Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 349, 2007 г.

Н. А. Вавилов

О ПОДГРУППАХ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИХ SUBSYSTEM SUBGROUP

В настоящей работе мы *почти* завершаем доказательство описания подгрупп полной симплектической группы, $\overline{G}(\mathrm{C}_l, R) = \mathrm{GSp}(2l, R)$, содержащих элементарную подгруппу $E(\Delta, R)$ регулярно вложенной полупростой подгруппы, где Δ – подсистема корней в C_l.

Введение

Чтобы сформулировать основной результат настоящей работы, напомним основные относящиеся к делу обозначения, подробнее см. §2.

Пусть R – коммутативное кольцо, $G = \mathrm{GL}(n, R)$ – полная линейная группа степени n над R, $E(n, R)$ – ее элементарная подгруппа. В дальнейшем $n = 2l$, мы работаем с полной симплектической группой $\Gamma = \mathrm{GSp}(2l, R)$ и обозначаем через $\mathrm{Ep}(2l, R)$ ее элементарную подгруппу, порожденную элементарными симплектическими трансвекциями $T_{ij}(\xi)$, для всех $\xi \in R$, $i \neq j$, см. §2. Мы рассматриваем гиперболическое вложение

$$h : \mathrm{GL}(l, R) \longrightarrow \mathrm{GSp}(2l, R), \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^* \end{pmatrix},$$

отвечающее вложению систем корней $\mathrm{A}_{l-1} \leqslant \mathrm{C}_l$.

Нам будет удобно занумеровать множество индексов следующим образом: $I = \{1, \dots, l, -l, \dots, -1\}$. Пусть ν – отношение эквивалентности на I. Если i и j эквивалентны относительно ν, то мы пишем $i \overset{\nu}{\sim} j$ или просто $i \sim j$, если ясно, о какой эквивалентности идет речь. В дальнейшем мы будем рассматривать только *самосопряженные* отношения эквивалентности на множестве I, т.е.

Автор благодарит проекты РФФИ 01-01-00924 (СПбГУ), 00-01-00441 (ПОМИ РАН) и INTAS 00-566 за поддержку на заключительном этапе работы над статьей.

такие, для которых из того, что $i \sim j$ для некоторых $i, j \in I$, следует, что $-i \sim -j$. Для самосопряженного отношения эквивалентности ν каждому классу эквивалентности C с представителем i соответствует *сопряженный* класс эквивалентности $-C$ с представителем $-i$. Таким образом, все классы эквивалентности разбиваются на два типа: *самосопряженные*, для которых $-C = C$ и *несамосопряженные*, для которых $-C \cap C = \varnothing$. Ясно, что порядки сопряженных классов C и $-C$ равны, а порядки всех самосопряженных классов $C = -C$ четны. Пусть $C_1, -C_1, \dots, C_s, -C_s$ – все несамосопоряженные классы, а $C_{s+1}, \dots, C_t$ – самосопряженные. Положим $n_i = |C_i|$ для $1 \leqslant i \leqslant s$ и $l_i = |C_i|/2$ для $s+1 \leqslant i \leqslant t$. Тогда $n_1 + \dots + n_s + l_{s+1} + \dots + l_t = l$. Обозначим через $h(\nu)$ наименьший из порядков классов. Условие $h(\nu) \geqslant 3$ означает, что $n_1, \dots, n_s \geqslant 3$ и $l_{s+1}, \dots, l_t \geqslant 2$.

С отношением эквивалентности ν естественно связаны несколько подгрупп в $\mathrm{GSp}(2l, R)$, в частности, элементарная подгруппа $E_\Gamma(\nu) \leqslant \mathrm{Ep}(2l, R)$, порожденная всеми элементарными симплектическими трансвекциями вида $T_{ij}(\xi)$, $\xi \in R$, $i \sim j$, $i \neq j$. Легко видеть, что

$$E_\Gamma(\nu) = E(n_1, R) \times E(n_s, R) \times \mathrm{Ep}(2l_{s+1}, R) \times \dots \times \mathrm{Ep}(2l_t, R),$$

где группы $E(l_i, R)$ рассматриваются в гиперболических вложениях. С точки зрения теории алгебраических групп это в точности элементарная группа Шевалле $E(\Delta, R)$ для подсистемы

$$\Delta = \mathrm{A}_{n_1-1} + \dots + \mathrm{A}_{n_s-1} + \mathrm{C}_{l_{s+1}} + \dots + \mathrm{C}_{l_t},$$

условие $h(\nu) \geqslant 3$ означает, что ранги всех слагаемых здесь $\geqslant 2$.

Следующий результат доказан в главе V диссертации автора [10] и анонсирован без доказательства в работах [11, 13, 73]. В статье [14] приведены доказательства всех используемых в нем *вспомогательных* результатов, но не центральный фрагмент извлечения элементарных симплектических трансвекций. Ясно, что мы можем получать надгруппы $E_\Gamma(\nu)$, добавляя *какие-то* новые элементарные симплектические транвекции $T_{ij}(\xi)$ и *какие-то* элементы, нормализующие получившуюся подгруппу. В настоящей работе мы *почти* завершаем доказательство следующего результата, утверждающего, что при $h(\nu) \geqslant 3$ никаких других содержащих $E_\Gamma(\nu)$ подгрупп и не существует.

Теорема. *Пусть R – коммутативное кольцо такое, что $2 \in R^*$, ν – самосопряженное отношение эквивалентности на множестве индексов I такое, что $h(\nu) \geqslant 3$, а H – подгруппа полной симплектической группы $\Gamma = \mathrm{GSp}(2l, R)$, содержащая $E_\Gamma(\nu)$. Тогда H нормализует подгруппу, порожденную всеми элементарными симплектическими трансвекциями $T_{ij}(\xi) \in H$.*

С технической точки зрения здесь утверждается следующее: для любого $g \in H$, любого $x \in E_\Gamma(\nu)$ и любых $i \neq j$ элементарная симплектическая трансвекция $T_{ij}((gxg^{-1})_{ij})$ принадлежит H. Это то, что в работах [5, 13, 73] называется ИЗВЛЕЧЕНИЕ ТРАНСВЕКЦИЙ. На вид это чуть слабее, чем то, что утверждается в теореме, но с учетом того, что группа $E_\Gamma(\nu)$ совершенна, это в точности то же самое.

Если воспользоваться введенным Зеноном Боревичем языком сетевых подгрупп, см. [1, 2, 5], эта теорема означает в точности, что существует единственная симплектическая D-сеть идеалов σ в R такая, что

$$E_\Gamma(\sigma) \leqslant H \leqslant N_\Gamma(\sigma).$$

В действительности, здесь мы изложим лишь доказательство этого результата при дополнительном предположении, что подгруппа H содержит не элементарную подгруппу $E_\Gamma(\nu)$, а подгруппу $\widetilde{E}_\Gamma(\nu)$, порожденную $E_\Gamma(\nu)$ и всеми длинными корневыми отражениями $D_i(-1) = e - 2e_{ii} - 2e_{-i,-i}$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Это предположение автоматически выполнено, например, если отношение эквивалентности ν содержит только самосопряженные классы, иными словами, когда

$$\widetilde{E}_\Gamma(\nu) = E_\Gamma(\nu) = \mathrm{Ep}(2l_1, R) \times \ldots \times \mathrm{Ep}(2l_t, R).$$

Доказательство этой теоремы в полной общности, основанное на использовании коротких корневых унипотентов, настолько технически сложно, что по причинам, которые объясняются в §§1 и 6, в настоящее время его публикация не имеет никакого смысла, так как оно мало отличается по длине от *настоящего* окончательного результата, в котором не предполагается обратимость 2, а ответ дается не в терминах идеалов, а в терминах *форменных* идеалов.

Заметим, кстати, что *формально* эта теорема является новой даже для поля, хотя, конечно, в этом случае она легко вытекает из результатов Франца Тиммесфельда и Ани Штайнбах по геометрии абстрактных корневых подгрупп [67–70, 62].

§1. Анамнез

Напомним, что для полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, R)$ над коммутативным кольцом R аналогичный результат с той же оценкой $h(\nu) \geqslant 3$ доказан в работах Зенона Боревича и автора [4–6]. В работах тех же авторов, Игоря Голубчика и Алексея Степанова [3, 8, 9, 26, 28, 45, 64, 65, 73] можно найти другие доказательства этого результата и некоммутативные обобщения. В работах [37, 38] Владимир Койбаев выяснил, как модифицируется ответ, если допустить здесь наличие блоков размера 2 (разумеется, для этого случая аналогичный результат можно получить лишь для нульмерных и некоторых очень специальных одномерных колец).

С другой стороны, аналогичный результат для расщепимой ортогональной группы $\mathrm{SO}(n, R)$, также в предположении $2 \in R^*$, – и при чуть более сильных предположениях относительно ν, заведомо выполненных, если $h(\nu) \geqslant 5$, – также анонсирован в [11, 13, 73] и полностью доказан в работах автора [12, 16]. Дополнительные ограничения на ν в ортогональном случае связаны с исключительным поведением ортогональных групп маленьких рангов: система D_2 приводима, а B_3 и D_4 скручиваются до G_2, с чем связано наличие в этих случаях исключительных надгрупп типа G_2 и B_3 у подгрупп $E(3, R) < \mathrm{SO}(7, R)$ и $E(4, R) < \mathrm{SO}(8, R)$ в гиперболических вложениях. Впрочем, для надгрупп $\mathrm{GL}(3, R)$ и $\mathrm{GL}(4, R)$ эти исключения не возникают [40].

Лишь совсем недавно в работе [27] надгруппы в исключительных случаях были описаны для произвольного коммутативного кольца. Из этого описания, в частности, вытекает, что в случае поля эти исключения являются *по существу* единственными. С другой стороны, уже для надгрупп $E(4, R)$ в гиперболическом вложении полный ответ настолько сложен, что пытаться формулировать его в общем случае не имеет никакого смысла – формулировка будет длиннее, чем доказательство.

Настоящая работа воспроизводит часть §§1, 4 и 5 главы V диссертации автора [10], относящуюся к симплектической группе. Как уже упоминалось, основной результат этой главы, теорема 10, был анонсирован в [11, 13, 73], но его полное доказательство для симплектического случая никогда не публиковалось –

и сейчас я постараюсь объяснить, почему.

В момент написания текста [10] я располагал *четырьмя* различными доказательствами теоремы (или чуть более слабых результатов). Эти доказательства были основаны на вычислениях с четырьмя различными типами элементов, а именно,

- длинными корневыми унипотентами $gT_{i,-i}(\xi)g^{-1}$,
- короткими корневыми унипотентами $gT_{ij}(\xi)g^{-1}$, $i \neq \pm j$,
- длинными корневыми инволюциями $gD_i(-1)g^{-1}$,
- короткими корневыми инволюциями $gD_{ij}(-1)g^{-1}$, $i \neq \pm j$,

где $g \in \mathrm{GSp}(2l, R)$. Однако, ни одно из этих доказательств не казалось мне в то время вполне удовлетворительным по следующим причинам.

• Доказательство, использующее *длинные* корневые унипотенты, *повторяющее* доказательство из [5], не использует предположения $2 \in R^*$, но оно работает лишь для разбиения на самосопряженные классы. В случае несамосопряженных классов группа $E_\Gamma(\nu)$ не порождается содержащимися в ней длинными корневыми унипотентами, так что обойтись только ими в доказательстве просто невозможно.

• Доказательство, использующее *короткие* корневые унипотенты, *подражающее* вычислениям из [5] в симплектическом случае, было единственным доказательством, которое доказывало сформулированную выше теорему в полной общности. Однако, первоначальная версия этого доказательства была настолько технична, что меня травмировала идея написания нескольких десятков страниц стандартных вычислений в виде, пригодном для публикации. Только позже я заметил, что применение кратного коммутирования делает вторую половину доказательства из [5] вовсе не нужной, так как сравнивая включения, доказанные в первой части, для самой матрицы $g \in H$ с такими же включениями для всевозможных корневых элементов $gt_{ij}(\xi)g^{-1} \in H$, мы можем получить все необходимые включения. Для GL_n это более цивилизованное доказательство изложено в [73] и [64]. Для других классических групп эта идея позволила сократить первоначальное доказательство раза в четыре, для SO_n это в точности доказательство, изложенное в §4 работы [16].

• Содержащееся в [10] доказательство, использующее *длинные* корневые инволюции, которое мы воспроизводим в настоящей статье, работает в предположении, что H содержит не только подгруппу $E_\Gamma(\nu)$, а какую-то содержащую ее подгруппу, порожденную длинными корневыми инволюциями – сама $E_\Gamma(\nu)$ порождается ими только для разбиения на самосопряженные блоки. Однако, даже в этом случае оно использует условие $2 \in R^*$, которое как раз в этом случае является излишним!

• Доказательство, использующее *короткие* корневые инволюции, почти так же сложно технически, как и доказательство, использующее короткие корневые унипотенты, и снова самым существенным образом использует условие $2 \in R^*$ даже в тех случаях, когда оно является излишним.

В то время я считал, что предположение $2 \in R^*$ в доказательстве теоремы в моей диссертации связано не с существом дела, а с методом доказательства. Поскольку снять его в общем случае не удавалось, а публиковать длинное доказательство того, что мне казалось незаконченным результатом, не хотелось, я опубликовал в [14] общую для всех четырех подходов часть доказательства, не зависящую от условия $2 \in R^*$, и надолго потерял интерес к этой задаче.

Много позже, уже в контексте теории Бака [47, 48, 52, 56] я заметил, что предположение $2 \in R^*$ здесь связано не с методом доказательства, а с существом дела, *если* формулировать стандартный ответ в той форме, как я это делал в 1980-е годы. А именно, в случае, когда $2 \notin R^*$ при любом $h(\nu)$ существуют *очевидные* контр-примеры к стандартному описанию и *фактически* такие примеры были приведены в работе Абе и Судзуки [46].

Вот такой пример. Пусть $I \trianglelefteq R$ – идеал кольца R. Обозначим через I_2 – R-подмодуль, порожденный ξ^2 и 2ξ для всех $\xi \in I$. С точки зрения теории Бака I_2 – это в точности минимальный относительный форменный параметр $\Gamma_{\min}$. Рассмотрим подгруппу H, порожденную

$$\begin{aligned} H = \big\langle T_{ij}(\xi), \quad \xi \in R, \quad i \neq \pm j, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_j;& \\ T_{ij}(\xi), \quad \xi \in I, \quad i \neq \pm j, \quad \varepsilon_i = -\varepsilon_j;& \\ T_{i,-i}(\xi), \quad \xi \in I_2, \quad i = 1, \dots, -1\big\rangle.& \end{aligned}$$

Эта подгруппа содержит $E(l, R)$ в гиперболическом вложении, но при $I_2 \neq I$ не является стандартной. Разумеется, в [46] приводился контр-пример к стандартному описанию нормальных подгрупп и поэтому рассматривалась не эта подгруппа, а нормальное замыкание $\langle T_{ij}(\xi), \xi \in I, i \neq \pm j\rangle$ в $\mathrm{Ep}(2l, R)$, но суть от этого не меняется. Еще более суровые отклонения от стандартности возникают, если рассматривать блоки размера 2, см. [37, 38, 54].

Поскольку полный перенос этой теоремы на унитарные группы представляет собой большую самостоятельную задачу, я решил опубликовать доказательство для симплектического случая as is, примерно в том виде, как оно изложено в [10]. Тем самым, настоящая работа завершает публикацию полных доказательств *всех* результатов [10] – не прошло и 20 лет!

§2. Симплектическая группа

В настоящем параграфе мы коротко напомним основные обозначения, относящиеся непосредственно к симплектическому случаю, все нужные нам результаты, относящиеся к этому случаю, можно найти в [13, 22, 24, 39, 41, 54, 55, 66, 71, 74]. Симплектические группы являются односвязными группами Шевалле типа C_l и с этой точки зрения обсуждаются в интересующих нас аспектах, например, в [7, 72, 73]. С другой стороны, симплектические группы возникают как весьма специальный пример баковских гиперболических унитарных групп $U^{\lambda}(2l, R, \Lambda)$ над форменным кольцом (R, Λ), получающийся в случае, когда инволюция на R тривиальна, $\lambda = -1$, а $\Lambda = \Lambda_{\max}$, поэтому к ним применимы все результаты работ [29–36, 47, 48, 52, 53, 57, 61], причем доказательства для симплектических групп обычно требуют лишь небольшой части вычислений, необходимых в общем случае.

Пусть R – коммутативное кольцо, R^* – его мультипликативная группа, $G = \mathrm{GL}(n, K)$ – полная линейная группа степени n над R. Как обычно, для матрицы $a \in G$ через a_{ij} обозначается ее коэффициент, стоящий на месте (i, j), т.е. $a = (a_{ij})$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. Через $a^{-1} = (a'_{ij})$ обозначается обратная к a матрица, а через a^t – транспонированная. Как обычно, e – единичная матрица порядка n, а e_{ij} – стандартная матричная единица, т.е. матрица, у которой в позиции (i, j) стоит 1 и нули во всех остальных позициях. *Элементарными трасвекциями* в G называются матрицы вида $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$, $\xi \in R$, $i \neq j$. Подгруппа в G, порожденная всеми элементарными трансвекциями, называется *элементарной подгруппой* и обозначается $E(n, R)$.

В настоящей статье мы всегда имеем дело со случаем четного $n = 2l$. Нам будет удобно следуя Роджеру Картеру занумеровать строки и столбцы матриц из G следующим образом: $1, \dots, l, -l, \dots, -1$. В дальнейшем через ε_i обозначается знак индекса i. Таким образом, $\varepsilon_i = +1$, если $i = 1, \dots, l$ и $\varepsilon_i = -1$ в противном случае. Точно такая же нумерация применяется ко всем другим встречающимся объектам. Так, базис модуля $V = R^{2l}$ нумеруется как $e_1, \dots, e_l, e_{-l}, \dots, e_{-1}$, а базис модуля $V^* = {}^{2l}R$ – как $e^1, \dots, e^l, e^{-l}, \dots, e^{-1}$.

Обозначим через $\mathrm{sdiag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ матрицу, у которой на побочной диагонали в направлении с Северо-Востока на Юго-Запад стоят $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и нули во всех остальных местах, и положим $F = F_n = \mathrm{sdiag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$, где как количество 1, так и количество -1 равняется l. Иначе говоря, элементы матрицы $F = (F_{ij})$ определяются условием $F_{ij} = \varepsilon_i \delta_{i,-j}$.

Определим на V симплектическое скалярное произведение B с матрицей Грама $F = F_{2l}$ посредством $B(e_i, e_j) = \varepsilon_i \delta_{i,-j}$. По определению *симплектическая группа* $\Gamma = \mathrm{Sp}(2l, R)$ состоит из тех матриц g из полной линейной группы $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(2l, R)$, которые сохраняют скалярное произведение, $B(gu, gv) = B(u, v)$. Иными словами, матрица $g = (g_{ij}) \in \mathrm{SL}(2l, R)$ в том и только том случае принадлежит $\mathrm{Sp}(2l, R)$, когда $gFg^t = F$ или, что то же самое, когда

$$g'_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j g_{-j,-i} \quad \text{для всех } i, j = 1, \dots, -1,$$

С точки зрения теории алгебраических групп группа $\mathrm{Sp}(2l, R)$ является группой Шевалле типа C_l (теорема Ри).

Кроме обычных симплектических групп рассматриваются также *полные симплектические группы* $\mathrm{GSp}(2l, R)$, сохраняющие форму B в смысле подобия, $B(gu, gv) = \lambda B(u, v)$. Иначе говоря, матрицы из $\mathrm{GSp}(2l, R)$ удовлетворяют соотношению $gFg^t = \lambda F$ для подходящего *мультипликатора* $\lambda = \lambda(g) \in R^*$. Таким образом, для матричных элементов матриц из группы $\mathrm{GSp}(2l, R)$ выполняется следующее условие:

$$\lambda(g) g'_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j g_{-j,-i} \quad \text{для всех } i, j = 1, \dots, -1,$$

Как обычно, (элементарной) *симплектической трансвекцией* называется одна из матриц $T_{ij}(\xi)$, $\xi \in R$, $i \neq j$, вида

$$T_{ij}(\xi) = T_{-j,-i}(-\xi) = e + \xi e_{ij} - \varepsilon_i \varepsilon_j \xi e_{-j,-i}, \quad i \neq \pm j,$$

или вида

$$T_{i,-i}(\xi) = e + \xi e_{i,-i}, \quad j = -i.$$

С точки зрения теории групп Шевалле эти элементы являются, соответственно, короткими и длинными (элементарными) *корневыми элементами* группы Γ.

Соотношения между симплектическими трансвекциями являются частными случаями *коммутационной формулы Шевалле* (см., *например* [44]), в явном виде они приведены, *например*, в [13, 22, 41]. Основную роль в настоящей работе играет *элементарная симплектическая группа* $\mathrm{Ep}(2l, R)$, т.е. подгруппа в Γ, порожденная всеми элементарными симплектическими трансвекциями вида $T_{ij}(\xi)$, $\xi \in R$, $i \neq j$.

Многие рассуждения настоящей статьи самым существенным образом зависят от следующих утверждений. Первые из них легко вытекают из коммутационной формулы Шевалле и классически известны. Другие два – нормальность элементарной подгруппы или, что то же самое, ее независимость от выбора базиса – это соответственно теорема Суслина в линейном случае и теорема Копейко—Таддеи в симплектическом [39, 66] (см. также [52, 55, 58, 64, 71, 72] по поводу других доказательств и дальнейших ссылок).

• Пусть R – коммутативное кольцо, а $n \geqslant 3$. Тогда элементарная группа $E(n, R)$ совершенна.

• Пусть R – коммутативное кольцо, а $l \geqslant 2$, причем для $l = 2$ предположим дополнительно, что у R нет полей вычетов из 2-х элементов. Тогда элементарная симплектическая группа $\mathrm{Ep}(2l, R)$ совершенна.

• Пусть R – коммутативное кольцо, а $n \geqslant 3$. Тогда элементарная группа $E(n, R)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n, R)$.

• Пусть R – коммутативное кольцо. Тогда для любого $l \geqslant 2$ элементарная группа $\mathrm{Ep}(2l, R)$ нормальна в $\mathrm{GSp}(2l, R)$.

Именно необходимость использовать эти факты (и вычисления, возникающие при их доказательстве!) объясняет ограничения на размер блоков в нашей теореме.

Обозначим через $W = W(\mathrm{C}_l) \cong \mathrm{Oct}_l$ группу Вейля группы Γ. Пусть, как всегда, $n = 2l$, а индексы занумерованы как обычно: $1, \dots, l, -l, \dots, -1$. Напомним, что октаэдральная группа Oct_l, состоит из всех перестановок из симметрической группы S_{2l}, коммутирующих со сменой знака, т.е. таких, что $w(-i) = -w(i)$ для всех i. Для перестановки $w \in W$ мы будем той же буквой обозначать и любую симплектическую мономиальную матрицу вида $\sum \lambda_i e_{w(i),i}$, где $\lambda_i \in R^*$.

Приводимое в настоящей работе доказательство основано на использовании содержащихся в $\mathrm{Ep}(2l, R)$ полупростых элементов. А именно, для любых $i = 1, \dots, -1$, $\varepsilon \in R^*$, мы обозначаем через $D_i(\varepsilon)$ *длинный полупростой корневой элемент*

$$D_i(\varepsilon) = d_{i,-i}(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii} + (\varepsilon^{-1} - 1)e_{-i,-i},$$

Если, кроме того, $i \neq \pm j$, то $D_{ij}(\varepsilon)$ обозначает *короткий полупростой корневой элемент*

$$D_{ij}(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii} + (\varepsilon^{-1} - 1)e_{jj} + (\varepsilon^{-1} - 1)e_{-i,-i} + (\varepsilon - 1)e_{-j,-j}.$$

Как очень хорошо известно, матрицы $D_i(\varepsilon)$ и $D_{ij}(\varepsilon)$ выражаются как произведения элементарных симплектических трансвекций и, тем самым, принадлежат $\mathrm{Ep}(2l, R)$.

Как правило, мы используем только длинные корневые инволюции $D_i(-1)$ и короткие корневые инволюции $D_{ij}(-1)$.

§3. Вспомогательные утверждения

В настоящем параграфе мы соберем несколько вспомогательных утверждений, которые либо проверяются бесхитростным вычислением, либо рутинны, в том смысле, что доказательства аналогичных утверждений десятки раз встречались в литературе. Мы продолжаем предполагать, что R – коммутативное кольцо такое, что $2 \in R^*$, а $\Gamma = \mathrm{GSp}(2l, R)$. Следующее утверждение – это предложение 1 работы [14].

Лемма 1. *Для любой подгруппы H в Γ, содержащей группу $E_\Gamma(\nu)$ для такого самосопряженного отношения эквивалентности ν на I, что $h(\nu) \geqslant 2$, существует единственная наибольшая симплектическая сеть σ такая, что $E_\Gamma(\sigma) \leqslant H$.*

Достаточно положить $\sigma_{ij} = R$ при $i \sim j$ и $\sigma_{ij} = \{\xi \in R \mid T_{ij}(\xi) \in H\}$, при $i \not\sim j$. Стандартные вычисления, не использующие ничего, кроме коммутационной формулы Шевалле, показывают, что все σ_{ij} являются идеалами в R. Заметим, впрочем, что для случая $i = -j$ при этом приходится использовать элементы $T_{ik}(1/2)$. Явным образом все эти вычисления приведены в §7 работы [14].

То, что получающаяся при этом система идеалов действительно является сетью, в гораздо большей общности доказано в [7]. Конкретно для симплектической группы это вычисление воспроизведено в [14], при этом доказательства включений $\sigma_{ij}\sigma_{j,-i} \leqslant \sigma_{i,-i}$ и $\sigma_{ij}\sigma_{j,-j} \leqslant \sigma_{i,-j}$ также используют обратимость 2. Обратите внимание, что для разбиений на самосопряженные классы здесь $\sigma_{i,-i} = R$ для всех i, так что для этого случая утверждение леммы выполняется и без предположения $2 \in R^*$.

Следующее утверждение – это предложение 2 работы [14].

Лемма 2. *Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ и $\tau = \tau_{ij}$ – две симплектические сети идеалов над R, причем $h(\sigma) \geqslant 3$. Для того, чтобы для матрицы $g = (g_{ij}) \in \Gamma$ с обратной матрицей $g^{-1} = (g'_{ij})$ выполнялось включение $g\Gamma(\sigma)g^{-1} \leqslant \Gamma(\tau)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого набора индексов i, j, r, s выполнялось включение*

$$g_{ir}\sigma_{rs}g'_{rs} \subseteq z\tau_{ij}.$$

Эти условия для всех наборов индексов эквивалентны тем же условиям для тех наборов, в которых $r \neq \pm s$.

Также и эта лемма доказывается прямым матричным вычислением, все основные моменты которого многократно встречались в литературе. Для симплектической группы все детали явным образом прописаны в [14].

Любой элемент группы $\mathrm{Sp}(2l, R)$, сопряженный с $D_i(-1)$, называется длинной корневой инволюцией, а сопряженный с $D_{ij}(-1)$ – короткой корневой инволюцией. Наиболее важными примерами корневых инволюций, с точки зрения дальнейшего, являются $D_i(-1)T_{ih}(\xi)$, $h \neq \pm i$, и $D_{ij}(-1)T_{ih}(\xi)$, $h \neq \pm i, \pm j$. Корневые инволюции в симплектическом случае обладают точно такими же свойствами, как корневые унипотенты в ортогональном.

Роль корневых инволюций определяется тем, что они порождают подгруппы $E_\Gamma(\sigma)$. Следующие два утверждения играют ту же роль, что лемма 3 в работе [16].

Лемма 3. *При $h(\sigma) \geqslant 3$ группа $E_\Gamma(\sigma)$ порождается содержащимися в ней короткими корневыми унипотентами.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\xi \in \sigma_{i,-i}$. Возьмем $j \geqslant i$, $j \neq \pm i$. Тогда $T_{i,-i}(\xi) = [T_{ij}(1/2), T_{j,-i}(\xi)]$, причем оба коротких корневых унипотента в правой части принадлежат $E_\Gamma(\sigma)$.

Лемма 4. *При $h(\sigma) \geqslant 3$ группа $\widetilde{E}_\Gamma(\sigma)$ порождается содержащимися в $\Gamma(\sigma)$ длинными корневыми инволюциями.*

Доказательство. Так как произведение длинных корневых инволюций $D_i(-1)$ и $D_i(-1)T_{ij}(\xi)$, $\xi \in \sigma_{ij}$, $j \neq \pm i$, есть короткий корневой элемент $T_{ij}(\xi)$, то подгруппа, порожденная всеми лежащими в $\Gamma(\sigma)$ длинными корневыми инволюциями, содержит все лежащие в $\Gamma(\sigma)$ короткие корневые элементы, а вместе с тем, по предыдущей лемме, и группу $E_\Gamma(\sigma)$.

Установим некоторые простейшие зависимости между матричными коэффициентами корневых инволюций. Следующие результаты, являющиеся аналогами лемм 8–10 работы [16], проверяются непосредственным вычислением. В них b обозначает произвольную корневую инволюцию в $\mathrm{Sp}(2l, R)$, длинную или короткую.

Лемма 5. *При всех $i \neq j$ имеет место равенство $b_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j b_{-j,-i}$. В частности, $b_{i,-i} = 0$.*

Доказательство. Первая формула вытекает из того, что корневая инволюция действительно является инволюцией, а вторая получается из равенства $b_{i,-i} = -b_{i,-i}$ и обратимости 2.

Лемма 6. *Для любого длинного отражения b и любых четырех попарно различных индексов i, j, h, k имеет место равенство*

$$b_{ih}b_{jk} - b_{ik}b_{jh} = -\varepsilon_h\varepsilon_j b_{i,-j}b_{-h,k} = \varepsilon_k\varepsilon_j b_{i,-j}b_{-k,h}.$$

Лемма 7. *Для любого длинного отражения b и любых трех попарно различных индексов i, j, h имеет место равенство*

$$b_{ij} = b_{ij}b_{hh} - b_{ih}b_{hj} - b_{i,-h}b_{-h,j}.$$

§4. Извлечение корневых унипотентов

В настоящем параграфе мы устанавливаем несколько технических утверждений об извлечении трансвекций в подгруппе $H \geqslant E_\Gamma(\nu)$. Следующие две леммы проверяются непосредственным вычислением, причем вычислением, аналогичным тем, которые десятки раз проводились в работах [1–18]. Это в точности леммы 2 и 3 работы [14], и мы не будем воспроизводить их доказательства, которые, к тому же, ничем не отличаются от доказательств лемм 4 и 5 работы [12].

Лемма 8. *Пусть* $h(\nu) \geqslant 3$, *а в матрице* $g \in H$ *имеем* $g_{ij} = \delta_{ij}$ *для всех* $i \neq -r$, $j \neq r$. *Тогда* $g_{ir} \in \sigma_{ir}$ *для всех* i.

Лемма 9. *Пусть* $h(\nu) \geqslant 3$, *а в матрице* $g \in H$ *строка с номером* r *совпадает с соответствующей строкой единичной матрицы, т.е.* $g_{rj} = \delta_{rj}$ *для всех* j. *Тогда* $g_{is} \in \sigma_{is}$ *для всех* $i \neq -r$ *и всех* $s \sim r$, $s \neq r$.

Сформулируем теперь два ключевых технических утверждения об извлечении симплектических трансвекций, см. [14], лемма 4 и лемма 5. Рассматриваемые в них классы элементов могут на первый взгляд показаться надуманными, однако в действительности речь здесь идет о двух случаях параболической редукции, так что эти леммы естественно возникают как в приведенном ниже доказательстве теоремы, основанном на использовании отражений, так и в доказательствах, использующих корневые унипотенты. В этих леммах мы рассматриваем подгруппу $H \geqslant E_\Gamma(\nu)$ и обозначаем через σ ассоциированную с ней сеть, построенную в лемме 1. Для любых двух индексов $p \neq \pm q$ определим подгруппу

$$Y_{pq} = \{g \in \mathrm{GSp}(2l, R) \mid g_{ij} = \delta_{ij}, \quad i \neq p, -q, \quad j \neq q, -p\}.$$

Аналогично, для любых трех *эквивалентных* индексов h, p, q таких, что индексы $\pm h, \pm p, \pm q$ попарно различны, определим подгруппу

$$Y_{hpq} = \{g \in \mathrm{GSp}(2l, R) \mid g_{ij} = \delta_{ij}, \quad i \neq h, -p, -q, \quad j \neq -h, p, q,$$
$$g_{hh} = 1, \ g_{-p,h} = g_{-q,h} = 0\}.$$

Изобразим для примера подгруппу $Y_{-1,2} \leqslant \mathrm{GSp}(6, R)$ и $Y_{-1,2,3} \leqslant \mathrm{GSp}(8, R)$

$$Y_{-1,2} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

$$Y_{-1,2,3}=\begin{pmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & *\\ * & * & * & * & * & * & * & *\\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Как уже отмечалось, следующие две более специальные леммы также доказаны в [14]. Однако, так как статья [14] не переводилась на английский, а доказательства технически уже заметно сложнее, чем доказательства лемм 3–9, мы воспроизведем здесь все необходимые вычисления[1].

Лемма 10. *Пусть $h(\nu)\geqslant 3$, а матрица $g\in H\cap Y_{pq}$ для некоторых $p\neq\pm q$. Тогда $g_{hp}\in\sigma_{hp}$ для всех h.*

Доказательство. Фиксируем вначале некоторое $h\not\sim q$, выберем $k\sim h$, $k\neq\pm h$, и рассмотрим коммутатор $b=[a^{-1},T_{kh}(1)]$. Прямым вычислением, использующим симплектичность матрицы a, можно проверить, что

$$b=T_{kq}(a_{hq})T_{k,-p}(a_{h,-p})T_{ph}(a_{hk})T_{-q,h}(a_{-q,k}).$$

Если в классе, в котором лежит q, найдется такое s, что $s\neq\pm p$, $\pm q$, то к матрице

$$c=[b,T_{qs}(1)]=T_{ks}(a_{hq})T_{-h,s}(\pm a_{-q,k})$$

можно применить лемму 8 и заключить, что $a_{hq}\in\sigma_{ks}=\sigma_{hq}$. Разумеется, точно так же рассматривается и случай, когда в классе, в котором лежит h, найдется элемент, отличный от $\pm h,\pm k$.

Для завершения анализа случая $h\not\sim q$ нам нужно еще рассмотреть ситуацию, когда класс q состоит ровно из четырех элементов $\pm q,\pm p$, а класс h состоит ровно из четырех элементов

[1] Кроме того, в доказательстве леммы 4 работы [14] по недосмотру пропущен первый абзац и в леммах 4 и 5 всюду не перечеркнуты знаки $\sim$, так что восстановить произведенные там вычисления, не обращаясь к [10] или не производя детального анализа доказательства леммы 8 работы [12], все равно невозможно. Про мелкие опечатки, типа превращения *при вписывании формул от руки* кое-где h в k, а p в q, не говорим. Здесь все эти опечатки исправлены.

$\pm h, \pm k$. В ортогональном случае расцепить трансвекции $T_{kq}(a_{hq})$ и $T_{ph}(a_{hk})$ было *невозможно*, из-за существования исключительного вложения $\mathrm{Spin}(7,R) \longrightarrow \mathrm{SO}(8,R)$, но в симплектическом случае в нашем распоряжении появляются дополнительные корни. Рассмотрим коммутатор $c = [b, T_{q,-q}(1)] \in H$. Ясно, что

$$c = T_{k,-q}(a_{hq})T_{-h,-q}(a_{-q,k})T_{k,-k}(*)T_{-h,h}(*),$$

и так как $-k \sim k$, $-h \sim h$, то вместе с тем группе H принадлежит и матрица $d = T_{k,-q}(a_{hq})T_{-h,-q}(a_{-q,k})$. Осталось прокоммутировать d с $T_{-k,k}(1)$, чтобы убедиться в том, что $T_{-h,-q}(a_{hq})T_{-q,q}(*)$ принадлежит H. Так как $-q \sim q$, то $a_{hq} \in \sigma_{-h,-q} = \sigma_{hq}$, что заканчивает доказательство леммы для случая $h \not\sim q$.

Пусть, наконец, $h \sim -q$. Это значит, что класс, в котором лежит q, несамосопряжен. Пусть s – какой-нибудь индекс из этого класса, отличный от $q, -p$. Если $-p \sim q$, то доказывать нечего, достаточно просто умножить a слева на $T_{qs}(-a_{sq})T_{-p,s}(-a_{s,-p})$, после чего s-я строка матрицы a совпадает с s-й строкой единичной матрицы, и мы можем сослаться на лемму 9. Пусть поэтому $-q \not\sim p$. В этом случае, умножая a слева на $T_{ps}(-a_{ps})$ и справа на $T_{sq}(-a_{sq})$, можно считать, что $a_{ps} = a_{sq} = 0$. Теперь рассмотрение матрицы $b = aT_{sq}(1)a^{-1}T_{sq}(\xi) \in H$ приводит к включениям $a_{-q,s} \in \sigma_{-q,s}$ и $a_{s,-p} \in \sigma_{s,-p}$. Осталось умножить a слева на $T_{-q,s}(-a_{-q,s})$ и справа на $T_{s,-p}(-a_{s,-p})$, чтобы получить матрицу, в которой s-я строка и s-й столбец совпадают с соответствующими строкой и столбцом единичной матрицы, и применить к получившейся матрице лемму 9. Это завершает доказательство леммы.

Лемма 11. *Пусть $h(\nu) \geqslant 3$, $g \in H \cap Y_{hpq}$. Тогда $g_{ip}, g_{iq} \in \sigma_{ih}$ для всех $i \sim h$.*

Доказательство. Если h, p, q принадлежат самосопряженному классу, то доказывать нечего, так как мы можем просто сослаться на лемму 9. Пусть поэтому эти индексы лежат в несамосопряженном классе. Заметим, прежде всего, что по лемме 9 имеем $a_{s,-h} \in \sigma_{s,-h}$ для всех $s \sim h$, $s \neq h$. Если найдется такое $s \sim h$, что $s \neq h, p, q$, то полагая $b = aT_{sp}(-a_{sp})T_{sq}(-a_{sq})T_{s,-h}(-a_{s,-h}) \in H$, мы найдем матрицу $b \in H$, у которой s-я строка такая же, как s-я строка единичной матрицы. По лемме 9 имеем $b_{ip}, b_{iq} \in \sigma_{ih}$. Так как $b_{ip} = a_{ip}$, $b_{iq} = a_{iq}$ при $i \sim h$, $i \neq -p, -q$, то $a_{ip}, a_{iq} \in \sigma_{ih}$ для всех таких i. Теперь, отбрасывая из $b_{-p,p}, b_{-p,q}, b_{-q,p}, b_{-q,q}$ те слагаемые, про которые уже известно, что они принадлежат $\sigma_{-h,h}$, получаем, что и $a_{-p,p}, a_{-p,q}, a_{-q,p}, a_{-q,q} \in \sigma_{-h,h}$.

Будем поэтому считать, что класс, которому принадлежит h, состоит ровно из трех элементов h, p, q. Умножая a справа на матрицу

$$T_{hp}(-a_{hp})T_{hq}(-a_{hq})T_{h,-q}(-a_{h,-q})T_{h,-p}(-a_{h,-p}),$$

которая принадлежит H по лемме 9, мы можем считать, что в матрице a все элементы a_{hj}, $j = \pm p, \pm q$, нулевые. Заметим теперь, что подматрица матрицы a, стоящая на пересечении строк и столбцов с номерами p, q, обратима, так что ее строки и столбцы унимодулярны. Рассмотрим теперь корневой унипотент $b = aT_{pq}(1)a^{-1} \in H$. Так как $a_{hp} = a_{h,-q} = 0$, то $b_{hj} = \delta_{hj}$ для всех j, и, следовательно, мы можем применить к матрице c лемму 9 и заключить, что $b_{ip}, b_{iq} \in \sigma_{i,-h}$. Если $i \not\sim h$ и $i \neq -p, -q$, то $b_{ip} = a_{ip}a'_{qp}$, $b_{iq} = a_{ip}a'_{qq}$. Так как строка (a'_{qp}, a'_{qq}) унимодулярна, то $a_{ip} \in \sigma_{ih}$. Теперь вычисление элементов $b_{-p,q}$, $b_{-p,p}$, $b_{-q,q}$ показывает, что

$$a_{-p,p}a'_{qq} \pm a_{-q,p}a'_{qp}, a_{-p,p}a'_{qp} \pm a_{-q,p}a'_{qq} \in \sigma_{-p,p}.$$

Сравнение первого и третьего из этих элементов показывает, что $a_{-p,p}(a'_{qq})^2 \in \sigma_{-p,p}$. Осталось вспомнить, что $a_{-p,p} \in \sigma_{-p,p}$, а вместе с тем, конечно, и $a_{-q,p} \in \sigma_{-q,p}$. Рассматривая вместо b корневой унипотент $c = aT_{pq}(1)a^{-1} \in H$, мы точно так же докажем, что $a_{iq} \in \sigma_{iq}$ для всех $i \sim h$, что и завершает доказательство леммы.

§5. Доказательство теоремы

Следующие две леммы являются аналогом леммы 14 работы [16]. Как и там, они представляют собой душу всего доказательства. После этого теорема для надгрупп $\widetilde{E}_\Gamma(\sigma)$ получается уже чисто формальными манипуляциями.

Лемма 12. *Пусть $h(\nu) \geqslant 3$ и b – длинное корневое отражение, содержащееся в группе $H \geqslant E_\Gamma(\nu)$. Пусть, далее, h, p, q – три эквивалентных индекса таких, что все шесть индексов $\pm h, \pm p, \pm q$ различны. Тогда для любых $\alpha, \beta \in R$ таких, что $\alpha b_{ph} + \beta b_{qh} = 0$ справедливы включения $b_{ih}\alpha, b_{ih}\beta \in \sigma_{ih}$.*

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 9 работы [12] рассмотрим короткий корневой унипотент $c = bT_{hp}(\alpha)T_{hq}(\beta)b^{-1}$, принадлежащий H вместе с b (разумеется, в ортогональном случае этот корневой унипотент был *длинным*). Непосредственное вычисление, использующее лемму 8, показывает, что $c_{ij} = \delta_{ij}$ для $i \neq h, -p, -q$ и $j \neq -h, p, q$. Таким образом, мы можем применить к c лемму 4 и заключить, что $c_{ip}, c_{iq} \in \sigma_{ih}$. Осталось заметить, что $c_{ip} = \alpha b_{ih}$, $c_{iq} = \beta b_{ih}$.

Предыдущая лемма дает нам способ извлечения трансвекций в случае, когда либо класс, которому принадлежит h, несамосопряжен, либо он сопряжен и содержит по крайней мере 6 элементов. Нам остается еще рассмотреть случай, когда этот класс содержит ровно 4 элемента.

Лемма 13. *Пусть b – длинное корневое отражение, содержащееся в группе $H \geqslant E_\Gamma(\nu)$, и $\{\pm h, \pm p\}$ – класс эквивалентности ν. Тогда для любых $\alpha, \beta \in R$ таких, что $\alpha b_{ph} + \beta b_{-p,h} = 0$ справедливы включения $b_{ih}\alpha, b_{ih}\beta \in \sigma_{ih}$.*

Доказательство. По аналогии с предыдущей леммой рассмотрим принадлежащий H унипотент $c = bT_{hp}(\alpha)T_{h,-p}(\beta)b^{-1}$. Снова такое же вычисление показывает, что $c_{ij} = \delta_{ij}$ для всех $i \neq h, \pm p$ и всех $j \neq -h, \pm p$, а $c_{-h,j} = \delta_{-h,j}$ вообще для всех j (в том числе и для $j = -h, \pm p$). Таким образом, мы можем применить к c лемму 3 и заключить, что $c_{ip}, c_{i,-p} \in \sigma_{ih}$. Осталось заметить, что $c_{ip} = \alpha b_{ih}$, $c_{i,-p} = \beta b_{ih}$.

В дальнейшем мы будем применять эти леммы в случае $\alpha = b_{qh}$ и $\beta = -b_{ph}$, причем в лемме 11 здесь $q = -p$. Теперь у нас все готово, чтобы завершить доказательство теоремы.

Доказательство теоремы. Пусть a – некоторая матрица из H. Зафиксируем произвольные $r \neq \pm s$ и рассмотрим длинную корневую инволюцию $b = aD_r(-1)T_{rs}(\xi)a^{-1}$. Нашей ближайшей целью является доказательство того, что $b \in \Gamma(\sigma)$. В самом деле, фиксируем индексы $i \not\sim j$. Если хотя бы один из них, скажем j, лежит в классе, содержащем еще два элемента p, q таких, что все элементы $\pm j, \pm p, \pm q$ различны, то применив лемму 10 мы можем заключить, что $b_{ih}b_{ph}, b_{ih}b_{qh} \in \sigma_{ih}$. Если оба элемента i и j лежат в четырехэлементных классах, то пусть, скажем, $p \sim j$ таково, что $p \neq \pm j$. Тогда применяя лемму 11, мы можем заключить, что $b_{ih}b_{ph}, b_{ih}b_{-p,h} \in \sigma_{ih}$.

Рассмотрим теперь длинную корневую инволюцию

$$c(\zeta) = bD_j(-1)T_{jp}(\zeta)b^{-1}.$$

По только что доказанному $c(\zeta)_{ip}c(\zeta)_{jp} \in \sigma_{ip}$. Прямое вычисление показывает, что

$$c(\zeta)_{ip} = \zeta(b_{ij} + b_{ip}b_{pj}) - 2b_{ip}(1 - b_{jj}),$$
$$c(\zeta)_{jp} = \zeta(b_{jj} + b_{pp} - \xi + b_{jp}b_{pj}) - 2b_{jj}b_{jp}.$$

Взяв здесь последовательно $\zeta = 0, 1, 2$ и вспомнив, что $b_{ij}b_{pj}$, $b_{ip}b_{jp} \in \sigma_{ij} = \sigma_{ip}$, мы получим, что

$$(b_{ij} + b_{ip}b_{pj})(b_{jj} + b_{pp} - 1) \in \sigma_{ij}.$$

Записав теперь такое же включение для матрицы $c(\zeta)$ с заменой j на p, снова полагая там последовательно $\zeta = 0, 1, 2$ и учитывая, что $b_{ij}b_{pj} \in \sigma_{ij}$, мы видим, что

$$(b_{ij} + b_{ip}b_{pj})(1 + b_{pj}(b_{jj} + b_{pp})) \in \sigma_{ij}.$$

Сравнение с предыдущим включением показывает, что

$$b_{ij} + b_{ip}b_{pj}(1 + b_{pj}) \in \sigma_{ij}.$$

Снова подставляя сюда $c(\zeta)$ с заменой j на p и полагая в получившемся включении последовательно $\zeta = 0, 1, 2$, получим, что $b_{ij} + b_{ip}b_{pj} \in \sigma_{ij}$.

Аналогичные рассмотрения для длинной корневой инволюции

$$d(\zeta) = bD_p(-1)T_{pj}(\zeta)b^{-1}$$

дадут нам включение $b_{ip} + b_{ij}b_{jp} \in \sigma_{ij}$, откуда

$$b_{ij} + b_{ip}b_{pj} \equiv b_{ij} - b_{ij}b_{jp}b_{pj} \equiv b_{ij} \pmod{\sigma_{ij}},$$

что и заканчивает доказательство включений $b_{ij} \in \sigma_{ij}$ для всех $i \neq -j$. Поскольку $b_{i,-i} = 0$ по лемме 7, то $b \in \Gamma(\sigma)$.

Теперь утверждение теоремы для надгрупп $\widetilde{E}_\Gamma(\sigma)$ моментально вытекает из леммы 6.

§6. Прогноз

Настоящая работа вместе с работами [15–17] в основном завершает публикацию доказательств тех из результатов докторской диссертации автора [10], которые оставались неопубликованными с конца 80-х годов. Разумеется, за прошедшие после получения представленного здесь доказательства 20 лет точка зрения на то, что следует считать *естественной* общностью для этих результатов, изменилась. Сейчас ясно, что их нужно было с самого начала доказывать не в контексте классических групп Шевалле, а в контексте унитарных групп над форменными кольцами (=general quadratic groups) и соответствующим образом модифицировать понятие стандартности. Иными словами, все ответы с самого начала следует формулировать не в терминах идеалов, а в терминах форменных идеалов!

При этом, в частности, получают естественное объяснение все феномены, связанные с необратимостью 2. Разумеется, в предположении $2 \in R^*$ форменный идеал (I, Γ) форменного кольца (R, Λ) полностью определяется идеалом I кольца R, так как в этом случае автоматически $\Gamma = I \cap \Lambda$. Именно поэтому автору в 1980-е годы удалось *форсировать* стандартные ответы для классических групп в терминах идеалов ценой не отвечающего сути дела дополнительного предположения $2 \in R^*$.

Представляется в высшей степени правдоподобным, что в настоящий момент мы наконец-то располагаем *всеми* идеями и инструментами, необходимыми для того, чтобы – ценой дополнительных усилий, возможно довольно значительных, но в основном чисто *технических* – перенести с расщепимых классических групп на унитарные группы над форменными кольцами и на исключительные группы *все* наличные результаты о надгруппах торов и subsystem subgroups. Это мнение основано на следующих недавних продвижениях.

• Во-первых, написанные за последние несколько лет работы Виктора Петрова, Алексея Степанова, Хон Ю и автора [23–25, 43, 61, 63–65, 74] перевели задачи описания надгрупп полупростых групп в классических группах над кольцами на совершенно другой *технологический* уровень. Дело в том, что в этих работах геометрические методы *полностью совмещены* с локализационными, в первую очередь с методом локализации-пополнения. Это дает принципиально другой уровень свободы при проведении доказательств в (почти) коммутативном случае. Дальнейшие ссылки, относящиеся к геометрическим методам, можно найти в [64, 19–21], а к локализационным – в [58, 59, 65]. С другой стороны, работы Бака по теории размерности [49, 51, 57, 59] открывают путь к широким некоммутативным обобщениям локализационных методов, которые единообразно охватывают все имеющиеся результаты, без предположений коммутативности, условия Оре и т.д.

• Во-вторых, для аналогичной задачи об описании надгрупп расщепимых максимальных торов переход к баковским унитарным группам в основном проделан Елизаветой Дыбковой в работах [29–36], по крайней мере для *четных* групп. Для полного переноса на этот случай всех прешествующих результатов, относившихся к *расширенным* расщепимым классическим группам, остается лишь провести факторизацию по радикалу. При всех технических сложностях, возникающих в унитарном случае, это представляется достаточно рутинным мероприятием. Другой важнейшей задачей здесь является обобщение на нечетные унитарные группы (скажем, в определении Петрова [42] или Бака—Моримото [50]).

• В-третьих, в работах Михаила Гавриловича, Сергея Николенко и автора [19–21] был предложен новый геометрический подход к вычислениям в *исключительных* группах, который позволяет проводить для них точно такие же доказательства, что для классических групп, с теми же оценками на ранги подсистем, в которых лежат используемые унипотентные элементы. На уровне K_1, в частности, в задачах описания надгрупп полупростых подгрупп, этот метод требует лишь возможности вложить каждый корень в подсистему типа A_2. Пока нам удалось проработать все детали этого подхода только для групп типов E_6, E_7 и F_4, но мы уверены, что в дальнейшем этот метод удастся перенести и на случай E_8.

С учетом этого можно прогнозировать, что полное решение следующих двух задач может быть получено в самое ближайшее время.

Проблема 1. *Описать надгруппы $E_\Gamma(\nu)$ в гиперболической унитарной группе $\Gamma = \mathrm{GU}(2l, R, \Lambda)$ над почти коммутативным форменным кольцом (R, Λ).*

Создание работающих подходов к решению следующей задачи для исключительных групп было одной из целей развития нового геометрического метода вычислений в исключительных группах в работах [19–21] и главной мотивировкой разработки метода локализации-пополнения в задачах о надгруппах полупростых групп в работе [65].

Проблема 2. *Описать надгруппы элементарной группы* $E(\Delta, R)$, $\Delta \subseteq \Phi$, *в группе Шевалле* $G(\Phi, R)$, *в предположении, что* $\Delta^{\perp} = \emptyset$ *и все неприводимые компоненты подсистемы* Δ *имеют ранг* $\geqslant 2$.

Метод разложения унипотентов давал возможность получать результаты такого типа только при совершенно нереалистичных оценках на ранги неприводимых компонент, наподобие $\geqslant 5$.

Литература

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **148** (1978), 43–57.
3. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп, содержащих группу клеточно диагональных матриц, в полной линейной группе над кольцом.* — Математика. Изв. ВУЗ'ов. № 11 (1982), 12–16.
4. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над коммутативным кольцом.* — Докл. АН СССР **267**, № 4 (1982), 777–778.
5. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **165** (1984), 24–42.
6. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, В. Наркевич, *О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 13–20.
7. Н. А. Вавилов, *О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **75** (1978), 43–58.
8. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.* — Вестн. Ленингр. ун-та. № 1 (1981), 10–15.
9. Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу клеточно-диагональных матриц.* — Вестн. Ленингр. ун-та. № 1 (1983), 16–21.
10. Н. А. Вавилов, *Подгруппы расщепимых классических групп.* Докт. Дисс., Ленингр. Гос. Ун-т, 1987, с. 1–334.
11. Н. А. Вавилов, *Строение расщепимых классических групп над коммутативным кольцом.* — Докл. АН СССР, **299**, № 6 (1988), 1300–1303.

12. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых ортогональных групп над кольцом.* — Сиб. Мат. Журн. **29**, № 4 (1988), 31–43.
13. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых классических групп.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **183** (1990), 29–41.
14. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной симплектической группы над коммутативным кольцом.* — В кн.: Кольца и Модули. Предельные Теоремы Теории Вероятностей. № 3, 16–38, Изд-во СПбГУ, 1993.
15. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых ортогональных групп.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 42–63.
16. Н. А. Вавилов, *Подгруппы расщепимых ортогональных групп над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 35–59.
17. Н. А. Вавилов, *О подгруппах спинорной группы, содержащих расщепимый максимальный тор.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 37–56.
18. Н. А. Вавилов, *Подгруппы группы* SL_n *над полулокальным кольцом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 33–53.
19. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* E_6 *и* E_7. — Алгебра и Анализ **16**, № 4 (2004), 54–87.
20. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, С. И. Николенко, *Строение групп Шевалле: доказательство из Книги.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **330** (2006), 36–76.
21. Н. А. Вавилов, С. И. Николенко, A_2*-доказательство структурных теорем для группы Шевалле типа* F_4. — Алгебра и Анализ **20** (2008).
22. Н. А. Вавилов, Е. В. Дыбкова, *Подгруппы полной симплектической группы, содержащие группу диагональных матриц.* I, II. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 31–47; **132** (1983), 44–56.
23. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{EO}(2l, R)$. — Зап. науч. семин. ПОМИ **272** (2000), 68–85.
24. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{Ep}(2l, R)$. — Алгебра и Анализ **15**, № 3 (2003), 72–114.
25. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{EO}(n, R)$. — Алгебра и Анализ **19**, № 2 (2007), 10–51.
26. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *О подгруппах полной линейной группы над кольцом, удовлетворяющим условиям стабильности.* — Математика. Изв. ВУЗ'ов. № 10 (1989), 19–25.
27. Н. А. Вавилов, Е. А. Филиппова, *Надгруппы* A_{l-1} *в гиперболическом вложении.* — (готовится к печати).
28. И. З. Голубчик, *О подгруппах полной линейной группы над ассоциативным кольцом.* — Успехи мат. наук **39**, № 1 (1984), 125–126.
29. Е. В. Дыбкова, *О сетевых подгруппах гиперболических унитарных групп.* — Алгебра и Анализ **9**, № 4 (1997), 87–96.
30. Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над полем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 87–96.
31. Е. В. Дыбкова, *Форменные сети и решетка наддиагональных подгрупп в симплектической группе над полем характеристики* 2. — Алгебра и Анализ **10**, № 4 (1998), 113–129.

32. Е. В. Дыбкова, *О наддиагональных подгруппах гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 154–206.
33. Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над некоммутативным телом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 121–135.
34. Е. В. Дыбкова, *Теорема Боревича для гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 136–167.
35. Е. В. Дыбкова, *Подгруппы гиперболических унитарных групп.* Докт. Дисс. СПб Гос. Ун-т, 2006, с. 1–182.
36. Е. В. Дыбкова, *Надгруппы диагональной группы в гиперболической унитарной группе над простым артиновым кольцом.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 155–172.
37. В. А. Койбаев, *О подгруппах полной линейной группы, содержащих группу элементарных клеточно-диагональных матриц.* — Вестн. Ленингр. ун-та. № 13 (1982), 33–40.
38. В. А. Койбаев, *Подгруппы полной линейной группы над конечным полем, содержащие группу элементарных клеточно-диагональных матриц.* — В кн.: Структурные свойства групп. Орджоникидзе, Северо-Осетинский ун-т, 1982, с. 6–12.
39. В. И. Копейко, *Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов.* — Мат. Сб. **106**, № 1 (1978), 94–107.
40. А. Кхатиб, *О подгруппах расщепимой ортогональной группы над коммутативным кольцом.* — В кн.: Кольца и модули. Предельные теоремы Теории Вероятностей. No. 3. Изд-во СПбГУ, 1993, с. 74–86.
41. О. Т. О'Мира, *Лекции о симплектических группах.* М., Мир, 1979.
42. В. А. Петров, *Нечетные унитарные группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 195–225.
43. В. А. Петров, *Надгруппы классических групп.* Канд. Дисс., СПб Гос. Ун-т, 2005, с. 1–129.
44. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* М., Мир, 1973.
45. А. В. Степанов, *Условия стабильности в теории линейных групп над кольцами.* Канд. Дисс., Ленингр. Гос. Ун-т, 1987, с. 1–112.
46. E. Abe, K. Suzuki, *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Tôhoku Math. J. **28** no. 1 (1976), 185–198.
47. A. Bak, *The stable structure of quadratic modules.* Thesis, Columbia Univ., 1969.
48. A. Bak, K-*theory of forms.* vol. 98, Princeton, N.J., Princeton Univ. Press, 1981.
49. A. Bak, *Lectures on dimension theory, group valued functors, and nonstable* K-*theory.* Buenos Aires, 1995.
50. A. Bak, M. Morimoto, *Equivariant surgery with middle-dimensional singular sets.* I. — Forum Math. **8** no. 3 (1996), 267–302.
51. A. Bak, A. Stepanov, *Dimension theory and nonstable* K-*theory for net groups.* — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **106** (2001), 207–253.
52. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloq. **7** no. 2 (2000), 159–196.

53. H. Bass, *Unitary algebraic* K*-theory.* — Springer Lecture Notes Math. **343** (1973), 57–265.
54. D. Costa, G. Keller, *Radix redux: normal subgroups of symplectic groups.* — J. reine angew. Math. **427** (1992), 51–105.
55. F. Grünewald, J. Mennicke, L. N. Vaserstein, *On symplectic groups over polynomial rings.* — Math. Z. **206** no. 1 (1991), 35–56.
56. A. Hahn, O. T.O'Meara, *The classical groups and* K*-theory.* Berlin et al., Springer, 1989.
57. R. Hazrat, *Dimension theory and nonstable* K_1 *of quadratic module.* — K-Theory **27** (2002), 293–327.
58. R. Hazrat, N. A. Vavilov, K_1 *of Chevalley groups are nilpotent.* — J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 99–116.
59. R. Hazrat, N. A. Vavilov, *Bak's work on K-theory of rings.* — (to appear).
60. Li Fuan, *The structure of symplectic group over arbitrary commutative rings.* — Acta Math. Sinica, New Series **3** no. 3 (1987), 247–255.
61. V. A. Petrov, *Overgroups of unitary groups.* — K-Theory **29** (2003), 147–174.
62. A. I. Steinbach, *Subgroups of classical groups generated by transvections or Siegel transvections.* I, II. — Geom. Dedic. **68** no. 3 (1997), 281–322; 323–357.
63. A. Stepanov, *Nonstandard subgroups between $E_n(R)$ and* $\mathrm{GL}_n(A)$. — Algebra Colloquium **10** no. 3 (2004), 321–334.
64. A. Stepanov, N. Vavilov, *Decomposition of transvections: a theme with variations.* — K-Theory **19** (2000), 109–153.
65. A. Stepanov, N. Vavilov, You Hong, *Overgroups of semi-simple subgroups via localisation-completion* (to appear).
66. G. Taddei, *Invariance du sous-groupe symplectique élémentaire dans le groupe symplectique sur un anneau.* — C. R. Acad. Sci Paris, Sér I **295** no. 2 (1982), 47–50.
67. F. Timmesfeld, *Groups generated by k-transvections.* — Invent. Math. **100** no. 1 (1990), 167–206.
68. F. Timmesfeld, *Groups generated by k-root subgroups.* — Invent. Math. **106** no. 3 (1991), 575–666.
69. F. Timmesfeld, *Groups generated by k-root subgroups: a survey.* — Groups, combinatorics & geometry (Durham – 1990). Cambridge Univ. Press, 1992, pp. 183–204.
70. F. Timmesfeld, *Abstract root subgroups and quadratic actions. With an appendix by A. E. Zalesskii.* — Adv. Math. **142** no. 1 (1999), 1–150.
71. L. N. Vaserstein, *Normal subgroups of symplectic groups over rings.* — K-Theory **2** no. 5 (1989), 647–673.
72. N. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* — Proc. Conf. Non-Associative Algebras and Related Topics (Hiroshima – 1990). London et al., World Scientific, 1991, pp. 219–335.
73. N. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* — Proc. Conf. Groups of Lie type and their Geometries (Como – 1993). Cambridge Univ. Press, 1995, pp. 233–280.
74. You Hong, *Overgroups of symplectic group in linear group over commutative rings.* — J. Algebra **282** no. 1 (2004), 23–32.

Vavilov N. A. On subgroups of symplectic group containing a subsystem subgroup.

Let $\Gamma = \mathrm{GSp}(2l, R)$ be the general symplectic group of rank l over a commutative ring R such, that $2 \in R^*$, and ν be a symmetric equivalence relation on the index set $\{1, \dots, l, -l, \dots, 1\}$, all of whose classes contain at least 3 elements. In the present paper we prove that if a subgroup H of Γ contains the group $E_\Gamma(\nu)$ of elementary block diagonal matrices of type ν, then H normalises the subgroup generated by all elementary symplectic transvections $T_{ij}(\xi) \in H$. Combined with the previous results, this completely describes overgroups of subsystem subgroups in this case. Similar results for subgroups of $\mathrm{GL}(n, R)$ were established by Z.I.Borewicz and the author in early 1980-ies, while for $\mathrm{GSp}(2l, R)$ and $\mathrm{GO}(n, R)$ they have been announced by the author in late 1980-ies, but the complete proof for the symplectic case has not been published before.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 июня 2007 г.