Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 348, 2007 г.

А. П. Щеглова

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ТОНКОМ ЦИЛИНДРЕ. РЕШЕНИЯ С НАИМЕНЬШЕЙ ЭНЕРГИЕЙ

1. Постановка задачи

Пусть $n \geqslant 3$. Рассмотрим в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ со строго липшицевой границей ∂Q задачу о нахождении точной константы в теореме вложения $W_2^1(Q) \hookrightarrow L^q(Q)$:

$$\inf_{\substack{u \in W_2^1(Q),\\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_{2,Q}^2 + \|u\|_{2,Q}^2}{\|u\|_{q,Q}^2}. \tag{1.1}$$

Как известно, экстремаль отношения (1.1) после домножения на подходящую константу дает решение с наименьшей энергией для краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{q-2}u & \text{в} \quad Q \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{на} \quad \partial Q. \end{cases}$$

При $q \leqslant 2$ из неравенства Гельдера следует, что экстремум в (1.1) достигается на постоянной функции. Поэтому далее предполагается, что $q > 2$.

Введем нормировку области Q, то есть замену $Q \to \varepsilon Q$. Тогда можно считать, что $\operatorname{meas} Q = 1$, и изучать зависимость экстремали приведенной экстремальной задачи

$$\inf_{\substack{u \in W_2^1(Q),\\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_{2,Q}^2 + \varepsilon^2 \|u\|_{2,Q}^2}{\|u\|_{q,Q}^2} = \mu_{\varepsilon,q}^2 \tag{1.2}$$

от параметра ε.

Работа поддержана грантом НШ.8336.2006.1 и грантом РФФИ 05-01-01063.

Обозначим $2^* = \frac{2n}{n-2}$ предельный показатель вложения Соболева. В [1] было показано, что на интервале $q \in (2; 2^*]$ определена функция $\varepsilon = \widehat{\varepsilon}(q)$ такая, что при $\varepsilon > \widehat{\varepsilon}(q)$ постоянная функция не дает **глобального** минимума функционалу (1.2), а при $\varepsilon \leqslant \widehat{\varepsilon}(q)$ – дает. Функция $\widehat{\varepsilon}(q)$ непрерывна, положительна, строго убывает и $\widehat{\varepsilon}(q) \to \infty$ при $q \downarrow 2$.

Также в [1] доказано, что постоянная функция дает **локальный** экстремум в (1.2) при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{kp}(q) \equiv \sqrt{\frac{\lambda_{\mathcal{N},Q}}{q-2}}$, где $\lambda_{\mathcal{N},Q}$ – первое положительное собственное число задачи Неймана

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{в } \ Q \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{на } \ \partial Q \end{cases} \tag{1.3}$$

и не дает локального экстремума при $\varepsilon > \varepsilon_{kp}(q)$.

Очевидно, что $\widehat{\varepsilon}(q) \leqslant \varepsilon_{kp}(q)$. В [2, 3] доказано, что в одномерном случае $\widehat{\varepsilon}(q) \equiv \varepsilon_{kp}(q)$. Однако, как показано в [1], в многомерном случае для асимметричной области общего положения $\widehat{\varepsilon}(q) < \varepsilon_{kp}(q)$ для всех $2 < q \leqslant 2^*$. Более того, даже для куба при q близких к 2^* $\widehat{\varepsilon}(q) < \varepsilon_{kp}(q)$. Наша цель – доказать, что если область Q – достаточно тонкий цилиндр, то $\widehat{\varepsilon}(q) \equiv \varepsilon_{kp}(q)$.

А именно, пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ со строго липшицевой границей, $\operatorname{meas}\Omega = 1$. Обозначим $Q_d = d^{\frac{1}{n}}\Omega \times \left(0; d^{-\frac{n-1}{n}}\right)$ цилиндр с основанием $d^{\frac{1}{n}}\Omega$, где $d \in (0;1)$. Будем изучать свойства экстремали (1.2) в области Q_d.

Сначала вычислим ε_{kp} для цилиндра Q_d. Нетрудно видеть, что краевая задача (1.3) допускает разделение переменных и $\lambda_{\mathcal{N},Q_d} = \min\left\{d^{\frac{2(n-1)}{n}}\pi^2; d^{-\frac{2}{n}}\lambda_{\mathcal{N},\Omega}\right\}$, где $\lambda_{\mathcal{N},\Omega}$ – первое положительное собственное число задачи Неймана для оператора Лапласа в Ω. То есть, при $d \leqslant \frac{\sqrt{\lambda_{\mathcal{N},\Omega}}}{\pi}$ имеем $\lambda_{\mathcal{N},Q_d} = d^{\frac{2(n-1)}{n}}\pi^2$, что дает

$$\varepsilon_{kp}(q) = \frac{\pi d^{\frac{n-1}{n}}}{\sqrt{q-2}}. \tag{1.4}$$

Далее везде будем считать $d \leqslant \min\left\{1; \frac{\sqrt{\lambda_{\mathcal{N},\Omega}}}{\pi}\right\}$.

После замены переменных в Ω и на отрезке экстремальная задача (1.2) примет вид

$$\inf_{\substack{u\in W_2^1(Q),\\ u\not\equiv 0}} \mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}(u)$$
$$\equiv \inf \left(\int\limits_Q \Big(\frac{1}{d^2}|u_x|^2 + |u_y|^2 + \varkappa^2|u|^2\Big)dz \right) \cdot \left(\int\limits_Q |u|^q dz \right)^{-\frac{2}{q}}$$
$$= d^{-\frac{2(n-1)}{n}} \mu^2_{\varepsilon,q} \equiv \mu^2_{\varkappa,q,d},$$

где

$$\varkappa = \varepsilon \cdot d^{-\frac{n-1}{n}} \tag{1.5}$$

и $Q = \Omega \times (0;1)$. Переменные в Q мы обозначаем $z = (x;y)$, $x \in \Omega$, $y \in (0;1)$.

Из (1.4) и (1.5) следует, что при

$$\varkappa \leqslant \varkappa_{kp}(q) = \frac{\pi}{\sqrt{q-2}} \tag{1.6}$$

постоянная функция дает локальный экстремум функционалу $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$.

Рассмотрим еще одномерную задачу

$$\inf_{\substack{v\in W_2^1(0;1),\\ v\not\equiv 0}} \widetilde{\mathcal{Q}}_{\varkappa,q}(v) \equiv \inf \left(\int\limits_0^1 \big(|v'|^2 + \varkappa^2|v|^2\big)dy \right) \cdot \left(\int\limits_0^1 |v|^q dy \right)^{-\frac{2}{q}} = \widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}.$$

Эта задача была исследована в [2, 3]. Известно, что минимизирующая функция (обозначим ее $\mathbf{v}$) положительна на $[0;1]$. Не умаляя общности, будем считать, что $\|\mathbf{v}\|_{q,(0;1)} = 1$.

Определим вспомогательные функционалы

$$J_{\varkappa,q,d}(u) = \int\limits_Q \Big(\frac{1}{d^2}|u_x|^2 + |u_y|^2 + \varkappa^2|u|^2\Big)dz - \widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q} \left(\int\limits_Q |u|^q dz \right)^{2/q}$$

и

$$\widetilde{J}_{\varkappa,q}(v) = \int\limits_0^1 \Big(|v'|^2 + \varkappa^2|v|^2\Big)dy - \widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q} \left(\int\limits_0^1 |v|^q dy \right)^{2/q}.$$

По определению $\widetilde{J}_{\varkappa,q}(v) \geqslant 0$ для всех $v \in W_2^1(0;1)$.

Очевидно, $J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{v}) = 0$, и на "одномерных" функциях (то есть функциях, зависящих только от y) значения функционала $J_{\varkappa,q,d}$ совпадают со значениями функционала $\widetilde{J}_{\varkappa,q}$. Поэтому минимайзер функционала $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$ является "одномерной" функцией тогда и только тогда, когда функционал $J_{\varkappa,q,d}$ неотрицателен на $W_2^1(Q)$.

В §2 мы докажем, что при достаточно малых d функция $\mathbf{v}$ дает **локальный** минимум функционалу $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$. В §3 будет доказано, что при $\varkappa \leqslant \varkappa_{kp}(q)$ эта функция (как показано в [3], в этом случае $\mathbf{v} \equiv 1$) дает функционалу $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$ не только локальный, но и **глобальный** минимум. Это и будет означать, что если d достаточно мало, то для функционала (1.2) в области Q_d $\widehat{\varepsilon}(q) \equiv \varepsilon_{kp}(q)$.

В §4. собраны вспомогательные предложения.

Замечание. Поскольку $W_2^1(Q)$ вкладывается в $L_{2^*}(Q)$, то

$$\|u\|_{2^*,Q} \leqslant c(n,\Omega)\|u\|_{W_2^1(Q)}.$$

Обозначим $c_*(n,\Omega) = \max\{c;1\}$. Из неравенства Гельдера следует, что $\|u\|_{q,Q} \leqslant c_*\|u\|_{W_2^1(Q)}$ для любого $q \in (2;2^*]$.

Далее все константы, не зависящие от $\varkappa$, q и d, будем обозначать c с индексом. Эти константы могут зависеть от n и Ω.

2. Локальное исследование

Теорема 2.1. *Пусть $q \in (2;2^*]$, $\varkappa > 0$. Для любой пары $(q,\varkappa)$ существует $d_{kp}(n,\Omega,q,\varkappa)$ такое, что для всех $d \leqslant d_{kp}$ минимайзер $\mathbf{v}$ "одномерного" функционала $\widetilde{\mathcal{Q}}_{\varkappa,q}$ дает локальный минимум функционалу $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$.*

Доказательство. Поскольку $J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{v}) = 0$, достаточно доказать, что $J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{v}+h) \geqslant 0$, если $d \leqslant d_{kp}$ и $\|h\|_{W_2^1(Q)}$ достаточно мала.

Следуя [2], разложим приращение $h(x,y)$ в сумму двух слагаемых:

$$h(x,y) = h_1(y) + g(x,y),$$

где $h_1(y) = \int\limits_\Omega h(x,y)dx$, а функция g удовлетворяет условию

$$\int\limits_\Omega g(x,y)dx = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in [0;1]. \tag{2.1}$$

Очевидно, что $\|h\|^2_{W^1_2(Q)} = \|h_1\|^2_{W^1_2(Q)} + \|g\|^2_{W^1_2(Q)}$, поэтому

$$\|h_1\|_{W^1_2(0;1)} \equiv \|h_1\|_{W^1_2(Q)} \leqslant \|h\|_{W^1_2(Q)}; \quad \|g\|_{W^1_2(Q)} \leqslant \|h\|_{W^1_2(Q)}. \tag{2.2}$$

Кроме того, в силу (2.1) для функции g справедливо неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_\Omega |g|^2 dx \leqslant \frac{1}{\lambda_{\mathcal{N},\Omega}} \int\limits_\Omega |g_x|^2 dx \quad \text{для всех} \quad y \in [0;1]. \tag{2.3}$$

Используя разложение функции h, запишем $\mathbf{v}(y) + h(x,y) = \mathbf{v}(y) + h_1(y) + g(x,y)$. Обозначим

$$w(y) = \mathbf{v}(y) + h_1(y). \tag{2.4}$$

Преобразуем $J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{v}+h)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{v}+h) &= J_{\varkappa,q,d}(w+g) \\ = \int\limits_Q \Big(\frac{1}{d^2}|g_x|^2 + |w_y+g_y|^2 + \varkappa^2|w+g|^2\Big)dz &- \widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}\left(\int\limits_Q |w+g|^q dz\right)^{2/q} \\ = \int\limits_Q \Big(\frac{1}{d^2}|g_x|^2 &+ |g_y|^2 + \varkappa^2|g|^2\Big)dz \\ + \int\limits_0^1 \Big(|w_y|^2 + \varkappa^2|w|^2\Big)dy &- \widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}\left(\int\limits_Q |w+g|^q dz\right)^{2/q}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Лемма 2.1. *Пусть* $w > 0$ *на* $[0;1]$. *Тогда*

$$\begin{aligned} J_{\varkappa,q,d}(w+g) \geqslant \widetilde{J}_{\varkappa,q}(w) + \|g_y\|^2_{2,q} + \|g_x\|^2_{2,Q} \\ \times\Bigg[\frac{1}{d^2} - \frac{\big(\widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}(q-1)\sup\mathbf{v}^{q-2} - \varkappa^2\big)_+}{\lambda_{\mathcal{N},\Omega}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$-c_1\widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}(q-2)\left(\frac{\sup w}{\|w\|_{q,Q}}\right)^{\frac{4}{n-2}} \inf\mathbf{v}^{q-2^*} - c_2\widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}(q-2)\|w\|^{2-q}_{q,Q}\cdot R(g,w)\Bigg],$$

где

$$R(g,w) = \begin{cases} \inf w^{q-2-\frac{2}{n}} \|\nabla g\|_{2,Q}^{\frac{2}{n}} & \text{при } 2 < q \leqslant 2+\frac{2}{n}; \\ \|\nabla g\|_{2,Q}^{q-2} & \text{при } 2+\frac{2}{n} < q \leqslant 3; \\ \sup w^{q-3} \|\nabla g\|_{2,Q} + \|\nabla g\|_{2,Q}^{q-2} & \text{при } 3 < q \leqslant 2^*. \end{cases} \tag{2.7}$$

Доказательство. Необходимо оценить $I = \int\limits_Q |w+g|^q dz$. Для этого подынтегральную функцию разложим по формуле Тейлора. Пассмотрим три случая: $q \in \left(2; 2+\frac{2}{n}\right]$, $q \in \left(2+\frac{2}{n}; 3\right]$ или $q \in (3; 2^*]$. Если $2^* \leqslant 3$, то второй и третий случай объединяются и $q \in \left(2+\frac{2}{n}; 2^*\right]$. Заметим, что при всех $n \geqslant 3$ верно $2+\frac{2}{n} < 2^*$, поэтому все нормы, возникающие в дальнейшем, конечны.

Первый случай. $2 < q \leqslant 2+\frac{2}{n}$. Поскольку функция w отделена от нуля, воспользуемся предложением 4.1. Имеем

$$|w+g|^q \leqslant w^q + qw^{q-1}g + \frac{q(q-1)}{2} w^{q-2} g^2 + c_3(q-2) w^{q-2-\frac{2}{n}} |g|^{2+\frac{2}{n}}.$$

Тогда

$$I \leqslant \|w\|_{q,(0;1)}^q + \frac{q(q-1)}{2} \int\limits_Q w^{q-2} g^2 dz + c_3(q-2) \inf w^{q-2-\frac{2}{n}} \int\limits_Q |g|^{2+\frac{2}{n}} dz. \tag{2.8}$$

Оценим последний интеграл с помощью (4.1). Далее возведем (2.8) в степень $\frac{2}{q} < 1$ и воспользуемся неравенством $(1+\tau)^{2/q} \leqslant 1 + \frac{2}{q} \cdot \tau$. Получим

$$I^{\frac{2}{q}} \leqslant \|w\|_{q,Q}^2 + (q-1) \int\limits_Q \left(\frac{w}{\|w\|_{q,Q}} \right)^{q-2} g^2 dz \\ + c_2(q-2) \inf w^{q-2-\frac{2}{n}} \|w\|_{q,Q}^{2-q} \|\nabla g\|_{2,Q}^{\frac{2}{n}} \cdot \|g_x\|_{2,Q}^2. \tag{2.9}$$

Второй случай. $2+\frac{2}{n} < q \leqslant 3$. Тогда, применяя предложение 4.1, имеем $|w+g|^q \leqslant w^q + qw^{q-1}g + \frac{q(q-1)}{2} w^{q-2} g^2 + c_3(q-2)|g|^q$ и, аналогично первому случаю,

$$I^{\frac{2}{q}} \leqslant \|w\|_{q,Q}^2 + (q-1) \int\limits_Q \left(\frac{w}{\|w\|_{q,Q}} \right)^{q-2} g^2 dz \\ + c_2(q-2) \|w\|_{q,Q}^{2-q} \|\nabla g\|_{2,Q}^{q-2} \cdot \|g_x\|_{2,Q}^2. \tag{2.10}$$

Третий случай. $3 < q \leqslant 2^*$. По формуле Тейлора

$$|w+g|^q \leqslant w^q+qw^{q-1}g+\frac{q(q-1)}{2}w^{q-2}g^2+\frac{q(q-1)(q-2)}{6}(w+\tau g)^{q-3}|g|^3,$$

$\tau \in (0;1)$. Обозначим $Q_1 = \{x : |g(x)| < w(x)\}$ и $Q_2 = Q \setminus Q_1$, тогда

$$I = \int\limits_{Q_1} |w+g|^q dz + \int\limits_{Q_2} |w+g|^q dz$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_1} \left(w^q + qw^{q-1}g + \frac{q(q-1)}{2}w^{q-2}g^2 + \frac{(2w)^{q-3}q(q-1)}{6}(q-2)|g|^3\right) dz$$

$$+ \int\limits_{Q_2} \left(w^q + qw^{q-1}g + \frac{q(q-1)}{2}w^{q-2}g^2 + \frac{2^{q-3}q(q-1)}{6}(q-2)|g|^q\right) dz$$

$$\leqslant \|w\|^q_{q,Q} + \frac{q(q-1)}{2}\int\limits_Q w^{q-2}g^2 dz + \frac{2^{q-3}q(q-1)}{6}(q-2)\int\limits_Q (w^{q-3}|g|^3 + |g|^q) dz.$$

Возводя в степень $\frac{2}{q} < 1$ и пользуясь неравенством $(1+\tau)^{2/q} \leqslant 1 + \frac{2}{q}\cdot\tau$, получаем

$$I^{\frac{2}{q}} \leqslant \|w\|^2_{q,Q} + (q-1)\int\limits_Q \left(\frac{w}{\|w\|_{q,Q}}\right)^{q-2} g^2 dz + \frac{2^{q-3}(q-1)}{3}(q-2)\|w\|^{2-q}_{q,Q}\int\limits_Q (w^{q-3}|g|^3 + |g|^q) dz.$$

Применяя к последнему интегралу (4.1), получим

$$I^{\frac{2}{q}} \leqslant \|w\|^2_{q,Q} + (q-1)\int\limits_Q \left(\frac{w}{\|w\|_{q,Q}}\right)^{q-2} g^2 dz + c_2(q-2)\|w\|^{2-q}_{q,Q}\left(\sup w^{q-3}\|\nabla g\|_{2,Q} + \|\nabla g\|^{q-2}_{2,Q}\right)\|g_x\|^2_{2,Q}. \quad (2.11)$$

Подставляя, в зависимости от q, (2.9), (2.10) или (2.11) в (2.5), имеем

$$\begin{aligned} J_{\varkappa,q,d}(w+g) \geqslant \widetilde{J}_{\varkappa,q}(w) + \frac{1}{d^2}\|g_x\|^2_{2,Q} \\ + \|g_y\|^2_{2,Q} - \int\limits_Q \left(\widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}(q-1)\mathbf{v}^{q-2} - \varkappa^2\right)_+ |g|^2 dz \\ - \widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}(q-1)\int\limits_Q \left(\left(\frac{w}{\|w\|_{q,Q}}\right)^{q-2} - \mathbf{v}^{q-2}\right)_+ g^2 dz \\ - c_2(q-2)\widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}\|w\|^{2-q}_{q,Q}\cdot\|g_x\|^2_{2,Q}\cdot R(g,w), \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $R(g,w)$ определено в (2.7).

Используя (2.3), оценим второй интеграл в (2.12) так:

$$\begin{aligned} (q-1)\int\limits_0^1 \left(\left(\frac{w}{\|w\|_{q,Q}}\right)^{q-2} - \mathbf{v}^{q-2}\right)_+ \int\limits_\Omega g^2 dx\,dy \\ \leqslant \frac{q-1}{\lambda_{\mathcal{N},\Omega}}\cdot\left(\left(\frac{\sup w}{\|w\|_{q,Q}}\right)^{q-2} - \inf\mathbf{v}^{q-2}\right)_+ \|g_x\|^2_{2,Q}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\frac{\sup w}{\|w\|_{q,Q}\cdot\inf\mathbf{v}} \geqslant 1$. Поскольку $q-2 \leqslant 2^*-2 = \frac{4}{n-2}$, то для произвольного $\tau \geqslant 1$ есть неравенство $\tau^{q-2}-1 \leqslant \frac{(q-2)(n-2)}{4}\tau^{\frac{4}{n-2}}$. А значит,

$$\begin{aligned} \frac{q-1}{\lambda_{\mathcal{N},\Omega}}\left(\left(\frac{\sup w}{\|w\|_{q,Q}}\right)^{q-2} - \inf\mathbf{v}^{q-2}\right) \\ \leqslant \frac{2^*-1}{\lambda_{\mathcal{N},\Omega}}\left(\left(\frac{\sup w}{\|w\|_{q,Q}\cdot\inf\mathbf{v}}\right)^{q-2} - 1\right)\inf\mathbf{v}^{q-2} \\ \leqslant c_1(q-2)\left(\frac{\sup w}{\|w\|_{q,Q}\cdot\inf\mathbf{v}}\right)^{\frac{4}{n-2}}\inf\mathbf{v}^{q-2} \\ = c_1(q-2)\left(\frac{\sup w}{\|w\|_{q,Q}}\right)^{\frac{4}{n-2}}\inf\mathbf{v}^{q-2^*}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$(q-1)\int\limits_Q \left(\left(\frac{w}{\|w\|_{q,Q}}\right)^{q-2} - \mathbf{v}^{q-2}\right)_+ g^2 dz$$

$$\leqslant c_1(q-2)\left(\frac{\sup w}{\|w\|_{q,Q}}\right)^{\frac{4}{n-2}} \inf \mathbf{v}^{q-2^*}\|g_x\|^2_{2,Q}. \quad (2.13)$$

Аналогично, в силу (2.3)

$$\int\limits_Q \left(\widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}(q-1)\mathbf{v}^{q-2} - \varkappa^2\right)_+ |g|^2 dz \leqslant \frac{(\widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}(q-1)\sup \mathbf{v}^{q-2} - \varkappa^2)_+}{\lambda_{\mathcal{N},\Omega}}\|g_x\|^2_{2,Q}. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.13) и (2.14) в (2.12), получаем (2.6). □

Продолжим доказательство теоремы.

Известно, что $W^1_2(0;1)$ вкладывается в $L_\infty(0;1)$, и (см., например, [1, §4]) $\sup\limits_{(0;1)} h_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\operatorname{th}(1)}}\|h_1\|_{W^1_2(0;1)} \leqslant \frac{7}{6}\|h_1\|_{W^1_2(0;1)}$. Тогда при $\|h\|_{W^1_2(Q)} < \theta(q,\varkappa) := \frac{3}{7}\inf\limits_{(0;1)} \mathbf{v}$ из (2.2) и (2.4) следует $\inf\limits_Q w \equiv \inf\limits_{(0;1)} w \geqslant \frac{1}{2}\inf\limits_{(0;1)} \mathbf{v}$, то есть функция w отделена от нуля. Кроме того,

$$\|h_1\|_{W^1_2(0;1)} = \|h_1\|_{W^1_2(Q)} < \theta; \quad \|\nabla g\|_{2,Q} < \theta;$$

$$\|w\|_{q,Q} \equiv \|w\|_{q,(0;1)} \geqslant \inf_{(0;1)} w \geqslant \frac{1}{2}\inf \mathbf{v}$$

и

$$\sup_Q w \equiv \sup_{(0;1)} w \leqslant \sup \mathbf{v} + \sup_{(0;1)} h_1 \leqslant \sup \mathbf{v} + \frac{7}{6}\theta = \sup \mathbf{v} + \frac{1}{2}\inf \mathbf{v}.$$

Подставляя полученные оценки в (2.7) и упрощая, имеем

$$R(g,w) \leqslant \begin{cases} \inf \mathbf{v}^{q-2} & \text{при } 2 < q \leqslant 3; \\ 2\left(\frac{\sup \mathbf{v}}{\inf \mathbf{v}} + 1\right)^{q-3} \cdot \inf \mathbf{v}^{q-2} & \text{при } q > 3. \end{cases}$$

Тогда (2.6) превращается в

$$J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{v}+h) = J_{\varkappa,q,d}(w+g) \geqslant \widetilde{J}_{\varkappa,q}(w) + \|g_y\|^2_{2,Q} + \|g_x\|^2_{2,Q}\times$$

$$\times\Bigg[\frac{1}{d^2}-\frac{\left(\widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}(q-1)\sup\mathbf{v}^{q-2}-\varkappa^2\right)_+}{\lambda_{\mathcal{N},\Omega}}$$

$$-c_1\widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}(q-2)\left(\frac{2\sup\mathbf{v}}{\inf\mathbf{v}}+1\right)^{\frac{4}{n-2}}\inf\mathbf{v}^{q-2^*}$$

$$-2^{q-2}c_2\widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}(q-2)\cdot\widetilde{R}(\mathbf{v})\Bigg],$$

где

$$\widetilde{R}(\mathbf{v})=\begin{cases}1 & \text{при}\quad 2<q\leqslant 3\\ 2\left(\frac{\sup\mathbf{v}}{\inf\mathbf{v}}+1\right)^{q-3} & \text{при}\quad q>3.\end{cases}$$

Следовательно, при $\|h\|_{W_2^1(Q)}<\theta(q,\varkappa)$

$$J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{v}+h)\geqslant\widetilde{J}_{\varkappa,q}(w)+\|g_y\|^2_{2,Q}+\left[\frac{1}{d^2}-K(n,\Omega,q,\varkappa)\right]\cdot\|g_x\|^2_{2,Q}.$$

Поскольку $\widetilde{J}_{\varkappa,q}(w)\geqslant 0$, при $d^{-2}<K(n,\Omega,\varkappa,q)$ выполнено $J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{v}+h)\geqslant 0$. Следовательно, функция $\mathbf{v}$ дает локальный минимум функционалам $J_{\varkappa,q,d}$ и $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$ при всех $d<d_{kp}:=K^{-\frac{1}{2}}(n,\Omega,\varkappa,q)$. $\square$

3. Случай $\varepsilon\leqslant\varepsilon_{kp}$

Докажем, что для достаточно малых d графики функций $\widehat{\varepsilon}(q)$ и $\varepsilon_{kp}(q)$ совпадают. В силу (1.5) это равносильно тому, что при $\varkappa_{kp}(q)=\frac{\pi}{\sqrt{q-2}}$ постоянная функция является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$ для всех достаточно малых d. Дальше везде будем считать $\varkappa=\varkappa_{kp}(q)$.

Как указывалось в §1, при $\varkappa=\frac{\pi}{\sqrt{q-2}}$ имеем $\mathbf{v}\equiv 1$, поэтому $\widetilde{\mu}_{\varkappa,q}=\varkappa$. Тогда

$$\widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q}\cdot(q-2)=\varkappa^2(q-2)=\pi^2. \tag{3.1}$$

Обозначим $\mathbf{u}$ глобальный минимайзер функционала $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$. Заметим, что если $\mathbf{u}$ – минимайзер $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$, то $|\mathbf{u}|$ также минимайзер, поэтому можно считать $\mathbf{u}\geqslant 0$. Тогда в силу неравенства Харнака [4, теорема 1.1] функция $\mathbf{u}$ положительна в Q. Не умаляя общности, $\|\mathbf{u}\|_{q,Q}=1$. Тогда функция $\mathbf{u}$ является положительным обобщенным решением задачи

$$\begin{cases}-\frac{1}{d^2}\mathbf{u}_{xx}-\mathbf{u}_{yy}+\varkappa^2\mathbf{u}=\mu^2_{\varkappa,q,d}\mathbf{u}^{q-1} & \text{в } Q\\ \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}}=0 & \text{на}\quad\partial Q,\end{cases} \tag{3.2}$$

то есть удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q \Big(\frac{1}{d^2}\mathbf{u}_x h_x + \mathbf{u}_y h_y + \varkappa^2 \mathbf{u} h\Big) dz = \mu^2_{\varkappa,q,d} \int\limits_Q \mathbf{u}^{q-1} h\, dz \tag{3.3}$$

для любой функции $h \in W_2^1(Q)$.

Заметим, что $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d_1}(u) \geqslant \mathcal{Q}_{\varkappa,q,d_2}(u)$, если $0 < d_1 < d_2$, и равенство возможно только если $u_x \equiv 0$. Следовательно, если для некоторого d_0 константа минимизирует функционал $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d_0}$, то она минимизирует и фунционал $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$ для всех $d \leqslant d_0$.

Для доказательства основного результата нам потребуются различные равномерные по q и d априорные оценки функции $\mathbf{u}$. Сначала докажем существование такой оценки для $\|\mathbf{u}\|_{W_2^1(Q)}$.

Лемма 3.1. *Пусть* $q \in (2; 2^*]$. *Тогда*

$$\|\mathbf{u}\|_{W_2^1(Q)} \leqslant M_0,$$

где константа $M_0 = M_0(n, \Omega)$ *не зависит от* q *и* d.

Доказательство. Так как $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}(\mathbf{u}) \leqslant \mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}(\mathbf{v})$, то

$$\frac{1}{d^2}\|\mathbf{u}_x\|^2_{2,Q} + \|\mathbf{u}_y\|^2_{2,Q} + \varkappa^2 \|\mathbf{u}\|^2_{2,Q} \leqslant \varkappa^2, \tag{3.4}$$

и, следовательно,

$$\|\mathbf{u}\|^2_{2,Q} \leqslant 1, \quad \|\nabla \mathbf{u}\|^2_{2,Q} \leqslant \varkappa^2 = \frac{\pi^2}{q-2}. \tag{3.5}$$

При $2 + \frac{2}{n} < q \leqslant 2^*$ $\varkappa^2 < \frac{n\pi^2}{2}$, и из (3.5) немедленно следует утверждение леммы.

Пусть $2 < q \leqslant 2 + \frac{2}{n}$. Тогда из предложения 4.3 следует

$$1 = \|\mathbf{u}\|^{\frac{2\alpha q}{n}}_{q,Q} \leqslant c_*^{\alpha(q-2)} \|\mathbf{u}\|^{\alpha(q-2)}_{W_2^1(Q)} \cdot \|\mathbf{u}\|^2_{2,Q}. \tag{3.6}$$

Ввиду (3.5) имеем $\|\mathbf{u}\|^2_{W_2^1(Q)} \leqslant \frac{\pi^2}{q-2} + 1$, и (3.6) дает

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2_{2,Q} &\geqslant c_*^{\alpha(2-q)} \left(\frac{\pi^2}{q-2} + 1\right)^{\alpha(2-q)/2} \\ &\geqslant 1 - \frac{\alpha(q-2)}{2} \ln\left(\frac{\pi^2}{q-2} + 1\right) - \alpha(q-2) \ln c_*.\end{aligned}$$

Подставим эту оценку в (3.4). Получим

$$\frac{1}{d^2}\|\mathbf{u}_x\|^2_{2,Q} + \|\mathbf{u}_y\|^2_{2,Q}$$

$$+\varkappa^2\left(1 - \frac{\alpha(q-2)}{2}\ln\left(\frac{\pi^2}{q-2}+1\right) - \alpha(q-2)\ln c_*\right) \leqslant \varkappa^2.$$

Отсюда, с учетом (3.1) и $\|\mathbf{u}\|^2_{2,Q} \leqslant 1$,

$$\|\mathbf{u}\|^2_{W^1_2(Q)} \leqslant \frac{1}{d^2}\|\mathbf{u}_x\|^2_{2,Q} + \|\mathbf{u}_y\|^2_{2,Q} + \|\mathbf{u}\|^2_{2,Q}$$
$$\leqslant \frac{\alpha\pi^2}{2}\ln\left(\frac{\pi^2}{q-2}+1\right) + \alpha\pi^2\ln c_* + 1. \quad (3.7)$$

Обозначим $c_0 = \alpha\pi^2 \ln c_* + 1$. Очевидно, что $c_0 \geqslant 1$. Рассмотрим последовательность $\{C_j\}_{j=0}^{\infty}$, определенную следующим образом:

$$C_0 = \frac{\pi^2}{q-2} + 1; \quad C_j = \frac{\alpha\pi^2}{2}\ln C_{j-1} + c_0.$$

Тогда (3.7) примет вид $\|\mathbf{u}\|^2_{W^1_2(Q)} \leqslant \frac{\alpha\pi^2}{2}\ln C_0 + c_0 = C_1$. Подставим эту оценку в (3.6), получим

$$\|\mathbf{u}\|^2_{2,Q} \geqslant c_*^{\alpha(2-q)} C_1^{\frac{\alpha(2-q)}{2}} \geqslant 1 - \frac{\alpha(q-2)}{2}\ln C_1 - \alpha(q-2)\ln c_*.$$

Отсюда, аналогично выводу (3.7),

$$\|\mathbf{u}\|^2_{W^1_2(Q)} \leqslant \frac{\alpha\pi^2}{2}\ln C_1 + c_0 = C_2.$$

Повторяя эти рассуждения, имеем $\|\mathbf{u}\|^2_{W^1_2(Q)} \leqslant C_j$ для любого $j \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\alpha\pi^2}{2}\ln x - c_0$. Так как $c_0 \geqslant 1$, функция f имеет на интервале $(1; +\infty)$ единственный корень $\widetilde{m}^2 = \widetilde{m}^2(n, \Omega, \alpha)$. Таким образом, если $C_{j-1} > \widetilde{m}^2$, то $C_j < \frac{1}{2}C_{j-1}$. Поэтому либо $C_1 \leqslant \widetilde{m}^2$, либо существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $C_{j_0-1} > \widetilde{m}^2$, а $C_{j_0} \leqslant \widetilde{m}^2$. Отсюда следует, что

$$\|\mathbf{u}\|^2_{W^1_2(Q)} \leqslant C_{j_0} \leqslant \widetilde{m}^2.$$

Очевидно, что зависимость $\widetilde{m}$ от α непрерывная. Так как $\left(1-\frac{2}{2^*}\right)^{-1}\leqslant\alpha\leqslant\left(1-\frac{2+2/n}{2^*}\right)^{-1}$, то существует такое $M_0(n,\Omega)$, не зависящее от α (а потому от q и d), что $\widetilde{m}\leqslant M_0$ для всех $2<q\leqslant 2+\frac{2}{n}$. Таким образом, $\|\mathbf{u}\|_{W_2^1(Q)}\leqslant\widetilde{m}\leqslant M_0$. $\square$

Нам также потребуется равномерная оценка $\sup\mathbf{u}$ при всех $q\in(2;2^*]$ и $\inf\mathbf{u}$ при $q\in(2;2+2/n]$. Сначала оценим супремум и инфимум при $q\in(2;2+2/n]$.

Лемма 3.2. *Пусть $q\in(2;2+2/n]$. Тогда*

$$\sup\mathbf{u}\leqslant M_1,$$

где константа $M_1=M_1(n,\Omega)$ не зависит от q и d.

Доказательство. Обозначим $\sup\mathbf{u}=M$. Воспользуемся методом Мозера (см., напр., [5, гл. IX, §5]). Возьмем $h=\mathbf{u}^\beta$, $\beta>0$, и подставим в интегральное тождество (3.3). Преобразовав, получим

$$\beta\int\limits_Q\mathbf{u}^{\beta-1}|\nabla\mathbf{u}|^2dz\leqslant(\mu^2_{\varkappa,q,d}M^{q-2}-\varkappa^2)\int\limits_Q\mathbf{u}^{\beta+1}dz \leqslant\varkappa^2(M^{q-2}-1)\int\limits_Q\mathbf{u}^{\beta+1}dz. \quad (3.8)$$

Последнее неравенство верно, так как $\mu^2_{\varkappa,q,d}\leqslant\varkappa^2$. Обозначим $v=\mathbf{u}^{\frac{\beta+1}{2}}$, тогда (3.8) превращается в

$$\beta\left(\frac{2}{\beta+1}\right)^2\|\nabla v\|^2_{2,Q}\leqslant\varkappa^2(M^{q-2}-1)\|v\|^2_{2,Q}.$$

По теореме вложения $\|\nabla v\|^2_{2,Q}\geqslant c_*^{-2}\|v\|^2_{2^*,Q}-\|v\|^2_{2,Q}$, тогда

$$c_*^{-2}\beta\left(\frac{2}{\beta+1}\right)^2\|v\|^2_{2^*,Q}\leqslant\left(\varkappa^2(M^{q-2}-1)+\beta\left(\frac{2}{\beta+1}\right)^2\right)\|v\|^2_{2,Q}.$$

Возведем это неравенство в степень $(\beta+1)^{-1}$, получим

$$\|\mathbf{u}\|_{\chi p,Q}\leqslant\left[\frac{c_*^2p^2\varkappa^2}{4\beta}(M^{q-2}-1)+1\right]^{1/p}\|\mathbf{u}\|_{p,Q}\leqslant \leqslant\left(\frac{c_*^2}{p-1}\right)^{1/p}p^{2/p}\varkappa^{2/p}(M^{q-2}-1)^{1/p}\|\mathbf{u}\|_{p,Q}, \quad (3.9)$$

где $\chi = \frac{n}{n-2}$, $p = \beta + 1$.

Для некоторого $p_0 > 1$ определим $p_s = \chi^s p_0$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда, применяя (3.9), имеем

$$M = \|\mathbf{u}\|_{+\infty, Q}$$

$$\leqslant \left(\frac{c_*^2}{p_0 - 1}\right)^{\frac{1}{p_0}\sum \chi^{-s}} \chi^{\frac{1}{p_0}\sum s\chi^{-s}} \varkappa^{\frac{2}{p_0}\sum \chi^{-s}} (M^{q-2} - 1)^{\frac{1}{p_0}\sum \chi^{-s}} \|\mathbf{u}\|_{p_0, Q}.$$

Так как $\sum\limits_{s=0}^{+\infty} \chi^{-s} = \frac{n}{2}$ и $\sum\limits_{s=0}^{+\infty} s\chi^{-s} = \frac{n(n-2)}{4}$, то окончательно

$$M \leqslant c_5(p_0, n, \Omega) \varkappa^{2 \cdot \frac{n}{2p_0}} (M^{q-2} - 1)^{\frac{n}{2p_0}} \|\mathbf{u}\|_{p_0, Q}. \qquad (3.10)$$

Заметим, что пока все рассуждения справедливы для $q \in (2; 2^*]$.

Теперь используем условие $q \in (2; 2+2/n]$. Так как $0 < q-2 \leqslant \frac{2}{n}$, то $M^{q-2} - 1 \leqslant \frac{n}{2} \cdot M^{2/n}(q-2)$. Тогда, при $p_0 = 2$, из (3.10) следует

$$M \leqslant c_6(n, \Omega)[\varkappa^2(q-2)]^{\frac{n}{4}} M^{\frac{1}{2}},$$

то есть, с учетом (3.1),

$$\sup \mathbf{u} = M \leqslant \pi^n c_6^2 =: M_1(n, \Omega). \qquad \square$$

Замечание 3.1. Из леммы 3.2 следует, что при $q \in (2; 2 + 2/n]$

$$0 \leqslant \varkappa^2 - \mu^2_{\varkappa, q, d} \leqslant \frac{n\pi^2 M_1^{2/n}}{2}. \qquad (3.11)$$

Оценка снизу очевидна, поскольку $\varkappa^2 - \mu^2_{\varkappa,q,d} = \widetilde{\mu}^2_{\varkappa,q} - \mu^2_{\varkappa,q,d} \geqslant 0$.

Для получения оценки сверху заметим, что уравнение (3.2) в точке максимума функции $\mathbf{u}$ дает $\varkappa^2 \leqslant \mu^2_{\varkappa,q,d}(\sup \mathbf{u})^{q-2} \leqslant \mu^2_{\varkappa,q,d} \cdot (1 + \frac{n}{2} \cdot (\sup \mathbf{u})^{2/n}(q-2))$. Так как $\mu^2_{\varkappa,q,d}(q-2) \leqslant \varkappa^2(q-2) = \pi^2$, то $\varkappa^2 - \mu^2_{\varkappa,q,d} \leqslant \frac{n\pi^2(\sup \mathbf{u})^{2/n}}{2} \leqslant \frac{n\pi^2 M_1^{2/n}}{2}$.

Лемма 3.3. *Пусть $q \in (2; 2 + 2/n]$. Тогда*

$$\inf \mathbf{u} \geqslant m_0,$$

где константа $m_0 = m_0(n, \Omega)$ не зависит от q и d.

Доказательство. Обозначим $\inf \mathbf{u} = m$. Если $m \geqslant \frac{1}{2}$, то утверждение леммы тривиально. Далее будем считать, что $m < \frac{1}{2}$.

Вновь воспользуемся методом Мозера. Перейдем от цилинда Q обратно к цилиндру Q_d. Обозначим $\widetilde{\mathbf{u}}(\xi)=\mathbf{u}(d^{1/n}x, d^{-(n-1)/n}y)$, $\xi\in Q_d$. Очевидно, $\inf\limits_{Q_d}\widetilde{\mathbf{u}}=\inf\limits_{Q}\mathbf{u}=m$. Кроме того, функция $\widetilde{\mathbf{u}}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_d}\Big(\langle\nabla\widetilde{\mathbf{u}};\nabla h\rangle+\varepsilon^2\widetilde{\mathbf{u}}h\Big)d\xi=\mu^2_{\varepsilon,q}\int\limits_{Q_d}\widetilde{\mathbf{u}}^{q-1}h\,d\xi \tag{3.12}$$

для любой функции $h\in W^1_2(Q_d)$.

Пусть ξ_0 – произвольная точка цилиндра Q_d. Подставим в (3.12) пробную функцию $h=\widetilde{\mathbf{u}}^{-1}\zeta^2$, где срезающая функция ζ удовлетворяет условиям

$$\zeta\equiv 1\quad\text{в шаре}\quad B_r(\xi_0);\qquad \operatorname{supp}\zeta\subset B_{2r}(\xi_0);\qquad |\nabla\zeta|\leqslant\frac{2}{r}.$$

Получим

$$\int\limits_{Q_d}\Big(-\frac{|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}|^2}{\widetilde{\mathbf{u}}^2}\zeta^2+2\langle\nabla\zeta;\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\rangle\frac{\zeta}{\widetilde{\mathbf{u}}}+\varepsilon^2\zeta^2\Big)d\xi=\mu^2_{\varepsilon,q}\int\limits_{Q_d}\widetilde{\mathbf{u}}^{q-2}\zeta^2d\xi;$$

$$\int\limits_{Q_d}\frac{|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}|^2}{\widetilde{\mathbf{u}}^2}\zeta^2d\xi\leqslant(\varepsilon^2-\mu^2_{\varepsilon,q}m^{q-2})\int\limits_{Q_d}\zeta^2d\xi+2\int\limits_{Q_d}\langle\nabla\zeta;\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\rangle\frac{\zeta}{\widetilde{\mathbf{u}}}d\xi;$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_d}\frac{|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}|^2}{\widetilde{\mathbf{u}}^2}\zeta^2d\xi\leqslant\big(\varepsilon^2-\mu^2_{\varepsilon,q}m^{q-2}+2\big)\int\limits_{Q_d}\big(\zeta^2+|\nabla\zeta|^2\big)\,d\xi.$$

Заметим, что $m^{q-2}\geqslant 1+(q-2)\ln m$. Тогда, с учетом $d<1$ и (3.11), имеем

$$\varepsilon^2-\mu^2_{\varepsilon,q}m^{q-2}=d^{\frac{2(n-1)}{n}}(\varkappa^2-\mu^2_{\varkappa,q,d}m^{q-2})\leqslant\varkappa^2-\mu^2_{\varkappa,q,d}\big(1+(q-2)\ln m\big)$$
$$\leqslant\frac{n\pi^2M_1^{2/n}}{2}+\pi^2\ln(1/m)$$

и

$$\int\limits_{Q_d\cap B_r(\xi_0)}\frac{|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}|^2}{\widetilde{\mathbf{u}}^2}d\xi\leqslant c_7\ln(1/m)\int\limits_{Q_d\cap B_{2r}(\xi_0)}\big(\zeta^2+|\nabla\zeta|^2\big)\,d\xi.$$

Обозначим $v_1=\ln\widetilde{\mathbf{u}}$. Тогда из предыдущего неравенства

$$\int\limits_{Q_d\cap B_r(\xi_0)}|\nabla v_1|^2d\xi\leqslant c_8\ln(1/m)\cdot r^{n-2}. \tag{3.13}$$

для любого $r > 0$. Оценка (3.13) позволяет воспользоваться леммой Джона-Ниренберга [6]. Согласно этой лемме, существуют такие две константы $c_9(n)$ и $c_{10}(n, \Omega)$, что

$$\int_{Q_d} \exp\Big(\mathbf{p} \cdot |v_1 - \bar{v}_1|\Big) d\xi \leqslant c_9 \cdot \operatorname{meas} Q_d = c_9,$$

где $\mathbf{p} = c_{10} \ln^{-\frac{1}{2}}(1/m)$, а $\bar{v}_1$ – среднее значение функции v_1 на цилиндре Q_d. Тогда

$$\int_{Q_d} \exp\Big(\mathbf{p}(v_1 - \bar{v}_1)\Big) d\xi \cdot \int_{Q_d} \exp\Big(-\mathbf{p}(v_1 - \bar{v}_1)\Big) d\xi \leqslant c_9^2;$$

$$\int_{Q_d} e^{\mathbf{p} v_1} d\xi \cdot \int_{Q_d} e^{-\mathbf{p} v_1} d\xi \leqslant c_9^2,$$

следовательно,

$$\int_{Q_d} \widetilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{p}} d\xi \cdot \int_{Q_d} \widetilde{\mathbf{u}}^{-\mathbf{p}} d\xi \leqslant c_9^2.$$

Возвращаясь обратно к цилиндру Q, имеем

$$\int_{Q} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} dz \cdot \int_{Q} \mathbf{u}^{-\mathbf{p}} dz \leqslant c_9^2, \quad \mathbf{p} = c_{10} \ln^{-\frac{1}{2}}(1/m). \tag{3.14}$$

Теперь, аналогично доказательству леммы 3.2, подставим в интегральное тождество (3.3) пробную функцию $h = \mathbf{u}^\beta$, $\beta < -1$. Получим неравенство

$$\int_{Q} \mathbf{u}^{\beta - 1} |\nabla \mathbf{u}|^2 dz \leqslant \frac{1}{|\beta|} (\varkappa^2 - \mu^2_{\varkappa, q, d} m^{q-2}) \int_{Q} \mathbf{u}^{\beta+1} dz$$

$$\leqslant c_{11} \ln(1/m) \int_{Q} \mathbf{u}^{\beta+1} dz.$$

То есть $\left(\frac{2}{\beta+1}\right)^2 \|\nabla v\|^2_{2,Q} \leqslant c_{11} \ln(1/m) \|v\|^2_{2,Q}$, где $v = \mathbf{u}^{\frac{\beta+1}{2}}$. Тогда

$$c_*^{-2} \left(\frac{2}{\beta+1}\right)^2 \|v\|^2_{2^*,Q} \leqslant \left(c_{11} \ln(1/m) + \left(\frac{2}{\beta+1}\right)^2\right) \|v\|^2_{2,Q}.$$

Возведем это неравенство в степень $(\beta+1)^{-1}<0$, получим

$$\|\mathbf{u}\|_{\chi p,Q} \geqslant \left[\frac{c_*^2 c_{11}\ln(1/m)|p|^2}{4}+1\right]^{1/p}\|\mathbf{u}\|_{p,Q}$$
$$\geqslant c_{12}^{1/p}|p|^{2/p}\ln^{1/p}(1/m)\|\mathbf{u}\|_{p,Q}, \qquad (3.15)$$

где $\chi=\frac{n}{n-2}$, $p=\beta+1<0$, а под нормой понимается выражение $\|u\|_{p,Q}=\left(\int\limits_Q u^p\,dxdy\right)^{1/p}$.

Неравенство (3.15) мы будем итерировать. Для $\mathbf{p}$, определенного в (3.14), положим $p_s=\chi^s\cdot(-\mathbf{p})$, $s=0,1,2,\ldots$ Тогда из (3.15) получаем

$$m=\|\mathbf{u}\|_{-\infty,Q}\geqslant c_{12}^{-\frac{1}{\mathbf{p}}\sum\chi^{-s}}\chi^{-\frac{1}{\mathbf{p}}\sum s\chi^{-s}}\Big(\ln(1/m)\Big)^{-\frac{1}{\mathbf{p}}\sum\chi^{-s}}\|\mathbf{u}\|_{-\mathbf{p},Q}.$$

Так как $\sum\limits_{s=0}^{+\infty}\chi^{-s}=\frac{n}{2}$ и $\sum\limits_{s=0}^{+\infty}s\chi^{-s}=\frac{n(n-2)}{4}$, то окончательно

$$m\geqslant c_{13}(n,\Omega)^{-\frac{n}{2\mathbf{p}}}\Big(\ln(1/m)\Big)^{-\frac{n}{2\mathbf{p}}}\|\mathbf{u}\|_{-\mathbf{p},Q}.$$

Заметим, что из (3.14) следует $\|\mathbf{u}\|_{-\mathbf{p},Q}\geqslant c_9^{-2/\mathbf{p}}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{p},Q}$, поэтому

$$m\Big(\ln(1/m)\Big)^{\frac{n}{2\mathbf{p}}}\geqslant c_{13}^{-\frac{n}{2\mathbf{p}}}c_9^{-\frac{2}{\mathbf{p}}}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{p},Q}. \qquad (3.16)$$

Если $\mathbf{p}\geqslant q$, то $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{p},Q}\geqslant\|\mathbf{u}\|_{q,Q}=1$ и (3.16) дает

$$m\Big(\ln(1/m)\Big)^{\frac{n}{2\mathbf{p}}}\geqslant\Big(c_{13}c_9^{\frac{4}{n}}\Big)^{-\frac{n}{2\mathbf{p}}}.$$

Если же $\mathbf{p}<q$, то $1=\|\mathbf{u}\|_{q,Q}\leqslant\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{p},Q}^{\mathbf{p}/q}\cdot M_1^{(q-\mathbf{p})/q}$, то есть $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{p},Q}\geqslant M_1^{1-q/\mathbf{p}}$. Подставляя эту оценку в (3.16), имеем

$$m\Big(\ln(1/m)\Big)^{\frac{n}{2\mathbf{p}}}\geqslant M_1\cdot\Big(c_{13}c_9^{\frac{4}{n}}M_1^{\frac{2q}{n}}\Big)^{-\frac{n}{2\mathbf{p}}}\geqslant\Big(c_{13}c_9^{\frac{4}{n}}M_1^{\frac{2}{n}\left(2+\frac{2}{n}\right)}\Big)^{-\frac{n}{2\mathbf{p}}}.$$

В любом случае, для показателя суммируемости $\mathbf{p}$, определенного в (3.14), справедливо неравенство

$$m\Big(\ln(1/m)\Big)^{\frac{n}{2\mathbf{p}}}\geqslant c_{14}^{-\frac{n}{2\mathbf{p}}}(n,\Omega). \qquad (3.17)$$

Обозначим $t = \ln(1/m)$. Тогда $\mathbf{p} = c_{10}/\sqrt{t}$, и (3.17) превращается в $e^{-t}(c_{14}t)^{\frac{n\sqrt{t}}{2c_{10}}} \geqslant 1$, или $\frac{n\sqrt{t}\ln(c_{14}t)}{2c_{10}} - t \geqslant 0$. Последнее неравенство выполнено только если $t \leqslant t_0(n, c_{10}, c_{14})$, то есть (3.17) выполнено только при $m \geqslant m_0(n,\Omega) := e^{-t_0}$. Следовательно, при $q \in (2; 2 + 2/n]$ имеем $\inf \mathbf{u} \geqslant m_0(n,\Omega)$. □

Леммы 3.2 и 3.3 дают необходимые оценки в случае “малых” q. Теперь рассмотрим случай “больших” q. Поскольку при $q = 2^*$ компактность вложения $W_2^1(Q)$ в $L_{2^*}(Q)$ отсутствует, необходимо доказать существование минимайзера.

Лемма 3.4. *Пусть $q = 2^*$. Существует $d_0 = d_0(n,\Omega)$ такое, что при $d \leqslant d_0$ для любого $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{kp}(2^*)$ инфимум в (1.2) достигается.*

Доказательство. Рассмотрим нормированную в $L_{2^*}(Q_d)$ минимизирующую функционал (1.2) последовательность u_k. Не умаляя общности, можно считать, что $u_k \rightharpoonup u$ в $W_2^1(Q_d)$. Дословно повторяя доказательство теоремы 2.2 [7], получаем альтернативу: либо $u_k \to u$ в $W_2^1(Q_d)$, либо $u = 0$ и $|u_k|^q \rightharpoonup \delta(\xi - \xi_0)$, $|\nabla u_k|^2 \rightharpoonup \mu_{\varepsilon,q}^2 \delta(\xi - \xi_0)$ в пространстве мер на $\overline{Q_d}$, причем $\xi_0 \in \partial Q_d$.

Во втором случае, домножая функции u_k на подходящую срезку с достаточно малым носителем, легко убедиться, что $\mu_{\varepsilon,q}^2 > 0$ не зависит от ε и d. В то же время значение функционала (1.2) на постоянной функции равно $\varepsilon^2 \leqslant \varepsilon_{kp}^2 = \frac{\pi^2(n-2)}{4} \cdot d^{\frac{2(n-1)}{n}}$. Поэтому при достаточно малых d второй случай невозможен. □

Замечание 3.2. Из доказательства леммы 3.4 следует, что при $q = 2^*$, $\varkappa = \varkappa_{kp}(2^*)$ и $d \leqslant d_0$ из любой нормированной в $L_{2^*}(Q)$ минимизирующей функционал $\mathcal{Q}_{\varkappa,2^*,d}$ последовательности можно выбрать подпоследовательность, которая сходится в $W_2^1(Q)$.

Лемма 3.5. *Пусть $q \in (2 + 2/n; 2^*]$, $d \leqslant d_0$. Тогда $\mathbf{u} \in L_\infty(Q)$, более того,*

$$\sup \mathbf{u} \leqslant c_{15}(n) \cdot s(\mathbf{u}, \tau_*), \tag{3.18}$$

где $\tau_* = \tau_*(n,\Omega)$ будет определено ниже, а $s(\mathbf{u}, \tau_*)$ определено в предложении 4.4.

Доказательство. Воспользуемся методом, предложенным в [5, гл.II, §5]. Возьмем в качестве пробной функции в (3.3) $h_s =$

$\max\{\mathbf{u}-s;0\}$, $s=s(\mathbf{u},\tau_*)$. Получим

$$\int\limits_{Q_s}\Big(\frac{1}{d^2}\mathbf{u}_x^2+\mathbf{u}_y^2+\varkappa^2(\mathbf{u}-s)^2\Big)dz$$

$$=\mu^2_{\varkappa,q,d}\int\limits_{Q_s}\mathbf{u}^q dz-s\int\limits_{Q_s}\big(\mu^2_{\varkappa,q,d}\mathbf{u}^{q-1}+\varkappa^2(\mathbf{u}-s)\big)dz,$$

где $Q_s=\big\{z\in Q\ :\ \mathbf{u}(z)>s\big\}$. Вычеркивая очевидно отрицательное слагаемое, имеем

$$\int\limits_{Q_s}\Big(\frac{1}{d^2}\mathbf{u}_x^2+\mathbf{u}_y^2+\varkappa^2(\mathbf{u}-s)^2\Big)dz\leqslant\mu^2_{\varkappa,q,d}\|\mathbf{u}\|^q_{q,Q_s}\leqslant\varkappa^2\|\mathbf{u}\|^q_{q,Q_s},$$

откуда с учетом $1<\frac{(n-2)\pi^2}{4}\leqslant\varkappa^2<\frac{n\pi^2}{2}$, $d<1$ получаем

$$\|\mathbf{u}\|^q_{q,Q_s}\geqslant\frac{1}{\varkappa^2}\|\mathbf{u}-s\|^2_{W_2^1(Q_s)}\geqslant\frac{2}{n\pi^2}\|\mathbf{u}-s\|^2_{W_2^1(Q_s)}. \tag{3.19}$$

С другой стороны,

$$\|\mathbf{u}\|^q_{q,Q_s}\leqslant\Big(\|\mathbf{u}-s\|_{q,Q_s}+s(\mathrm{meas}\ Q_s)^{1/q}\Big)^q$$

$$\leqslant 2^q\|\mathbf{u}-s\|^{q-2}_{q,Q_s}\cdot\|\mathbf{u}-s\|^2_{q,Q_s}+2^q s^q\cdot\mathrm{meas}\ Q_s\leqslant$$

$$\leqslant 2^{2^*}\|\mathbf{u}-s\|^{2/n}_{q,Q_s}\cdot\|\mathbf{u}-s\|^2_{q,Q_s}+2^{2^*}s^{2^*}\cdot\mathrm{meas}\ Q_s.$$

Последнее неравенство верно, так как $\|\mathbf{u}-s\|_{q,Q_s}\leqslant 1$. Более того,

$$\|\mathbf{u}-s\|_{q,Q_s}\leqslant\|\mathbf{u}-s\|_{2^*,Q_s}(\mathrm{meas}\,Q_s)^{1/q-1/2^*}\leqslant\|\mathbf{u}-s\|_{2^*,Q_s}.$$

Поэтому из определения $s(\mathbf{u},\tau_*)$ и теоремы вложения имеем

$$\|\mathbf{u}\|^q_{q,Q_s}\leqslant 2^{2^*}\tau_*^{2/n}\cdot\|\mathbf{u}-s\|^2_{q,Q_s}+2^{2^*}s^{2^*}\cdot\mathrm{meas}\ Q_s$$

$$\leqslant 2^{2^*}c_*^2\tau_*^{2/n}\cdot\|\mathbf{u}-s\|^2_{W_2^1(Q_s)}+2^{2^*}s^{2^*}\cdot\mathrm{meas}\ Q_s. \tag{3.20}$$

Пусть τ_* таково, что

$$2^{2^*}c_*^2\tau_*^{2/n}\leqslant\frac{1}{n\pi^2}. \tag{3.21}$$

Тогда, подставляя (3.20) в (3.19), получаем

$$\|\mathbf{u}-s\|_{W_2^1(Q_s)} \leqslant \left(2^{2^*} n\pi^2\right)^{1/2} s^{2^*/2} (\text{meas } Q_s)^{1/2}. \qquad (3.22)$$

Поэтому

$$\int\limits_{Q_s} (\mathbf{u}-s)dxdy \leqslant \|\mathbf{u}-s\|_{2^*,Q_s} (\text{meas } Q_s)^{1-1/2^*}$$

$$\leqslant c_* \|\mathbf{u}-s\|_{W_2^1(Q_s)} (\text{meas } Q_s)^{1-1/2^*} \leqslant$$

$$\leqslant c_{16} \cdot s^{2^*/2} (\text{meas } Q_s)^{3/2-1/2^*}, \qquad (3.23)$$

где $c_{16}(n,\Omega) = 2^{2^*/2} c_* \pi \sqrt{n}$.

Рассмотрим функцию $f(s) = \int\limits_{Q_s} (\mathbf{u}-s)dxdy$. По свойствам интеграла Лебега

$$f(s) = -\int\limits_s^\infty (\tau - s) d(\text{meas } Q_\tau) = \int\limits_s^\infty \text{meas } Q_\tau d\tau,$$

то есть для п.в. s $f'(s) = -\text{meas } Q_s$. Поэтому (3.23) равносильно

$$f(s) \leqslant c_{16} s^{2^*/2} (-f'(s))^{3/2-1/2^*};$$

$$-f'(s)(f(s))^{-\frac{2\cdot 2^*}{3\cdot 2^*-2}} \geqslant c_{16}^{-\frac{2\cdot 2^*}{3\cdot 2^*-2}} s^{-\frac{2^*\cdot 2^*}{3\cdot 2^*-2}}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по промежутку $[s; \sup \mathbf{u}]$. Получим

$$-(f(s))^{\frac{2^*-2}{3\cdot 2^*-2}} \leqslant \frac{c_{16}^{-\frac{2\cdot 2^*}{3\cdot 2^*-2}}}{2^*-1} \left((\sup \mathbf{u})^{-\frac{(2^*-1)(2^*-2)}{3\cdot 2^*-2}} - s^{-\frac{(2^*-1)(2^*-2)}{3\cdot 2^*-2}} \right);$$

$$(\sup \mathbf{u})^{-\frac{(2^*-1)(2^*-2)}{3\cdot 2^*-2}} \geqslant s^{-\frac{(2^*-1)(2^*-2)}{3\cdot 2^*-2}} - (2^*-1) c_{16}^{\frac{2\cdot 2^*}{3\cdot 2^*-2}} (f(s))^{\frac{2^*-2}{3\cdot 2^*-2}}. \qquad (3.24)$$

Положим теперь

$$\tau_*(n,\Omega) = (2\cdot 2^* - 2)^{\frac{-3\cdot 2^*+2}{2^*-2}} c_{16}^{-\frac{2\cdot 2^*}{2^*-2}} (c_* M_0)^{1-2^*},$$

где $M_0(n,\Omega)$ определена в лемме 3.1. Очевидно, что $\tau_* < 1 \leqslant \|\mathbf{u}\|_{2^*,Q}$, следовательно $s(\mathbf{u},\tau_*)$ существует. Прямым вычислением несложно убедиться, что τ_* удовлетворяет (3.21). Далее,

$$f(s)s^{2^*-1} \leqslant \|\mathbf{u}-s\|_{2^*,Q_s} \cdot \left(s (\text{meas } Q_s)^{1/2^*} \right)^{2^*-1}$$

$$\leqslant \|\mathbf{u}-s\|_{2^*,Q_s}\cdot\|\mathbf{u}\|_{2^*,Q_s}^{2^*-1}\leqslant \tau_*(c_*M_0)^{2^*-1}, \tag{3.25}$$

поскольку по теореме вложения и лемме 3.1 $\|\mathbf{u}\|_{2^*,Q_s}\leqslant c_*M_0$. Подставляя (3.25) в (3.24), получаем

$$(\sup\mathbf{u})^{-\frac{(2^*-1)(2^*-2)}{3\cdot 2^*-2}}\geqslant \frac{1}{2}s^{-\frac{(2^*-1)(2^*-2)}{3\cdot 2^*-2}},$$

то есть

$$\sup\mathbf{u}\leqslant c_{15}(n)\cdot s(\mathbf{u},\tau_*). \qquad \square$$

Как указано в доказательстве леммы 3.2, неравенство (3.10) справедливо и при $q\in(2+2/n;2^*]$. Причем в этом случае $\varkappa^2\leqslant \frac{n\pi^2}{2}$, то есть

$$M\leqslant c_5(p_0,n,\Omega)\left(\frac{n\pi^2}{2}\right)^{\frac{n}{2p_0}}M^{\frac{(q-2)n}{2p_0}}\|\mathbf{u}\|_{p_0,Q}.$$

Возьмем $p_0=2^*$ и воспользуемся теоремой вложения и леммой 3.1. Получим

$$M\leqslant c_5\left(\frac{n\pi^2}{2}\right)^{\frac{n-2}{4}}M^{\frac{q-2}{2^*-2}}\|\mathbf{u}\|_{2^*,Q}\leqslant c_5c_*M_0\left(\frac{n\pi^2}{2}\right)^{\frac{n-2}{4}}\cdot M^{\frac{q-2}{2^*-2}}.$$

Следовательно, при всех $q\in(2+2/n;2^*)$ есть равномерная по d оценка

$$(\sup\mathbf{u})^{2^*-q}\leqslant c_{17}(n,\Omega). \tag{3.26}$$

Рассмотрим подробнее случай $q=2^*$. Поскольку мы не можем гарантировать единственность минимайзера функционала $\mathcal{Q}_{\varkappa,2^*,d}$ и не имеем явной оценки супремума, то покажем, что при каждом d числа $s(\mathbf{u},\tau_*)$ ограничены по $\mathbf{u}$.

Лемма 3.6. *Пусть $q=2^*$, $d\leqslant d_0$. Тогда существует число $S=S(\tau_*,d)$ такое, что для любого минимайзера $\mathbf{u}$ функционала $\mathcal{Q}_{\varkappa,2^*,d}$ выполнено $s(\mathbf{u},\tau_*)\leqslant S$.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^\infty$ нормированная в $L_{2^*}(Q)$ последовательность минимайзеров функционала $\mathcal{Q}_{\varkappa,2^*,d}$ такая, что $s(\mathbf{u}_k,\tau_*)\to+\infty$. Не умаляя общности, будем считать, что $s(\mathbf{u}_k,\tau_*)$ возрастают. Согласно замечанию 3.2, можно выбрать такую подпоследовательность $\{\mathbf{u}_{k'}\}$, что $\mathbf{u}_{k'}\to\mathbf{u}$ в $W_2^1(Q)$, а следовательно и в $L_{2^*}(Q)$, что противоречит предложению 4.4. $\square$

Лемма 3.7. *Пусть $q \in (2+2/n; 2^*]$, $d \leqslant d_0(n)$. Тогда при каждом значении d минимайзеры $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$ равномерно ограничены по q.*

Доказательство. Предположим обратное. В силу (3.26) и (3.18) это означает, что существует последовательность $q_k \uparrow 2^*$ такая, что $s(\mathbf{u}_k, \tau_*) \to +\infty$, где $\mathbf{u}_k$ – минимайзер функционала $\mathcal{Q}_{\varkappa(q_k),q_k,d}$. Не умаляя общности, будем считать, что $s(\mathbf{u}_k, \tau_*)$ возрастают.

Обозначим $\varkappa(q_k) = \varkappa_k$, $\varkappa(2^*) = \varkappa_*$. Минимайзер функционала $\mathcal{Q}_{\varkappa_*,2^*,d}$ обозначим $\mathbf{u}_*$.

Сначала покажем, что

$$\lim_{k\to+\infty} \mu^2_{\varkappa_k,q_k,d} = \mu^2_{\varkappa_*,2^*,d}. \tag{3.27}$$

Заметим, что если $q_{k_1} < q_{k_2}$, то $\varkappa_{k_1} > \varkappa_{k_2}$. Следовательно, для любой функции $u \in W_2^1(Q)$

$$\mathcal{Q}_{\varkappa_{k_1},q_{k_1},d}(u) \geqslant \mathcal{Q}_{\varkappa_{k_1},q_{k_2},d}(u) \geqslant \mathcal{Q}_{\varkappa_{k_2},q_{k_2},d}(u),$$

то есть последовательность $\mu_{\varkappa_k,q_k,d}$ не возрастает. Допустим

$$\lim_{k\to+\infty} \mu^2_{\varkappa_k,q_k,d} = \mu^2_* = \mu^2_{\varkappa_*,2^*,d} + \sigma,\ \sigma > 0.$$

Тогда

$$\mathcal{Q}_{\varkappa_k,q_k,d}(\mathbf{u}_*) = \frac{d^{-2}\|(\mathbf{u}_*)_x\|^2_{2,Q} + \|(\mathbf{u}_*)_y\|^2_{2,Q} + \varkappa_k^2\|\mathbf{u}_*\|^2_{2,Q}}{\|\mathbf{u}_*\|^2_{q_k,Q}} =$$

$$= \frac{d^{-2}\|(\mathbf{u}_*)_x\|^2_{2,Q} + \|(\mathbf{u}_*)_y\|^2_{2,Q} + \varkappa_*^2\|\mathbf{u}_*\|^2_{2,Q}}{\|\mathbf{u}_*\|^2_{q_k,Q}} + \left(\varkappa_k^2 - \varkappa_*^2\right)\frac{\|\mathbf{u}_*\|^2_{2,Q}}{\|\mathbf{u}_*\|^2_{q_k,Q}} =$$

$$= \|\mathbf{u}_*\|^{-2}_{q_k,Q}\left(\ CalQ_{\varkappa_*,2^*,d}(\mathbf{u}_*) + (\varkappa_k^2 - \varkappa_*^2)\|\mathbf{u}_*\|^2_{2,Q}\right) =$$

$$= \|\mathbf{u}_*\|^{-2}_{q_k,Q}\left(\mu^2_{\varkappa_*,2^*,d} + (\varkappa_k^2 - \varkappa_*^2)\|\mathbf{u}_*\|^2_{2,Q}\right) \to \mu^2_{\varkappa_*,2^*,d},$$

поскольку $\|\mathbf{u}_*\|_{q_k,Q} \to \|\mathbf{u}_*\|_{2^*,Q} = 1$ и $\varkappa_k \to \varkappa_*$. Следовательно $\mathcal{Q}_{\varkappa_k,q_k,d}(\mathbf{u}_*) < \mu_*^2 - \sigma/2$ при достаточно больших k. Значит $\mu^2_{\varkappa_k,q_k,d} < \mu_*^2 - \sigma/2$, что противоречит определению μ_*^2, и (3.27) доказано.

Рассмотрим нормированную в $L_{2^*}(Q)$ последовательность

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|_{2^*,Q}}.$$

Покажем, что $\hat{\mathbf{u}}_k$ является минимизирующей последовательностью для функционала $\mathcal{Q}_{\varkappa_*,2^*,d}$. Действительно, по определению

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{\varkappa_*,2^*,d}(\hat{\mathbf{u}}_k) = d^{-2}\|(\hat{\mathbf{u}}_k)_x\|^2_{2,Q} + \|(\hat{\mathbf{u}}_k)_y\|^2_{2,Q} + \varkappa_*^2\|\hat{\mathbf{u}}_k\|^2_{2,Q} \leqslant \\ \leqslant d^{-2}\|(\hat{\mathbf{u}}_k)_x\|^2_{2,Q} + \|(\hat{\mathbf{u}}_k)_y\|^2_{2,Q} + \varkappa_k^2\|\hat{\mathbf{u}}_k\|^2_{2,Q} \\ = \mathcal{Q}_{\varkappa_k,q_k,d}(\hat{\mathbf{u}}_k)\cdot\|\hat{\mathbf{u}}_k\|^2_{q_k,Q} = \mu^2_{\varkappa_k,q_k,d}\cdot\|\hat{\mathbf{u}}_k\|^2_{q_k,Q} \leqslant \\ \leqslant \mu^2_{\varkappa_k,q_k,d}\cdot\|\hat{\mathbf{u}}_k\|^2_{2^*,Q} = \mu^2_{\varkappa_k,q_k,d} \to \mu^2_{\varkappa_*,2^*,d}\end{aligned}$$

в силу (3.27). С другой стороны $\mathcal{Q}_{\varkappa_*,2^*,d}(\hat{\mathbf{u}}_k) \geqslant \mu^2_{\varkappa_*,2^*,d}$. Следовательно, по лемме о сжатой последовательности $\mathcal{Q}_{\varkappa_*,2^*,d}(\hat{\mathbf{u}}_k) \to \mu^2_{\varkappa_*,2^*,d}$. Тогда, согласно замечанию 3.2, переходя к подпоследовательности, можно считать $\hat{\mathbf{u}}_{k'} \to \mathbf{u}_*$ в $W_2^1(Q)$ и (по теореме вложения) в $L_{2^*}(Q)$.

Более того, в силу теоремы вложения и леммы 3.1 числовая последовательность $\|\mathbf{u}_{k'}\|_{2^*,Q}$ ограничена. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\|\mathbf{u}_{k''}\|_{2^*,Q} \to \lambda$. Тогда, по определению $\mathbf{u}_{k''} = \hat{\mathbf{u}}_{k''}\cdot\|\mathbf{u}_{k''}\|_{2^*,Q} \to \lambda\mathbf{u}_*$ в $L_{2^*}(Q)$, и $s(\mathbf{u}_{k''},\tau_*)$ ограничены в силу предложения 4.4. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Теперь докажем, что $\sup\mathbf{u}$ ограничен также по d.

Лемма 3.8. *Пусть $q \in (2+2/n; 2^*]$, $d \leqslant d_0$. Тогда*

$$\sup\mathbf{u} \leqslant M_2$$

где константа $M_2 = M_2(n,\Omega)$ не зависит от q и d.

Доказательство. Определим для каждого $d \in (0; d_0]$ число $q(d)$ как значение $q \in (2+2/n; 2^*]$, при котором супремум минимайзера функционала $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$ принимает максимальное значение. Это определение корректно в силу леммы 3.7.

Предположим обратное. Поскольку $\sup\mathbf{u}$ зависит от d непрерывно, то существует последовательность $d_k \downarrow 0$ такая, что для минимайзеров $\mathbf{u}_k$ функционалов $\mathcal{Q}_{\varkappa(q(d_k)),q(d_k),d_k}$ выполнено $s(\mathbf{u}_k,\tau_*) \to +\infty$. Не умаляя общности, можно считать, что $s(\mathbf{u}_k,\tau_*)$ возрастают.

Обозначим $\varkappa_k = \varkappa(q(d_k))$ и $q_k = q(d_k)$.

По определению

$$\frac{1}{d_k^2}\|(\mathbf{u}_k)_x\|^2_{2,Q} + \|(\mathbf{u}_k)_y\|^2_{2,Q} + \varkappa_k^2\|\mathbf{u}_k\|^2_{2,Q} \leqslant \varkappa_k^2 \leqslant \frac{n\pi^2}{2},$$

откуда $\|(\mathbf{u}_k)_x\|^2_{2,Q} \leqslant \frac{d_k^2 n\pi^2}{2} \to 0$. Кроме того, по лемме 3.1 последовательность $\mathbf{u}_k$ ограничена в $W_2^1(Q)$. Тогда, переходя к подпоследовательности, имеем $\mathbf{u}_k \rightharpoonup u$ в $W_2^1(Q)$ и $(\mathbf{u}_k)_x \to 0$ в $L_2(Q)$. Таким образом, $u_x \equiv 0$, то есть функция u – "одномерная".

Определим функции

$$v_k(y) = \int_\Omega \mathbf{u}_k(x,y)dx.$$

Используя предложение 4.2 и лемму 3.1, выводим

$$\|\mathbf{u}_k - u\|_{2^*,Q} \leqslant \|\mathbf{u}_k - v_k\|_{2^*,Q} + \|v_k - u\|_{2^*,Q}$$

$$\leqslant c_4 \|\nabla(\mathbf{u}_k - v_k)\|_{2,Q}^{1-2/2^*} \cdot \|(\mathbf{u}_k)_x\|_{2,Q}^{2/2^*} + \|v_k - u\|_{2^*,Q} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 (2M_0)^{1-2/2^*} \cdot \|(\mathbf{u}_k)_x\|_{2,Q}^{2/2^*} + \|v_k - u\|_{2^*,Q}. \qquad (3.28)$$

Очевидно, что $v_k \rightharpoonup u$ в $W_2^1(0;1)$ и по теореме вложения $v_k \to u$ в $L_{2^*}(0;1)$. Так как это "одномерные" функции, то $v_k \to u$ и в $L_{2^*}(Q)$. С учетом $(\mathbf{u}_k)_x \to 0$ в $L_2(Q)$, из (3.28) следует $\mathbf{u}_k \to u$ в $L_{2^*}(Q)$. Но тогда, согласно предложению 4.4 числа $s(\mathbf{u}_k, \tau_*)$ ограничены, что противоречит нашему предположению. $\square$

Леммы 3.1–3.8 обеспечивают существование всех необходимых оценок. Сформулируем и докажем основной результат.

Теорема 3.1. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда для любой строго липшицевой области Ω существует $\widehat{d}(\Omega, n)$ такое, что при всех $d < \widehat{d}$ имеем $\widehat{\varepsilon}(q) \equiv \varepsilon_{kp}(q)$, $q \in (2; 2^*]$.*

Доказательство. Пусть $d \leqslant d_0$. Тогда глобальный минимайзер (1.2) существует при всех $q \in (2; 2^*]$, а утверждение теоремы равносильно тому, что при $\varkappa = \varkappa_{kp} = \frac{\pi}{\sqrt{q-2}}$ минимайзер функционала $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$ – постоянная функция. Представим этот минимайзер в виде $\mathbf{u}(x,y) = \mathbf{1} + h(x,y) = w(y) + g(x,y)$, где $w(y) = \int_\Omega \mathbf{u}(x,y)dx$ положительна, и функция g удовлетворяет условию (2.1).

Тогда можно применить лемму 2.1. С учетом (3.1), (2.6) можно упростить так:

$$J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{u}) = J_{\varkappa,q,d}(w+g) \geqslant \widetilde{J}_{\varkappa,q}(w) + \|g_y\|^2_{2,q} + \|g_x\|^2_{2,Q} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{d^2}-\frac{\pi^2}{\lambda_{\mathcal{N},\Omega}}-c_1\pi^2\left(\frac{\sup w}{\|w\|_{q,Q}}\right)^{\frac{4}{n-2}}-c_2\pi^2\|w\|_{q,Q}^{2-q}\cdot R(g,w)\right], \quad (3.29)$$

где $R(g,w)$ определено в (2.7).

Согласно леммам 3.1, 3.2 и 3.8

$$\|\nabla g\|_{2,Q}\leqslant\|\nabla\mathbf{u}\|_{2,Q}\leqslant M_0;\quad \sup w\leqslant\sup\mathbf{u}\leqslant\mathcal{M}:=\max\{M_1,M_2\}. \quad (3.30)$$

Кроме того, по неравенству Гельдера

$$\|w\|_{q,Q}=\|w\|_{q,(0;1)}=\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_\Omega\mathbf{u}(x,y)dx\right)^q dy\right)^{1/q}$$
$$\geqslant\int\limits_0^1\int\limits_\Omega\mathbf{u}(x,y)dxdy=\|\mathbf{u}\|_{1,Q}$$

и $1=\|\mathbf{u}\|_{q,Q}^q\leqslant\sup\mathbf{u}^{q-1}\|\mathbf{u}\|_{1,Q}$. То есть

$$\|w\|_{q,Q}\geqslant\sup\mathbf{u}^{1-q}\geqslant\sup\mathbf{u}^{1-2^*}\geqslant\mathcal{M}^{1-2^*}. \quad (3.31)$$

Подставляя (3.30) и (3.31) в (3.29), получаем

$$J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{u})\geqslant\widetilde{J}_{\varkappa,q}(w)+\|g_y\|_{2,q}^2+\|g_x\|_{2,Q}^2\times$$
$$\times\left[\frac{1}{d^2}-\frac{\pi^2}{\lambda_{\mathcal{N},\Omega}}-c_1\pi^2\mathcal{M}^{2^*(2^*-2)}-c_2\pi^2\mathcal{M}^{(2^*-1)(2^*-2)}\cdot R(g,w)\right]. \quad (3.32)$$

По лемме 3.3 при $q\in(2;2+2/n]$ $\inf w\geqslant\inf\mathbf{u}\geqslant m_0$. Используя (3.30), можно оценить $R(g,w)$ следующим образом:

$$R(g,w)\leqslant\begin{cases} m_0^{-\frac{2}{n}}M_0^{\frac{2}{n}} & \text{при}\ \ 2<q\leqslant 2+\frac{2}{n};\\ M_0 & \text{при}\ \ 2+\frac{2}{n}<q\leqslant 3;\\ 2M_0^{2^*-2} & \text{при}\ \ q>3.\end{cases}$$

То есть при всех $q\in(2;2^*]$ оценка (3.32) имеет вид

$$J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{u})\geqslant\widetilde{J}_{\varkappa,q}(w)+\|g_y\|_{2,Q}^2+\left(\frac{1}{d^2}-c_{18}(n,\Omega)\right)\|g_x\|_{2,Q}^2.$$

Тогда при $d<(c_{18}+1)^{-\frac{1}{2}}$

$$J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{u})\geqslant\widetilde{J}_{\varkappa,q}(w)+\|g_y\|_{2,Q}^2+\|g_x\|_{2,Q}^2.$$

С другой стороны, поскольку функция $\mathbf{u}$ минимизирует функционал $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$, имеем $J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{u}) \leqslant J_{\varkappa,q,d}(\mathbf{1}) = 0$. Следовательно, $\nabla g \equiv 0$ и $\widetilde{J}_{\varkappa,q}(w) = 0$. Первое, ввиду условия (2.1), означает $g \equiv 0$. Кроме того, в [3] доказано, что $\widetilde{J}_{\varkappa,q}(w) = 0$ равносильно $w = \mathrm{const}$. С учетом нормировки функции $\mathbf{u}$, получаем $w = \mathbf{1}$, то есть $\mathbf{u} = w + g = \mathbf{1}$.

Таким образом, при $\varkappa = \varkappa_{kp}$ и $d < \min\left\{(c_{18}+1)^{-\frac{1}{2}}, d_0\right\} := \widehat{d}(n,\Omega)$ **глобальный** минимайзер функционала $\mathcal{Q}_{\varkappa,q,d}$ – постоянная функция. То есть, при $d < \widehat{d}(n,\Omega)$ для функционала (1.2) на цилиндре Q_d имеем $\widehat{\varepsilon}(q) \equiv \varepsilon_{kp}(q)$. □

4. Вспомогательные утверждения

Предложение 4.1. *Пусть $q \in (2;3]$. Тогда для $\tau \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство*

$$|1+\tau|^q \leqslant 1 + q\tau + \frac{q(q-1)}{2}\tau^2 + c_3(q-2)|\tau|^r,$$

где $r = \max\{2+\frac{2}{n}; q\}$ и константа c_3 не зависит от q.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_t(\tau) = |1+\tau|^t \ln|1+\tau|$, $t \in (2;q)$. Так как $\lim\limits_{\tau\to-1} f_t(\tau) = 0$, доопределим функцию f_t нулем при $\tau = -1$.

Если $|\tau| < 1/2$, то $f_t(\tau) = (1+\tau)^t \ln(1+\tau) = (1 + t\tau + \frac{t(t-1)}{2}\tau^2 + O(\tau^3))(\tau - \frac{1}{2}\tau^2 + O(\tau^3)) = \tau + \frac{2t-1}{2}\tau^2 + O(\tau^3) \leqslant \tau + \frac{2t-1}{2}\tau^2 + c_3|\tau|^r$, так как $r \leqslant 3$. Поэтому

$$\int\limits_2^q f_t(\tau)dt \leqslant \int\limits_2^q \left(\tau + \frac{2t-1}{2}\tau^2 + c_3|\tau|^r\right) dt,$$

откуда получаем нужное нам неравенство при $|\tau| < 1/2$.

Если $|\tau| \geqslant 1/2$ и $q \in (2; \frac{r+2}{2})$, то $f_t(\tau) \leqslant \tau + \frac{2t-1}{2}\tau^2 + c_3|\tau|^r$ и константа c_3 не зависит от t, так как t отделено от r. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

Если же $|\tau| \geqslant 1/2$ и $q \in [\frac{r+2}{2}; 3]$, то утверждение очевидно. □

Предложение 4.2. *Пусть $p \in (2, 2^*]$. Для любой функции $g \in W_2^1(Q)$, удовлетворяющей условию (2.1), справедливо неравенство*

$$\|g\|_{p,Q}^p \leqslant c_4 \|\nabla g\|_{2,Q}^{p-2} \cdot \|g_x\|_{2,Q}^2, \tag{4.1}$$

где $c_4 = c_4(n, \Omega)$ не зависит от p.

Доказательство. Рассмотрим два случая. Если $n \geqslant 4$, то обозначим $\hat{p} = \frac{2(n-1)}{n-3}$. Тогда $W_2^1(\Omega)$ вкладывается в $L_{\hat{p}}(\Omega)$ непрерывно. С учетом (2.3), это означает

$$\left(\int\limits_{\Omega} |g|^{\hat{p}} dx\right)^{2/\hat{p}} \leqslant c_{19}(n, \Omega) \int\limits_{\Omega} |g_x|^2 dx.$$

Интегрируя по y, получаем

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\Omega} |g|^{\hat{p}} dx\right)^{2/\hat{p}} dy \leqslant c_{19} \|g_x\|_{2,Q}^2. \tag{4.2}$$

Также заметим, что $\frac{(2^*-2)\hat{p}}{\hat{p}-2} = \frac{2(n-1)}{n-2}$ – предельный показатель вложения на сечение Ω цилиндра Q. Поэтому при п.в. $y \in (0;1)$ имеем

$$\left(\int\limits_{\Omega} |g|^{\frac{(p-2)\hat{p}}{\hat{p}-2}} dx\right)^{\frac{\hat{p}-2}{\hat{p}}} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |g|^{\frac{(2^*-2)\hat{p}}{\hat{p}-2}} dx\right)^{\frac{\hat{p}-2}{(2^*-2)\hat{p}} \cdot (p-2)}$$

$$\leqslant c_{20}^{p-2}(n, \Omega) \|\nabla g\|_{2,Q}^{p-2}. \tag{4.3}$$

С другой стороны, по неравенству Гельдера

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega} |g|^p dx dy \leqslant \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\Omega} |g|^{\hat{p}} dx\right)^{2/\hat{p}} \left(\int\limits_{\Omega} |g|^{\frac{(p-2)\hat{p}}{\hat{p}-2}} dx\right)^{\frac{\hat{p}-2}{\hat{p}}} dy.$$

Подставляя (4.2) и (4.3), получаем

$$\|g\|_{p,Q}^p = \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega} |g|^p dx \leqslant c_4(n, \Omega) \|\nabla g\|_{2,Q}^{p-2} \cdot \|g_x\|_{2,Q}^2,$$

где $c_4 = c_{20}^{2^*-2} \cdot c_{19}$ не зависит от p.

Если $n = 3$, то, следуя [8, гл. III], при каждом фиксированном $y \in (0;1)$ рассмотрим "точную функцию" функции $g(\cdot, y)$:

$$M_{0,s} g(x, y)$$

$$= \sup_B \Big(\inf \Big\{ A > 0 : \mathrm{mes}(\{z \in B : |g(z,y)| > A\}) \leqslant s \cdot \mathrm{mes}(B) \Big\} \Big),$$

где параметр $s \in (0;1)$, а супремум берется по всем шарам B, лежащим в Ω и содержащим точку x. Очевидно, что $\|M_{0,s}g(\cdot,y)\|_{\infty,\Omega} \leqslant c_{24}(s)\|g(\cdot,y)\|_{BMO,\Omega}$. Пространство $W_2^1(\Omega)$ непрерывно вкладывается в $BMO(\Omega)$, поэтому

$$\|M_{0,s}g(\cdot,y)\|_{\infty,\Omega} \leqslant c_{21}(s)\|g(\cdot,y)\|_{BMO,\Omega}$$

$$\leqslant c_{22}(s,\Omega)\|g(\cdot,y)\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant c_{23}(s,\Omega)\|g_x(\cdot,y)\|_{2,\Omega},$$

где последнее неравенство верно в силу (2.3).

С другой стороны, по теореме 3 [8, гл. III] для некоторого $0 < s < 1$

$$\|g\|_{2^*,\Omega} \leqslant c_{24}(s,\Omega)\|M_{0,s}g(\cdot,y)\|_{2^*,\Omega}. \tag{4.4}$$

Тогда, при фиксированном s, для которого выполнено (4.4), получаем

$$\|g(\cdot,y)\|_{p,\Omega}^p \leqslant \|g(\cdot,y)\|_{2^*,\Omega}^p \leqslant c_{24}^p\|M_{0,s}g(\cdot,y)\|_{2^*,\Omega}^p$$

$$\leqslant c_{24}^p\|M_{0,s}g(\cdot,y)\|_{\infty,\Omega}^2 \cdot \|M_{0,s}g(\cdot,y)\|_{2^*-2,\Omega}^{p-2}$$

$$\leqslant c_{24}^p \cdot c_{23}^2 \cdot \|g_x(\cdot,y)\|_{2,\Omega}^2 \cdot \|M_{0,s}g(\cdot,y)\|_{2^*-2,\Omega}^{p-2}.$$

По лемме 1 [8, гл. III] имеем

$$\|M_{0,s}g(\cdot,y)\|_{2^*-2,\Omega} \leqslant c_{25}(\Omega)\|g(\cdot,y)\|_{2^*-2,\Omega}.$$

Заметим, что $2^* - 2 = 4$ – предельный показатель вложения на сечение Ω цилиндра Q, а значит $\|g(\cdot,y)\|_{2^*-2,\Omega} \leqslant c_{26}(\Omega)\|\nabla g\|_{2,Q}$. Окончательно,

$$\|g(\cdot,y)\|_{p,\Omega}^p \leqslant c_4(n,\Omega)\|\nabla g\|_{2,Q}^{p-2} \cdot \|g_x(\cdot,y)\|_{2,\Omega}^2,$$

где $c_4 = c_{24}^{2^*} \cdot c_{23}^2 \cdot c_{25}^{2^*-2} \cdot c_{26}^{2^*-2}$ не зависит от p. Интегрируя последнее неравенство по y, получаем (4.1). □

Предложение 4.3. *Пусть* $2 < q \leqslant 2 + 2/n$. *Обозначим* $\alpha = \left(1 - \frac{q}{2^*}\right)^{-1}$. *Тогда для любой функции* $u \in W_2^1(Q)$ *имеет место неравенство*

$$\|u\|_{q,Q}^{\frac{2\alpha q}{n}} \leqslant c_*^{\alpha(q-2)}\|u\|_{W_2^1(Q)}^{\alpha(q-2)} \cdot \|u\|_{2,Q}^2.$$

Доказательство. По неравенству Гельдера

$$\|u\|_{q,Q} \leqslant \|u\|_{2^*,Q}^{\frac{(q-2)n}{2q}} \cdot \|u\|_{2,Q}^{1-\frac{(q-2)n}{2q}}.$$

Применяя теорему вложения, имеем

$$\|u\|_{q,Q}^{q} \leqslant c_*^{\frac{(q-2)n}{2}} \|u\|_{W_2^1(Q)}^{\frac{(q-2)n}{2}} \cdot \|u\|_{2,Q}^{\frac{2q-(q-2)n}{2}}.$$

Возведя это неравенство в степень $\frac{4}{2q-(q-2)n} = \frac{2\alpha}{n}$, получаем утверждение леммы. □

Предложение 4.4. *Пусть $u \in L_{2^*}(Q)$ – положительная функция, $0 < \tau < \|u\|_{2^*,Q}$. Определим число $s(u,\tau)$ из условия*

$$\|u - s\|_{2^*,Q_s} = \tau,$$

где $Q_s = \{z \in Q \ : \ \mathbf{u}(z) > s\}$ (такое $s(u,\tau)$ существует в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега).

Пусть $u_k \in L_{2^*}(Q)$ – положительные функции и $s(u_k,\tau)$ – возрастающая последовательность. Тогда, если $u_k \to u$ в $L_{2^*}(Q)$, то последовательность $s(u_k,\tau)$ ограничена.

Доказательство. Обозначим $p = 2^*$. Докажем это утверждение от противного. Пусть $s_k := s(u_k,\tau) \to +\infty$. Поскольку $u \in L_p(Q)$, то

$$\int\limits_{Q_{s_k}} u^p\,dz \to 0. \tag{4.5}$$

С другой стороны

$$\int\limits_{Q_{s_k}} u^p\,dz \geqslant \int\limits_{Q_{s_k}} (u^p - u_k^p)dz + \int\limits_{Q_{s_k}} (u_k^p - s_k^p)dz.$$

Покажем, что первый интеграл стремится к нулю, а второй нет. Поскольку на множестве Q_{s_k} $u_k > s_k$, то

$$\int\limits_{Q_{s_k}} (u_k^p - s_k^p)dz \geqslant \int\limits_{Q_{s_k}} (u_k - s_k)^p\,dz = \tau^p.$$

С другой стороны

$$\left|\int\limits_{Q_{s_k}} (u^p - u_k^p)dz\right| \leqslant \int\limits_{Q} |u^p - u_k^p|dz \leqslant c_{27}\int\limits_{Q} |u - u_k|(u^{p-1} + u_k^{p-1})dz \leqslant$$

$$\leqslant c_{27}\|u-u_k\|_{p,Q}\cdot\left(\int\limits_Q (u^{p-1}+u_k^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}dz\right)^{1-\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant 2c_{27}\|u-u_k\|_{p,Q}\left(\|u\|^p_{p,Q}+\|u_k\|^p_{p,Q}\right)^{1-\frac{1}{p}}\leqslant c_{28}(u)\|u-u_k\|_{p,Q}\to 0.$$

Таким образом, $\int\limits_{Q_{s_k}} u^p dz$ не стремится к нулю, что противоречит (4.5). То есть s_k – ограниченная последовательность. $\square$

Я признательна А. И. Назарову за постановку задачи и обсуждение работы, а также С. В. Кислякову за указание на книгу [8].

Литература

1. А. И. Назаров, А. П. Щеглова, *О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева.* — Проблемы мат. анализа, Новосибирск, Т.Рожковская, вып. 27 (2004), 109–136.
2. А. И. Назаров, *О точной константе в одномерной теореме вложения.* — Проблемы мат. анализа, Новосибирск, Научная книга, вып. 19 (1999), 149–163.
3. А. И. Назаров, *О точных константах в одномерных теоремах вложения произвольного порядка.* — Вопросы современной теории аппроксимации. Изд. СПбГУ (2004), 146–158.
4. N. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations.* — Comm. in Pure and Appl. Math. **20** (1967), 721–747.
5. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Изд. 2, Наука, М. (1973).
6. F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation.* — Comm. on Pure and Appl. Math., **14**, No. 2 (1961), 415–426.
7. P. L. Lions, F. Pacella, and M. Tricarico, *Best constant in Sobolev inequalities for functions vanishimg on some part of the boundary and related questions.* — Indiana Univ. Math. J., **37**, No. 2 (1998), 301–324.
8. J.-O. Strömberg, A. Torchinsky, *Weighted Hardy Spaces.* Lecture Notes in Mathematics, **1381**, Springer-Verlag, New York (1989).

Scheglova A. P. The Neumann problem for semilinear elliptic equation in thin cylinder. The least energy solutions.

We prove that the least energy solution of the boundary value problem

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{q-2}u \text{ in } Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \qquad\qquad \text{on } \partial Q \end{cases}$$

is a constant for all $q \in (2; 2^*]$ if $Q \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ is a sufficiently thin cylinder.

СПбГЭТУ Поступило 10 сентября 2007 г.