Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 349, 2007 г.

Н. А. Вавилов, А. К. Ставрова

ОСНОВНЫЕ РЕДУКЦИИ В ЗАДАЧЕ ОПИСАНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

В настоящей работе мы впервые *в полной общности* доказываем две основные редукции в задаче описания нормальных подгрупп в группах Шевалле над произвольными коммутативными кольцами, а именно,

- параболическую редукцию и
- редукцию уровня.

Сами структурные теоремы для групп Шевалле всех типов, конечно, известны, притом с различными доказательствами. Оставляя в стороне тысячелетнюю историю описания подгрупп в классических группах, упомянем только те доказательства, которые работают для исключительных групп.

• Доказательства первого поколения, локализационные; – Абе, Судзуки, Таддеи, Васерштейн [18–21, 23, 52, 53].

• Доказательства второго поколения, геометрические, использующие наличие классической подсистемы большого ранга (разложение унипотентов и т.д.); – Степанов, Вавилов, Плоткин, Бак [10, 59, 63, 16, 49, 60, 30, 31].

• Доказательства третьего поколения, геометрические, использующие наличие A_2 или A_3 (доказательство из Книги); – Вавилов, Гаврилович, Николенко, Лузгарев, см., в частности, [5–9, 61, 62].

Однако, результаты настоящей работы дают гораздо большую свободу в организации этих доказательств. В действительности, настоящая работа как раз и возникла в контексте третьего поколения доказательств структурных теорем для исключительных групп.

Разумеется, для классических групп эти редукции являются общим местом после работ Басса и Бака [32, 25, 33] (см. даль-

Настоящая работа выполнена в рамках проекта ИНТАС 03-51-3251.

нейшие ссылки в [59, 49, 30, 31, 40, 42]), а для исключительных групп типов E_6, E_7 и F_4 в непосредственно необходимых для проведения доказательства из Книги случаях приведены в [6, 9]. Тем не менее, в общем случае, без каких-либо дополнительных предположений на основное кольцо, они никогда ранее не публиковались.

Вот что говорится по поводу параболической редукции в [7]: "Несмотря на то, что это утверждение абсолютно очевидно для каждого профессионала, именно его проверка (причем обычно только для тех случаев, которые фактически используются в доказательстве!) занимает около половины объема доказательства для исключительных групп." Наша теорема 1 полностью снимает необходимость такой проверки в дальнейших работах. Ее доказательство построено по образцу доказательств в работе второго автора [47] (см. также [14]), но, разумеется, гораздо проще, так как теперь в нашем распоряжении находится элементарная подгруппа всей группы, а не только подгруппы Леви.

Вторым основным результатом работы является проведенная в общем случае двух параметров редукция уровня. В случае, когда верхний уровень совпадает с нижним, редукция уровня хорошо известна. Этого нельзя, однако, сказать про общий случай. Для *классических* групп редукция уровня с двумя параметрами восходит к диссертации Бака [25] и детально изложена в работах [30, 31]. Однако, во-первых, [25], [31] не опубликованы, а, во-вторых, некоторые соображения, необходимые для проведения доказательства в такой форме, которая не различает классические и исключительные группы, возникли только в [9].

В последнем параграфе мы описываем дальнейшие важные редукции, использовавшиеся в (других!) доказательствах структурных теорем:

- редукцию к главной клетке,
- факторизацию по радикалу Джекобсона и
- локализацию.

Кроме того, там формулируются несколько дальнейших нерешенных задач структурной теории исключительных групп.

1. Основные обозначения

Мы не будем даже пытаться напомнить общий контекст, в котором находится настоящая работа, а всего лишь соберем некоторые основные обозначения, относящиеся к группам Шевалле. Все необходимые определения приведены в книгах [3, 15, 34, 38, 39], а много дальнейших деталей и ссылок можно найти в статьях [1, 6–9, 18–23, 41, 44, 47– 52, 55, 59–63].

Пусть сначала G – произвольная группа. Под коммутатором двух элементов $x, y \in G$ мы всегда понимаем их левонормированный коммутатор $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Через ${}^{x}y = xyx^{-1}$ и $y^{x} = x^{-1}yx$ обозначаются, соответственно, левый и правый сопряженные к y при помощи x. Запись $H \leqslant G$ обозначает, что H является подгруппой G, а $H \trianglelefteq G$ – что H является нормальным делителем. Для подмножества $X \subseteq G$ через $\langle X\rangle$ обозначается порожденная им подгруппа. Если $H \leqslant G$, то $\langle X\rangle^{H}$ обозначает наименьшую подгруппу в G, содержащую X и нормализуемую H. Для двух подгрупп $F, H \leqslant G$ через $[F, H]$ обозначается их взаимный коммутант, порожденный $[f, h]$, $f \in F$, $h \in H$.

Зафиксируем коммутативное кольцо R с единицей. Как обычно, R^{*} обозначает множество обратимых элементов R. Запись $I \trianglelefteq R$ означает, что I является идеалом в R.

Пусть Φ – приведенная неприводимая система корней ранга l, а $\mathcal{P}$ – решетка, лежащая между решеткой корней $\mathcal{Q}(\Phi)$ и решеткой весов $\mathcal{P}(\Phi)$. Мы фиксируем на Φ некоторый порядок и обозначаем через $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, Φ^{+} и Φ^{-} – множества простых, положительных и отрицательных корней, отвечающие этому порядку. Наша нумерация простых корней следует [4]. Через δ обозначается максимальный корень системы Φ относительно этого порядка. Система корней Φ, все корни которой имеют одинаковую длину, называется системой с простыми связями, в противном случае – системой с кратными связями. Для системы с кратными связями через Φ_l и Φ_s обозначаются, соответственно, множества длинных и коротких корней в Φ. Хорошо известно, что в любой системе с кратными связями существует единственный короткий доминантный корень; мы обозначаем его через η.

Как хорошо известно, по данным Φ, $\mathcal{P}$, R можно построить группу Шевалле $G = G_{\mathcal{P}}(\Phi, R)$, являющуюся группой R-точек некоторой аффинной групповой схемы $G_{\mathcal{P}}(\Phi, -)$, называемой схемой Шевалле–Демазюра. Для рассматриваемых нами задач можно ограничиться односвязными группами, для которых $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Phi)$. Обычно для односвязных групп мы опускаем указание на $\mathcal{P}$ и пишем просто $G(\Phi, R)$ или, если мы хотим специально подчеркнуть, что речь идет именно об односвязной группе, $G_{\text{sc}}(\Phi, R)$. Присоединенная группа, для которой $\mathcal{P} = \mathcal{Q}(\Phi)$, обозначается $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$.

В дальнейшем мы фиксируем некоторый расщепимый максимальный тор $T(\Phi, -)$ схемы $G(\Phi, -)$, и полагаем $T = T(\Phi, R)$. Как обычно, X_α, $\alpha \in \Phi$, обозначает унипотентную корневую подгруппу в G, элементарную относительно T. Мы фиксируем изоморфизмы $x_\alpha : R \mapsto X_\alpha$, так что $X_\alpha = \{x_\alpha(\xi), \xi \in R\}$, связанные между собой коммутационной формулой Шевалле, см. [15, 34, 38, 63]. Через $E(\Phi, R)$ обозначается элементарная подгруппа в $G(\Phi, R)$, порожденная всеми корневыми подгруппами X_α, $\alpha \in \Phi$.

Напомним, что

$$T(\Phi, R) \cong \operatorname{Hom}(\mathcal{P}, R^*),$$

так что элемент $h \in T(\Phi, R)$, соответствующий характеру $\chi : \mathcal{P} \to R^*$, действует на корневых подгруппах как

$$h x_\alpha(\xi) h^{-1} = x_\alpha(\chi(\alpha)\xi), \quad \alpha \in \Phi, \quad \xi \in R.$$

Пусть, далее, $B = B(\Phi, R)$ и $B^- = B^-(\Phi, R)$ – пара противоположных борелевских подгрупп, стандартная относительно этого порядка. Напомним, что $B = TU$, а $B^- = TV$, где

$$U = U(\Phi, R) = \big\langle x_\alpha(\xi),\ \alpha \in \Phi^+,\ \xi \in R \big\rangle,$$

$$V = V(\Phi, R) = \big\langle x_\alpha(\xi),\ \alpha \in \Phi^-,\ \xi \in R \big\rangle.$$

Зафиксируем теперь обозначения, относящиеся к параболическим подгруппам. Хорошо известно (см., например, [38, 44]), что любому замкнутому множеству корней $S \subseteq \Phi$ естественно сопоставляется алгебраическая подгруппа $G(S, R)$ группы Шевалле $G(\Phi, R)$, содержащая максимальный тор $T(\Phi, R)$ и все корневые подгруппы X_α, $\alpha \in S$. Если замкнутое множество корней S содержит множество положительных корней Φ^+, то оно называется параболическим множеством корней, а соответствующая группа $P = G(S, R)$ называется (стандартной) *параболической подгруппой* группы Шевалле $G(\Phi, R)$. Любая параболическая подгруппа P допускает разложение Леви, т.е. представляется в виде полупрямого произведения $P = L_P \leftthreetimes U_P$ своего унипотентного радикала U_P и подгруппы Леви L_P.

Наконец, пусть $I \trianglelefteq R$ – идеал в R. Ему отвечает гомоморфизм редукции $\rho_I : G(\Phi, R) \longrightarrow G(\Phi, R/I)$. Ядро гомоморфизма ρ_I называется главной конгруэнц-подгруппой уровня I и обозначается $G(\Phi, R, I)$. Оно состоит из всех матриц $g \in G$, сравнимых с e по модулю I. Ядро сквозного гомоморфизма

$$G(\Phi, R) \longrightarrow G(\Phi, R/I) \longrightarrow G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R/I),$$

называется полной конгруэнц-подгруппой уровня I и обозначается $C(\Phi, R, I)$. Оно совпадает с полным прообразом центра группы $G(\Phi, R/I)$ при гомоморфизме редукции ρ_I.

2. Параболическая редукция

Как известно, наиболее содержательным моментом в описании нормальных подгрупп является доказательство того, что любая нецентральная подгруппа H, нормализуемая элементарной группой $E(\Phi, R)$, содержит нетривиальный корневой унипотент $x_\alpha(\xi)$, $\xi \neq 0$. Параболическая редукция состоит в том, чтобы свести эту задачу к несколько более простой задаче нахождения в H нецентрального элемента g такого, что g содержится в некоторой собственной параболической подгруппе P группы $G(\Phi, R)$.

Следующая теорема замечательна тем, что в ней на кольцо R не накладывается вообще *никаких* ограничений. Напомним, что согласно теореме Абе–Харли [22] элементы группы Шевалле $G(\Phi, R)$, не централизуемые $E(\Phi, R)$, – это в точности нецентральные элементы. Впрочем, в нашем доказательстве этот факт не используется.

Теорема 1. *Пусть H – подгруппа группы Шевалле $G(\Phi, R)$, нормализуемая элементарной подгруппой $E(\Phi, R)$. Предположим, что в H найдется элемент g такой, что*

- *g содержится в собственной параболической подгруппе,*
- *g не централизуется $E(\Phi, R)$.*

Тогда в H найдется нетривиальный корневой элемент $x_\alpha(\xi)$, $\alpha \in \Phi$, $0 \neq \xi \in R$.

Следующая лемма, разумеется, сразу вытекает из стандартного описания подгрупп в $G(\Phi, R)$, нормализуемых $E(\Phi, R)$, в тех случаях, когда такое описание имеет место. Однако, смысл проделываемого нами упражнения как раз и состоит в том, чтобы дать независимое *элементарное* доказательство, работающее для совершенно произвольного кольца R.

Лемма 1. *Пусть* $\operatorname{rk}\Phi \geqslant 2$. *Если* $u \in U(\Phi, R)$, $u \neq e$, *то*

$$[u, E(\Phi, R)] \cap U(\Phi, R) \neq e.$$

В частности, u не централизуется $E(\Phi, R)$.

Доказательство. Зафиксируем некоторый порядок $\leqslant$ на Φ^+, согласованный с высотой. Для любого элемента $u \in U(\Phi, R)$ существует единственное представление $u = \prod x_\alpha(u_\alpha)$, где произведение берется по всем корням $\alpha \in \Phi^+$ в соответствии с порядком $\leqslant$. Мы будем обозначать наименьший корень α, для которого $u_\alpha \neq 0$, через $\alpha(u)$.

Случай 1: $\Phi \neq \mathrm{G}_2$**.** Рассмотрим следующие варианты:

• $\alpha(u) \neq \delta, \eta$. Тогда существует такой корень $\beta \in \Phi^+$, что $(\alpha(u), \beta) < 0$. В этом случае коммутационная формула Шевалле показывает, что коммутатор $u' = [u, x_\beta(1)]$ содержится в $U(\Phi, R)$ и – поскольку $u'_{\alpha(u)+\beta} = \pm u_{\alpha(u)}$ – нетривиален.

• $\alpha(u) = \delta$. Тогда $u = x_\delta(u_\delta)$, и выбрав корень $\beta \in \Pi$ такой, что $(\delta, \beta) \neq 0$, мы видим, что коммутатор $[u, x_{-\beta}(1)]$ нетривиален и содержится в $U(\Phi, R)$.

• $\alpha(u) = \eta \neq \delta$. Это значит, в частности, что Φ имеет тип B_l, C_l или F_4. Ясно, что существует такой простой корень β, что $\eta + \beta \in \Phi$ и $(\eta, \beta) = 0$. Тогда из коммутационной формулы следует, что если $[u, x_\beta(1)] = e$, то $2u_\eta = 0$. Пусть γ – наименьший корень, удовлетворяющий $\eta < \gamma$ и $u_\gamma \neq 0$. Если γ существует и $\gamma \neq \delta$, то можно найти такой простой корень π_s, что $(\gamma, \pi_s) < 0$. Нетрудно видеть, что для $u' = [u, x_{\pi_s}(1)]$ мы имеем $\alpha(u') = \gamma + \pi_s$, и $u'_{\alpha(u')} = \pm u_\gamma \neq 0$, то есть опять $u' \neq e$ и $u' \in U(\Phi, R)$. Если $\gamma = \delta$ или если такого корня γ вообще не существует, то мы имеем $u = x_\eta(u_\eta)x_\delta(u_\delta)$, Рассмотрим три случая $\Phi = \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l, \mathrm{F}_4$ по отдельности.

∘ Если $\Phi = \mathrm{B}_l$, то $\eta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_l$ и $\delta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_l$. Нетрудно видеть, что коммутант

$$[u, x_{-\alpha_1}(1)] = x_{\alpha_2+\ldots+\alpha_l}(\pm u_\eta)$$

нетривиален и содержится в $U(\Phi, R)$.

∘ Если $\Phi = \mathrm{C}_l$, $l \geqslant 3$, то $\eta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$ и $\delta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$. В этом случае подходит коммутант

$$[u, x_{-\alpha_2}(1)] = x_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\ldots+2\alpha_{l-1}+\alpha_l}(\pm u_\eta).$$

∘ Наконец, если $\Phi = F_4$, то $\eta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$ и $\delta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$. Нетрудно видеть, что подходит коммутант

$$[u, x_{-\alpha_4}(1)] = x_{\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4}(\pm u_\eta).$$

Случай 2: $\Phi = \mathrm{G}_2$. Здесь возможны следующие варианты.

• $\alpha(u)$ является простым корнем, $\alpha(u) = \alpha_i$, $i = 1, 2$. Тогда коммутант $u' = [u, x_{\alpha_{2-i}}(1)]$ нетривиален, так как $u'_{\alpha_1+\alpha_2} = \pm u_{\alpha_i}$, и содержится в $U(\Phi, R)$.

• $\alpha(u) = \alpha_1 + \alpha_2$. Тогда в случае, когда $2u_{\alpha_1+\alpha_2} \neq 0$, можно рассмотреть $u' = [u, x_{\alpha_1}(1)]$; в противном случае $3u_{\alpha_1+\alpha_2} = u_{\alpha_1+\alpha_2} \neq 0$, вследствие чего нетривиален коммутант

$$[u, x_{2\alpha_1+\alpha_2}(1)] = x_{3\alpha_1+2\alpha_2}(\pm 3u_{\alpha_1+\alpha_2}).$$

• $\alpha(u) \geqslant 2\alpha_1 + \alpha_2$. Если $u = x_{2\alpha_1+\alpha_2}(u_{2\alpha_1+\alpha_2})$, то как и выше, по крайней мере один из коммутаторов

$$\begin{aligned}
&[u, x_{\alpha_1}(1)] = x_{3\alpha_1+\alpha_2}(\pm 3u_{2\alpha_1+\alpha_2}),\\
&[u, x_{-\alpha_1}(1)] = x_{\alpha_1+\alpha_2}(\pm 2u_{2\alpha_1+\alpha_2})x_{\alpha_2}(\mu)x_{3\alpha_1+2\alpha_2}(\nu), \quad \mu, \nu \in R,
\end{aligned}$$

нетривиален. А во всех остальных случаях нетривиален один из коммутаторов

$$\begin{aligned}
&[u, x_{\alpha_2}(1)] = x_{3\alpha_1+2\alpha_2}(\pm u_{3\alpha_1+\alpha_2}),\\
&[u, x_{-\alpha_2}(1)] = x_{3\alpha_1+\alpha_2}(\pm u_{3\alpha_1+2\alpha_2}).
\end{aligned}$$

В действительности, мы доказали даже следующее более точное утверждение.

Лемма 2. *Для любого $u \in U(\Phi, R)$, $u \neq e$, в группе $H = \langle u \rangle^{E(\Phi,R)}$ найдется корневой элемент $x_\alpha(\xi)$, $\alpha \in \Phi$, $\xi \neq 0$.*

Доказательство. Если элемент u сам является корневым (в частности, если $\operatorname{rk}\Phi = 1$), то доказывать нечего. В остальных случаях доказательство леммы 1 показывает, что можно найти либо такой корень $\beta \in \Phi$, что коммутатор $[u, x_\beta(1)]$ является нетривиальным корневым элементом, либо такой корень

$\beta \in \Phi^+$, что коммутатор $u' = [u, x_\beta(1)]$ нетривиален. Во втором случае, разумеется, $h(u') > h(u)$, где $h(u)$ обозначает минимум высот корней $\alpha \in \Phi^+$ таких, что коэффициент u_α в разложении $u = \prod x_\alpha(u_\alpha)$, $\alpha \in \Phi^+$, отличен от нуля. Следовательно, доказательство леммы можно завершить индукцией по высоте $h(u)$ – максимальное значение высоты соответствует корневому элементу $u = x_\delta(u_\delta)$.

Следующая лемма является основным новым соображением, позволяющим резко упростить вычисления, содержавшиеся в работах [6] и [9]. А именно, она позволяет избежать как ссылки на результаты работ [24], [46] о строении внутренних модулей Шевалле, так и явных вычислений с централизаторами унипотентных элементов. Фактически, единственное, что нам требуется, это то, что действие L_P сопряжением на U_P алгебраическое и, следовательно, определяет *рациональные* представления L_P на факторах нижнего центрального ряда U_P.

Лемма 3. *Пусть P – собственная параболическая подгруппа. Если $z \in L_P$ удовлетворяет условию*

$$[z, U_P] \subseteq [U_P, U_P],$$

то z централизуется $E(\Phi, R)$.

Доказательство. Пусть система корней $\Delta \subseteq \Phi$ подгруппы Леви L_P порождена множеством простых корней $J \subseteq \Pi$. Для любого простого корня $\alpha_i \in \Pi$ мы будем обозначать через $m_i(\alpha)$ коэффициент при α_i в разложении $\alpha \in \Phi$.

Обозначим через U'_P подгруппу U_P, порожденную всеми X_α, где $\alpha \in \Phi^+$ удовлетворяет $\sum\limits_{\alpha_i \in \Pi \setminus J} m_i(\alpha) > 1$. Ясно, что $[U_P, U_P] \subseteq U'_P$. Обозначим, кроме того, через L'_P коммутант L_P как алгебраической группы ([38], Exp. XXII), являющийся полупростой группой типа Δ. Естественное представление ρ группы L_P на U_P/U'_P является рациональным представлением, поэтому из конструкции Шевалле полупростых алгебраических групп (например, [44], [63]) следует существование полупростой алгебраической группы H такой, что $\rho|_{L'_P}$ пропускается через *точное* представление H на U_P/U'_P.

Нетрудно видеть, что для любого положительного корня $\beta \in \Delta$ существует такой положительный корень α, что $\sum\limits_{\alpha_i \in \Pi \setminus J} m_i(\alpha) =$

1 и $(\beta,\alpha) < 0$, откуда следует, что действие $x_\beta(1)$ на базисном элементе $x_\alpha(1)$ модуля U_P/U'_P нетривиально.

Значит, алгебраическая группа H также имеет тип Δ, и ядро представления $\rho|_{L'_P}$ центрально, в частности, элементы L'_P, действующие диагонально, содержатся в торе L'_P. Поскольку L с точностью до центральной изогении совпадает с произведением своего радикала и L'_P, все ядро представления ρ содержится в торе T.

Итак, поскольку $[z,U_P] \subseteq [U_P,U_P]$, элемент z содержится в торе и действует на корневых элементах посредством некоторого характера решетки весов χ. Тогда для любого простого корня $\alpha \in \Pi \setminus J$ мы имеем $\chi(\alpha) = 1$, так как $zx_\alpha(1)z^{-1} = x_\alpha(1)$. Далее, для любого простого корня $\beta \in J$ существует простой корень $\alpha \in \Pi \setminus J$ и цепочка простых корней $\beta_1,\dots,\beta_n \in J$ такая, что $\beta_n = \beta$ и все суммы $\alpha+\beta_1+\ldots+\beta_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, являются корнями, поэтому и $\chi(\beta) = 1$. Следовательно, $\chi(\alpha) = 1$ для любого $\alpha \in \Phi$, и z централизуется $E(\Phi,R)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть элемент g содержится в собственной параболической подгруппе P. Запишем $g = zu$, где $z \in L_P$, $u \in U_P$. Имеем

$$[g,x_\alpha(1)] = {}^z[u,x_\alpha(1)][z,x_\alpha(1)].$$

Ясно, что для любого корневого элемента $x_\alpha(1) \in U_P$ выполняется включение ${}^z[u,x_\alpha(1)] \in [U_P,U_P]$. Если найдется такой элемент $x_\alpha(1) \in U_P$, что $[z,x_\alpha(1)] \notin [U_P,U_P]$, то $[g,x_\alpha(1)]$ представляет собой нетривиальный элемент группы $U(\Phi,R)$, и нам достаточно, сослаться на лемму 2.

Нам остается еще рассмотреть случай $[z,U_P] \subseteq [U_P,U_P]$. Но тогда по лемме 3 элемент z централизуется $E(\Phi,R)$. Это значит, что $[g,E(\Phi,R)] = [u,E(\Phi,R)]$ и, поскольку g нецентрален, то $u \neq e$. Следовательно, мы можем снова применить лемму 2 и заключить, что группа

$$[g,E(\Phi,R)]^{E(\Phi,R)} = [u,E(\Phi,R)]^{E(\Phi,R)}$$

содержит нетривиальный корневой элемент.

3. Стандартное описание

В наивных изложениях авторы пытаются *форсировать* описание нормальных подгрупп в терминах одного идеала кольца R.

В действительности, для систем с кратными связями это является насилием над природой и грубой идеологической ошибкой. После работы Эйичи Абе [18] и диссертации Энтони Бака [25] стало ясно, что описание должно даваться в терминах допустимых пар ≈ форменных идеалов. Это понятие тесно связано также с понятием йорданова идеала, а для рангов $\leqslant 2$ нуждается в дальнейшей модификации [35–37].

Следующее понятие было введено в работах Абе [18–21] и Абе–Судзуки [23]. В классических случаях оно эквивалентно понятию форменного идеала. Пусть A – идеал в R. Обозначим через A_2 идеал, порожденный 2ξ и ξ^2 для всех $\xi \in A$. Пара (A, B) называется **допустимой парой** в R, если $A \trianglelefteq R$, а $A_2 \leqslant B \leqslant A$, причем при $\Phi \neq \mathrm{C}_l$ аддитивная подгруппа B является идеалом в R, а при $\Phi = \mathrm{C}_l$ требуется лишь, чтобы B выдерживала умножения на ξ^2 для всех $\xi \in R$. Аналогичное понятие можно ввести и для G_2, но при этом в определении допустимой пары нужно *всюду* заменить 2 на 3.

Допустимой паре (A, B) можно сопоставить **относительную элементарную подгруппу** $E(\Phi, R, A, B)$ уровня (A, B), которая определяется как *нормальная* подгруппа в $E(\Phi, R)$, порожденная элементарными корневыми унипотентами уровня (A, B). Иными словами,

$$E(\Phi, R, A, B) = \langle x_\alpha(\xi),\ \alpha \in \Phi_s,\ \xi \in A; \quad x_\beta(\zeta),\ \beta \in \Phi_l,\ \zeta \in B\rangle^{E(\Phi,R)}.$$

В случае $A = B = I \trianglelefteq R$ это понятие специализируется в обычное понятие относительной элементарной группы

$$E(\Phi, R, I) = \langle x_\alpha(\xi),\ \alpha \in \Phi,\ \xi \in I\rangle^{E(\Phi,R)}.$$

Зададим теперь образующие $\mathrm{E}(\Phi, R, A, B)$ *как подгруппы*. Для корня $\alpha \in \Phi$ и двух элементов кольца $\xi, \zeta \in R$ положим

$$z_\alpha(\xi, \zeta) = x_\alpha(\zeta)x_{-\alpha}(\xi)x_\alpha(-\zeta).$$

Из коммутационной формулы Шевалле легко вывести, что $E(\Phi, R, I)$ порождается содержащимися в ней элементами $z_\alpha(\xi, \zeta)$. Аналогичный результат имеет место и для группы $E(\Phi, R, A, B)$, хотя доказательство в этом случае требует гораздо большего напряжения, [20], предложение 2.4 (сравни также [48], предложение 5.1).

Лемма 4. *Группа $E(\Phi, R, A, B)$ порождается содержащимися в ней элементами вида $z_\alpha(\xi, \zeta)$. Иными словами, $E(\Phi, R, A, B)$ можно определить как*

$$\Big\langle z_\alpha(\xi,\eta),\ \alpha\in\Phi_s,\ \xi\in A,\ \eta\in R;\quad z_\beta(\zeta,\eta),\ \beta\in\Phi_l,\ \zeta\in B,\ \eta\in R\Big\rangle.$$

Следующий результат доказан в работах [29, 30, 51, 28]. Мы не будем обсуждать, что происходит для групп типа B_2 и G_2, так как в этих случаях ответ несколько усложняется и требует замены понятия допустимой пары на понятие радикса [36, 37]. Первую строчку выключной формулы можно принять за *определение* группы $C(\Phi, R, A, B)$. Конечно, в случае $A = B$ за определение обычно принимается *последняя* строчка, но в общем случае определить $G(\Phi, R, A, B)$ не так просто.

Лемма 5. *Пусть $\mathrm{rk}(\Phi) \geqslant 3$. Тогда для любой допустимой пары (A, B) группа $E(\Phi, R, A, B)$ нормальна в $G(\Phi, R)$ и имеют место равенства*

$$\begin{aligned} C(\Phi,R,A,B) = \{g\in G(\Phi,R) \mid [g, E(\Phi,R)] \leqslant E(\Phi,R,A,B)\} = \\ \{g\in G(\Phi,R) \mid [g, E(\Phi,R)] \leqslant G(\Phi,R,A,B)\} = \\ \{g\in G(\Phi,R) \mid [g, G(\Phi,R)] \leqslant G(\Phi,R,A,B)\}. \end{aligned}$$

Однако, в действительности этот результат в полной общности не используется при доказательстве редукции по уровню, нам достаточно следующего более простого результата, относящегося к случаю $A = B$.

Лемма 6. *Предположим, что $\mathrm{rk}(\Phi) \geqslant 2$, причем если $\Phi = \mathrm{B}_2$ или G_2, у кольца R нет поля вычетов $\mathbb{F}_2$ из двух элементов. Тогда для любого идеала $I \trianglelefteq R$ имеет место равенство*

$$[C(\Phi, R, I), E(\Phi, R)] = E(\Phi, R, I).$$

В частности, группа $E(\Phi, R, I)$ нормальна в $G(\Phi, R)$.

Говорят, что в группе Шевалле $G(\Phi, R)$ имеет место **стандартное описание** подгрупп, нормализуемых элементарной группой $E(\Phi, R)$, если для каждой такой подгруппы H существует единственная допустимая пара (A, B) в кольце R такая, что

$$E(\Phi, R, A, B) \leqslant H \leqslant C(\Phi, R, A, B).$$

Этот результат иногда называется также структурной теоремой для группы $G(\Phi, R)$ – или, по причинам, которые станут понятны в следующем параграфе – **сильной структурной теоремой**.

В случае систем с простыми связями или при различных упрощающих предположениях, гарантирующих, что $A_p = A$, стандартное описание уваривается (boils down) до следующего описания в терминах *одного* идеала. Именно, для любой подгруппы $H \leqslant G(\Phi, R)$, нормализуемой $E(\Phi, R)$, существует единственный идеал $I \trianglelefteq R$ такой, что

$$E(\Phi, R, I) \leqslant H \leqslant C(\Phi, R, I).$$

Однако, в случае систем с кратными связями попытка ограничиться структурной теоремой в такой форме является грубой методической ошибкой.

4. Редукция уровня

Редукция уровня в обычном виде, восходящем к работе Басса 1964 года [32] (см. также [2]), работает для *слабой* структурной теоремы. **Слабая структурная теорема** состоит в том, что для любой подгруппы $H \leqslant G(\Phi, R)$, нормализуемой $E(\Phi, R)$, существует единственный идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что

$$E(\Phi, R, A, A_2) \leqslant H \leqslant C(\Phi, R, A).$$

В терминах теории Бака это означает, что в левой части этого неравенства берется группа, отвечающая *минимальному* значению относительного форменного параметра, а в правой части – *максимальному*.

Доказательство следующего результата *почти* буквально повторяет доказательство теоремы 2 работы [9] – которое, в свою очередь, близко следует первоначальной схеме Басса, с учетом, естественно, того, что теперь мы должны различать длинные и короткие корни. К нашему удивлению, нам не удалось найти это рассуждение в общем случае в известной нам литературе. Разумеется, для *классических* групп оно содержится в (неопубликованной) диссертации Бака [25] и (на стабильном уровне) – в работе Басса [33].

Теорема 2. *Пусть* $\Phi \neq \mathrm{B}_2, \mathrm{G}_2$. *Предположим, что для любого идеала* $I \trianglelefteq R$ *кольца* R *выполняется следующее условие:*

• *если H – нецентральная подгруппа в $G(\Phi, R/I)$, нормализуемая $\mathrm{E}(\Phi, R/I)$, то H содержит нетривиальный элементарный корневой элемент $x_\alpha(\zeta)$, $\zeta \in R/I$, $\zeta \neq 0$.*

Тогда в группе $G(\Phi, R)$ выполняется слабая структурная теорема для описания подгрупп, нормализуемых $E(\Phi, R)$.

Нам потребуется следующее техническое утверждение, являющееся частным случаем леммы 2.2 работы [20].

Лемма 7. *Пусть $\mathrm{rk}\,\Phi \geqslant 3$. Если корни $\alpha, \beta \in \Phi$ порождают подсистему корней типа B_2, причем α – короткий корень, то*

$$x_{\alpha+\beta}(\xi), x_{2\alpha+\beta}(\eta) \in \langle x_{\alpha+\beta}(\xi) x_{2\alpha+\beta}(\eta)\rangle^{E(\Phi,R)}$$

для любых $\xi, \eta \in R$.

Доказательство. Обозначим $\langle x_{\alpha+\beta}(\xi) x_{2\alpha+\beta}(\eta)\rangle^{E(\Phi,R)}$ через H. Так как $\mathrm{rk}\,\Phi \geqslant 3$, то существует такой корень $\gamma \in \Phi$, что корни α, β, γ порождают в Φ подсистему типа B_3 или C_3. Если они порождают подсистему типа B_3, то

$$[x_{\beta+\gamma}(1), x_{\alpha+\beta}(\xi) x_{2\alpha+\beta}(\eta)] =$$
$$[x_{\beta+\gamma}(1), x_{\alpha+\beta}(\xi)] \cdot {}^{x_{\alpha+\beta}(\xi)}[x_{\beta+\gamma}(1), x_{2\alpha+\beta}(\eta)] = x_{2\alpha+2\beta+\gamma}(\pm\eta) \in H.$$

Поскольку $2\alpha + 2\beta + \gamma$ и $\beta + \gamma$ – длинные корни под углом $\pi/3$, имеем

$$[x_{-(\beta+\gamma)}(1), x_{2\alpha+2\beta+\gamma}(\pm\eta)] = x_{2\alpha+\beta}(\pm\eta) \in H,$$

что и требовалось.

Если α, β, γ порождают подсистему типа C_3, то

$$[x_{\alpha+\gamma}(1), x_{\alpha+\beta}(\xi) x_{2\alpha+\beta}(\eta)] =$$
$$[x_{\alpha+\gamma}(1), x_{\alpha+\beta}(\xi)] \cdot {}^{x_{\alpha+\gamma}(\xi)}[x_{\beta+\gamma}(1), x_{2\alpha+\beta}(\eta)] = x_{2\alpha+\beta+\gamma}(\pm\xi) \in H.$$

Поскольку $2\alpha + \beta + \gamma$ и $\alpha + \gamma$ – длинные корни под углом $\pi/3$, имеем

$$[x_{-(\alpha+\gamma)}(1), x_{2\alpha+\beta+\gamma}(\pm\xi)] = x_{\alpha+\beta}(\pm\xi) \in H,$$

что и требовалось.

Доказательство теоремы 2. Пусть H – подгруппа $G(\Phi, R)$, нормализуемая $E(\Phi, R)$. Обозначим через B нижний уровень подгруппы H, т.е. наибольший идеал в R такой, что $E(\Phi, R, B) \leqslant H$.

Как известно [18] – [21], идеал B можно определить как множество $\xi \in R$ таких, что $x_\alpha(\xi) \in H$ для какого-то (=любого) *длинного* корня α. Далее, обозначим через A верхний уровень подгруппы H, т.е. множество $\xi \in R$ таких, что $x_\alpha(\xi) \in H$ для какого-то (=любого) *короткого* корня α.

Заметим, что если Φ – система корней с кратными связями, $\Phi \neq \mathrm{G}_2$, то для любого длинного корня $\alpha \in \Phi$ существует короткий корень $\beta \in \Phi$, расположенный под углом $3\pi/4$ к нему. Тогда $[x_\alpha(\xi), x_\beta(1)] = x_{\alpha+\beta}(\pm\xi)x_{\alpha+2\beta}(\pm\xi) \in H$, как только $\xi \in B$, и из леммы 7 следует, что $B \leqslant A$. С другой стороны, для любого короткого корня $\alpha \in \Phi$ тоже существует длинный корень $\beta \in \Phi$, расположенный под углом $3\pi/4$ к нему, поэтому аналогичные вычисления для $\xi \in A$ дают $A_2 \leqslant B$. Следовательно, для любой $E(\Phi, R)$-нормализуемой подгруппы H мы имеем неравенство уровней $A_2 \leqslant B \leqslant A$.

Рассмотрим произведение $H' = H \cdot E(\Phi, R, A)$, в котором никаких новых *коротких* корневых элементов не появляется и, поэтому, нижний уровень равен верхнему и равен A. Рассмотрим образ $\overline{H'} \leqslant G(\Phi, R/A)$ подгруппы H' относительно гомоморфизма редукции $\pi_A : G(\Phi, R) \longrightarrow G(\Phi, R/A)$. Так как $\overline{H'}$ нормализуется $E(\Phi, R/A) = \pi_A(E(\Phi, R))$, по условию теоремы $\overline{H'} \neq 1$ влечет, что $\overline{H'}$ содержит нетривиальный корневой элемент $x_\alpha(\overline{\xi}) = x_\alpha(\xi + A)$ для некоторого $\xi \notin A$.

Это значит, что H' содержит элемент вида $h = x_\alpha(\xi)g$ для некоторого $g \in G(\Phi, R, A)$. Тогда для любого корня $\beta \in \Phi$ имеем

$$[h, x_\beta(1)] = {}^{x_\alpha(\xi)}[g, x_\beta(1)][x_\alpha(\xi), x_\beta(1)] \in H'.$$

Так как первый множитель принадлежит $E(\Phi, R, A)$ в силу леммы 6, второй множитель $[x_\alpha(\xi), x_\beta(1)]$ тоже принадлежит H'.

Если $\beta \in \Phi$, $\beta \neq -\alpha$, – такой корень, что угол между α и β тупой, то в соответствии с коммутационной формулой Шевалле, $[x_\alpha(\xi), x_\beta(1)]$ содержит сомножитель $x_{\alpha+\beta}(\pm\xi)$, причем $\alpha + \beta$ – короткий корень. Применив, если нужно, лемму 7, заключаем, что $x_{\alpha+\beta}(\pm\xi) \in H'$, что противоречит $\xi \notin A$.

Поэтому $\overline{H'} = 1$, или, что то же самое, $H \cdot E(\Phi, R, A) \leqslant C(\Phi, R, A)$, так что определенный нами верхний уровень действительно является верхним уровнем в обычном смысле! Резюмируя сказанное выше, можно заключить, что

$$E(\Phi, R, A, A_2) \leqslant E(\Phi, R, A, B) \leqslant H \leqslant H \cdot E(\Phi, R, A) \leqslant C(\Phi, R, A),$$

как и утверждалось.

Отметим, что в работах Голубчика (см., в частности, [12, 13]) для некоммутативных колец использовалась другая версия редукции по уровню, в которой редукция происходила не за один шаг, как у нас, а за несколько.

5. Сильная и слабая структурная теорема

Содержание настоящего параграфа представляет собой дальнейшую обработку следующей темы Бака:

$$\begin{aligned}&\text{сильная структурная теорема в } G(\Phi, R) =\\ &\qquad\text{слабая структурная теорема в } G(\Phi, R)+\\ &\qquad\qquad\text{сильная структурная теорема в } G(\Delta, R),\end{aligned}$$

для некоторой подсистемы $\Delta \subseteq \Phi$. Заметим, что это именно тот фрагмент рассуждения, который пропущен в [57], что приводит к ошибке в основном результате этой статьи, см. [42].

В диссертации Бака [25] система Δ была подсистемой той же классической серии, что и сама система Φ, но как замечено в [9], это совершенно не обязательно. Более того, следующая лемма показывает, что удобнее всего брать в качестве Δ подсистему в Φ, состоящую из длинных корней. Дело в том, что в этом случае в $G(\Delta, R)$ нет разницы между слабой и сильной структурными теоремами!

Лемма 8. *Пусть Φ – система с кратными связями. Тогда для любой допустимой пары имеет место равенство*

$$E(\Phi, R, A) = E(\Phi, R, A, B)E(\Phi_l, R, A).$$

Доказательство. В самом деле, группа $E(\Phi, R, A, B)$ нормальна в $E(\Phi, R)$ и, тем более, $E(\Phi, R, A)$, так что произведение в правой части является подгруппой, которая (по лемме 4) содержит все образующие левой части.

Теорема 3. *Пусть $\Phi \neq \mathrm{B}_2, \mathrm{G}_2$. Предположим, кроме того, что сильная структурная теорема выполнена в $G(\Phi_l, R)$, если $\Phi = \mathrm{B}_l, \mathrm{F}_4$, или, соответственно, в $G(\mathrm{C}_3, R)$, если $\Phi = \mathrm{C}_l$, $n \geqslant 3$. Тогда* *слабая структурная теорема для $G(\Phi, R)$ влечет сильную структурную теорему.*

Доказательство. Пусть $H \leqslant G(\Phi, R)$ – подгруппа, нормализуемая $E(\Phi, R)$. Как было показано в доказательстве теоремы 2, существуют нижний уровень B и верхний уровень A, для которых $E(\Phi, R, A, B) \leqslant H \leqslant C(\Phi, R, A)$. Мы хотим показать, что тогда на самом деле $H \leqslant C(\Phi, R, A, B)$, или, что то же самое, $[H, E(\Phi, R)] \leqslant E(\Phi, R, A, B)$. С учетом лемм 6 и 8 из условия вытекает, что

$$E(\Phi, R, A, B) \leqslant [H, E(\Phi, R)] \leqslant E(\Phi, R, A) = E(\Phi, R, A, B) E(\Phi_l, R, A).$$

Таким образом, если $[H, E(\Phi, R)] \neq E(\Phi, R, A, B)$, то группа $[H, E(\Phi, R)]$ содержит нетривиальный элемент $g \in E(\Phi_l, R, A) \setminus E(\Phi, R, B)$. Из совершенности $E(\Phi, R)$ следует, что

$$[[H, E(\Phi, R)], E(\Phi, R)] = [H, E(\Phi, R)],$$

поэтому можно считать даже, что $g \notin C(\Phi, R, B)$.

В случае, когда в $G(\Phi_l, R)$ имеет место стандартное описание подгрупп, нормализуемых $E(\Phi_l, R)$, доказательство завершается совсем просто. В самом деле, из стандартного описания следует, что $[H, E(\Phi, R)] \leqslant H$ содержит длинный корневой элемент $x_\alpha(\xi)$ для некоторого $\xi \in A \setminus B$. Но это противоречит определению нижнего уровня! Тем самым, $[H, E(\Phi, R)] = E(\Phi, R, A, B)$, и, значит, $H \leqslant C(\Phi, R, A, B)$, как и утверждалось.

Это оставляет нас с анализом случая, когда $\Phi = \mathrm{C}_l$, $l \geqslant 3$, и $\Phi_l = l\,\mathrm{A}_1$. Напомним, что по лемме 4 группа $E(\Phi_l, R, A)$ порождена элементами вида

$$z_\alpha(\xi, \eta) = x_\alpha(\eta) x_{-\alpha}(\xi) x_\alpha(-\eta), \quad \alpha \in \Phi_l,\ \xi \in A,\ \eta \in R.$$

Нетрудно убедиться, что для любого короткого корня $\beta \in \Phi_s$ существует только четыре неортогональных ему длинных корня. Действительно, если $\beta = \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ – короткий простой корень, то он неортогонален только следующим длинным корням:

$$\pm(2\alpha_i + \ldots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n) \quad \text{и} \quad \pm(2\alpha_{i+1} + \ldots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n),$$

которые вместе с $\pm\beta$ образуют систему типа B_2. Следовательно, любая образующая $x_\beta(\zeta)$, $\alpha \in \Phi_s$, $\zeta \in R$, группы $E(\Phi, R)$ заведомо коммутирует со всеми образующими $E(\Phi_l, R, A)$, за исключением образующих вида $z_{\pm\alpha}(\xi, \eta)$, $z_{\pm(2\beta+\alpha)}(\xi, \eta)$, где α – длинный корень, расположенный под углом $3\pi/4$ к β. С другой стороны, любая образующая $x_\beta(\zeta)$, $\alpha \in \Phi_l$, $\zeta \in R$, коммутирует со всеми образующими $E(\Phi_l, R, A)$, за исключением $z_{\pm\beta}(\xi, \eta)$.

Ясно, что если элемент $g \in [H, E(\Phi, R)] \cap E(\Phi_l, R, A)$ не содержится в полной конгруэнц-подгруппе $C(\Phi, R, B)$, то есть $[g, E(\Phi, R)] \not\leq E(\Phi, R, B)$, то можно найти такую образующую $x_\beta(\zeta)$, $\beta \in \Phi$, $\zeta \in R$ элементарной группы, что

$$[g, x_\beta(\zeta)] \in E(\Phi, R, A) \setminus E(\Phi, R, B).$$

Приведенные выше рассуждения показывают, что на самом деле $[g, x_\beta(\zeta)] \in E(\Delta, R, A)$ для некоторой подсистемы корней $\Delta \subseteq \Phi$ типа B_2. Далее, поскольку $\operatorname{rk}\Phi \geqslant 3$, можно считать, что $[g, x_\beta(\zeta)] \in E(\Delta', R, A)$ для некоторой подсистемы корней $\Delta' \subseteq \Phi$ типа C_3. Но тогда сильная структурная теорема в $G(\mathrm{C}_3, R)$ влечет, что $[H, E(\Phi, R)]$ содержит длинный корневой элемент $x_\alpha(\xi)$ для некоторого $\xi \in A \setminus B$.

6. Дальнейшие редукции и открытые вопросы

Заметим, что в работах Абе и Судзуки [18]–[21], [23, 50] приведено совершенно поразительное доказательство, не использующее ни редукцию по уровню, ни параболическую редукцию. Оно основано на **редукции к большой клетке**.

Техническим ядром доказательства в работах [18]–[21], [23] является следующий результат, [20], лемма 3.4. Напомним, что всюду предполагается, что $\operatorname{rk}(\Phi) \geqslant 2$.

Теорема 4. *Пусть H – подгруппа группы Шевалле $G(\Phi, R)$, нормализуемая элементарной подгруппой $E(\Phi, R)$. Пусть α – простой корень, не ортогональный к максимальному корню. Если H содержит матрицу*

$$g = x_\alpha(\xi)uhv \in UTV \cap H,$$

где $u = \prod x_\beta(*)$, $\beta \in \Phi^+$, $\beta \neq \alpha$, и $h \in T$, $v \in V$, то $x_\alpha(\xi) \in H$.

В случае, когда кольцо R полулокально, каждый элемент группы Шевалле сопряжен с элементом, лежащим в главной клетке. В общем случае это, конечно, неверно.

Однако, тот факт, что подрадикальные элементы сами лежат в большой клетке, служит ключом к **факторизации по радикалу**. Фактически она доказана еще в работах Абе и Судзуки [20, 23], хотя *буквально* так там не формулировалась, а спрятана в доказательствах. Через $J = J(R)$ здесь обозначается радикал Джекобсона кольца R.

Теорема 5. *Если описание подгрупп, нормализуемых элементарной подгруппой, стандартно в группе Шевалле $G(\Phi, R/J)$, то оно стандартно в $G(\Phi, R)$.*

Доказательство в работах Абе и Судзуки опирается на сформулированную выше (трудную!) теорему 4. В работе Степанова [16] для случая GL_n приведено совсем простое доказательство этого факта, теорема 4.6. В действительности в доказательстве Степанова используется только то, что $n \geqslant \mathrm{sr}(R, J) + 1$. Еще одно, гораздо более сложное доказательство частного случая этого результата позже опубликовал Петечук [45].

В случае GL_n следующая редукция для задачи описания нормальных подгрупп предложена в работе Васерштейна [53], притом в несколько более общей ситуации (основное кольцо там не предполагается коммутативным, рассматриваются локализации в максимальных идеалах какого-то центрального подкольца). Основная идея доказательства восходит к работам Квиллена и Суслина по проблеме Серра, в особенности [17]. При некоторых дополнительных предположениях следующий результат доказан в работе Васерштейна [55], а в общем случае – в работах Абе [19–21].

Теорема 6. *Если описание подгрупп, нормализуемых элементарной подгруппой, стандартно в группе Шевалле $G(\Phi, R_M)$, $M \in \mathrm{Max}(R)$, а группа $E(\Phi, R)$ совершенна, то оно стандартно в $G(\Phi, R)$.*

Сформулируем теперь несколько дальнейших задач, теснейшим образом связанных с содержанием настоящей работы. Следующая задача полностью решена только для полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, R)$. Даже для других классических групп имеются лишь частичные результаты, скажем, на стабильном уровне [65].

Проблема 1. *Описать подгруппы $G(\Phi, R)$, нормализуемые относительной элементарной группой $E(\Phi, R, A)$.*

Стандартный ответ на эту задачу в случае систем с простыми связями формулируется следующим образом. Для любой такой подгруппы H существует идеал $I \trianglelefteq R$ такой, что

$$E(\Phi, R, A^m I) \leqslant H \leqslant \mathrm{C}(\Phi, R, I)$$

для некоторого m. Этот идеал I единственен с точностью до некоторого естественного отношения эквивалентности $\lozenge_A$, [43, 26, 27]. Наиболее важный технический аспект этой задачи состоит в нахождении *наименьшего* возможного m такого, что эти включения выполнены для всех подгрупп H. Например, для $\mathrm{GL}_{n\geqslant 3}$ в 1973–1989 годах m последовательно принимало следующие значения: $m = 7$ [64], $m = 6$ [54], $m = 5$ [58], $m = 4$ [56], и с тех пор не улучшалось.

Использованная в доказательстве лемма 6 – это так называемая *вторая* стандартная коммутационная формула. С использованием метода разложения унипотентов [49] в работе первого автора и Алексея Степанова [11] для случая GL_n доказана следующая коммутационная формула с двумя параметрами:

$$[E(n, R, A), \mathrm{GL}(n, R, B)] = [E(n, R, A), E(n, R, B)].$$

Эта формула одновременно обобщает обе обычные стандартные коммутационные формулы, в которых либо A, либо B равно R.

Проблема 2. *Доказать стандартную коммутационную формулу*

$$[E(\Phi, R, A), G(\Phi, R, B)] = [E(\Phi, R, A), E(\Phi, R, B)].$$

для всех классических групп и групп Шевалле.

Следующая задача собственно и послужила мотивировкой настоящей работы. В настоящее время первый автор и Александр Лузгарев работают над аналогом основной леммы работы [6] для этого случая.

Проблема 3. *Провести* A_2*-доказательство для группы Шевалле типа* E_8.

Отличие этого случая от случаев, рассмотренных в [6] и [9] (см. также [7, 61, 62]), состоит в том, что у группы $G(\mathrm{E}_8, R)$ нет микровесовых представлений и она не является скручиванием группы, имеющей такое представление.

В заключение авторы благодарят Виктора Петрова за помощь в работе над настоящей статьей.

Литература

1. Э. Абе, *Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами.* – Алгебра и Анализ **5**, No. 2 (1993), 74–90.
2. Х. Басс, *Алгебраическая K-теория.* Мир, М. (1973).
3. А. Борель, *Свойства и линейные представления групп Шевалле.* — В кн.: Семинар по алгебраическим группам, Мир, М. (1973). 9–59.
4. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли, Главы* IV–VI. М. (1972), 1–334.
5. Н. А. Вавилов, *Вычисления в исключительных группах.* — Вестник Самарского ун-та **33** (2007).
6. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* E_6 *и* E_7. — Алгебра и Анализ **16**, No. 4 (2004), 54–87.
7. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, С. И. Николенко, *Строение групп Шевалле: доказательство из Книги.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 36–76.
8. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа* E_6. — Алгебра и Анализ **19**, No. 5 (2007), 35–62.
9. Н. А. Вавилов, С. И. Николенко, A_2*-доказательство структурных теорем для группы Шевалле типа* F_4. — Алгебра и Анализ **20** (2008).
10. Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, А. В. Степанов, *Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами.* — Докл. АН СССР **40**, No. 1 (1990), 145–147.
11. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Стандартная коммутационная формула.* — Вестн. СПбГУ (2007).
12. И. З. Голубчик, *О нормальных делителях линейных и унитарных групп над ассоциативным кольцом.* — Пространства над алгебрами и некоторые вопросы теории сетей, Уфа (1985), 122–142.
13. И. З. Голубчик, *Группы типа Ли над PI-кольцами.* — Фунд. и прикладн. мат. **3**, No. 2 (1997), 399–424.
14. В. Г. Казакевич, А. К. Ставрова, *Подгруппы, нормализуемые коммутантом подгруппы Леви.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **319** (2004), 199–215.
15. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М. (1975).
16. А. В. Степанов, *О нормальном строении полной линейной группы над кольцом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 166–182.
17. А. А. Суслин, *О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов.* — Изв. АН СССР, Сер. Мат. **141**, No. 2 (1977), 235–253.
18. E. Abe, *Chevalley groups over local rings.* — Tôhoku Math. J. (2) **21**, No. 3 (1969), 474–494.
19. E. Abe, *Chevalley groups over commutative rings.* — Proc. Conf. Radical Theory (Sendai, 1988), Uchida Rokakuho, Tokyo (1989), 1–23.
20. E. Abe, *Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Contemp. Math. **83** (1989), 1–17.
21. E. Abe, *Chevalley groups over commutative rings: normal subgroups and automorphisms.* — Contemp. Math. **184** (1995), 13–23.
22. E. Abe, J. Hurley, *Centers of Chevalley groups over commutative rings.* — Comm. Algebra **16**, No. 1 (1988), 57–74.

23. E. Abe, K. Suzuki, *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Tôhoku Math. J. **28**, No. 1 (1976), 185–198.
24. H. Azad, M. Barry, G. M. Seitz, *On the structure of parabolic subgroups.* — Comm. Algebra **18** (1990), 551–562.
25. A. Bak, *The stable structure of quadratic modules.* Thesis, Columbia Univ. (1969).
26. A. Bak, *Subgroups of the general linear group normalized by relative elementary groups.* — Lecture Notes Math., Springer, Berlin, vol. 967 (1982), 1–22.
27. A. Bak, *Nonabelian* K*-theory: The nilpotent class of* K_1 *and general stability.* — K-Theory **4** (1991), 363–397.
28. A. Bak, R. Hazrat, N. Vavilov, *Localization-completion, application to relative classical-like groups.* — J. Pure Appl. Algebra (2008).
29. A. Bak, N. Vavilov, *Normality for elementary subgroup functors.* — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **118**, No. 1 (1995), 35–47.
30. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloquium **7**, No. 2 (2000), 159–196.
31. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups* II. *Normal subgroups.* — Algebra Colloquium.
32. H. Bass, K*-theory and stable algebra.* — Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 22 (1964), 5–60.
33. H. Bass, *Unitary algebraic K-theory.* — Lecture Notes Math., Springer, Berlin, vol. 343 (1973), 57–265.
34. R. Carter, *Simple groups of Lie type.* Pure Appl. Math., vol. 28, John Wiley, London et al. (1972).
35. D. L. Costa, G. E. Keller, *The* $\mathrm{E}(2,A)$ *sections of* $\mathrm{SL}(2,A)$. — Ann. of Math. **134**, No. 1 (1991), 159–188.
36. D. L. Costa, G. E. Keller, *Radix redux: normal subgroups of symplectic groups.* — J. Reine Angew. Math. **427**, No. 1 (1991), 51–105.
37. D. L. Costa, G. E. Keller, *On the normal subgroups of* $\mathrm{G}_2(A)$. — Trans. Amer. Math. Soc. **351**, No. 12 (1999), 5051–5088.
38. M. Demazure, A. Grothendieck, *Schémas en groupes.* I, II, III. — Lecture Notes Math. Springer, Berlin (1971), vol. 151, 1–564; vol. 152, 1–654; vol. 153, 1–529.
39. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and* K*-theory.* Grundlehren Math. Wiss., vol. 291, Springer-Verlag, Berlin et al. (1989).
40. R. Hazrat, *Dimension theory and non-stable* K_1 *of quadratic module.* — K-Theory **27** (2002), 293–327.
41. R. Hazrat, N. Vavilov, K_1 *of Chevalley groups are nilpotent.* – J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 99–116.
42. R. Hazrat, N. Vavilov, *Bak's work on lower* K*-theory of rings* (to appear).
43. Li Fuan, Liu Mulan, *Generalized sandwich theorem.* — K-Theory **1** (1987), 171–184.
44. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés.* — Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **2** (1969), 1–62.
45. V. M. Petechuk, *Stability structure of linear group over rings.* — Mat. Studii **16**, No. 1 (2001), 13–24.
46. G. E. Roehrle, *On the structure of parabolic subgroups in algebraic groups.* — J. Algebra **157**, No. 1 (1993), 80–115.

47. A. Stavrova, *Normal structure of maximal parabolic subgroups in Chevalley groups over rings.* — Preprint POMI 10–07.2007, accepted to Algebra Colloquium.
48. M. R. Stein, *Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings.* — Amer. J. Math. **93**, No. 4 (1971), 965–1004.
49. A. Stepanov, N. Vavilov, *Decomposition of transvections: a theme with variations.* — K-Theory **19** (2000), 109–153.
50. K. Suzuki, *On normal subgroups of twisted Chevalley groups over local rings.* — Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku **13** (1977), 237–249.
51. K. Suzuki, *Normality of the elementary subgroups of twisted Chevalley groups over commutative rings.* — J. Algebra **175**, No. 3 (1995), 526–536.
52. G. Taddei, *Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau.* — Contemp. Math. **55**, Part II (1986), 693–710.
53. L. N. Vaserstein, *On the normal subgroups of the* GL_n *of a ring.* — Lecture Notes Math., Springer, Berlin, vol. 854 (1981), 454–465.
54. L. N. Vaserstein, *The subnormal structure of general linear groups.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **99** (1986), 425–431.
55. L. N. Vaserstein, *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Tôhoku Math. J. (2) **36**, No. 5 (1986), 219–230.
56. L. N. Vaserstein, *The subnormal structure of general linear groups over rings.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **108**, No. 2 (1990), 219–229.
57. L. N. Vaserstein, You Hong, *Normal subgroups of classical groups over rings.* — J. Pure Appl. Algebra **105**, No. 1 (1995), 93–106.
58. N. Vavilov, *A note on the subnormal structure of general linear groups.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **107**, No. 2 (1990), 193–196.
59. N. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* — Proc. Conf. Nonassociative Algebras and Related Topics (Hiroshima, 1990), World Sci. Publ., London et al. (1991), 219–335.
60. N. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rendiconti del Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **204**, No. 1 (2000), 201–250.
61. N. Vavilov, *An* A_3*-proof of structure theorems for Chevalley groups of types* E_6 *and* E_7. — Intern. J. Algebra Comput. **17**, No. 5–6 (2007), 1283–1298.
62. N. Vavilov, *Structure of exceptional groups over rings.* — Proc. 3rd Intern. Congress Algebra and Combinatorics (Beijing and Xian, 2007) (to appear).
63. N. A. Vavilov, E. B. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings.* I. *Elementary calculations.* — Acta Appl. Math. **45** (1996), 73–115.
64. J. S. Wilson, *The normal and subnormal structure of general linear groups.* — Proc. Cambridge Philos. Soc. **71** (1972), 163–177.
65. Zhang, Zuhong, *Stable sandwich classification theorem for classical-like groups.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. (2007) (to appear).

Vavilov N. A., Stavrova A. K. Basic reductions for the description of normal subgroups.

Classification of subgroups in a Chevalley group $G(\Phi, R)$ over a commutative ring R, normalised by the elementary subgroup $E(\Phi, R)$, is well known. However, for exceptional groups one cannot find in the available literature neither the parabolic reduction, nor the level reduction. This is due to the fact that the Abe–Suzuki–Vaserstein proof relied on localisation and reduction modulo Jacobson radical. Recently for the groups of types E_6, E_7 and F_4 the first-named author, M. Gavrilovich and S. Nikolenko proposed an even more straightforward geometric approach to the proof of structure theorems, similar to the one used for classical cases. In the present work we give still simpler proofs of two key auxiliary results of the geometric approach. First, we carry through the parabolic reduction in full generality: for all parabolic subgroups of all Chevalley groups of rank $\geqslant 2$. At that we succeeded in avoiding any reference to the structure of internal Chevalley modules, or explicit calculations of the centralisers of unipotent elements. Second, we prove the level reduction, also for the most general situation of double levels, which arise for multiply-laced root systems.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 июня 2007 г.