 3.1.9. *Если k нечётно, а s чётно, то*

$$\dim_K Z^1(R) = 5k + s - 1, \quad \dim_K \mathrm{HH}^1(R) = k + s + 1,$$
$$\dim_K B^2(R) = 4k + 1.$$

Замечание 3.1.10. В условиях предложения 3.1.8 для получения базиса $B^2(R)$ надо в множестве, указанном в замечании 3.1.3, элемент из (3.28) заменить на следующие два элемента:

$$[0, \beta\alpha g^{k-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, 0], \quad [cg^k, 0, 0, \eta^{s-1}].$$

Случай 4. k и s нечётны.

Если k и s нечётны, то выполняются соотношения (3.33), (3.36), а также (3.30) и (3.31).

Далее мы будем различать два случая: а) $c \neq 0$; б) $c = 0$.

Случай 4а). Предположим, что $c \neq 0$. Тогда из соотношений (3.18) и (3.30) следует, что $\sigma_\eta = 0$, а ввиду (3.33) также и $\lambda_\alpha = 0$. Кроме того, из (3.36) и (3.30) следует, что $\sigma_{b^{k-1}} = 0$, а тогда ввиду (3.8) имеем $\lambda_{e_0} = 0$. Отсюда легко получаем, что в качестве базиса пространства $Z^1(R)$ можно взять множество, состоящее из элементов (3.5)–(3.6), (3.20), (3.22), (3.23), а также $[0, 0, 0, \eta^2]$. Теперь используя замечание 3.0.3, получаем следующее утверждение.

Предложение 3.1.11. *Если k и s нечётны, а $c \neq 0$, то пространство $\mathrm{HH}^1(R)$ имеет в качестве K-базиса набор когомологических классов элементов из* (3.20), (3.22), (3.23), *а также элемента* $[0, 0, 0, \eta^2]$.

Следствие 3.1.12. *Если k и s нечётны, а $c \neq 0$, то*

$$\dim_K Z^1(R) = 5k + s - 2, \quad \dim_K \mathrm{HH}^1(R) = k + s,$$
$$\dim_K B^2(R) = 4k + 2.$$

Замечание 3.1.13. В условиях предложения 3.1.11 для получения базиса $B^2(R)$ надо в множестве, указанном в замечании 3.1.3, элемент из (3.28) заменить на следующие три элемента:

$$[0, \beta\alpha g^{k-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, 0], \quad [g^k, 0, 0, 0], \quad [0, 0, 0, \eta^{s-1}].$$

Случай 4б). Предположим, что $c = 0$.

Предложение 3.1.14. *Если k и s нечётны, а $c = 0$, то для получения базиса пространства $\mathrm{HH}^1(R)$ надо к набору, описанному в предложении* 3.1.11, *добавить элементы*

$$[e_0, 0, 0, b^{k-1}], \quad [\alpha, 0, 0, \eta]. \tag{3.37}$$

Доказательство. Из предыдущих рассуждений легко следует, что в рассматриваемом случае для получения базиса пространства $Z^1(R)$ надо базис такого пространства для случая 4a) дополнить элементами из (3.37). Для завершения доказательства остается использовать замечание 3.0.3. □

Следствие 3.1.15. *Если k и s нечётны, а $c = 0$, то*

$$\dim_K Z^1(R) = 5k + s, \quad \dim_K \mathrm{HH}^1(R) = k + s + 2,$$
$$\dim_K B^2(R) = 4k + 2.$$

Замечание 3.1.16. Непосредственно проверяется, что в условиях предложения 3.1.14 базисом пространства $B^2(R)$ является множество, содержащее элементы из (3.25), (3.26), а также элементы

$$[0, \beta a^i, \gamma b^i, 0], \quad \text{где} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$

$$[0, \beta\alpha g^{k-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, 0], \quad [\gamma\beta a^{k-1}, 0, 0, , \eta^{s-1}], \quad [g^k, 0, 0, b].$$

3.2. Дифференциал δ^2.

В этом подразделе мы исследуем дифференциал $\delta^2 \colon \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_3, R)$. Ввиду сделанных выше соглашений δ^2 описывается формулой: для $r_{ij} \in e_i R e_j$ $(i, j \in \{0, 1\})$

$$\delta^2(r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}) = (t_{00}, t_{11}),$$

где

$$t_{00} = \alpha r_{00} + r_{00}\alpha + \gamma r_{10} + c\gamma r_{10}\alpha + r_{01}\beta + c\alpha r_{01}\beta, \tag{3.38}$$

$$t_{11} = r_{10}\gamma + \beta r_{01} + \eta r_{11} + r_{11}\eta. \tag{3.39}$$

Предложение 3.2.1. а) *Пространство* $Z^2(R)$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов:*

$$[c\gamma\beta a^i, \beta a^i, \gamma b^i, 0], \quad \text{где} \ \ 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{3.40}$$

$$[\gamma\beta a^i, \beta\alpha g^i, \alpha\gamma b^i, 0], \quad \text{где} \ \ 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{3.41}$$

$$[0, \beta a^{k-1}, \gamma b^{k-1}, 0], [\gamma\beta a^{k-1}, 0, 0, 0]; \tag{3.42}$$

$$[e_0, 0, 0, 0], [a^k, 0, 0, 0]; \tag{3.43}$$

$$[0, \beta\alpha g^{k-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, 0]; \tag{3.44}$$

$$[g^i + a^i, 0, 0, 0], [0, 0, 0, b^i], \ \text{где} \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.45}$$

$$[0, 0, 0, \eta^i], \quad \text{где} \ \ 0 \leqslant i \leqslant s; \tag{3.46}$$

$$[\alpha g^i, 0, 0, 0], \quad \text{где} \ \ 0 \leqslant i \leqslant k-1. \tag{3.47}$$

б) *Пространство* $B^3(R)$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов:*

$$[a^i + g^i, 0], \quad [\alpha g^i, 0], \quad [\gamma\beta a^i + cg^{i+1}, 0], \ \text{где} \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.48}$$

$$[g^i, b^i], \quad \text{где} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k; \tag{3.49}$$

$$[\gamma\beta + cg, \eta^{s-1}]. \tag{3.50}$$

Доказательство. Предположим, что $q = (r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}) \in Z^2(R)$. Компоненты этого 2-коцикла представим в виде (3.7). Тогда соотношение $t_{00} = 0$ (где t_{00} из (3.38)) равносильно следующей системе уравнений относительно коэффициентов $\lambda_w, \mu_w, \nu_w \in K$ этих разложений:

$$\lambda_{a^i} + \lambda_{g^i} = 0 \ \ \text{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.51}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{\gamma\beta a^i} + \mu_{\beta\alpha g^i} + c\mu_{\beta a^i} = 0 \\ \lambda_{\gamma\beta a^i} + \nu_{\alpha\gamma b^i} + c\nu_{\gamma b^i} = 0 \end{aligned}\right\} \ \text{для} \ 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{3.52}$$

$$\mu_{\beta\alpha g^{k-1}} + \nu_{\alpha\gamma b^{k-1}} + c(\mu_{\beta a^{k-1}} + \nu_{\gamma b^{k-1}}) = 0. \tag{3.53}$$

Второе соотношение $t_{11} = 0$ (для t_{11} из (3.39)) равносильно такой системе уравнений:

$$\mu_\beta + \nu_\gamma = 0,$$
$$\mu_{\beta\alpha g^i} + \nu_{\alpha\gamma b^i} = 0 \ \ \text{для} \ \ 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Отсюда легко получаем, что множество элементов из (3.40)–(3.47) составляет базис $Z^2(R)$. В частности, $\dim_K Z^2(R) = 5k + s + 2$, $\dim_K B^3(R) = 4k - 2$.

Непосредственно проверяется, что элементы из (3.48)–(3.50) порождают $B^3(R)$, а поскольку из число равно $\dim_K B^3(R)$, то они образуют базис этого пространства. □

Следствие 3.2.2.

а) $\dim_K Z^2(R) = 5k + s + 2, \quad \dim_K B^3(R) = 4k - 2;$

$$\text{б)}\quad \dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+s+2, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ чётны} \\ & \textit{или } k \textit{ и } s \textit{ нечётны и } c = 0, \\ k+s+1, & \textit{если } k+s \textit{ нечётно,} \\ k+s, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ нечётны и } c \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение а) следует из предложения 3.2.1. Утверждение б) вытекает из следствий 3.1.2, 3.1.6, 3.1.9, 3.1.12 и 3.1.15. □

Предложение 3.2.3. а) *Если k и s чётны, то $\mathrm{HH}^2(R)$ имеет в качестве K-базиса набор когомологических классов элементов из* (3.41), (3.43), (3.44), *а также следующих элементов:*

$$[0,0,0,\eta^i], \quad \textit{где} \quad 0 \leqslant i \leqslant s-3; \tag{3.54}$$

$$[c\gamma\beta, \beta, \gamma, 0]; \tag{3.55}$$

$$[\alpha, 0, 0, 0]. \tag{3.56}$$

б) *Если $k+s$ нечётно, то $\mathrm{HH}^2(R)$ имеет в качестве K-базиса набор когомологических классов элементов из* (3.41), (3.43), (3.54), (3.56), *а также элемента* $[0,0,0,\eta^{s-2}]$.

в) *Если k и s нечётны и $c = 0$, то для получения K-базиса пространства $\mathrm{HH}^2(R)$ надо к набору когомологических классов, указанному выше в пункте* б), *присоединить класс элемента* $[0,0,0,\eta^{s-1}]$.

г) *Если k и s нечётны, а $c \neq 0$, то для получения K-базиса пространства $\mathrm{HH}^2(R)$ надо из набора когомологических классов, указанного выше в пункте* б), *удалить класс элемента* $[a^k, 0, 0, 0]$.

Доказательство. Во всех случаях требуемые утверждения непосредственно вытекают (с учетом следствия 3.2.2) из предложения 3.2.1 и замечаний 3.1.3, 3.1.7, 3.1.10, 3.1.13 и 3.1.16, в которых были указаны соответствующие базисы для $B^2(R)$. □

3.3. Дифференциал δ^3.

Поскольку резольвента из предложения 2.4 имеет период 4, нам осталось изучить дифференциал

$$\delta^3\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_3, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_4, R).$$

Аналогично предыдущему он может быть описан следующим образом: для $r_i \in e_i R e_i$ $(i = 0, 1)$

$$\delta^3(r_0, r_1) = (f_0, f_1), \tag{3.57}$$

где

$$f_0 = \sum_{i=0}^{k} a^i \cdot r_0 \cdot a^{k-i} + \sum_{i=1}^{k} \gamma\beta a^{i-1} \cdot r_0 \cdot \alpha g^{k-1-i} + \sum_{i=1}^{k-1} g^i \cdot r_0 \cdot g^{k-i}$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} \alpha g^{i-1} \cdot r_0 \cdot \gamma\beta a^{k-i} + c\gamma\beta a^{k-1} \cdot r_0 \cdot \gamma\beta a^{k-1} + c\sum_{i=1}^{k-1} g^i \cdot r_0 \cdot \alpha g^{k-i}$$
$$+ c\sum_{i=1}^{k-1} \alpha g^i \cdot r_0 \cdot a^{k-i} + c\sum_{i=1}^{3} \alpha^i \cdot r_0 \cdot \alpha^{4-i} + c\alpha g^{k-1} \cdot r_0 \cdot a^k + cg^k \cdot r_0 \cdot \alpha g^{k-1}$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} \alpha\gamma b^{i-1} \cdot r_1 \cdot \beta a^{k-i} + \sum_{i=1}^{k} \gamma b^{i-1} \cdot r_1 \cdot \beta\alpha g^{k-i} + c\alpha\gamma b^{k-1} \cdot r_1 \cdot \beta a^{k-1}, \tag{3.58}$$

$$f_1 = \sum_{i=0}^{k} \beta\alpha g^{i-1} \cdot r_0 \cdot \gamma b^{k-i} + \sum_{i=1}^{k} \beta a^{i-1} \cdot r_0 \cdot \alpha\gamma b^{k-i}$$
$$+ c\sum_{i=1}^{k} \beta\alpha g^{i-1} \cdot r_0 \cdot \alpha\gamma b^{k-i} + c\beta\alpha g^{k-1} \cdot r_0 \cdot \alpha\gamma b^{k-1}$$
$$+ \sum_{i=0}^{k} b^i \cdot r_1 \cdot b^{k-i} + \sum_{i=1}^{s-1} \eta^i \cdot r_1 \cdot \eta^{s-i} + c\sum_{i=1}^{s} \eta^i \cdot r_1 \cdot \eta^{s-i+1}.$$

Предложение 3.3.1. а) *Если $k + s$ чётно, то $\mathrm{HH}^3(R)$ имеет в качестве K-базиса набор когомологических классов элементов*

$$\left.\begin{array}{l} [a^i, 0] \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k; \\ [\alpha, 0], \quad [\gamma\beta, 0]; \\ [0, \eta^i] \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant s-2. \end{array}\right\} \tag{3.59}$$

Если $k+s$ нечётно, то для получения базиса $\mathrm{HH}^3(R)$ *надо из* (3.59) *исключить элемент* $[0, e_1]$.

б) *Если $k+s$ чётно, то*

$$\mathrm{HH}^4(R) \simeq \mathrm{HH}^0(R),$$

и в качестве K-базиса пространства $\mathrm{HH}^4(R)$ *можно взять множество, состоящее из элементов*

$$\left.\begin{aligned} &[a^i + g^i, b^i], \ \text{где } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\ &[0, \eta^i], \ \text{где } 2 \leqslant i \leqslant s;\\ &[e_0, e_1], \quad [\alpha g^{k-1}, \eta], \quad [\gamma\beta a^{k-1}, 0], \quad [a^k, 0]. \end{aligned}\right\} \tag{3.60}$$

Если же $k+s$ нечётно, то для получения базиса $\mathrm{HH}^4(R)$ *надо взять когомологические классы элементов из* (3.60), *за исключением элемента* $[0, \eta^s]$.

Доказательство. а) Непосредственная проверка показывает, что для любых $(r_0, r_1) \in e_0Re_0 \oplus e_1Re_1$ элемент f_0 из (3.58) равен нулю (напомним, что $\operatorname{char} K = 2$). Далее, пусть $q = (r_0, r_1) \in Z^3(R)$, где

$$r_0 = \sum_{w \in \mathcal{B}_{00}} \lambda_w w, \quad r_1 = \sum_{w \in \mathcal{B}_{11}} \mu_w w,$$

$(\lambda_w, \mu_w \in K)$ (ср. (3.7)). Легко видеть, что условие $f_1 = 0$ равносильно уравнению

$$(k+s)\mu_{e_1} = 0.$$

Таким образом, если $k+s$ чётно, то $\delta^3 = 0$, и, следовательно, множество

$$\{[w, 0] \mid w \in \mathcal{B}_{00}\} \cup \{[0, w] \mid w \in \mathcal{B}_{11}\}$$

служит базисом для $Z^3(R)$, а при нечётном $k+s$ из этого множества надо исключить $[0, e_1]$. Для получения базиса пространства $\mathrm{HH}^3(R)$ остается использовать предложение 3.2.1,б).

б) Утверждение следует из того, что при $k+s$ чётном имеем $B^4(R) = 0$, а при нечётном $k+s$ пространство $B^4(R)$ порождается одним вектором $[0, \eta^s]$. $\square$

Следствие 3.3.2.

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} k+s+2, & \text{если } k+s \text{ чётно},\\ k+s+1, & \text{если } k+s \text{ нечётно}. \end{cases}$$

4. Образующие и соотношения

Пусть $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – минимальная Λ-проективная резольвента, описанная в разделе 2. Пусть

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) = \Big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R), \delta^n\Big)$$

– комплекс из (3.1). Любой n-коцикл $f \in Z^n(R) = \mathrm{Ker}\,\delta^n$ поднимается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\varphi_i\colon Q_{n+i} \to Q_i\}_{i\geqslant 0}$. Гомоморфизм φ_i назовем *i-ой трансляцией* коцикла f и будем обозначать через $\mathrm{T}^i(f)$. Для коциклов $f \in \mathrm{Ker}\,\delta^n$ и $g \in \mathrm{Ker}\,\delta^t$ имеем

$$\mathrm{cl}\,g \cdot \mathrm{cl}\,f = \mathrm{cl}\,(\mu\mathrm{T}^0(g)\mathrm{T}^t(f)).$$

В дальнейшем мы, используя прямые разложения модулей Q_i, будем описывать трансляции коциклов, а также их произведения с помощью матриц, соответствующих этим разложениям. Отметим также, что ввиду (градуированной) коммутативности алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для вычисления попарных произведений различных однородных элементов из $\mathrm{HH}^*(R)$ нам достаточно для элемента степени i знать его трансляции до i-го порядка включительно.

4.1. k и s чётны.

В этом разделе мы предполагаем, если не оговорено противное, что k и s чётны.

Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

– степени 1 : $u_1 := [e_0 + c\alpha, 0, 0, b^{k-1}]$, $u_2 := [0, \beta, 0, \eta]$;

– степени 2 : $$\left.\begin{array}{l} v_1 := [0,0,0,e_1], \quad v_2 := [\alpha, 0, 0, 0], \\ v_3 := [\gamma\beta, \beta\alpha, \alpha\gamma, 0]; \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

– степени 3 : $$w_1 := [0, e_1]; \tag{4.2}$$

– степени 4 : $t := [e_0, e_1]$.

Напомним, что ранее мы выделили элементы из $\mathrm{HH}^0(R)$: p_1, p_2, p_3, p_4 (см. (3.4)).

Предложение 4.1.1. *Пусть k и s чётны. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_1 = \{p_i\}_{i=1}^4 \cup \{u_1, u_2\} \cup \{v_i\}_{i=1}^3 \cup \{w_1, t\} \tag{4.3}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются следующие соотношения:*

$$p_ip_j = 0 \text{ для } 1 \leqslant i < j \leqslant 4; \quad p_1^k = p_2^s, \quad p_3^2 = p_4^2 = 0; \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{aligned} p_1u_1 = cp_1u_2 + p_2^{s-1}u_2,\ p_2u_1 = p_1^{k-1}u_2,\\ p_1^ku_2 = p_3u_2 = p_4u_2 = 0; \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

$$\left.\begin{aligned} p_3v_1 = p_4v_1 = p_3v_3 = p_4v_3 = 0,\\ p_1v_2 = p_2v_2 = p_4v_2 = 0,\\ p_1v_1 = p_3v_2 = p_2v_3; \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

$$p_3u_1^2 = 0,\ p_2v_3 = p_4u_1^2, \tag{4.7}$$

$$\left.\begin{aligned} p_2^{s-1}v_1 = p_1^{k-1}v_3 + cp_4u_1^2,\\ u_2^2 = (\theta_k + \theta_s)p_1^{k-1}v_3 + c\theta_sp_1v_1,\\ u_1u_2 = c\theta_kp_1^{k-1}v_3; \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

$$p_3w_1 = p_4w_1 = 0, \tag{4.9}$$

$$p_1w_1 = u_2v_3, p_2w_1 = u_2v_1, u_1v_1 = p_1^{k-2}u_2v_3, u_2v_2 = 0, \tag{4.10}$$

$$p_1^{k-2}u_1v_3 = cu_1v_1,\ p_2^{s-2}u_2v_1 = u_1v_3 + cu_2v_3, \tag{4.11}$$

$$u_1w_1 = c\theta_kp_1^kt,\ u_2w_1 = (\theta_k + \theta_s)p_1^kt, \tag{4.12}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1^2 = p_2^2(1 + cp_2)t, \quad v_3^2 = p_1^2t,\\ v_1v_2 = v_1v_3 = v_2^2 = v_2v_3 = 0; \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

$$u_1^2v_2 = u_1^4 = 0; \tag{4.14}$$

$$u_1w_1 = c\theta_kp_1^kt,\ u_2w_1 = (\theta_k + \theta_s)p_1^kt; \tag{4.15}$$

$$v_1w_1 = p_2u_2t + cp_2^2u_2t, \quad v_3w_1 = p_1u_2t,\ v_2w_1 = 0; \tag{4.16}$$

$$w_1^2 = (\theta_k + \theta_s)p_1^{k-1}v_3t + \theta_sp_1v_1t. \tag{4.17}$$

Замечание 4.1.2. Напомним, что элементы $\theta_n \in K$ описываются формулой (1.9).

Доказательство. Соотношения (4.4)–(4.6), (4.9) проверяются непосредственно. Для доказательства остальных соотношений необходимо вычислить трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_1$, имеющих положительную степень. Ввиду 4-периодичности резольвенты из предложения 2.4 для элемента t в качестве трансляций $\mathrm{T}^i(t)$ можно взять тождественные отображения соответствующих модулей.

Лемма 4.1.3. *В качестве трансляций элементов из* $\mathcal{Y}_1 \setminus \{t\}$ *положительной степени можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами:*

$$\mathrm{T}^0(u_1) = \begin{pmatrix} (e_0 + c\alpha) \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{k-1} \otimes e_1 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{T}^1(u_1) = \left((\mathrm{T}^1(u_1))_{*1} \quad (\mathrm{T}^1(u_1))_{*2} \quad (\mathrm{T}^1(u_1))_{*3} \quad (\mathrm{T}^1(u_1))_{*4} \right),$$

где столбцы матрицы $\mathrm{T}^1(u_1)$ *описываются следующим образом:*

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{*2} = \begin{pmatrix} c\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^i \otimes g^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} b^{i-1} \otimes g^{k-i} + c\sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^i \otimes \alpha g^{k-i-1} \\ c\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^{i-1} \otimes \beta\alpha g^{k-i-1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{*3} =$$
$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-1} \gamma\beta a^{i-1} \otimes \gamma b^{k-i-1} + c\sum\limits_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes \gamma b^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} \gamma b^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} + c\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} a^{i-1} \otimes b^{k-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} g^i \otimes b^{k-i-1} + c\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha g^{i-1} \otimes b^{k-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{*4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b^{k-1} \otimes \eta^{s-3} \end{pmatrix},$$

а элементы первого столбца $(\mathrm{T}^1(u_1))_{*1}$ *таковы:*

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{11} = e_0 \otimes e_0 + c\alpha \otimes e_0 + c\sum_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^{i-1} \otimes \gamma\beta a^{k-i-1}$$
$$+ c^2\sum_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes \gamma\beta a^{k-i-1} + c^2\sum_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^i \otimes g^{k-i-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{21} = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma b^{i-1} \otimes \gamma\beta a^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k} \gamma b^{i-1} \otimes g^{k-i}$$

$$+c\sum_{i=1}^{k-1} \alpha\gamma b^{i-1} \otimes \gamma\beta a^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k-1} i\gamma b^{i-1} \otimes a^{k-i}$$

$$+c^2\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^{i-1} \otimes a^{k-i} + c^2\sum_{i=1}^{k-1} i\gamma b^{i} \otimes \alpha g^{k-i-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{31} = c\sum_{i=1}^{k} ig^{i-1} \otimes \beta a^{k-i} + c^2\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^{i-1} \otimes \beta a^{k-i}$$

$$+c^2\sum_{i=1}^{k-1} ig^{i} \otimes \beta\alpha g^{k-i-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{41} = 0;$$

$$(\mathrm{T}^2(u_1)) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 + ce_0 \otimes \alpha & 0 \\ c\gamma \otimes e_0 + c^2\gamma \otimes \alpha & \eta^{s-2} \otimes \alpha\gamma b^{k-2} \\ \alpha g^{k-2} \otimes \eta^{s-2}\beta & 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{k-1} \alpha\gamma b^{j-1} \otimes \beta a^{k-j-1} & \sum\limits_{j=1}^{k} b^{j-1} \otimes b^{k-j} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & \beta \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_2) = (\,(\mathrm{T}^1(u_2))_{*1} \quad (\mathrm{T}^1(u_2))_{*2} \quad (\mathrm{T}^1(u_2))_{*3} \quad (\mathrm{T}^1(u_2))_{*4}\,),$$

где столбцы матрицы $\mathrm{T}^1(u_2)$ *описываются следующим образом:*

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{*2} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^{i} \otimes g^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-2} (i+1) b^{i} \otimes \alpha g^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta\alpha g^{i} \otimes \beta\alpha g^{k-i-2} \\ e_1 \otimes \beta \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{*3} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes \gamma b^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-3} i\alpha\gamma b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-i-2} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes b^{k-i-1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{*4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \otimes e_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{s-3} i\eta^i \otimes \eta^{s-i-2} \end{pmatrix},$$

а элементы первого столбца $(\mathrm{T}^1(u_2))_{*1}$ *таковы:*

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{11} = \sum_{i=0}^{k-2}(i+1)\gamma\beta a^i \otimes \gamma\beta a^{k-i-2}$$

$$+c\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes \gamma\beta a^{k-i-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{21} = \sum_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes a^{k-i-1}$$

$$+c\sum_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k-3} i\alpha\gamma b^i \otimes a^{k-i-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{31} = \sum_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \beta a^{k-i-1}$$

$$+c\sum_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes \beta a^{k-i-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{41} = 0;$$

$$\mathrm{T}^0(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_1) = \begin{pmatrix} (\mathrm{T}^2(v_1))_{*1} & (\mathrm{T}^2(v_1))_{*2} \end{pmatrix},$$

где столбцы матрицы $\mathrm{T}^2(v_1)$ *описываются следующим образом:*

$$(\mathrm{T}^2(v_1))_{*1} = \begin{pmatrix} a^{k-1} \otimes \gamma\beta a^{k-1} + a^k \otimes \gamma\beta a^{k-2} + \gamma\beta a^{k-2} \otimes g^k \\ \sum\limits_{j=1}^{k-1} \alpha\gamma b^{j-1} \otimes a^{k-j} \\ \sum\limits_{j=1}^{k} g^{j-1} \otimes \beta\alpha g^{k-j} + \alpha g^{k-1} \otimes \beta + c\alpha g^{k-1} \otimes \beta\alpha g^{k-1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^2(v_1))_{*2} = \begin{pmatrix} \beta a^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1} \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} b^j \otimes \alpha\gamma b^{k-j-1} + c\eta \otimes \alpha\gamma b^{k-1} \\ \beta\alpha g^{k-1} \otimes e_1 \\ \eta \otimes \eta + c\eta^2 \otimes \eta \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(v_2) = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{T}^1(v_2) = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_2) = \begin{pmatrix} (\mathrm{T}^2(v_2))_{*1} & (\mathrm{T}^2(v_2))_{*2} \end{pmatrix},$$

где столбцы матрицы $\mathrm{T}^2(v_2)$ *описываются следующим образом:*

$$(\mathrm{T}^2(v_2))_{*1} = \\ = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{k} a^{j-1} \otimes a^{k-j+1} + \sum\limits_{j=1}^{k} g^j \otimes g^{k-j} + c\gamma\beta a^{k-1} \otimes \gamma\beta a^{k-1} \\ \gamma \otimes \gamma\beta a^{k-1} \\ 0 \\ \alpha\gamma b^{k-1} \otimes \beta a^{k-1} + c\alpha\gamma b^{k-1} \otimes \beta\alpha g^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^2(v_2))_{*2} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{k} \beta a^{j-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-j} \\ cb^k \otimes \gamma \\ 0 \\ b^{k-1} \otimes b^k + c\eta^{s-1} \otimes \eta^2 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & \beta\alpha \otimes e_0 & e_0 \otimes \alpha\gamma & 0 \\ \gamma \otimes \beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(v_3) = \begin{pmatrix} \gamma\beta \otimes e_0 + e_0 \otimes \gamma\beta + c\gamma\beta\alpha \otimes e_0 + ce_0 \otimes \alpha\gamma\beta & \beta \otimes \gamma \\ \gamma \otimes \alpha & 0 \\ \alpha \otimes \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_3) = \begin{pmatrix} c\gamma\beta a^{k-1} \otimes g^k & 0 \\ \gamma \otimes \gamma\beta\alpha & \beta\alpha\gamma \otimes \gamma \\ \alpha\gamma\beta \otimes \beta & \beta\alpha \otimes \eta^{s-1} \\ \alpha\gamma \otimes \beta\alpha g^{k-1} + \alpha\gamma b^{k-1} \otimes \beta\alpha & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(w_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}^1(w_1) = \begin{pmatrix} \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^{i-1} \otimes \gamma b^{k-i} \\ \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i} \\ \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^{i-1} \otimes b^{k-i} \\ 0 & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_1))_{11} = \sum_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes \gamma\beta a^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-2}(i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-i-1} + ca^k \otimes g^{k-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_1))_{21} = \sum_{i=0}^{k-2}(i+1)\alpha\gamma b^i \otimes a^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-2}(i+1)\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-i-1} + c\alpha\gamma b^{k-1} \otimes \alpha g^{k-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_1))_{31} = \sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes \beta a^{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-i-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_1))_{42} = \sum_{i=1}^{s-1} i\eta^i \otimes \eta^{s-i-1} + c\sum_{i=1}^{s-1} i\eta^i \otimes \eta^{s-i},$$

$$\mathrm{T}^2(w_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & c\gamma\eta \otimes \gamma & \eta \otimes \gamma \\ 0 & 0 & \alpha g^{k-1} \otimes \eta^{s-2} & c\beta\alpha g^{k-1} \otimes \eta + c\beta \otimes \eta^2 \\ 0 & \eta \otimes \beta & 0 & \eta^2 \otimes e_1 + ce_1 \otimes \eta^3 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_1))_{22} = e_1 \otimes \gamma\beta + \eta^{s-2} \otimes \alpha g^{k-1} + c\eta^{s-1} \otimes \alpha g^{k-1};$$

а $\mathrm{T}^3(w_1)$ – 2×4-*матрица, в которой*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^3(w_1))_{11} &= \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)\gamma\beta a^i \otimes a^{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \gamma\beta a^{k-i-1} \\
&+ c\sum_{i=0}^{k-2} (i+1)\gamma\beta a^i \otimes \alpha g^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes g^{k-i} \\
&+ c\sum_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes a^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes \gamma\beta a^{k-i-1} \\
&+ c\sum_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes a^{k-i} + ca^k \otimes a^{k-1} \\
&+ c^2\sum_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \alpha g^{k-i} + c^2\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes a^{k-i} + c^2 g^k \otimes \alpha g^{k-1}, \\
(\mathrm{T}^3(w_1))_{12} &= \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)\beta a^i \otimes \alpha g^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)\beta\alpha g^i \otimes g^{k-i-1} \\
&+ c\sum_{i=0}^{k-2} (i+1)\beta\alpha g^i \otimes \alpha g^{k-i-1} + c\beta\alpha g^{k-1} \otimes \alpha g^{k-1}, \\
(\mathrm{T}^3(w_1))_{13} &= \sum_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes \gamma b^{k-i-1} \\
&+ c\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{T}^3(w_1))_{14} &= 0,\\
(\mathrm{T}^3(w_1))_{21} &= \sum_{i=0}^{k-2}(i+1)\gamma b^i\otimes\beta a^{k-i-1} + c\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)\gamma b^i\otimes\beta\alpha g^{k-i-1}\\
&\quad + c\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)\alpha\gamma b^i\otimes\beta a^{k-i-1} + c\gamma\eta\otimes\beta a^{k-1},\\
(\mathrm{T}^3(w_1))_{22} &= \sum_{i=0}^{k-2}(i+1)b^i\otimes\beta\alpha g^{k-i-1},\\
(\mathrm{T}^3(w_1))_{23} &= \sum_{i=0}^{k-2}(i+1)\alpha\gamma b^i\otimes b^{k-i-1} + c\gamma\eta\otimes\eta + c\gamma\otimes\eta^2,
\end{aligned}
$$

$$
(\mathrm{T}^3(w_1))_{24} = \sum_{i=1}^{s-1} i\eta^i\otimes\eta^{s-i-1} + c\sum_{i=0}^{s}(i+1)\eta^i\otimes\eta^{s-i} + c\eta^{s-1}\otimes\eta.
$$

Доказательство леммы 4.1.3 состоит в прямой проверке соотношений $\mu\mathrm{T}^0(r) = r$, $d_{i-1}\mathrm{T}^i(r) = \mathrm{T}^{i-1}(r)d_{i+\deg r}$ $(0 < i)$ для $r \in \mathcal{Y}_1 \setminus \{t\}$ с $\deg r > 0$, и это предоставляется проделать читателю. $\square$

Замечание 4.1.4. Для дальнейшего важно заметить, что формулы для трансляций элементов v_1, v_3 остаются справедливыми для любых значений k и s; кроме того, формулы для трансляций элементов u_1, v_2 справедливы для любых s (при чётном k).

Лемма 4.1.5. *Пусть $k, s \in \mathbb{N}$ $(k \geqslant 2, s \geqslant 3)$ и $c \in K$ произвольны. Для элемента $w_0 := [e_0, 0] \in \mathrm{HH}^3(R)$ в качестве трансляций $\mathrm{T}^i(w_0)$ $(0 \leqslant i \leqslant 3)$ можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами:*

$$
\mathrm{T}^0(w_0) = \begin{pmatrix} e_0\otimes e_0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathrm{T}^1(w_0) = \begin{pmatrix} \star & \star\\ c\gamma b^{k-1}\otimes\gamma\beta a^{k-1} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},
$$

где

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{T}^1(w_0))_{11} &= \sum_{i=1}^{k} a^{i-1}\otimes\gamma\beta a^{k-i} + \sum_{i=1}^{k}\gamma\beta a^{i-1}\otimes g^{k-i}\\
&+ c\sum_{i=1}^{k-1} g^i\otimes g^{k-i} + c\sum_{i=2}^{k} a^{i-1}\otimes a^{k-i+1}\\
&+ c\alpha\otimes\alpha^2 + c\alpha^3\otimes e_0 + ca^{k-1}\otimes a^k + cg^k\otimes g^{k-1},\\
(\mathrm{T}^1(w_0))_{12} &= \sum_{i=1}^{k}\beta a^{i-1}\otimes\gamma b^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k}\beta a^{i-1}\otimes\alpha\gamma b^{k-i}\\
&+ c\beta a^{k-1}\otimes\alpha\gamma b^{k-1},
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{T}^2(w_0) = \begin{pmatrix} \star & c\beta\otimes\alpha^2 & \star & \star\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \gamma b^{k-1}\otimes\beta a^{k-1} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};
$$

где

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{T}^2(w_0))_{11} &= e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1} + \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 + c\sum_{j=1}^{k-1} a^j\otimes g^{k-j}\\
&+ c\alpha^3\otimes e_0 + c\alpha\otimes\alpha^2 + c^3\gamma\beta a^{k-1}\otimes a^k,\\
(\mathrm{T}^2(w_0))_{13} &= c\sum_{j=1}^{k}\gamma\beta a^{j-1}\otimes\gamma b^{k-j} + c\gamma\beta a^{k-1}\otimes\gamma b^{k-1},\\
(\mathrm{T}^2(w_0))_{14} &= \beta a^{k-1}\otimes\gamma b^{k-1} + c\beta a^{k-1}\otimes\alpha\gamma b^{k-1};
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{T}^3(w_0) = \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & 0\\ \sum\limits_{i=0}^{k-1}\gamma b^i\otimes\beta a^{k-i-1} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},
$$

где

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{T}^3(w_0))_{11} &= \sum_{i=0}^{k-1} g^i\otimes\gamma\beta a^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-1}\gamma\beta a^i\otimes a^{k-i-1}\\
&+ c\sum_{i=0}^{k} g^i\otimes a^{k-i} + c^3\alpha^3\otimes\alpha^2.
\end{aligned}
$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.1.3.

Замечание 4.1.6. В доказательстве предложения 4.1.1 нам понадобится только формула для $\mathrm{T}^1(w_0)$. Трансляции элемента w_0 более высокого порядка мы используем позднее (см. доказательство предложения 4.5.1).

Продолжение доказательства предложения 4.1.1. Все соотношения, кроме $u_1^4 = 0$ из (4.14), доказываются прямыми вычислениями с использованием леммы 4.1.3. Мы проиллюстрируем это, доказав соотношение $u_1 u_2 = c\theta_k p_1^{k-1} v_3$ из (4.8). Проверку остальных соотношений мы оставляем читателю.

Введем обозначение $A := (A_{ij}) := \mathrm{T}^0(u_1)\mathrm{T}^1(u_2)$; это 2×4-матрица, члены которой вычисляются с помощью леммы 4.1.3:

$$\begin{aligned}
A_{11} =& \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)\gamma\beta a^i \otimes \gamma\beta a^{k-i-2} + c\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-i-1} \\
&+ c\sum_{i=1}^{k-1} i a^i \otimes \gamma\beta a^{k-i-1} + c\sum_{i=0}^{k-2}(i+1) g^{i+1} \otimes \gamma\beta a^{k-i-2} \\
&+ c^2 \sum_{i=0}^{k-2}(i+1) g^{i+1} \otimes g^{k-i-1} + c^2\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes \gamma\beta a^{k-i-1}, \\
A_{12} =& \sum_{i=1}^{k-1} i\beta a^i \otimes g^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^i \otimes g^{k-i-1}, \\
A_{13} =& \sum_{i=1}^{k-1} i a^i \otimes \gamma b^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes \gamma b^{k-i-1}, \\
A_{22} =& \, b^{k-1} \otimes \beta, \\
A_{21} =& A_{23} = A_{14} = A_{24} = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$u_1 u_2 = \mu \mathrm{T}^0(u_1)\mathrm{T}^1(u_2) = c\theta_k[\gamma\beta a^{k-1}, \beta\alpha g^{k-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, 0] = c\theta_k p_1^{k-1} v_3.$$

Для доказательства соотношения $u_1^4 = 0$ заметим сначала, что (с использованием формул для трансляций элемента u_1) имеем

$$u_1^3 = w_0 + c u_1 v_2 + c^3(\theta_k + 1) p_3 u_1 v_2. \tag{4.18}$$

Далее, так как $u_1 w_0 = \mu \mathrm{T}^0(u_1)\mathrm{T}^1(w_0)$, то с использованием леммы 4.1.5 получаем, что $u_1 w_0 = 0$. Теперь, поскольку $u_1^2 v_2 = 0$ (см. (4.14)), из (4.18) выводим соотношение $u_1^4 = 0$. □

Предложение 4.1.7. *Пусть k и s чётны. Множество $\mathcal{Y}_1$, указанное в* (4.3), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ обозначает K-подалгебру в $\mathrm{HH}^*(R)$, порожденную множеством $\mathcal{Y}_1 \cup \{1\}$ (здесь 1 – единица алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$). Поскольку умножение на t задает изоморфизм $\mathrm{HH}^i(R) \to \mathrm{HH}^{i+4}(R)$ $(i \geqslant 0)$, то достаточно доказать, что $\mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$ для $i \leqslant 3$.

Ввиду замечания 3.0.2 имеем $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$. Для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в предложении 3.1.1, справедливы соотношения

$$[\gamma\beta a^{k-1}, 0, 0, 0] = (p_3 + cp_4)u_1,\ [a^k, 0, 0, 0] = p_4 u_1, \tag{4.19}$$

$$[0, 0, \alpha\gamma b^{k-1}, \eta^2] = p_2 u_2,$$
$$[\alpha g^i, 0, 0, 0] = p_1^i u_2 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;$$
$$[0, 0, 0, \eta^i] = p_2^{i-1} u_2 \text{ для } 3 \leqslant i \leqslant s,$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее, для $[e_0, 0, 0, 0] \in \mathrm{HH}^2(R)$, – это один из базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^2(R)$ (см. предложение 3.2.3), – с использованием описания трансляции $\mathrm{T}^1(u_1)$ из леммы 4.1.3 получаем:

$$[e_0, 0, 0, 0] = u_1^2 + c^2\theta_k p_1^{k-1} v_3 + c^3 p_4 u_1^2.$$

Кроме того, для других базисных элементов $\mathrm{HH}^2(R)$ имеются соотношения:

$$[\gamma\beta a^i, \beta\alpha g^i, \alpha\gamma b^i, 0] = p_1^i v_3,\ [a^k, 0, 0, 0] = p_1 v_1,$$
$$[0, \beta\alpha g^{k-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, 0] = p_1^{k-1} v_3,$$
$$[0, 0, 0, \eta^i] = p_2^i v_1 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s-3.$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$.

Аналогично предыдущему для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в предложении 3.3.1, получаем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}[a^i, 0] = p_1^i w_1 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k; \\ [\alpha, 0] = u_1 v_2,\ [\gamma\beta, 0] = u_1 v_3, \\ [0, \eta^i] = p_2^i w_1 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s-2,\end{gathered} \tag{4.20}$$

кроме того, $[e_0, 0] = w_0 \in \mathcal{H}$ ввиду (4.18), откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$. $\square$

Пусть $\mathcal{A}_1 = K[\mathcal{X}_1]/I_1$ – градуированная K-алгебра, определенная в разделе 1, где $\mathcal{X}_1$ из (1.2), а I_1 – соответствующий идеал соотношений (см. (1.4)–(1.8), (1.10)–(1.17)). (Ненулевые) образы мономов из $K[\mathcal{X}_1]$ относительно канонического эпиморфизма $K[\mathcal{X}_1] \to \mathcal{A}_1$ также будем называть мономами. Произвольный элемент $a \in \mathcal{A}_1$ записывается в виде линейной комбинации мономов (с коэффициентами из K). Из предложений 4.1.1 и 4.1.7 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_1$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_1$ (см. (4.3)); заметим, что, не боясь двусмысленности, мы обозначили одинаково элементы из обоих множеств, которые соответствуют друг другу. Пусть $\mathcal{A}_1 = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathcal{A}_1^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_1$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть 1) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.1.8. *Для любого $n \geqslant 0$*

$$\dim_K \mathcal{A}_1^n = \dim_K \mathrm{HH}^n(R).$$

Прежде чем переходить к доказательству этого предложения, заметим, что из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_1$ непосредственно вытекают следующие соотношения.

Лемма 4.1.9. *В алгебре $\mathcal{A}_1$ выполняются соотношения:*

$$\begin{gathered} p_1^2 u_1 = c p_1^2 u_2, \quad p_2^2 u_1 = 0, \\ p_1 u_1^2 = p_2 u_1^2 = p_1^2 v_1 = p_2^s v_1 = p_2^2 v_3 = p_1^k v_3 = 0, \\ p_1 u_1 v_3 = c p_1^2 w_1, \\ p_2 u_1 v_1 = p_1 u_2 v_1 = p_2 u_2 v_3 = u_1^2 v_1 = u_1^2 v_3 = 0. \end{gathered} \tag{4.21}$$

Доказательство предложения 4.1.8. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_1]$, где $\mathcal{X}_1$ из (1.2), введем лексикографический порядок такой, что

$$w_1 > u_2 > v_1 > v_3 > u_1 > v_2 > t > p_3 > p_4 > p_1 > p_2.$$

Из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_1$ следует, что любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_1$ приводится к виду

$$f = w_1^{\alpha} u_2^{\beta} v_1^{\gamma_1} v_3^{\gamma_3} u_1^{i} v_2^{\gamma_2} t^m p_3^{\varepsilon_3} p_4^{\varepsilon_4} p_1^{j} p_2^{l}, \tag{4.22}$$

где $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{0, 1\}$, а также $0 \leqslant i \leqslant 3$, $0 \leqslant j \leqslant k$, $0 \leqslant l \leqslant s$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Назовем *редукцией* элемента $x = \sum_{r=1}^{t} \lambda_r f_r \in \mathcal{A}_1$, где $\lambda_r \in K \setminus \{0\}$, а f_r – мономы, процесс замены некоторых подмономов, входящих в f_r $(r = 1, \ldots, t)$, на другие элементы из $\mathcal{A}_1$ по следующим правилам ($x \mapsto y$ означает замену каждого вхождения монома x на элемент y):

$$\left.\begin{array}{ll}
p_1 w_1 \mapsto u_2 v_3, & u_1 w_1 \mapsto c\theta_k p_1^k t \,(\text{если}\, c\theta_k \neq 0),\\
p_2 w_1 \mapsto u_2 v_1, & u_2 w_1 \mapsto (\theta_k + \theta_s) p_1^k t\\
 & \quad (\text{если}\, \theta_k + \theta_s \neq 0),\\
v_1 w_1 \mapsto p_2 u_2 t + c p_2^2 u_2 t, & w_1^2 \mapsto (\theta_k + \theta_s) p_1^{k-1} v_3 t + \theta_s v_1 t\\
 & \quad (\text{если}\, \theta_k \neq 0 \,\text{или}\, \theta_s \neq 0),\\
v_3 w_1 \mapsto p_1 u_2 t, & p_1^{k-1} u_2 \mapsto p_2 u_1,\\
p_2^{s-1} u_2 \mapsto p_1 u_1 + c p_1 u_2, & u_2^2 \mapsto (\theta_k + \theta_s) p_1^{k-1} v_3 + c\theta_s p_1 v_1\\
 & \quad (\text{если}\, \theta_k + \theta_s \neq 0 \,\text{или}\, c\theta_s \neq 0),\\
p_1^{k-2} u_2 v_3 \mapsto u_1 v_1, & u_1 u_2 \mapsto c\theta_k p_1^{k-1} v_3 \ (\text{если}\, c\theta_k \neq 0),\\
p_2^{s-2} u_2 v_1 \mapsto u_1 v_3 + c u_2 v_3, & p_1 u_2 v_3 \mapsto c^{-1} p_1 u_1 v_3 \ (\text{если}\, c \neq 0),\\
p_1^2 u_2 \mapsto c^{-1} p_1^2 u_1 \ (\text{если}\, c \neq 0), & p_1 v_1 \mapsto p_2 v_3 \mapsto p_4 u_1^2 \mapsto p_3 v_2,\\
v_1^2 \mapsto p_2^2 (1 + c p_2) t, & p_2^{s-1} v_1 \mapsto p_1^{k-1} v_3 + c p_4 u_1^2,\\
u_1 v_1 \mapsto c^{-1} p_1^{k-2} u_1 v_3 \ (\text{если}\, c \neq 0), & p_1^{k-1} u_1 \mapsto c p_2 u_1 \ (\text{если}\, c \neq 0),\\
v_3^2 \mapsto p_1^2 t, & p_4 u_1^3 \mapsto p_3 u_1 v_2,\\
p_1^k \mapsto p_2^s. &
\end{array}\right\} \tag{4.23}$$

Любую замену из приведенного выше списка назовем *элементарным шагом редукции*. Заметим, что некоторые шаги из этого списка соответствуют соотношениям, указанным в лемме 4.1.9. Так как после каждого элементарного шага редукции ненулевой моном переходит в строго меньший относительно введенного лексикографического порядка, то за конечное число шагов мы получаем мономы, к которым уже нельзя применить никакой элементарный шаг редукции. Говорим, что представление элемента $x \in \mathcal{A}_1$ в виде линейной комбинации мономов имеет *нормальную форму*, если ни к одному из этих мономов нельзя применить редукцию. Поскольку эти элементарные шаги соответствуют некоторым соотношениям, выполняющимся в алгебре $\mathcal{A}_1$ (см. (1.4)–

(1.17) и лемму 4.1.9), то любой элемент $x \in \mathcal{A}_1$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_1^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_1^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_1^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{4.24}$$

Мы будем выделять отдельно случаи, когда: а) $c \neq 0$ или б) $c = 0$, и докажем, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующих списках.

$$c \neq 0:$$

степень	нормальные формы	количество
$4m$	$t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-1), t^m p_2^i (1 \leqslant i \leqslant s)$, $t^m p_3, t^m p_4$	$k+s+2$
$4m+1$	$u_2 t^m p_2^i (0 \leqslant i \leqslant s-2), u_2 t^m p_1$, $u_1 t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-2)$, $u_1 t^m p_2, u_1 t^m p_3, u_1 t^m p_4$	$k+s+2$
$4m+2$	$v_3 t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-1), u_1^2 t^m$, $v_1 t^m p_2^i (0 \leqslant i \leqslant s-2), v_2 t^m, v_2 t^m p_3$	$k+s+2$
$4m+3$	$w_1 t^m, u_2 v_1 t^m p_2^i (0 \leqslant i \leqslant s-3), u_2 v_3$, $u_1^3 t^m, v_3 u_1 t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-2)$, $v_2 u_1 t^m, v_2 u_1 t^m p_3$	$k+s+2$

$$c = 0:$$

степень	нормальные формы	количество
$4m$	$t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-1), t^m p_2^i (1 \leqslant i \leqslant s)$, $t^m p_3, t^m p_4$	$k+s+2$
$4m+1$	$u_2 t^m p_2^i (0 \leqslant i \leqslant s-2)$, $u_2 t^m p_1^i (1 \leqslant i \leqslant k-2), u_1 t^m$, $u_1 t^m p_1, u_1 t^m p_2, u_1 t^m p_3, u_1 t^m p_4$	$k+s+2$
$4m+2$	$v_3 t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-1), u_1^2 t^m$, $v_1 t^m p_2^i (0 \leqslant i \leqslant s-2), v_2 t^m, v_2 t^m p_3$	$k+s+2$
$4m+3$	$w_1 t^m, u_2 v_1 t^m p_2^i (0 \leqslant i \leqslant s-3)$, $v_3 u_2 t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-3), u_1^3 t^m$, $v_3 u_1 t^m, v_2 u_1 t^m, v_2 u_1 t^m p_3, v_1 u_1 t^m$	$k+s+2$

Легко видеть, что все мономы из этих списков имеют нормальную форму.

Пусть f – некоторый ненулевой моном вида (4.22), имеющий нормальную форму. Рассмотрим последовательно несколько случаев.

1) Предположим, что в f входит w_1. Тогда с помощью анализа списка элементарных шагов редукции (4.23) заключаем, что в f не входят $u_2, v_1, v_3, u_1, v_2, p_1, p_2$; кроме того, ввиду соотношений, соответствующих элементам из (1.10), в f не входят p_3 и p_4. Тогда $f = w_1 t^m$.

2) Предположим, что w_1 не входит в f, но входит u_2. Тогда в f не входят u_1, v_2 (ввиду подходящих редукций из (4.23)), а также p_3, p_4 (ввиду некоторых мономиальных соотношений, соответствующих элементам из (1.15)). Следовательно,

$$f = u_2 v_1^{\gamma_1} v_3^{\gamma_3} t^m p_1^j p_2^l;$$

при этом $\gamma_1 + \gamma_3 \leqslant 1$ (так как $v_1 v_3 = 0$), $j \leqslant k-2$, $l \leqslant s-2$ (ввиду шагов редукции $p_1^{k-1} u_2 \mapsto p_2 u_1$, $p_2^{s-1} u_2 \mapsto p_1 u_1 + c p_1 u_2$). Кроме того, если $\gamma_1 = 1$ (соответственно $\gamma_3 = 1$), то $j = 0$ (соответственно $l = 0$), поскольку имеются редукции $p_1 v_1 \mapsto p_2 v_3 \mapsto p_3 v_2$; ввиду редукции $p_2^{s-2} u_2 v_1 \mapsto u_1 v_3 + c u_2 v_3$ при $\gamma_1 = 1$ имеем также $l \leqslant s-3$. Если $c \neq 0$, то ввиду редукции $p_1^2 u_2 \mapsto c^{-1} p_1^2 u_1$ имеем $j \leqslant 1$, и если дополнительно $\gamma_3 = 1$, то $j = 0$ (так как $p_1 u_2 v_3 \mapsto c^{-1} p_1 u_1 v_3$). В случае $c = 0$ при $\gamma_3 = 1$ имеем $j \leqslant k-3$ (ввиду редукции $p_1^{k-2} u_2 v_3 \mapsto u_1 v_1$). Отсюда непосредственно получаем, что f лежит в одном из списков:

при $c \neq 0$: $u_2 t^m p_2^l$ $(1 \leqslant l \leqslant s-2)$,

$$u_2 t^m, u_2 t^m p_1, u_2 v_1 t^m p_2^l \quad (0 \leqslant l \leqslant s-3), \quad u_2 v_3 t^m;$$

при $c = 0$: $u_2 t^m p_2^l$ $(1 \leqslant l \leqslant s-2)$,

$$u_2 t^m p_1^j \quad (0 \leqslant j \leqslant k-2), \quad u_2 v_1 t^m p_2^l \quad (0 \leqslant l \leqslant s-3),$$
$$u_2 v_3 t^m p_1^j \quad (0 \leqslant j \leqslant k-3).$$

3) Пусть в f не входят w_1, u_2, и предположим, что v_1 входит в f. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что в f не могут входить также $v_3, v_2, u_2, p_1, p_3, p_4$. Следовательно, $f = v_1 u_1^i t^m p_2^l$; при этом $i \leqslant 1$ (ввиду соотношения $u_1^2 v_1 = 0$), а также $l \leqslant s-2$ (так как $p_2^{s-1} v_1 \mapsto p_1^{k-1} v_3 + c p_4 u_1^2$). Кроме того, при $c \neq 0$

необходимо имеем $i = 0$ (ввиду редукции $u_1v_1 \mapsto c^{-1}p_1^{k-2}u_1v_3$). Далее, если $c = 0$ и $i = 1$, то $l = 0$ (так как $p_2u_1v_1 = 0$; – см. лемму 4.1.9). Отсюда следует, что при $c \neq 0$ f совпадает с одним из следующих мономов:

$$v_1t^mp_2^l\ (0 \leqslant l \leqslant s-2),$$

а при $c = 0$ в этот список надо добавить $v_1u_1t^m$.

4) Предположим, что w_1, u_2, v_1 не входят, а v_3 входит в f. Легко видеть, что тогда в f не входят v_1, v_2, p_2, p_3, p_4, и, таким образом, $f = v_3u_1^it^mp_1^j$; здесь $i \leqslant 1$, так как $u_1^2v_3 = 0$ (см. лемму 4.1.9), а если $i = 1$, то $j \leqslant k-2$ (поскольку при $c \neq 0$ имеется редукция $p_1^{k-1}u_1 \mapsto cp_2u_1$, а при $c = 0$ имеем $p_1^{k-1}u_1 = 0$).

Таким образом, с учетом того, что $p_1^kv_3 = 0$, при $c \neq 0$ отсюда следует, что f – это один из мономов

$$v_3t^mp_1^j\ (0 \leqslant j \leqslant k-1), \quad v_3u_1t^mp_1^r\ (0 \leqslant r \leqslant k-3). \tag{4.25}$$

Если же $c = 0$, то $p_1u_1v_3 = 0$ (см. (4.21)), и тогда из набора (4.25) надо удалить мономы $v_3u_1t^mp_1^r$ с $r \geqslant 1$.

5) Пусть w_1, u_2, v_1, v_3 не входят, а u_1 входит в f. Предположим, что v_2 также входит в f. Тогда в f не входят p_1, p_2, p_4. Кроме того, $u_1^2v_2 = 0$, и поэтому f совпадает с одним из мономов

$$u_1v_2t^m, \quad u_1v_2t^mp_3.$$

Теперь предположим, что v_2 не входит в f. При $c \neq 0$ с учетом того, что $p_2^2u_1 = p_1u_1^2 = p_3u_1^2 = 0$ и имеются редукции $p_4u_1^2 \mapsto p_3v_2$, $p_1^{k-1}u_1 \mapsto cp_2u_1$, получаем, что f совпадает с одним из следующих мономов:

$$u_1t^mp_1^j\ (0 \leqslant j \leqslant k-2),$$
$$u_1t^mp_2,\ u_1t^mp_3,\ u_1t^mp_4,\ u_1^2t^m,\ u_1^3t^m. \tag{4.26}$$

При $c = 0$ из набора (4.26) надо удалить мономы $p_1^ju_1t^m$ с $j \geqslant 2$ (поскольку в этом случае $p_1^2u_1 = 0$).

6) Пусть w_1, u_2, v_1, v_3, u_1 не входят, а v_2 входит в f. Тогда в f не входят p_1, p_2, p_4. Следовательно, $f = v_2t^m$ или $f = v_2t^mp_3$.

7) Наконец, если в f не входят $w_1, u_2, v_1, v_3, u_1, v_2$, то ясно, что f совпадает с одним из мономов:

$$t^mp_1^j,\ \text{где } 0 \leqslant j \leqslant k-1;\ t^mp_2^l,\ \text{где } 1 \leqslant l \leqslant s;\ t^mp_3,\ t^mp_4.$$

Таким образом, мы показали, что любой моном, имеющий нормальную форму, содержится в приведенном выше списке, что (с учётом предложения 3.0.1 и следствий 3.1.2, 3.2.2, 3.3.2) завершает доказательство равенства (4.24). □

Доказательство части а) **предложения 1.4.** Пусть $V = \mathrm{HH}^1(R)\cdot \mathrm{HH}^1(R)$ – подпространство в $\mathrm{HH}^2(R)$, порожденное множеством $\{x\cdot y \mid x, y \in \mathrm{HH}^1(R)\}$. Прямыми вычислениями доказывается, что если $c \neq 0$, то

$$V =_K\langle(\theta_k+\theta_s)p_1^{k-1}v_3,\, c\theta_k p_1^{k-1}v_3,\, u_1^2,\, p_3v_2\rangle,$$

а если $c = 0$, то

$$V =_K\langle(\theta_k+\theta_s)p_1^{k-1}v_3,\, u_1^2,\ p_3v_2\rangle,$$

Предположим, что $\theta_k = \theta_s = 1$. Тогда

$$\dim_K V = \begin{cases} 3, & \text{если } \ c \neq 0,\\ 2, & \text{если } \ c = 0.\end{cases}$$

Поскольку алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ не меняется при замене R на производно эквивалентную алгебру, отсюда следует требуемое утверждение. □

4.2. k чётно, s нечётно.

В этом разделе мы предполагаем, если не оговорено противное, что k чётно, а s нечётно.

Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\begin{array}{lll}
\text{– степени } 0: & p_1, p_2, p_3, p_4 \ \text{ из (3.4)}; & \\
\text{– степени } 1: & \begin{array}{l} u_1 := [e_0 + c\alpha, 0, 0, b^{k-1}],\\ u_2' := [0,0,0,\eta^2], \quad u_3 := [\alpha g, 0,0,0]; \end{array} & (4.27)\\
\text{– степени } 2: & v_1,\ v_2,\ v_3 \ \text{ из (4.1)}; & \\
\text{– степени } 3: & w_2 := [0,\eta], \quad w_3 := [g, 0]; & (4.28)\\
\text{– степени } 4: & t := [e_0, e_1]. &
\end{array}$$

Предложение 4.2.1. *Пусть k чётно, s нечётно. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_2 = \{p_i\}_{i=1}^4 \cup \{u_1, u_2', u_3\} \cup \{v_i\}_{i=1}^3 \cup \{w_2, w_3, t\} \tag{4.29}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (4.4), (4.6), (4.7), (4.13), (4.14), *а также следующие соотношения:*

$$\left.\begin{aligned} p_1u_1 = p_2^{s-2}u_2' + cu_3,\ p_2u_1 = p_1^{k-2}u_3,\\ p_3u_2' = p_4u_2' = p_2u_3 = p_3u_3 = p_4u_3 = 0; \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

$$\left.\begin{aligned} p_2^{s-1}v_1 = 0,\ p_1^{k-1}v_3 = cp_4u_1^2,\\ u_1u_2' = (u_2')^2 = u_1u_3 = u_3^2 = u_2'u_3 = 0; \end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

$$p_1w_2 = p_3w_2 = p_4w_2 = p_2w_3 = p_3w_3 = p_4w_3 = 0, \tag{4.32}$$

$$u_3v_1 = u_2'v_2 = u_3v_2 = u_2'v_3 = 0, \tag{4.33}$$

$$u_1v_1 = p_1^{k-2}w_3,\ u_2'v_1 = p_2w_2, \tag{4.34}$$

$$p_2^{s-3}u_2'v_1 = u_1v_3 + cw_3,\ u_3v_3 = p_1w_3; \tag{4.35}$$

$$p_2^st = 0;\ u_1w_i = u_2'w_i = u_3w_i = 0 \ \text{ для } \ i \in \{2,3\}; \tag{4.36}$$

$$v_1w_3 = v_2w_2 = v_2w_3 = v_3w_2 = 0, \tag{4.37}$$

$$v_1w_2 = (p_2 + cp_2^2)u_2't, \tag{4.38}$$

$$v_3w_3 = p_1u_3t; \tag{4.39}$$

$$w_2^2 = w_3^2 = w_2w_3 = 0. \tag{4.40}$$

Доказательство. Проверка приведенных выше соотношений проводится аналогично доказательству предложения 4.1.1. При этом мы используем следующую лемму, в которой приведены трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_2$, для которых они не были вычислены ранее (см. лемму 4.1.3 и замечание 4.1.4). Все детали соответствующих вычислений мы оставляем читателю.

Лемма 4.2.2. *В качестве трансляций элементов* u_2', u_3, w_2, w_3 *можно взять следующие отображения:*

$$\mathrm{T}^0(u_2') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^2 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_2') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^2 \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum\limits_{i=2}^{s-1}(i+1)\eta^i \otimes \eta^{s-i-1} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(u_3) = \begin{pmatrix} \alpha g \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_3) = \begin{pmatrix} \star & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta a^{i+1} \otimes g^{k-i-1} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ia^{i+1} \otimes \gamma b^{k-i-1} & 0 \\ \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^{i+1} \otimes \alpha g^{k-i-1} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^{i} \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} & 0 \\ \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^{i} \otimes \beta\alpha g^{k-i-1} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha g^{i} \otimes b^{k-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_3))_{11} = \alpha g \otimes e_0 + \sum_{i=1}^{k-2} i\gamma\beta a^{i+1} \otimes \gamma\beta a^{k-i-2} + c\sum_{i=1}^{k-2} i\gamma\beta a^{i+1} \otimes g^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k-1} ia^{i+1} \otimes \gamma\beta a^{k-i-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_3))_{21} = \sum_{i=1}^{k-2} i\gamma b^{i+1} \otimes a^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k-2} i\gamma b^{i+1} \otimes \alpha g^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^{i} \otimes a^{k-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_3))_{31} = \sum_{i=1}^{k-1} ig^{i+1} \otimes \beta a^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k-1} ig^{i+1} \otimes \beta\alpha g^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^{i} \otimes \beta a^{k-i};$$

$$\mathrm{T}^0(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(w_2) = \begin{pmatrix} a^{k-1} \otimes a^k & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha g^{k-1} \otimes \beta\alpha g^{k-1} & 0 \\ 0 & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_2))_{42} = \sum_{i=0}^{s-1} (i+1)\eta^i \otimes \eta^{s-i} + c\sum_{i=1}^{s-2} i\eta^{i+1} \otimes \eta^{s-i},$$

$$\mathrm{T}^2(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 \otimes a^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_0 \otimes b^k & \beta\alpha g^{k-1} \otimes \eta \\ 0 & \eta \otimes \beta\alpha g^{k-1} & 0 & \eta \otimes \eta^2 + c\eta^2 \otimes \eta^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^3(w_2) = \begin{pmatrix} \star & 0 & \alpha g^{k-1} \otimes \gamma\eta & 0 \\ \gamma b^{k-1} \otimes \beta\alpha g^{k-1} & \eta \otimes \beta\alpha g^{k-1} & \alpha\gamma b^{k-1} \otimes \eta & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w_2))_{11} = \gamma\beta a^{k-1} \otimes \alpha g^{k-1} + g^k \otimes g^{k-1},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_2))_{24} = e_1 \otimes \eta^s + \sum_{i=1}^{s-2} i\eta^i \otimes \eta^{s-i} + c\sum_{i=1}^{s-2} i\eta^{i+1} \otimes \eta^{s-i};$$

$$\mathrm{T}^0(w_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma \otimes \beta\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(w_3) = \begin{pmatrix} \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^i \otimes \gamma b^{k-i} \\ \star & \sum\limits_{i=1}^{k} ib^i \otimes \alpha\gamma b^{k-i} \\ \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^i \otimes b^{k-i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_3))_{11} = \sum_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^i \otimes g^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-1} ia^{i+1} \otimes \gamma\beta a^{k-i-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_3))_{21} = \sum_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^i \otimes a^{k-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_3))_{31} = \sum_{i=1}^{k-1} ig^{i+1} \otimes \beta\alpha g^{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k-2} i\alpha g^{i+1} \otimes \beta a^{k-i-1};$$

$$\mathrm{T}^2(w_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta\alpha\gamma \otimes \gamma\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^3(w_3) = \begin{pmatrix} \star & \star & \star & 0 \\ \star & \sum\limits_{i=1}^{k} ib^i \otimes \beta\alpha g^{k-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^i \otimes b^{k-i} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^3(w_3))_{11} &= \sum_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^i \otimes a^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-1} ig^{i+1} \otimes \gamma\beta a^{k-i-1} \\
&+ c\sum_{i=1}^{k-1} ig^{i+1} \otimes a^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^i \otimes \alpha g^{k-i} \\
&+ c\sum_{i=1}^{k-1} ig^{i+1} \otimes g^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k-1} ia^{i+1} \otimes a^{k-i} \\
&+ c\sum_{i=1}^{k-2} i\alpha g^{i+1} \otimes \gamma\beta a^{k-i-1} + c^2\sum_{i=1}^{k-1} ig^{i+1} \otimes \alpha g^{k-i} \\
&+ c^2\sum_{i=1}^{k-2} i\alpha g^{i+1} \otimes a^{k-i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^3(w_3))_{21} &= \sum_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \beta a^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \beta\alpha g^{k-i} \\
&+ c\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^i \otimes \beta a^{k-i}, \\
(\mathrm{T}^3(w_3))_{12} &= \sum_{i=1}^{k-1} i\beta a^i \otimes \alpha g^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^i \otimes g^{k-i} \\
&+ c\sum_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^i \otimes \alpha g^{k-i}, \\
(\mathrm{T}^3(w_3))_{13} &= \sum_{i=1}^{k-1} ia^{i+1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k-2} i\alpha g^{i+1} \otimes \gamma b^{k-i-1} \\
&+ c\sum_{i=1}^{k-2} i\alpha g^{i+1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1}.
\end{aligned}$$

□

Замечание 4.2.3. Отметим, что формулы для трансляций элемента w_3 остаются справедливыми для случая, когда k нечётно, а s чётно.

Предложение 4.2.4. *Пусть k чётно, а s нечётно. Множество $\mathcal{Y}_2$, указанное в* (4.29)*, порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ обозначает K-подалгебру в $\mathrm{HH}^*(R)$, порожденную множеством $\mathcal{Y}_2 \cup \{1\}$. Сейчас умножение на t задает изоморфизм $\mathrm{HH}^i(R) \to \mathrm{HH}^{i+4}(R)$ для $i > 0$, а также эпиморфизм $\mathrm{HH}^0(R) \to \mathrm{HH}^4(R)$, и потому достаточно доказать, что $\mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$ для $i \leqslant 3$.

То, что $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$, получено в доказательстве предложения 4.1.7. Для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в предложении 3.1.5, справедливы соотношения (4.19), а также

$$\begin{aligned} &[\alpha g^i, 0, 0, 0] = p_1^{i-1} u_3 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &[0, 0, 0, \eta^i] = p_2^{i-2} u_2' \quad \text{для} \quad 2 \leqslant i \leqslant s, \end{aligned} \tag{4.41}$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$. Далее, включение $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$ проверяем аналогично доказательству предложения 4.1.7.

Наконец, для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в предложении 3.3.1, выполняются соотношения (4.20), (4.18), а также

$$\begin{aligned} &[a^i, 0] = p_1^{i-1} w_3 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &[0, \eta^i] = p_2^{i-1} w_2 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant s-2, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_2 = K[\mathcal{X}_2]/I_2$ – градуированная K-алгебра, определенная в разделе 1, где $\mathcal{X}_2$ из (1.18), а I_2 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 4.2.1 и 4.2.4 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_2 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_2$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_2$ (см. (4.29)). Пусть $\mathcal{A}_2 = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathcal{A}_2^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_2$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть 2) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предожение 4.2.5. *Для любого $m \geqslant 0$*

$$\dim_K \mathcal{A}_2^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{4.42}$$

Доказательство. Сначала отметим некоторые дополнительные соотношения, выполняющиеся в алгебре $\mathcal{A}_2$.

Лемма 4.2.6. *В алгебре $\mathcal{A}_2$ выполняются соотношения:*

$$p_2^{s-1}u_2' = p_1^{k-1}u_3 = 0,$$
$$p_1^{k-1}w_3 = p_3u_1v_2, \quad p_2^{s-1}w_2 = p_1^{k-1}w_3,$$
$$u_1^2v_3 = p_1^kw_3 = 0;$$
$$\text{если } \ k = 2, \quad \text{то } \ v_3^2 = 0.$$

Доказательство леммы состоит в простом выведении приведенных соотношений из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_2$, и сделать это предоставляется читателю. □

На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_2]$, где $\mathcal{X}_2$ из (1.18), введем лексикографический порядок такой, что

$$w_2 > v_1 > v_3 > u_1 > v_2 > u_2' > w_3 > u_3 > t > p_3 > p_4 > p_1 > p_2.$$

Из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_2$ следует, что любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_2$ приводится к виду

$$f = w_2^{\alpha_2}v_1^{\gamma_1}v_3^{\gamma_3}u_1^iv_2^{\gamma_2}(u_2')^{\beta_2}w_3^{\alpha_3}u_3^{\beta_3}t^mp_3^{\varepsilon_3}p_4^{\varepsilon_4}p_1^jp_2^l,$$

где $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{0, 1\}$, а также $0 \leqslant i \leqslant 3$, $0 \leqslant j \leqslant k$, $0 \leqslant l \leqslant s$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Рассмотрим следующий список элементарных шагов редукции:

$$\left.\begin{array}{ll}
p_2w_2 \mapsto u_2'v_1, & v_1w_2 \mapsto p_2u_2't + cp_2^2u_2't, \\
p_1v_1 \mapsto p_2v_3 \mapsto p_4u_1^2 \mapsto p_3v_2, & u_1v_1 \mapsto \begin{cases} p_1^{k-3}u_3v_3, & \text{если } k > 2, \\ w_3, & \text{если } k = 2. \end{cases} \\
v_1^2 \mapsto p_2^2(1 + cp_2)t, & p_2^{s-3}v_1u_2' \mapsto u_1v_3 + cw_3, \\
u_3v_3 \mapsto p_1w_3, & p_1^{k-1}v_3 \mapsto cp_4u_1^2 \ (\text{если } c \neq 0), \\
p_1u_1v_3 \mapsto cu_3v_3 \ (\text{если } c \neq 0), & v_3^2 \mapsto p_1^2t \ (\text{если } k > 2), \\
v_3w_3 \mapsto p_1u_3t, & p_1u_1 \mapsto p_2^{s-2}u_2' + cu_3, \\
p_2u_1 \mapsto p_1^{k-2}u_3, & p_3u_1v_2 \mapsto p_1^{k-1}w_3, \\
p_1^k \mapsto p_2^s. &
\end{array}\right\} \tag{4.43}$$

Аналогично доказательству предложения 4.1.8 определяется нормальная форма элемента $x \in \mathcal{A}_2$ (относительно шагов редукции (4.43)) и устанавливается, что любой элемент $x \in \mathcal{A}_2$ допускает хотя бы одну нормальную форму.

Докажем, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке:

степень	нормальные формы	количество
0	$p_1^i(0 \leqslant i \leqslant k-1)$, $p_2^i(1 \leqslant i \leqslant s), p_3, p_4$	$k+s+2$
$4m, m>0$	$t^m p_1^i(0 \leqslant i \leqslant k-1)$, $t^m p_2^i(1 \leqslant i \leqslant s-1), t^m p_3, t^m p_4$	$k+s+1$
$4m+1$	$u_1 t^m, u_2' t^m p_2^l(0 \leqslant l \leqslant s-2)$, $u_1 t^m p_3, u_1 t^m p_4, u_3 t^m p_1^j(0 \leqslant j \leqslant k-2)$	$k+s+1$
$4m+2$	$v_1 t^m p_2^l(0 \leqslant l \leqslant s-2)$, $v_3 t^m p_1^j(0 \leqslant j \leqslant k-2)$, $u_1^2 t^m, v_2 t^m, v_2 t^m p_3$	$k+s+1$
$4m+3$	$w_2 t^m, v_1 u_2' t^m p_2^l(0 \leqslant l \leqslant s-4)$, $v_3 u_1 t^m, u_1^3 t^m, u_1 v_2 t^m$, $w_3 t^m p_1^j(0 \leqslant j \leqslant k-1)$	$k+s+1$

В этой таблице при описании мономов степени $4m+3$ мы для единообразия подразумеваем, что в случае $s=3$ множество мономов вида $v_1 u_2' t^m p_2^l$ пусто.

Как и в доказательстве предложения 4.1.8, мы проанализируем последовательно несколько случаев.

1) Предположим, что в f входит w_2. Тогда с помощью мономиальных соотношений, соответствующих элементам (1.21), (1.25), (1.26), (1.28), получаем, что в f не входят $w_3, v_2, v_3, u_1, u_2', u_3, p_1$, p_3, p_4; кроме того, не входят v_1 (так как есть редукция $v_1 w_2 \mapsto p_2 u_2' t + c p_2^2 u_2' t$) и p_2 (ввиду $p_2 w_2 \mapsto u_2' v_1$). Следовательно, $f = w_2 t^m$.

2) Предположим, что w_2 не входит в f, но входит v_1. Тогда используя определяющие соотношения алгебры $\mathcal{A}_2$ и подходящие редукции из (4.43), легко получаем, что в f могут входить, кроме v_1, только u_2', t, p_2, и, следовательно, $f = v_1 (u_2')^{\beta_2} t^m p_2^l$. При этом если $\beta_2 = 0$, то $l \leqslant s-2$, а если $\beta_2 = 1$, то $l \leqslant s-4$. Таким образом,

$$f \in \left\{v_1 t^m p_2^l\right\}_{l=0}^{s-2} \cup \left\{v_1 u_2' t^m p_2^l\right\}_{l=0}^{s-4}.$$

3) Предположим, что w_2 и v_1 не входят в f, но входит v_3. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что f имеет вид $f = v_3 u_1^i t^m p_1^j$. При этом $i \leqslant 1$ (ввиду $u_1^2 v_3 = 0$) и $j \leqslant k-2$ (так как имеется редукция $p_1^{k-1} v_3 \mapsto c p_4 u_1^2$ при $c \neq 0$ и $p_1^{k-1} v_3 = 0$ при

$c = 0$); кроме того, если $i = 1$, то $j = 0$ (так как $p_1u_1v_3 \mapsto cu_3v_3$ при $c \neq 0$ и $p_1u_1v_3 = 0$ при $c = 0$). Следовательно, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$v_3t^mp_1^j(0 \leqslant j \leqslant k-2), \quad v_3u_1t^m.$$

4) Предположим, что w_2, v_1, v_3 не входят, а u_1 входит в f. Тогда легко получаем, что $f = u_1^iv_2^{\beta_2}t^mp_3^{\varepsilon_3}p_4^{\varepsilon_4}$. Если при этом $i \geqslant 2$, то $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ (ввиду того, что $p_3u_1^2 = 0$ и $p_4u_1^2 \mapsto p_3v_2$). Если же $\beta_2 = 1$, то вновь $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ (так как $p_3u_1v_2 \mapsto p_1^{k-1}w_3$ и $p_4v_2 = 0$). Отсюда следует, что f совпадает с одним из мономов:

$$u_1t^m, \ u_1t^mp_3, \ u_1t^mp_4, \ u_1^2t^m, \ u_1^3t^m, \ u_1v_2t^m.$$

5) Предположим, что w_2, v_1, v_3, u_1 не входят, а v_2 входит в f. Тогда аналогично предыдущему получаем, что f совпадает с одним из мономов: v_2t^m, $v_2t^mp_3$.

6) Предположим, что w_2, v_1, v_3, u_1, v_2 не входят, а u_2' входит в f. Тогда $f = u_2't^mp_2^l$, где $l \leqslant s-2$ (поскольку $p_2^{s-1}u_2' = 0$).

7) Предположим, что $w_2, v_1, v_3, u_1, v_2, u_2'$ не входят, а w_3 входит в f. Тогда $f = w_3t^mp_1^j$, где $j \leqslant k-1$ (поскольку $p_1^kw_3 = 0$).

8) Предположим, что $w_2, v_1, v_3, u_1, v_2, u_2', w_3$ не входят, а u_3 входит в f. Тогда $f = u_3t^mp_1^j$, где $j \leqslant k-2$ (так как $p_1^{k-1}u_3 = 0$).

9) Наконец, если в f не входят $w_2, v_1, v_3, u_1, v_2, u_2', w_3, u_3$, то ясно, что для $m > 0$ f совпадает с одним из мономов:

$$t^mp_1^j, \text{ где } 0 \leqslant j \leqslant k-1;$$
$$t^mp_2^l, \text{ где } 1 \leqslant l \leqslant s-1; \quad t^mp_3, \ t^mp_4. \tag{4.44}$$

В случае же $m = 0$ к элементам вида (4.44) надо добавить еще один элемент, а именно p_2^s.

Отсюда с учетом следствий 3.1.6, 3.2.2, 3.3.2 получаем равенство (4.42). $\square$

Продолжение доказательства предложения 1.4. Пусть $V = \mathrm{HH}^1(R) \cdot \mathrm{HH}^2(R)$ – подпространство в $\mathrm{HH}^3(R)$, порожденное множеством $\{x \cdot y \mid x \in \mathrm{HH}^1(R), y \in \mathrm{HH}^2(R)\}$. Используя таблицу с нормальными формами, содержащуюся в доказательстве предложения 4.2.5, мы прямыми вычислениями показываем, что если $c \neq 0$, то V порождается множеством

$$\mathcal{V} = \{p_1^jw_3 \mid 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \cup \{p_2^lu_2'v_1 \mid 0 \leqslant l \leqslant s-4\} \cup \{u_1v_3, \ u_1v_2, \ u_1^3\},$$

а если $c = 0$, то V порождается множеством $\mathcal{V} \setminus \{w_3\}$. Следовательно,

$$\dim_K V = \begin{cases} k+s, & \text{если } c \neq 0, \\ k+s-1, & \text{если } c = 0. \end{cases}$$

□

4.3. k нечётно, s чётно.

В этом разделе мы предполагаем, если не оговорено противное, что k нечётно, а s чётно.

Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

– степени 0 : p_1, p_2, p_3, p_4 из (3.4);

– степени 1 : $\widetilde{u}_1 := [e_0 + c\alpha, c\beta, 0, c\eta + b^{k-1}]$, $\widetilde{u}'_2 := [0, 0, \alpha\gamma b^{k-1}, \eta^2]$, $u_3 := [\alpha g, 0, 0, 0]$;

– степени 2 : v_1, v_2, v_3 из (4.1);

– степени 3 : w_2, w_3 из (4.28);

– степени 4 : $t := [e_0, e_1]$.

Предложение 4.3.1. *Пусть k нечётно, s чётно. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_3 = \{p_i\}_{i=1}^4 \cup \{\widetilde{u}_1, \widetilde{u}'_2, u_3\} \cup \{v_i\}_{i=1}^3 \cup \{w_2, w_3, t\} \tag{4.45}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (4.4), (4.6), (4.13), (4.32), (4.37), (4.39), (4.40), *а также следующие соотношения:*

$$\left.\begin{array}{c} p_1\widetilde{u}_1 = p_2^{s-2}\widetilde{u}'_2,\ p_2\widetilde{u}_1 = c\widetilde{u}'_2 + p_1^{k-2}u_3, \\ p_1\widetilde{u}'_2 = p_3\widetilde{u}'_2 = p_4\widetilde{u}'_2 = p_2u_3 = p_3u_3 = p_4u_3 = 0; \end{array}\right\} \tag{4.46}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_2^{s-1}v_1 = cp_2v_3,\ p_1^{k-1}v_3 = 0, \\ p_3\widetilde{u}_1^2 = 0,\ p_4\widetilde{u}_1^2 = p_3v_2, \\ \widetilde{u}_1\widetilde{u}'_2 = (\widetilde{u}'_2)^2 = \widetilde{u}_1u_3 = u_3^2 = \widetilde{u}'_2u_3 = 0; \end{array}\right\} \tag{4.47}$$

$$u_3v_1 = \widetilde{u}'_2v_2 = u_3v_2 = \widetilde{u}'_2v_3 = 0, \tag{4.48}$$

$$\widetilde{u}_1v_1 = cw_2 + p_1^{k-3}u_3v_3,\ \widetilde{u}'_2v_1 = p_2w_2; \tag{4.49}$$

$$\widetilde{u}_1v_3 = p_2^{s-3}\widetilde{u}'_2v_1,\ u_3v_3 = p_1w_3, \tag{4.50}$$

$$p_2^st = 0,\ \widetilde{u}_1w_i = \widetilde{u}'_2w_i = u_3w_i = 0 \ \text{ для } \ i \in \{2,3\}; \tag{4.51}$$

$$\widetilde{u}_1^4 = \widetilde{u}_1^2v_2 = 0, \tag{4.52}$$

$$v_1 w_2 = (p_2 + c p_2^2)\widetilde{u}_2' t. \tag{4.53}$$

Доказательство. Проверка приведенных выше соотношений проводится аналогично доказательству предложения 4.1.1. При этом мы используем следующую лемму, в которой приведены трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_3$, для которых они не были вычислены ранее (см. леммы 4.1.3, 4.2.2), отметим, однако, что трансляции элемента w_2 и $\mathrm{T}^2(v_2)$ в рассматриваемом случае отличаются от предъявленных выше. Все детали соответствующих вычислений мы оставляем читателю.

Лемма 4.3.2. *В качестве трансляций элементов $\widetilde{u}_1$, $\widetilde{u}_2'$, u_3, v_2, w_2 можно взять следующие отображения:*

$$\mathrm{T}^0(\widetilde{u}_1) = \begin{pmatrix} (e_0 + c\alpha)\otimes e_0 & c\beta\otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c\eta + b^{k-1})\otimes e_1 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1) = \left((\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{*1} \quad (\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{*2} \quad (\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{*3} \quad (\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{*4} \right),$$

где второй и четвертый столбцы матрицы $\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1)$ таковы:

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{*2} = \begin{pmatrix} c\sum\limits_{i=1}^{k} \beta a^{i-1}\otimes g^{k-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} b^{i-1}\otimes g^{k-i} + c\eta\otimes e_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{*4} = \begin{pmatrix} 0 \\ ce_1\otimes\gamma \\ 0 \\ c\sum\limits_{i=1}^{s-1} i\eta^{i-1}\otimes\eta^{s-i-1} + b^{k-1}\otimes\eta^{s-3} \end{pmatrix},$$

а элементы первого и третьего столбцов в $\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1)$ описываются *следующим образом:*

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{11} = e_0 \otimes e_0 + c\alpha \otimes e_0 + c^2 \sum_{i=1}^{k} \gamma\beta a^{i-1} \otimes g^{k-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{21} = c \sum_{i=1}^{k-1} \gamma b^{i-1} \otimes a^{k-i} + c^2 \sum_{i=1}^{k-1} \alpha\gamma b^{i-1} \otimes a^{k-i},$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{31} = &\sum_{i=1}^{k-1} \gamma\beta a^{i-1} \otimes \beta a^{k-i-1} + c \sum_{i=1}^{k-1} \gamma\beta a^{i-1} \otimes \beta\alpha g^{k-i-1}\\ &+ c \sum_{i=2}^{k} a^{i-1} \otimes \beta a^{k-i} + c \sum_{i=0}^{k-1} g^i \otimes \beta a^{k-i-1}\\ &+ c^2 \sum_{i=1}^{k} \alpha g^{i-1} \otimes \beta a^{k-i},\end{aligned}$$

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{41} = 0;$$

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{13} = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma\beta a^{i-1} \otimes \gamma b^{k-i-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{23} = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma b^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} + c \sum_{i=1}^{k-1} \alpha\gamma b^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1},$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{33} = &\sum_{i=1}^{k-1} g^i \otimes b^{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} \otimes b^{k-i}\\ &+c \sum_{i=0}^{k-1} \alpha g^i \otimes b^{k-i-1},\end{aligned}$$

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1))_{43} = 0;$$

$$\mathrm{T}^2(\widetilde{u}_1) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 + c\alpha \otimes e_0 & 0 \\ \gamma\eta^{s-2} \otimes \alpha g^{k-2} & \eta^{s-2} \otimes \alpha\gamma b^{k-2} \\ c\, e_0 \otimes \beta + c^2\alpha \otimes \beta & c\beta \otimes e_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} \gamma b^{i-1} \otimes \beta\alpha g^{k-i-1} & \sum\limits_{i=1}^{k} b^{i-1} \otimes b^{k-i} + c\, e_1 \otimes \eta \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(\widetilde{u}_2') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_1 & \eta^2 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_2') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^2 \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_0 \otimes \eta^2 & 0 \\ \gamma \otimes \beta a^{k-1} & 0 & \gamma \otimes \eta & \sum\limits_{i=2}^{s-1} i\eta^{i-1} \otimes \eta^{s-i} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(u_3) = \begin{pmatrix} \alpha g \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_3) = \big((\mathrm{T}^1(u_3))_{*1} \quad (\mathrm{T}^1(u_3))_{*2} \quad (\mathrm{T}^1(u_3))_{*3} \quad (\mathrm{T}^1(u_3))_{*4} \big),$$

столбцы этой матрицы таковы:

$$(\mathrm{T}^1(u_3))_{*1} =$$

$$\begin{pmatrix} \star \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1}(i+1)\gamma b^i \otimes a^{k-i} + c\sum\limits_{i=1}^{k-1}(i+1)\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-i} + c\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^i \otimes a^{k-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1}(i+1)g^i \otimes \beta a^{k-i} + c\sum\limits_{i=1}^{k-1}(i+1)g^i \otimes \beta\alpha g^{k-i} + c\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes \beta a^{k-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где первый элемент столбца $(\mathrm{T}^1(u_3))_{*1}$ *таков:*

$$(\mathrm{T}^1(u_3))_{11} = \alpha g \otimes e_0 + \sum_{i=1}^{k-1}(i+1)\gamma\beta a^i \otimes \gamma\beta a^{k-1-i}$$
$$+ c\sum_{i=1}^{k-1}(i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k-1}(i+1)a^i \otimes \gamma\beta a^{k-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_3))_{*2} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} i\beta a^i \otimes g^{k-i} + \beta \otimes g^k \\ \sum\limits_{i=1}^{k} ib^i \otimes \alpha g^{k-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} i\beta\alpha g^{i-1} \otimes \beta\alpha g^{k-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_3))_{*3} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-1}(i+1)a^i \otimes \gamma b^{k-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\alpha\gamma b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\alpha g^i \otimes b^{k-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_3))_{*4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$\mathrm{T}^0(v_2)$ *и* $\mathrm{T}^1(v_2)$ *совпадают с предъявленными в лемме* 4.1.3, *а*

$$\mathrm{T}^2(v_2) = ((\mathrm{T}^2(v_2))_{*1}(\mathrm{T}^2(v_2))_{*2}),$$

где

$$(\mathrm{T}^2(v_2))_{*1} =$$
$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} a^{i-1} \otimes a^{k-i+1} + \sum\limits_{i=1}^{k} g^i \otimes g^{k-i} + c\gamma\beta a^{k-1} \otimes \gamma\beta a^{k-1} + c\alpha^2 \otimes \alpha^2 \\ \gamma \otimes \gamma\beta a^{k-1} + c\alpha\gamma \otimes \gamma\beta a^{k-1} \\ ca^k \otimes \beta \\ \alpha\gamma b^{k-1} \otimes \beta a^{k-1} + c\alpha\gamma b^{k-1} \otimes \beta\alpha g^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^2(v_2))_{*2} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} \beta a^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i} \\ cb^k \otimes \gamma + c\beta\gamma \otimes \gamma\eta \\ c\beta \otimes \eta^s \\ b^{k-1} \otimes b^k + c\eta^{s-1} \otimes \eta^2 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{T}^1(w_2) = \begin{pmatrix} a^{k-1} \otimes a^k & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha g^{k-1} \otimes \beta\alpha g^{k-1} & 0 \\ 0 & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_2))_{42} = \sum_{i=1}^{s-1} i\eta^i \otimes \eta^{s-i} + c\sum_{i=1}^{s-1} i\eta^{i+1} \otimes \eta^{s-i},$$

$\mathrm{T}^2(w_2) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 \otimes a^k + c\eta \otimes a^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha g^{k-1} \otimes \eta^{s-1} & \beta\alpha g^{k-1} \otimes \eta \\ 0 & \eta \otimes \beta\alpha g^{k-1} + c\eta^2 \otimes \beta\alpha g^{k-1} & 0 & \eta \otimes \eta^2 + c\eta^2 \otimes \eta^2 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{T}^3(w_2) =$

$$\begin{pmatrix} \star & 0 & \alpha g^{k-1} \otimes \gamma\eta & 0 \\ \gamma b^{k-1} \otimes \beta\alpha g^{k-1} & \eta \otimes \beta\alpha g^{k-1} + c\eta^2 \otimes \beta\alpha g^{k-1} & \alpha\gamma b^{k-1} \otimes \eta & \star \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}^3(w_2))_{11} &= \gamma\beta a^{k-1} \otimes \alpha g^{k-1} + g^k \otimes g^{k-1}, \\ (\mathrm{T}^3(w_2))_{24} &= \sum_{i=1}^{s-2} (i+1)\eta^i \otimes \eta^{s-i} + c\sum_{i=1}^{s-2}(i+1)\eta^{i+1} \otimes \eta^{s-i}. \end{aligned}$$

□

Предложение 4.3.3. *Пусть k нечётно, а s чётно. Множество $\mathcal{Y}_3$, указанное в* (4.45)*, порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ обозначает K-подалгебру в $\mathrm{HH}^*(R)$, порожденную множеством $\mathcal{Y}_3 \cup \{1\}$. Сейчас умножение на t задает изоморфизм $\mathrm{HH}^i(R) \to \mathrm{HH}^{i+4}(R)$ для $i > 0$, а также эпиморфизм $\mathrm{HH}^0(R) \to \mathrm{HH}^4(R)$, и потому достаточно доказать, что $\mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$ для $i \leqslant 3$.

То, что $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$, получено в доказательстве предложения 4.1.7. Для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в предложении 3.1.8, справедливы соотношения (4.41), соотношения, аналогичные (4.19), а также

$$[0,0,0,\eta^i] = p_2^{i-2}\widetilde{u}_2' \quad \text{для} \quad 3 \leqslant i \leqslant s,$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее, для $[e_0,0,0,0] \in \mathrm{HH}^2(R)$, – это один из базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^2(R)$ (см. предложение 3.2.3), – с использованием описания трансляции $\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_1)$ из леммы 4.3.2 получаем:

$$[e_0,0,0,0] = \widetilde{u}_1^2 + c^3(\theta_s+1)p_3v_2.$$

Кроме того, для других базисных элементов $\mathrm{HH}^2(R)$ имеются соотношения:

$$[\gamma\beta a^i, \beta\alpha g^i, \alpha\gamma b^i, 0] = p_1^i v_3 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2, \quad [a^k,0,0,0] = p_1v_1,$$
$$[0,0,0,\eta^i] = p_2^i v_1 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant s-2.$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$.

Наконец, для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в предложении 3.3.1, выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
&[e_0, 0] = (1 + c^2 p_3 + c^3(\theta_s + 1)p_4)\widetilde{u}_1^3 + c\widetilde{u}_1 v_2;\\
&[a^i, 0] = p_1^{i-1} w_3 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&[\alpha, 0] = c\widetilde{u}_1 v_2 + (cp_3 + c^2 p_4)[e_0, 0];\\
&[\gamma\beta, 0] = cw_3 + p_2^{s-2} w_2;\\
&[0, \eta^i] = p_2^{i-1} w_2 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s-2,
\end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_3 = K[\mathcal{X}_3]/I_3$ – градуированная K-алгебра, определенная в разделе 1, где $\mathcal{X}_3$ из (1.29), а I_3 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 4.3.1 и 4.3.3 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_3 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_3$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_3$ (см. (4.45)). Пусть $\mathcal{A}_3 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_3^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_3$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть 3) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.3.4. *Для любого $m \geqslant 0$*

$$\dim_K \mathcal{A}_3^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{4.54}$$

Доказательство. Сначала отметим некоторые дополнительные соотношения, выполняющиеся в алгебре $\mathcal{A}_3$.

Лемма 4.3.5. *В алгебре $\mathcal{A}_3$ выполняются соотношения:*

$$\begin{gathered}
p_1\widetilde{u}_1^2 = p_2\widetilde{u}_1^2 = 0, \quad p_1^{k-1}w_3 = p_3\widetilde{u}_1 v_2, \quad p_2^{s-1}w_2 = p_1^{k-1}w_3,\\
p_2^{s-1}\widetilde{u}'_2 = p_1^{k-1}u_3 = p_1^k w_3 = p_4\widetilde{u}_1 v_2 = p_1\widetilde{u}_1 v_3 = 0,\\
p_3\widetilde{u}_1 v_2 = p_1^{k-1}w_3, \quad p_1^k w_3 = 0, \quad \widetilde{u}_1^2 v_1 = \widetilde{u}_1^2 v_3 = 0.
\end{gathered}$$

Доказательство леммы состоит в простом выведении приведенных соотношений из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_3$, и сделать это предоставляется читателю. □

На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_3]$, где $\mathcal{X}_3$ из (1.29), введем лексикографический порядок такой, что

$$w_2 > v_1 > v_3 > \widetilde{u}_1 > v_2 > \widetilde{u}'_2 > w_3 > u_3 > t > p_3 > p_4 > p_1 > p_2.$$

Из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_3$ следует, что любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_3$ приводится к виду

$$f = w_2^{\alpha_2} v_1^{\gamma_1} v_3^{\gamma_3} \widetilde{u}_1^{i} v_2^{\gamma_2} (\widetilde{u}'_2)^{\beta_2} w_3^{\alpha_3} u_3^{\beta_3} t^m p_3^{\varepsilon_3} p_4^{\varepsilon_4} p_1^j p_2^l,$$

где $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{0, 1\}$, а также $0 \leqslant i \leqslant 3$, $0 \leqslant j \leqslant k$, $0 \leqslant l \leqslant s$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Рассмотрим следующий список элементарных шагов редукции:

$$\left.\begin{array}{ll}
w_2 \mapsto c^{-1}\widetilde{u}_1 v_1 + c^{-1} p_1^{k-3} u_3 v_3 \ (\text{если}\, c \neq 0), & p_2 w_2 \mapsto \widetilde{u}'_2 v_1 \\
\widetilde{u}_1 v_1 \mapsto p_1^{k-3} u_3 v_3 \ (\text{если}\, c = 0), & v_1 w_2 \mapsto p_2 \widetilde{u}'_2 t + c p_2^2 \widetilde{u}'_2 t, \\
p_2^{s-1} w_2 \mapsto p_1^{k-1} w_3, & p_3 \widetilde{u}_1 v_2 \mapsto p_1^{k-1} w_3, \\
p_1 v_1 \mapsto p_2 v_3 \mapsto p_4 \widetilde{u}_1^2 \mapsto p_3 v_2, & v_1^2 \mapsto p_2^2 (1 + c p_2) t, \\
p_2^{s-1} v_1 \mapsto c p_2 v_3, & u_3 v_3 \mapsto p_1 w_3, \\
p_2^{s-3} v_1 \widetilde{u}'_2 \mapsto \widetilde{u}_1 v_3, & p_4 \widetilde{u}_1^2 \mapsto p_3 v_2, \\
v_3^2 \mapsto p_1^2 t, & p_1 \widetilde{u}_1 \mapsto p_2^{s-2} \widetilde{u}'_2, \\
v_3 w_3 \mapsto p_1 u_3 t, & p_2 \widetilde{u}_1 \mapsto c \widetilde{u}'_2 + p_1^{k-2} u_3, \\
p_1^k \mapsto p_2^s. &
\end{array}\right\} \qquad (4.55)$$

Аналогично доказательству предложения 4.1.8 определяется нормальная форма элемента $x \in \mathcal{A}_3$ (относительно шагов редукции (4.55)) и устанавливается, что любой элемент $x \in \mathcal{A}_3$ допускает хотя бы одну нормальную форму.

Докажем, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке:

степень	нормальные формы	количество
0	$p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-1)$, $p_2^i (1 \leqslant i \leqslant s), p_3, p_4$	$k+s+2$
$4m, m > 0$	$t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-1)$, $t^m p_2^i (1 \leqslant i \leqslant s-1), t^m p_3, t^m p_4$	$k+s+1$
$4m+1$	$\widetilde{u}_1 t^m, \widetilde{u}'_2 t^m p_2^l (0 \leqslant l \leqslant s-2)$, $\widetilde{u}_1 t^m p_3, \widetilde{u}_1 t^m p_4, u_3 t^m p_1^j (0 \leqslant j \leqslant k-2)$	$k+s+1$
$4m+2$	$v_1 t^m p_2^l (0 \leqslant l \leqslant s-2)$, $v_3 t^m p_1^j (0 \leqslant j \leqslant k-2)$, $\widetilde{u}_1^2 t^m, v_2 t^m, v_2 t^m p_3$	$k+s+1$
$4m+3$	$w_2 t^m (\text{если}\, c = 0), v_1 \widetilde{u}_1 t^m (\text{если}\, c \neq 0)$, $v_1 \widetilde{u}'_2 t^m p_2^l (0 \leqslant l \leqslant s-4), v_3 \widetilde{u}_1 t^m$, $\widetilde{u}_1^3 t^m, \widetilde{u}_1 v_2 t^m, w_3 t^m p_1^j (0 \leqslant j \leqslant k-1)$	$k+s+1$

Как и в доказательстве предложения 4.1.8, мы проанализируем последовательно несколько случаев.

1) Предположим, что в f входит w_2 (и тогда $c = 0$). С помощью анализа мономиальных соотношений алгебры $\mathcal{A}_3$ заключаем, что в f не входят $w_3, v_2, v_3, \widetilde{u}_1, \widetilde{u}'_2, u_3, p_1, p_3, p_4$; кроме того, не входят v_1 (так как есть редукция $v_1 w_2 \mapsto p_2 \widetilde{u}'_2 t + c p_2^2 \widetilde{u}'_2 t$) и p_2 (ввиду $p_2 w_2 \mapsto \widetilde{u}'_2 v_1$). Следовательно, $f = w_2 t^m$.

2) Предположим, что w_2 не входит в f, но входит v_1. Тогда используя определяющие соотношения алгебры $\mathcal{A}_3$ и подходящие редукции из (4.55), легко получаем, что в f могут входить, кроме v_1, только $\widetilde{u}'_2, t, p_2, \widetilde{u}_1$ (если $c \neq 0$), и, следовательно, $f = v_1 \widetilde{u}_1^i (\widetilde{u}'_2)^{\beta_2} t^m p_2^l$. При этом $i \leqslant 1$ (см. лемму 4.3.5), если $i = 1$, то по (1.31), (4.55) $\beta_2 = 0$, $l = 0$, если $\beta_2 = 0$, то $l \leqslant s - 2$, а если $\beta_2 = 1$, то $l \leqslant s - 4$. Таким образом, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$v_1 t^m p_2^l (0 \leqslant l \leqslant s-2), \quad v_1 \widetilde{u}'_2 t^m p_2^l \ \ (0 \leqslant l \leqslant s-4),$$

а также, возможно, $f = v_1 \widetilde{u}_1 t^m$, если $c \neq 0$.

3) Предположим, что w_2 и v_1 не входят в f, но входит v_3. Аналогично предыдущему получаем, что f имеет вид $f = v_3 \widetilde{u}_1^i t^m p_1^j$. При этом $i \leqslant 1$ (см. лемму 4.3.5) и $j \leqslant k - 2$, так как $p_1^{k-1} v_3 = 0$ (см. (1.31)); кроме того, если $i = 1$, то $j = 0$ (так как $p_1 \widetilde{u}_1 v_3 = 0$). Следовательно, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$v_3 t^m p_1^j (0 \leqslant j \leqslant k-2), \quad v_3 \widetilde{u}_1 t^m.$$

4) Предположим, что w_2, v_1, v_3 не входят, а $\widetilde{u}_1$ входит в f. Тогда легко получаем, что $f = \widetilde{u}_1^i v_2^{\gamma_2} t^m p_3^{\varepsilon_3} p_4^{\varepsilon_4}$. Если при этом $i \geqslant 2$, то $\gamma_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ (ввиду того, что $\widetilde{u}_1^2 v_2 = 0$, $p_3 \widetilde{u}_1^2 = 0$ и $p_4 \widetilde{u}_1^2 \mapsto p_3 v_2$). Если же $\gamma_2 = 1$, то $i = 1$ (так как $\widetilde{u}_1^2 v_2 = 0$), $\varepsilon_3 = 0$ (так как $p_3 \widetilde{u}_1 v_2 \mapsto p_1^{k-1} w_3$) и $\varepsilon_4 = 0$ (так как $p_4 v_2 = 0$). Отсюда следует, что f совпадает с одним из мономов:

$$\widetilde{u}_1 t^m, \ \widetilde{u}_1 t^m p_3, \ \widetilde{u}_1 t^m p_4, \ \widetilde{u}_1^2 t^m, \ \widetilde{u}_1^3 t^m, \ \widetilde{u}_1 v_2 t^m.$$

5) Предположим, что $w_2, v_1, v_3, \widetilde{u}_1$ не входят, а v_2 входит в f. Тогда аналогично предыдущему получаем, что f совпадает с одним из мономов: $v_2 t^m$, $v_2 t^m p_3$.

6) Предположим, что $w_2, v_1, v_3, \widetilde{u}_1, v_2$ не входят, а $\widetilde{u}'_2$ входит в f. Тогда $f = \widetilde{u}'_2 t^m p_2^l$, где $l \leqslant s - 2$ (поскольку $p_2^{s-1} \widetilde{u}'_2 = 0$).

7) Предположим, что $w_2, v_1, v_3, \widetilde{u}_1, v_2, \widetilde{u}'_2$ не входят, а w_3 входит в f. Тогда $f = w_3 t^m p_1^j$, где $j \leqslant k-1$ (поскольку $p_1^k w_3 = 0$).

8) Предположим, что $w_2, v_1, v_3, \widetilde{u}_1, v_2, \widetilde{u}'_2, w_3$ не входят, а u_3 входит в f. Тогда $f = u_3 t^m p_1^j$, где $j \leqslant k-2$ (так как $p_1^{k-1} u_3 = 0$).

9) Наконец, если в f не входят $w_2, v_1, v_3, \widetilde{u}_1, v_2, \widetilde{u}'_2, w_3, u_3$, то ясно, что для $m > 0$ f совпадает с одним из мономов:

$$t^m p_1^j, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1;$$
$$t^m p_2^l, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant l \leqslant s-1; \quad t^m p_3,\ t^m p_4. \tag{4.56}$$

В случае же $m = 0$ к элементам вида (4.56) надо добавить еще один элемент, а именно p_2^s.

Отсюда с учетом следствий 3.1.9, 3.2.2, 3.3.2 получаем равенство (4.54). □

Продолжение доказательства предложения 1.4. Пусть $V = \mathrm{HH}^1(R) \cdot \mathrm{HH}^2(R)$ – подпространство в $\mathrm{HH}^3(R)$, порожденное множеством $\{x \cdot y \mid x \in \mathrm{HH}^1(R), y \in \mathrm{HH}^2(R)\}$.

Вновь с использованием таблицы нормальных форм из доказательства предложения 4.3.4, мы показываем, что если $c \neq 0$, то V порождается множеством

$$\mathcal{V} = \{p_1^j w_3 \mid 1 \leqslant j \leqslant k-1\}$$
$$\cup \{p_2^l \widetilde{u}'_2 v_1 \mid 0 \leqslant l \leqslant s-4\} \cup \{\widetilde{u}_1 v_1,\ \widetilde{u}_1 v_2,\ \widetilde{u}_1 v_3,\ \widetilde{u}_1^3\},$$

а если $c = 0$, то V порождается множеством $\mathcal{V} \setminus \{\widetilde{u}_1 v_1\}$. Следовательно,

$$\dim_K V = \begin{cases} k+s, & \text{если} \quad c \neq 0, \\ k+s-1, & \text{если} \quad c = 0. \end{cases}$$

□

4.4. k и s нечётны, $c = 0$.

В этом разделе мы предполагаем, если не оговорено противное, что k и s нечётны, $c = 0$.

Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

– степени 1 : $u_1 := [e_0, 0, 0, b^{k-1}]$, $\widetilde{u}_2 := [\alpha, 0, 0, \eta]$;
– степени 2 : v_1 и v_3 из (4.1);
– степени 3 : w_1 из (4.2);
– степени 4 : $t := [e_0, e_1]$.

Напомним, что ранее мы выделили элементы из $\mathrm{HH}^0(R)$: p_1, p_2, p_3, p_4 (см. (3.4)).

Предложение 4.4.1. *Пусть k и s нечётны, $c = 0$. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_4 = \{p_i\}_{i=1}^4 \cup \{u_1, \widetilde{u}_2, v_1, v_3, w_1, t\} \tag{4.57}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ выполняются соотношения (4.4), а также следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{c} p_1u_1 = p_2^{s-1}\widetilde{u}_2,\ p_2u_1 = p_1^{k-1}\widetilde{u}_2,\\ p_1^k\widetilde{u}_2 = p_4\widetilde{u}_2 = 0,\ p_4u_1 = p_3\widetilde{u}_2; \end{array}\right\} \tag{4.58}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_3v_1 = p_4v_1 = p_3v_3 = p_4v_3 = 0,\\ p_1v_1 = p_2v_3 = p_3u_1\widetilde{u}_2; \end{array}\right\} \tag{4.59}$$

$$p_3u_1^2 = p_2^{s-1}v_1, \quad p_2v_3 = p_4u_1^2, \tag{4.60}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_2^{s-1}v_1 = p_1^{k-1}v_3,\\ \widetilde{u}_2^2 = \theta_{k+s}p_1^{k-1}v_3, \end{array}\right\} \tag{4.61}$$

$$p_3w_1 = p_4w_1 = 0, \tag{4.62}$$

$$p_1w_1 = \widetilde{u}_2v_3, p_2w_1 = \widetilde{u}_2v_1, u_1v_1 = p_1^{k-2}\widetilde{u}_2v_3, \tag{4.63}$$

$$u_1v_3 = p_2^{s-1}w_1, \tag{4.64}$$

$$u_1^4 = 0,\ u_1^3\widetilde{u}_2 = p_1^kt, \tag{4.65}$$

$$\left.\begin{array}{c} v_1^2 = p_2^2t,\ v_3^2 = p_1^2t,\ v_1v_3 = 0,\\ u_1w_1 = p_3t,\ \widetilde{u}_2w_1 = (p_4 + \theta_{k+s}p_1^k)t, \end{array}\right\} \tag{4.66}$$

$$v_1w_1 = p_2\widetilde{u}_2t, \quad v_3w_1 = p_1\widetilde{u}_2t, \tag{4.67}$$

$$w_1^2 = \theta_{k+s}p_1^{k-1}v_3t. \tag{4.68}$$

Доказательство. Проверка приведенных выше соотношений кроме (4.65) проводится аналогично доказательству предложения 4.1.1. При этом мы используем следующую лемму, в которой приведены трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_4$, для которых они не были вычислены ранее (см. лемму 4.1.3). Отметим, однако, что трансляции элемента w_1 в рассматриваемом случае отличаются от предъявленных выше. Кроме того, поскольку образующая w_1 будет нужна и в дальнейшем, вычисляя ее трансляции, считаем c произвольным. Все детали соответствующих вычислений мы оставляем читателю.

Лемма 4.4.2. *В качестве трансляций элементов $u_1, \widetilde{u}_2, w_1$ можно взять следующие отображения:*

$$\mathrm{T}^0(u_1) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{k-1} \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_1) = (\,(\mathrm{T}^1(u_1))_{*1} \quad (\mathrm{T}^1(u_1))_{*2} \quad (\mathrm{T}^1(u_1))_{*3} \quad (\mathrm{T}^1(u_1))_{*4}\,),$$

столбцы этой матрицы таковы:

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{*1} = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^{i-1} \otimes \gamma\beta a^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} (i+1)\gamma\beta a^{i-1} \otimes \beta a^{k-1-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{*2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} ib^{i-1} \otimes g^{k-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} (i+1)\beta a^{i-1} \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{*3} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-1} \gamma\beta a^{i-1} \otimes \gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\alpha\gamma b^{i-1} \otimes \gamma b^{k-i-1} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \gamma b^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} ia^{i-1} \otimes b^{k-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} g^{i} \otimes b^{k-1-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{*4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b^{k-1} \otimes \eta^{s-3} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(\widetilde{u}_2) = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_2) = (\,(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_2))_{*1} \quad (\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_2))_{*2} \quad (\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_2))_{*3} \quad (\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_2))_{*4}\,),$$

столбцы этой матрицы таковы:

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_2))_{*1} = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 + \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\gamma\beta a^i \otimes \gamma\beta a^{k-2-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\gamma b^i \otimes a^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} ig^i \otimes \beta a^{k-1-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_2))_{*2} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta a^i \otimes g^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} ib^i \otimes \alpha g^{k-i-1} + \eta \otimes e_0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta\alpha g^{i-1} \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_2))_{*3} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-2} ia^i \otimes \gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\alpha\gamma b^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} i\alpha g^{i-1} \otimes b^{k-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{u}_2))_{*4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{s-1} (i+1)\eta^{i-1} \otimes \eta^{s-i-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^0(w_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(w_1) = \big((\mathrm{T}^1(w_1))_{*1} \quad (\mathrm{T}^1(w_1))_{*2} \big),$$

и столбцы матрицы $\mathrm{T}^1(w_1)$ *таковы:*

$$(\mathrm{T}^1(w_1))_{*1} =$$

$$\begin{pmatrix} \star \\ \sum\limits_{i=1}^{k} i\alpha\gamma b^{i-1}\otimes a^{k-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-i-1} + c\alpha\gamma b^{k-1}\otimes \alpha g^{k-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\alpha g^i \otimes \beta a^{k-i-1} + \sum\limits_{i=1}^{k} i g^{i-1}\otimes \beta\alpha g^{k-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_1))_{11} = \sum_{i=1}^{k-2} ia^i \otimes \gamma\beta a^{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k-2} i\gamma\beta a^i \otimes g^{k-i-1} \\ + \alpha^2\otimes e_0 + \alpha\otimes\alpha + e_0\otimes\alpha^2 + c\alpha^3\otimes g^{k-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_1))_{*2} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} i\beta a^{i-1}\otimes\gamma b^{k-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} ib^{i-1}\otimes\alpha\gamma b^{k-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} i\beta\alpha g^{i-1}\otimes b^{k-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{s-2} i\eta^i\otimes\eta^{s-i-1} + c\sum\limits_{i=1}^{s} i\eta^i\otimes\eta^{s-i} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^2(w_1) = \left((\mathrm{T}^2(w_1))_{*1} \quad (\mathrm{T}^2(w_1))_{*2} \quad (\mathrm{T}^2(w_1))_{*3} \quad (\mathrm{T}^2(w_1))_{*4} \right),$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_1))_{*1} = \begin{pmatrix} \alpha^2\otimes e_0 + \alpha\otimes\alpha + e_0\otimes\alpha^2 + c\alpha\otimes\alpha^2 \\ c\alpha\gamma\otimes\alpha \\ c\alpha^2\otimes\beta \\ \gamma b^{k-1}\otimes\beta a^{k-1} + c\alpha\gamma b^{k-1}\otimes\beta a^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^2(w_1))_{*2} = \begin{pmatrix} \beta\otimes\alpha \\ \eta^{s-1}\otimes e_0 + ce_1\otimes\gamma\beta\alpha + c\eta^s\otimes e_0 \\ \beta\otimes\beta \\ c\eta\otimes\beta\alpha + e_1\otimes\beta\alpha g^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^2(w_1))_{*3} = \begin{pmatrix} \alpha\otimes\gamma \\ \gamma\otimes\gamma + c\alpha\gamma\otimes\gamma + c\alpha\gamma b^{k-1}\otimes\gamma \\ e_0\otimes\eta^{s-1} \\ \gamma\eta\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^2(w_1))_{*4} = \begin{pmatrix} \beta a^{k-1}\otimes\gamma b^{k-1} \\ 0 \\ c\beta\alpha g^{k-1}\otimes\eta \\ \eta\otimes\eta + c\eta\otimes\eta^2 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^3(w_1) =$$
$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star & \beta\otimes\gamma + c\beta\otimes\alpha\gamma + c\beta\alpha\otimes\gamma + c^2\beta\alpha\otimes\alpha\gamma \\ \star & \star & \star & \sum\limits_{i=0}^{s-1}(i+1)\eta^i\otimes\eta^{s-i-1} + c\sum\limits_{i=1}^{s-2} i\eta^i\otimes\eta^{s-i} + c\, e_1\otimes\beta\alpha\gamma \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w_1))_{11} = \sum_{i=1}^{k-1}(i+1)g^i\otimes\gamma\beta a^{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k} i\gamma\beta a^{i-1}\otimes a^{k-i} + e_0\otimes\alpha^2$$
$$+ c\sum_{i=1}^{k-1}(i+1)g^i\otimes g^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k} i\gamma\beta a^{i-1}\otimes\alpha g^{k-i}$$
$$+ c\sum_{i=1}^{k} i\alpha g^{i-1}\otimes\gamma\beta a^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k-1}(i+1)a^{i-1}\otimes a^{k-i+1}$$
$$+ c\sum_{i=1}^{k-1} ig^i\otimes a^{k-i} + c^2\sum_{i=1}^{k} ig^i\otimes\alpha g^{k-i} + c^2\sum_{i=1}^{k}(i+1)\alpha g^{i-1}\otimes a^{k-i+1}$$
$$+ c\alpha g^{k-1}\otimes\gamma\beta a^{k-1} + ca^{k-1}\otimes\alpha^3 + c^2\alpha^3\otimes\alpha g^{k-1}$$
$$+ c^2\alpha g^{k-1}\otimes\alpha^3 + c^2\alpha^3\otimes\alpha + c^2\alpha^2\otimes\alpha^2 + c^2\alpha\otimes\alpha^3 + c^3\alpha^3\otimes\alpha^2,$$

$$(\mathrm{T}^3(w_1))_{12} = \sum_{i=1}^{k} i\beta a^{i-1}\otimes\alpha g^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-1}(i+1)\beta\alpha g^{i-1}\otimes g^{k-i}$$
$$+ c\sum_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^{i-1}\otimes\alpha g^{k-i} + \beta\alpha g^{k-1}\otimes e_0 + c\beta a^{k-1}\otimes\alpha^2$$
$$+ c\beta\alpha g^{k-1}\otimes\alpha g^{k-1},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_1))_{13} = \sum_{i=1}^{k-1}(i+1)\alpha g^i\otimes\gamma b^{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k-1} ia^i\otimes\alpha\gamma b^{k-i-1}$$
$$+ c\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i\otimes\alpha\gamma b^{k-i-1} + \alpha\otimes\gamma b^{k-1} + e_0\otimes\alpha\gamma b^{k-1} + c\alpha\otimes\alpha\gamma b^{k-1}$$
$$+ c\alpha^2\otimes\gamma b^{k-1} + c^2\alpha^2\otimes\alpha\gamma b^{k-1} + c^2\alpha^3\otimes\gamma b^{k-1} + c^3\alpha^3\otimes\alpha\gamma b^{k-1},$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^3(w_1))_{21} &= \sum_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \beta a^{k-i-1} + c\sum_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \beta\alpha g^{k-i-1} \\
&\quad + c\sum_{i=1}^{k-1}(i+1)\alpha\gamma b^{i-1} \otimes \beta a^{k-i} + c\gamma b^{k-1} \otimes \beta\alpha, \\
(\mathrm{T}^3(w_1))_{22} &= \sum_{i=1}^{k-1} ib^i \otimes \beta\alpha g^{k-i-1} + c\eta \otimes \beta\alpha, \\
(\mathrm{T}^3(w_1))_{23} &= \sum_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^i \otimes b^{k-i-1} + c\alpha\gamma b^{k-1} \otimes \eta.
\end{aligned}$$

□

Лемма 4.4.3. *Пусть k, s нечётны, c произвольно. Для элемента $v_0 := [e_0, 0, 0, 0] \in \mathrm{HH}^2(R)$ в качестве трансляций $\mathrm{T}^i(v_0)$ $(0 \leqslant i \leqslant 2)$ можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами:*

$$\mathrm{T}^0(v_0) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}^1(v_0) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_0) = \begin{pmatrix} \star & \star \\ c^2\gamma b^{k-1} \otimes g & c^2 b \otimes \gamma b^{k-1} \\ c^2 a \otimes \beta a^{k-1} & c^2\beta \otimes b^k \\ \gamma b^{k-1} \otimes \beta a^{k-1} + c^2\alpha\gamma b^{k-1} \otimes \beta\alpha g^{k-1} & \star \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^2(v_0))_{11} &= \sum_{j=1}^{k} a^{j-1} \otimes \gamma\beta a^{k-j} + \sum_{j=1}^{k} \gamma\beta a^{j-1} \otimes g^{k-j} \\
&\quad + c\sum_{j=1}^{k-1} \gamma\beta a^{j-1} \otimes \alpha g^{k-j} + c\sum_{j=2}^{k} \alpha g^{j-1} \otimes \gamma\beta a^{k-j} \\
&\quad + c(e_0 \otimes \alpha^3 + \alpha^3 \otimes e_0) + ca^{k-1} \otimes a^k \\
&\quad + cg^k \otimes g^{k-1} + c^2\alpha^2 \otimes \alpha^2 + c^3\alpha^3 \otimes \alpha^2,
\end{aligned}$$

$$(\mathrm{T}^2(v_0))_{12} = \sum_{j=1}^{k} \beta a^{j-1} \otimes \gamma b^{k-j} + c\sum_{j=1}^{k} \beta a^{j-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-j} + c\beta a^{k-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-1},$$

$$(\mathrm{T}^2(v_0))_{42} = cb^{k-1} \otimes b^k + c^2(\eta^s \otimes \eta + \eta \otimes \eta^s + \eta^{s-1} \otimes \eta^2).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.1.3.

Продолжение доказательства предложения 4.1.1. Для доказательства первого из соотношений (4.65) заметим сначала, что (с использованием формул для трансляций элемента u_1 из леммы 4.4.2) имеем

$$u_1^2 = v_0. \tag{4.69}$$

Далее, так как $u_1^4 = v_0^2$, то с использованием леммы 4.4.3 получаем, что $u_1^4 = cp_1^k t$. Теперь, поскольку $c = 0$, имеем соотношение $u_1^4 = 0$. Соотношение $u_1^3\widetilde{u}_2 = p_1^k t$ получается также с помощью лемм 4.4.2 и 4.4.3. □

Предложение 4.4.4. *Пусть k и s нечётны, $c = 0$. Множество $\mathcal{Y}_4$, указанное в* (4.57), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ обозначает K-подалгебру в $\mathrm{HH}^*(R)$, порожденную множеством $\mathcal{Y}_4 \cup \{1\}$. Поскольку умножение на t задает изоморфизм $\mathrm{HH}^i(R) \to \mathrm{HH}^{i+4}(R)$ $(i \geqslant 0)$, то достаточно доказать, что $\mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$ для $i \leqslant 3$.

Ввиду замечания 3.0.2, $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$. Для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в предложении 3.1.14, имеем соотношения

$$[\gamma\beta a^{k-1}, 0, 0, 0] = p_3 u_1, \quad [a^k, 0, 0, 0] = p_4 u_1,$$
$$[\alpha g^i, 0, 0, 0] = p_1^i \widetilde{u}_2 \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$[0, 0, 0, \eta^i] = p_2^{i-1} \widetilde{u}_2 \ \text{для}\ 2 \leqslant i \leqslant s,$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее, для $v_0 = [e_0, 0, 0, 0] \in \mathrm{HH}^2(R)$, – это один из базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^2(R)$ (см. предложение 3.2.3), – имеем формулу (4.69). Аналогично для базисного элемента $[\alpha, 0, 0, 0] \in \mathrm{HH}^2(R)$ с использованием формулы для $\mathrm{T}^1(u_1)$ из леммы 4.4.2

легко получить соотношение $[\alpha, 0, 0, 0] = u_1\widetilde{u}_2$. Кроме того, для других базисных элементов $\mathrm{HH}^2(R)$ имеются соотношения:

$$
\begin{aligned}
&[\gamma\beta a^i, \beta\alpha g^i, \alpha\gamma b^i, 0] = p_1^i v_3 \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-2,\\
&[a^k, 0, 0, 0] = p_1 v_1,\\
&[0, 0, 0, \eta^i] = p_2^i v_1 \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant s-1.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$.

Аналогично предыдущему для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в предложении 3.3.1, получаем следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&[a^i, 0] = p_1^i w_1 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&[e_0, 0] = u_1^3, \quad [\alpha, 0] = u_1^2\widetilde{u}_2, \quad [\gamma\beta, 0] = u_1 v_3,\\
&[0, \eta^i] = p_2^i w_1 \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant s-2,
\end{aligned}
$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_4 = K[\mathcal{X}_4]/I_4$ – градуированная K-алгебра, определенная в разделе 1, где $\mathcal{X}_4$ из (1.38), а I_4 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 4.4.1 и 4.4.4 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_4 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_4$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_4$ (см. (4.57)). Пусть $\mathcal{A}_4 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_4^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_4$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть 4) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.4.5. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_4^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{4.70}$$

Прежде чем переходить к доказательству этого предложения, заметим, что из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_4$ непосредственно вытекают следующие соотношения.

Лемма 4.4.6. *В алгебре $\mathcal{A}_4$ выполняются соотношения:*

$$p_1^2 u_1 = p_2^2 u_1 = p_1 u_1 \widetilde{u}_2 = p_2 u_1 \widetilde{u}_2 = p_4 u_1 \widetilde{u}_2 = 0,$$
$$p_1 u_1^2 = p_2 u_1^2 = p_2^{s-1} \widetilde{u}_2 u_1 = 0,$$
$$p_1^2 v_1 = p_2^s v_1 = p_2^2 v_3 = p_1^k v_3 = p_2^s v_1 = 0,$$
$$p_i \widetilde{u}_2^2 = 0 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant 4;$$
$$p_3 u_1^3 = p_1 u_1 v_3 = p_2 u_1 v_1 = p_1 \widetilde{u}_2 v_1 = p_2 \widetilde{u}_2 v_3 = 0,$$
$$u_1^2 v_1 = u_1^2 v_3 = u_1 \widetilde{u}_2 v_1 = u_1 \widetilde{u}_2 v_3 = 0,$$
$$p_2^s w_1 = p_2 v_3 u_1 = p_4 u_1^3.$$

Доказательство предложения 4.4.5. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_4]$ введем лексикографический порядок такой, что

$$w_1 > \widetilde{u}_2 > v_1 > v_3 > u_1 > t > p_3 > p_4 > p_1 > p_2.$$

Из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_4$ следует, что любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_4$ приводится к виду

$$f = w_1^\alpha \widetilde{u}_2^\beta v_1^{\gamma_1} v_3^{\gamma_3} u_1^i t^m p_3^{\varepsilon_3} p_4^{\varepsilon_4} p_1^j p_2^l,$$

где $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_3, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{0, 1\}$, а также $0 \leqslant i \leqslant 3$, $0 \leqslant j \leqslant k$, $0 \leqslant l \leqslant s$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Рассмотрим следующий список элементарных шагов редукции:

$$\left.\begin{array}{ll}
p_1 w_1 \mapsto \widetilde{u}_2 v_3, & u_1 w_1 \mapsto p_3 t, \\
p_2 w_1 \mapsto \widetilde{u}_2 v_1, & p_2^s w_1 \mapsto p_2 v_3 u_1 \mapsto p_4 u_1^3, \\
\widetilde{u}_2 w_1 \mapsto (p_4 + \theta_{k+s} p_1^k) t, & v_1 w_1 \mapsto p_2 \widetilde{u}_2 t, \\
w_1^2 \mapsto \theta_{k+s} p_1^{k-1} v_3 t, & v_3 w_1 \mapsto p_1 \widetilde{u}_2 t, \\
p_1^{k-1} \widetilde{u}_2 \mapsto p_2 u_1, & p_2^{s-1} \widetilde{u}_2 \mapsto p_1 u_1, \\
\widetilde{u}_2^2 \mapsto \theta_{k+s} p_1^{k-1} v_3, & p_1^{k-2} \widetilde{u}_2 v_3 \mapsto u_1 v_1, \\
p_3 u_1 \widetilde{u}_2 \mapsto p_1 v_1 \mapsto p_2 v_3 \mapsto p_4 u_1^2, & p_2^{s-2} \widetilde{u}_2 v_1 \mapsto u_1 v_3, \\
\widetilde{u}_2 u_1^3 \mapsto p_1^k t, & p_2^{s-1} v_1 \mapsto p_1^{k-1} v_3 \mapsto p_3 u_1^2, \\
v_1^2 \mapsto p_2^2 t, & v_3^2 \mapsto p_1^2 t, \\
p_2 v_3 u_1 \mapsto p_4 u_1^3, & p_3 \widetilde{u}_2 \mapsto p_4 u_1, \\
p_1^k \mapsto p_2^s. &
\end{array}\right\} \qquad (4.71)$$

Аналогично доказательству предложения 4.1.8 определяется нормальная форма элемента $x \in \mathcal{A}_4$ (относительно шагов редукции (4.71)) и устанавливается, что любой элемент $x \in \mathcal{A}_4$ допускает хотя бы одну нормальную форму.

Докажем, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке:

степень	нормальные формы	количество
$4m$	$t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-1), t^m p_2^i (1 \leqslant i \leqslant s)$, $t^m p_3, t^m p_4$	$k+s+2$
$4m+1$	$\widetilde{u}_2 t^m p_2^i (0 \leqslant i \leqslant s-2)$, $\widetilde{u}_2 t^m p_1^i (1 \leqslant i \leqslant k-2), u_1 t^m$, $u_1 t^m p_1, u_1 t^m p_2, u_1 t^m p_3, u_1 t^m p_4$	$k+s+2$
$4m+2$	$v_3 t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-2), u_1^2 t^m, p_3 u_1^2 t^m$, $v_1 t^m p_2^i (0 \leqslant i \leqslant s-2), u_1 \widetilde{u}_2 t^m, u_1^2 t^m p_4$	$k+s+2$
$4m+3$	$w_1 t^m, \widetilde{u}_2 v_1 t^m p_2^i (0 \leqslant i \leqslant s-3)$, $v_3 \widetilde{u}_2 t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-3), u_1^3 t^m$, $u_1^3 t^m p_4, v_3 u_1 t^m, \widetilde{u}_2 u_1^2 t^m, v_1 u_1 t^m$	$k+s+2$

Как и в доказательстве предложения 4.1.8, мы проанализируем последовательно несколько случаев.

1) Предположим, что в f входит w_1. Тогда с помощью анализа списка элементарных шагов редукции (4.71) заключаем, что в f не входят $\widetilde{u}_2, v_1, v_3, u_1, p_1, p_2$; кроме того, ввиду соотношений из (1.43) в f не входят p_3 и p_4. А поскольку есть редукция $w_1^2 \mapsto \theta_{k+s} p_1^{k-1} v_3 t$, то $f = w_1 t^m$.

2) Предположим, что w_1 не входит в f, но входит $\widetilde{u}_2$. Тогда в f не входят p_3, p_4 (ввиду мономиальных соотношений из (1.39), а также редукции из (4.71)). Следовательно,

$$f = \widetilde{u}_2^{\beta} v_1^{\gamma_1} v_3^{\gamma_3} u_1^i t^m p_1^j p_2^l,$$

где $\beta = 1$ (вследствие редукции $\widetilde{u}_2^2 \mapsto \theta_{k+s} p_1^{k-1} v_3$), $0 \leqslant i \leqslant 2$ (существует редукция $\widetilde{u}_2 u_1^3 \mapsto p_1^k t$) и если $1 \leqslant i$, то p_1, p_2, v_1, v_3 не входят в f (см. лемму 4.4.6), при этом $\gamma_1 + \gamma_3 \leqslant 1$ (так как $v_1 v_3 = 0$), $j \leqslant k-2$, $l \leqslant s-2$ (ввиду шагов редукции $p_1^{k-1}\widetilde{u}_2 \mapsto p_2 u_1$, $p_2^{s-1}\widetilde{u}_2 \mapsto p_1 u_1$). Кроме того, если $\gamma_1 = 1$ (соответственно $\gamma_3 = 1$), то $j = 0$ (соответственно $l = 0$), поскольку имеются редукции $p_1 v_1 \mapsto p_2 v_3 \mapsto p_4 u_1^2$; ввиду редукции $p_2^{s-2}\widetilde{u}_2 v_1 \mapsto u_1 v_3$ при $\gamma_1 = 1$ имеем также $l \leqslant s-3$. При $\gamma_3 = 1$ имеем $j \leqslant k-3$ (ввиду редукции $p_1^{k-2}\widetilde{u}_2 v_3 \mapsto u_1 v_1$). Отсюда непосредственно получаем, что f лежит в списке:

$\widetilde{u}_2 t^m p_2^l$ $(0 \leqslant l \leqslant s-2)$, $\widetilde{u}_2 t^m p_1^j$ $(1 \leqslant j \leqslant k-2)$,

$\widetilde{u}_2 v_1 t^m p_2^l$ $(0 \leqslant l \leqslant s-3)$, $\widetilde{u}_2 v_3 t^m p_1^j$ $(0 \leqslant j \leqslant k-3)$, $\widetilde{u}_2 u_1 t^m$, $\widetilde{u}_2 u_1^2 t^m$.

3) Пусть в f не входят $w_1, \widetilde{u}_2$, и предположим, что v_1 входит в f. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что в f не могут входить также v_3, p_1, p_3, p_4. Следовательно, $f = v_1^{\gamma_1} u_1^i t^m p_2^l$, где $\gamma_1 = 1$ (так как есть редукция $v_1^2 \mapsto p_2^2 t$), при этом $i \leqslant 1$ (ввиду соотношения $u_1^2 v_1 = 0$ из леммы 4.4.6), а также $l \leqslant s-2$ (так как $p_2^{s-1} v_1 \mapsto p_1^{k-1} v_3 \mapsto p_3 u_1^2$). Далее, если $i = 1$, то $l = 0$ (так как $p_2 u_1 v_1 = 0$; – см. лемму 4.4.6). Отсюда следует, что f совпадает с одним из следующих мономов:

$$v_1 t^m p_2^l \ (0 \leqslant l \leqslant s-2), \quad v_1 u_1 t^m.$$

4) Предположим, что $w_1, \widetilde{u}_2, v_1$ не входят, а v_3 входит в f. Легко видеть, что тогда в f не входят p_2, p_3, p_4, и, таким образом, $f = v_3^{\gamma_3} u_1^i t^m p_1^j$; здесь $\gamma_3 = 1$ (существует редукция $v_3^2 \mapsto p_1^2 t$) и $i \leqslant 1$, так как $u_1^2 v_3 = 0$ (см. лемму 4.4.6), кроме того $j \leqslant k-2$ (поскольку имеется редукция $p_1^{k-1} v_3 \mapsto p_3 u_1^2$). Таким образом, с учетом того, что $p_1 u_1 v_3 = 0$ (см. лемму 4.4.6), отсюда следует, что f – это один из мономов

$$v_3 t^m p_1^j \ (0 \leqslant j \leqslant k-2), \quad v_3 u_1 t^m.$$

5) Пусть $w_1, \widetilde{u}_2, v_1, v_3$ не входят, а u_1 входит в f. С учетом того, что $p_1^2 u_1 = p_2^2 u_1 = 0$, $p_1 u_1^2 = p_2 u_1^2 = 0$ и $p_3 u_1^3 = 0$ (см. предложение 4.4.1 и лемму 4.4.6), получаем, что f совпадает с одним из следующих мономов:

$$u_1 t^m,\ u_1 t^m p_1,\ u_1 t^m p_2,\ u_1 t^m p_3,\ u_1 t^m p_4,$$

$$u_1^2 t^m,\ u_1^2 t^m p_3,\ u_1^2 t^m p_4,\ u_1^3 t^m,\ u_1^3 t^m p_4.$$

6) Наконец, если в f не входят $w_1, \widetilde{u}_2, v_1, v_3, u_1$, то ясно, что f совпадает с одним из мономов:

$$t^m p_1^j, \text{ где } 0 \leqslant j \leqslant k-1; \quad t^m p_2^l, \text{ где } 1 \leqslant l \leqslant s; \quad t^m p_3, t^m p_4.$$

Таким образом, мы показали, что любой моном, имеющий нормальную форму, содержится в приведенном выше списке, что (с учётом предложения 3.0.1 и следствий 3.1.15, 3.2.2, 3.3.2) завершает доказательство равенства (4.70). □

4.5. k и s нечётны, $c \neq 0$.

В этом разделе мы предполагаем, если не оговорено противное, что k и s нечётны, а $c \neq 0$.

Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

– степени 0 : p_1, p_2, p_3, p_4 из (3.4);

– степени 1 : $u_2' := [0,0,0,\eta^2]$, $u_3 := [\alpha g, 0,0,0]$, $u_4 := [\gamma\beta a^{k-1}, 0,0,0]$, $u_5 := [a^k, 0,0,0]$;

– степени 2 : v_1, v_2, v_3 из (4.1); $v_0 := [e_0, 0,0,0]$;

– степени 3 : $w_0 := [e_0, 0]$, $w_1 := [0, e_1]$, $w_4 := [\alpha, 0]$;

– степени 4 : $t := [e_0, e_1]$.

Предложение 4.5.1. *Пусть k и s нечётны, $c \neq 0$. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_5 = \{p_i\}_{i=1}^4 \cup \{u_2', u_3, u_4, u_5\} \cup \{v_i\}_{i=0}^3 \cup \{w_0, w_1, w_4, t\} \tag{4.72}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ выполняются соотношения (4.4), а также следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{c} p_1u_2' = p_3u_2' = p_4u_2' = p_2^{s-1}u_2' = 0,\\ p_2u_3 = p_3u_3 = p_4u_3 = p_1^{k-1}u_3 = 0,\\ p_1u_4 = p_2u_4 = p_3u_4 = p_4u_4 = 0\\ p_1u_5 = p_2u_5 = p_3u_5 = p_4u_5 = 0; \end{array}\right\} \tag{4.73}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_iv_0 = p_iv_2 = 0 \text{ для всех } i \in \{1,2,3,4\}\\ p_1v_1 = p_3v_1 = p_4v_1 = p_2^{s-1}v_1 = 0,\\ p_2v_3 = p_3v_3 = p_4v_3 = p_1^{k-1}v_3 = 0,\\ (u_2')^2 = u_3^2 = u_4^2 = u_5^2 = 0,\\ u_4u_5 = u_4u_3 = u_4u_2' = u_5u_3 = u_5u_2' = u_3u_2' = 0; \end{array}\right\} \tag{4.74}$$

$$p_1w_0 = p_2w_0 = p_3w_1 = p_4w_1 = p_1w_4 = p_2w_4 = p_4w_4 = 0, \tag{4.75}$$

$$p_4w_0 = p_3w_4 = c^{-1}p_3w_0 = p_1^kw_1 = c^{-1}u_4v_0 = u_5v_0 = u_4v_2, \tag{4.76}$$

$$u_2'v_0 = u_3v_0 = u_2'v_2 = u_3v_2 = u_5v_2 = 0, \tag{4.77}$$

$$u_3v_1 = u_4v_1 = u_5v_1 = u_2'v_3 = u_4v_3 = u_5v_3 = 0, \tag{4.78}$$

$$u_2'v_1 = p_2^2w_1,\ u_3v_3 = p_1^2w_1, \tag{4.79}$$

$$\left.\begin{array}{c} v_2^2 = v_1v_2 = v_3v_2 = v_3v_1 = v_3v_0 = v_1v_0 = 0, \\ v_0^2 = cv_0v_2 = cp_1^kt,\ v_1^2 = (p_2^2 + cp_2^3)t,\ v_3^2 = p_1^2t, \\ u_2'w_0 = u_3w_0 = u_4w_0 = u_5w_0 = 0, \\ u_2'w_1 = u_3w_1 = u_4w_1 = u_5w_1 = 0, \\ u_2'w_4 = u_3w_4 = u_4w_4 = u_5w_4 = 0, \end{array}\right\} \tag{4.80}$$

$$v_iw_0 = v_iw_4 = 0 \text{ для всех } i \in \{0,1,2,3\}, \tag{4.81}$$

$$v_0w_1 = u_4t,\ v_1w_1 = (1+cp_2)u_2't,\ v_2w_1 = u_5t,\ v_3w_1 = u_3t, \tag{4.82}$$

$$w_0^2 = w_1^2 = w_4^2 = w_0w_1 = w_0w_4 = w_1w_4 = 0. \tag{4.83}$$

Доказательство. Проверка приведенных выше соотношений проводится аналогично доказательству предложения 4.1.1. При этом мы используем следующую лемму, в которой приведены трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_5$, для которых они не были вычислены ранее; – см. лемму 4.1.3 для трансляций v_1, v_3, лемму 4.1.5 для трансляций w_0, лемму 4.3.2 для трансляций u_3, v_2, w_2, лемму 4.4.2 для трансляций w_1 и лемму 4.4.3 для трансляций v_0. Все детали соответствующих вычислений мы оставляем читателю.

Лемма 4.5.2. *В качестве трансляций элементов u_2', u_4, u_5, w_4 можно взять следующие отображения:*

$$\mathrm{T}^0(u_2') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^2 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_2') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^2 \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum\limits_{i=2}^{s} i\eta^{i-1} \otimes \eta^{s-i} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(u_4) = \begin{pmatrix} \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_4) = \begin{pmatrix} \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ c\gamma b^{k-1} \otimes \gamma\beta a^{k-1} & 0 & \gamma b^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(u_5) = \begin{pmatrix} a^k \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_5) = \begin{pmatrix} a^k \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ ca^k \otimes \beta a^{k-1} & 0 & a^k \otimes b^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(w_4) = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(w_4) =$$
$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} a^{i-1} \otimes a^{k-i+1} + \sum\limits_{i=1}^{k} g^i \otimes g^{k-i} & \sum\limits_{i=1}^{k} \beta a^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i} \\ c\alpha\gamma b^{k-1} \otimes \gamma\beta a^{k-1} + \gamma b^{k-1} \otimes \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(w_4) =$$
$$\begin{pmatrix} \star & 0 & \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma\beta a^{i-1} \otimes \gamma b^{k-i} & \eta\beta \otimes \gamma b^{k-1} \\ 0 & c\eta^{s-1} \otimes \gamma\beta a^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma\eta \otimes \beta a^{k-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_4))_{11} = \sum_{i=0}^{k} a^i \otimes g^{k-i} + c\gamma\beta a^{k-1} \otimes \gamma\beta a^{k-1},$$

$$\mathrm{T}^3(w_4) = \begin{pmatrix} \star & \beta a^{k-1} \otimes \gamma\beta a^{k-1} & \gamma\beta a^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1} & 0 \\ \star & c\eta^s \otimes \beta a^{k-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{T}^3(w_4))_{11} &= \sum_{i=1}^{k} g^{i-1}\otimes g^{k-i+1} + \sum_{i=1}^{k}\gamma\beta a^{i-1}\otimes\alpha g^{k-i}\\
&+ c\sum_{i=1}^{k-1} g^{i}\otimes\alpha g^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k-1} a^{i}\otimes\alpha g^{k-i}\\
&+ c\sum_{i=1}^{k}\alpha g^{i-1}\otimes g^{k-i+1} + c^2\sum_{i=1}^{k-1}\alpha g^{i}\otimes\alpha g^{k-i}\\
&+ c^2\gamma\beta a^{k-1}\otimes\alpha^3,\\
(\mathrm{T}^3(w_4))_{21} &= \sum_{i=1}^{k}\gamma b^{i-1}\otimes\beta\alpha g^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k}\alpha\gamma b^{i-1}\otimes\beta\alpha g^{k-i}.
\end{aligned}
$$

□

Предложение 4.5.3. *Пусть k и s нечётны, $c \neq 0$. Множество $\mathcal{Y}_5$, указанное в* (4.72), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ обозначает K-подалгебру в $\mathrm{HH}^*(R)$, порожденную множеством $\mathcal{Y}_5 \cup \{1\}$. Поскольку умножение на t задает изоморфизм $\mathrm{HH}^i(R) \to \mathrm{HH}^{i+4}(R)$ $(i \geqslant 0)$, то достаточно доказать, что $\mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$ для $i \leqslant 3$.

Ввиду замечания 3.0.2, $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$. Для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в предложении 3.1.11, имеем соотношения

$$
\begin{aligned}
&[\gamma\beta a^{k-1},0,0,0] = u_4, \quad [a^k,0,0,0] = u_5,\\
&[\alpha g^i,0,0,0] = p_1^{i-1}u_3 \ \text{ для } \ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
&[0,0,0,\eta^i] = p_2^{i-2}u_2' \ \text{ для } \ 2\leqslant i\leqslant s,
\end{aligned}
$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Для базисных элементов из $\mathrm{HH}^2(R)$, описанных в предложении 3.2.3, имеем соотношения

$$
\begin{aligned}
&[\gamma\beta a^i,\beta\alpha g^i,\alpha\gamma b^i,0] = p_1^i v_3 \ \text{ для } \ 0\leqslant i\leqslant k-2,\\
&[e_0,0,0,0] = v_0,\\
&[0,0,0,\eta^i] = p_2^i v_1 \ \text{ для } \ 0\leqslant i\leqslant s-2,\\
&[\alpha,0,0,0] = v_2.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$.

Аналогично предыдущему для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в предложении 3.3.1, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&[e_0, 0] = w_0,\\
&[a^i, 0] = p_1^i w_1 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&[\alpha, 0] = w_4, \quad [\gamma\beta, 0] = (cp_1 + p_2^{s-1})w_1,\\
&[0, \eta^i] = p_2^i w_1 \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant s-2,
\end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_5 = K[\mathcal{X}_5]/I_5$ – градуированная K-алгебра, определенная в разделе 1, где $\mathcal{X}_5$ из (1.50), а I_5 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 4.5.1 и 4.5.3 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_5 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_5$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_5$. Пусть $\mathcal{A}_5 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_5^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_5$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть 5) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.5.4. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_5^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{4.84}$$

Доказательство предложения 4.5.4. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_5]$, где $\mathcal{X}_5$ из (1.50), введем лексикографический порядок такой, что

$$\begin{aligned}
w_4 > w_0 > w_1 > v_0 > v_1 > v_2 > v_3 > u_5 > u_4\\
> u_3 > u_2' > t > p_3 > p_4 > p_1 > p_2.
\end{aligned}$$

Из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_5$ следует, что любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_5$ приводится к виду

$$f = w_4^{\alpha_4} w_0^{\alpha_0} w_1^{\alpha_1} v_0^{\gamma_0} v_1^{\gamma_1} v_2^{\gamma_2} v_3^{\gamma_3} u_5^{\beta_5} u_4^{\beta_4} u_3^{\beta_3} (u_2')^{\beta_2} t^m p_3^{\varepsilon_3} p_4^{\varepsilon_4} p_1^j p_2^l,$$

где $\alpha_p, \beta_q, \gamma_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{0,1\}$ для любых p и q, а также $0 \leqslant j \leqslant k$, $0 \leqslant l \leqslant s$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Рассмотрим следующий список элементарных шагов редукции:

$$\left.\begin{array}{ll}
p_3w_4 \mapsto c^{-1}p_3w_0 \mapsto p_4w_0 \mapsto p_1^k w_1, & p_1^k w_1 \mapsto u_5v_0 \mapsto c^{-1}u_4v_0, \\
c^{-1}u_4v_0 \mapsto u_4v_2 \mapsto u_3v_3p_1^{k-2}, & v_1u_2'p_2^{s-2} \mapsto v_2u_4, \\
p_2^2w_1 \mapsto u_2'v_1, & p_1^2w_1 \mapsto u_3v_3, \\
v_0w_1 \mapsto u_4t, & v_1w_1 \mapsto (1+cp_2)u_2't, \\
v_2w_1 \mapsto u_5t, & v_3w_1 \mapsto u_3t, \\
v_0^2 \mapsto cv_0v_2 \mapsto cp_1^k t, & v_1^2 \mapsto (p_2^2+cp_2^3)t, \\
v_3^2 \mapsto p_1^2 t. &
\end{array}\right\} \qquad (4.85)$$

Аналогично доказательству предложения 4.1.8 определяется нормальная форма элемента $x \in \mathcal{A}_5$ (относительно шагов редукции (4.85)) и устанавливается, что любой элемент $x \in \mathcal{A}_5$ допускает хотя бы одну нормальную форму.

Докажем, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке:

степень	нормальные формы	количество
$4m$	$t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-1), t^m p_2^i (1 \leqslant i \leqslant s),$ $t^m p_3, t^m p_4$	$k+s+2$
$4m+1$	$u_2' t^m p_2^{i-2} (2 \leqslant i \leqslant s),$ $u_3 t^m p_1^{i-1} (1 \leqslant i \leqslant k-1), u_4 t^m, u_5 t^m$	$k+s$
$4m+2$	$v_3 t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-2), v_0 t^m,$ $v_1 t^m p_2^i (0 \leqslant i \leqslant s-2), v_2 t^m$	$k+s$
$4m+3$	$w_0 t^m, w_1 t^m, w_1 t^m p_1, w_1 t^m p_2, w_4 t^m$ $v_3 u_3 t^m p_1^i (0 \leqslant i \leqslant k-2),$ $v_1 u_2' t^m p_2^i (0 \leqslant i \leqslant s-3)$	$k+s+2$

Мы вновь проанализируем последовательно несколько случаев.

1) Предположим, что в f входит w_4. Тогда с помощью анализа списка определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_5$ заключаем, что в f не входят $w_1, w_0, v_0, v_1, v_2, v_3$, u_2', $u_3, u_4, u_5, p_1, p_2, p_4$; кроме того, ввиду элементарных шагов редукции из (4.85) в f не входит p_3. А поскольку $w_4^2 = 0$, то $f = w_4 t^m$.

2) Предположим, что в f не входит w_4, но входит w_0. Тогда с помощью анализа списка определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_5$ заключаем, что в f не входят w_1, v_0, v_1, v_2, v_3, $u_2', u_3, u_4, u_5, p_1, p_2$; кроме того, ввиду элементарных шагов редукции из (4.85) в f не входят p_3 и p_4. А поскольку $w_0^2 = 0$, то $f = w_0 t^m$.

3) Предположим, что в f не входят w_4, w_0, но входит w_1. Аналогично предыдущему получаем, что в f не входят u_2', u_3, u_4, u_5, p_3, p_4; кроме того, ввиду элементарных шагов редукции из (4.85) в f не входят v_0, v_1, v_2, v_3. А поскольку $w_1^2 = 0$, и существуют редукции $w_1p_1^2 \mapsto u_3v_3$, $w_1p_2^2 \mapsto u_2'v_1$ из (4.85), то можно заключить, что f содержится в следующем списке:

$$w_1t^m,\ w_1t^mp_1,\ w_1t^mp_2.$$

4) Пусть в f не входят w_4, w_0, w_1, и предположим, что v_0 входит в f. Тогда, как и выше, заключаем, что в f не входят $v_1, v_3, u_2', u_3, p_1, p_2$, p_3, p_4; кроме того, ввиду элементарных шагов редукции из (4.85) в f не входит v_2, u_4, u_5. А поскольку существует редукция $v_0^2 \mapsto cp_1^kt$, то можно заключить, что $f = v_0t^m$.

5) Пусть в f не входят w_4, w_0, w_1, v_0, и предположим, что v_1 входит в f. Тогда в f не входят v_2, v_3, u_3, u_4, u_5, p_1, p_3, p_4. Также имеет место соотношение $p_2^{s-1}v_1 = 0$ (см. (1.52)). Наконец, поскольку в (4.85) существуют редукции $v_1^2 \mapsto (p_2^2 + cp_2^3)t$ и $v_1u_2'p_2^{s-2} \mapsto v_2u_4$, можно заключить, что f совпадает с одним из мономов:

$$v_1t^mp_2^i(0 \leqslant i \leqslant s-2), \quad v_1u_2't^mp_2^i\ (0 \leqslant i \leqslant s-3).$$

6) Пусть в f не входят w_4, w_0, w_1, v_0, v_1, и предположим, что v_2 входит в f. Тогда в f не входят v_3, u_2', u_3, u_5, p_1, p_2, p_3, p_4. Так как имеются соотношения $u_4^2 = 0$ и $v_2^2 = 0$ (см. (1.52), (1.59)) и редукция $v_2u_4 \mapsto v_3u_3p_1^{k-2}$, то $f = v_2t^m$.

7) Пусть в f не входят $w_4, w_0, w_1, v_0, v_1, v_2$, и предположим, что v_3 входит в f. Тогда в f не входят u_2', u_4, u_5, p_2, p_3, p_4. Имеются редукция $v_3^2 \mapsto p_1^2t$ и соотношения $p_1^{k-1}v_3 = 0$, $u_3^2 = 0$, $v_3u_3p_1^{k-1} = p_1^{k+1}w_1 = 0$. Поэтому f содержится в следующем списке:

$$v_3t^mp_1^i(0 \leqslant i \leqslant k-2), \quad v_3u_3t^mp_1^i \quad (0 \leqslant i \leqslant k-2).$$

8) Пусть в f не входят $w_4, w_0, w_1, v_0, v_1, v_2, v_3$, и предположим, что u_5 входит в f. Тогда в f не входят u_2', u_3, u_4, p_1, p_2, p_3, p_4; кроме того, $u_5^2 = 0$. Итак, $f = u_5t^m$.

9) Пусть в f не входят $w_4, w_0, w_1, v_0, v_1, v_2, v_3, u_5$, и предположим, что u_4 входит в f. Тогда, как и выше, получаем, что в f не входят u_2', u_3, p_1, p_2, p_3, p_4; кроме того, $u_4^2 = 0$. Итак, $f = u_4t^m$.

10) Пусть в f не входят $w_4, w_0, w_1, v_0, v_1, v_2, v_3, u_5, u_4$, и предположим, что u_3 входит в f. Тогда в f не входят u_2', p_2, p_3, p_4. Кроме того, $p_1^{k-1}u_3 = 0$ и $u_3^2 = 0$. Следовательно, $f = u_3 t^m p_1^{i-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$.

11) Пусть в f не входят $w_4, w_0, w_1, v_0, v_1, v_2, v_3, u_5, u_4, u_3$, и предположим, что u_2' входит в f. Тогда в f не входят p_1, p_3, p_4. Кроме того, $p_2^{s-1}u_2' = 0$, и $(u_2')^2 = 0$. Следовательно, $f = u_2' t^m p_2^{i-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant s-1)$.

12) Наконец, если в f не входят $w_4, w_0, w_1, v_0, v_1, v_2, v_3, u_5, u_4, u_3$, u_2', то ясно, что f совпадает с одним из мономов:

$$t^m p_1^j, \text{ где } 0 \leqslant j \leqslant k-1; \quad t^m p_2^l, \text{ где } 1 \leqslant l \leqslant s; \quad t^m p_3, t^m p_4.$$

Таким образом, мы показали, что любой моном, имеющий нормальную форму, содержится в приведенном выше списке, что (с учётом предложения 3.0.1 и следствий 3.1.12, 3.2.2, 3.3.2) завершает доказательство равенства (4.84). □

Литература

1. S. Eilenberg, S. MacLane, *Cohomology theory in abstract groups.* I. — Ann. Math. **48** (1947), 51–78.
2. А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра*, М. (1960).
3. M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring.* — Ann. Math. **78** (1963), 267–288.
4. M. Gerstenhaber, S. D. Schack, *Algebraic cohomology and deformation theory.* — In: Deformation theory of algebras and structures and applications. M. Hazewinkel, M. Gerstenhaber (eds.), Kluwer Acad. Publ., NATO ASI Ser., Ser. C: Math. and Phys. Sci. **247** (1988), pp. 11–264.
5. Th. Holm, *The Hochschild cohomology ring of a modular group algebra: the commutative case.* — Commun. Algebra **24** (1996), 1957–1969.
6. C. Cibils, A. Solotar, *Hochschild cohomology algebra of Abelian groups.* — Arch. Math. **68** (1997), 17–21.
7. S. F. Siegel, S. J. Witherspoon, *The Hochschild cohomology ring of a group algebra.* — Proc. London Math. Soc. **79** (1999), 131–157.
8. K. Erdmann, Th. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* — Forum Math. **11** (1999), 177–201.
9. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* I: *серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 6, 53–122.
10. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 1, 55–107.
11. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lect. Notes Math. **1428**, Berlin, Heidelberg (1990).

12. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 4, 39–82.
13. K. Erdmann, Th. Holm, N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* II. — Algebras Repr. Theory **5** (2002), 457–482.
14. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
15. Th. Holm, *Hochschild cohomology of tame blocks.* — J. Algebra **271** (2002), 798–826.
16. K. Erdmann, A. Skowroński, *The stable Calabi–Yau dimension of tame symmetric algebras.* — J. Math. Soc. Japan **58** (2006), No. 1, 97–128.
17. Th. Holm, *Derived equivalence classification of algebras of dihedral, semidihedral, and quaternion type.* — J. Algebra **211** (1999), 159–205.
18. M. J. Bardzell, *The alternating syzygy behavior of monomial algebras.* — J. Algebra **188** (1997), 69–89.
19. D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras.* — Lect. Notes Math. **1404** (1989), 108–126.
20. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.

Generalov A. I., Ivanov A.A., Ivanov S. O.

Hochschild cohomology of algebras of quaternion type. II. The family $Q(2\mathcal{B})_1$ in characteristic 2.

In the present paper, the Hochschild cohomology is investigated for algebras of quaternion type from the family $Q(2\mathcal{B})_1$ over an algebraically closed field with characteristic 2. The 4-periodic bimodule resolution is constructed for the most part of algebras of this family. Using this resolution, the description in terms of generators and relations is given for the Hochschild cohomology algebra of the algebras under consideration.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 12 октября 2007 г.