Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 348, 2007 г.

В. А. Солоннников, Е. В. Фролова

О СПРАВЕДЛИВОСТИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

1. Постановка задачи

В работе рассматривается однофазная задача Стефана с малым параметром ε при производной по времени в уравнении. Пусть $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$ – неизвестная область с границей, состоящей из двух непересекающихся поверхностей: свободной Γ_t и фиксированной S. Предполагается, что неизвестная поверхность Γ_t лежит внутри области ограниченной поверхностью S. В начальный момент времени положение свободной границы задано: $\Gamma|_{t=0} = \Gamma_0 = \Gamma$, $\Omega_0 = \Omega$. Однофазная задача Стефана состоит в определении семейства поверхностей Γ_t, $t > 0$ и функции $v(x,t)$, $x \in \Omega_t$, $t > 0$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}
\varepsilon v_t - \Delta v = 0, \quad x \in \Omega_t, \quad t > 0, \\
v|_S = b, \quad v|_{t=0} = v_0, \\
v|_{\Gamma_t} = 0, \quad \left(\mathbf{V}_n + c_0 \frac{\partial v}{\partial n}\right)\bigg|_{\Gamma_t} = 0,
\end{gathered} \tag{1}$$

здесь V_n – скорость движения свободной границы в направлении нормали $\vec{n}$ к Γ_t, внутренней по отношению к области Ω_t, c_0 – положительная постоянная. Заданные функции b и v_0 удовлетворяют условиям

$$b \geqslant b_0 > 0, \quad v_0 \geqslant 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} \geqslant \delta_0 > 0 \tag{2}$$

и условиям согласования нулевого порядка

$$v_0|_\Gamma = 0, \quad v_0|_S = b(x,0). \tag{3}$$

Задача (1) описывает процесс плавления вещества с удельной теплоемкостью ε, $v(x,t)$ – температура плавящегося вещества.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00941).

При фиксированном положительном ε теория классической разрешимости однофазной задачи Стефана (1) построена в [1–7]. Основным результатом этой теории является однозначная разрешимость задачи на некотором конечном интервале времени в пространствах Гёльдера. Мы докажем, что задача (1) разрешима на некотором интервале времени, не зависящем от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, сравнивая ее решение с решением задачи Hele–Show, которая описывает процесс плавления вещества с нулевой удельной теплоемкостью и является квазистационарным приближением для задачи Стефана.

Пусть $\Omega_t^0 \subset \mathbb{R}^n$ – неизвестная область, $\partial\Omega_t^0 = \Gamma_t^0 \cup S$, где Γ_t^0 – свободная поверхность, лежащая внутри области ограниченной замкнутой поверхностью S. Задача Hele–Show состоит в определении семейства поверхностей Γ_t^0, $t > 0$ и функции $w(x,t)$, $x \in \Omega_t^0$, $t > 0$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &\Delta w = 0, \quad x \in \Omega_t^0, \quad t > 0, \\ &w|_S = b, \\ &w|_{\Gamma_t^0} = 0, \quad \left(\mathbf{V}_n^0 + c_0 \frac{\partial w}{\partial n^0}\right)\Big|_{\Gamma_t^0} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

здесь $\mathbf{V}_n^0$ – скорость движения свободной поверхности Γ_t^0 в направлении нормали $\vec{n}^0$ к Γ_t^0, внутренней по отношению к области Ω_t^0.

Предположим, что в начальный момент времени область $\Omega_t^0|_{t=0}$ совпадает с $\Omega_t|_{t=0} = \Omega$, постоянная $c_0 > 0$ и заданная положительная функция $b\ (x,t)$ в задаче (4) те же, что в задаче (1).

Локальная по времени классическая разрешимость задачи Hele–Show установлена в [8–10]. Для того, чтобы сравнить решения задач (1) и (4), применим к ним одну и ту же схему исследования, основанную на модификации преобразования Hanzawa, предложенной в [7, 11] для параболических задач со свободной границей.

Пусть $\Gamma \in C^{2+\alpha}$, $N(\xi)$, $\xi \in \Gamma$ – гладкое единичное векторное поле, причем

$$\vec{N}(\xi) \cdot \vec{n}(\xi) \geqslant d > 0, \quad \xi \in \Gamma.$$

Как показано в [11], множество $M = \{\xi + N(\xi)\lambda, |\lambda| < \lambda_0, \xi \in \Gamma\}$ содержит некоторую окрестность поверхности Γ. В этой окрестности уравнение $x = \xi + N(\xi)\lambda$ определяет функции $\xi(x)$, $\lambda(x)$

класса $C^{2+\alpha}$. При малых значениях $t \in [0,T)$ свободные границы Γ_t, Γ_t^0 лежат в M и могут быть заданы уравнениями $\lambda = r(\xi,t)$, $\lambda = \rho(\xi,t)$, а именно

$$\Gamma_t^0 = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \xi + N(\xi) r(\xi,t),\ \xi \in \Gamma\},$$
$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \xi + N(\xi) \rho(\xi,t),\ \xi \in \Gamma\},$$

где $r(\xi,t)$, $\rho(\xi,t)$ – неизвестные функции.

Продолжим векторное поле N в область M по формуле $N(x) = N(\xi(x))$, затем в область $\Omega \cup M$ с сохранением класса. Через Φ обозначим продолжение функции r с $\Gamma \times [0,T)$ в $\Omega \times [0,T)$ с сохранением класса. Для упрощения дальнейших вычислений, предположим также что Φ является решением уравнения Лапласа в Ω и удовлетворяет однородному условию Дирихле на поверхности S. Введем преобразование координат, которое переводит область Ω_t^0, $t > 0$ в Ω; обратное преобразование зададим следующим образом:

$$x = y + N(y)\Phi(y,t) \equiv e_\phi(y,t), \quad y \in \Omega, \quad t > 0. \tag{5}$$

Матрица Якоби J_ϕ преобразования (5) состоит из элементов

$$J_{\Phi,km} = \delta_{km} + N_k \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} + \frac{\partial N_k}{\partial y_m}\Phi.$$

Через J_Φ^{km} обозначим элементы обратной матрицы J_Φ^{-1}. Имеет место следующее соотношение между нормалями к Γ_t и Γ

$$n(t) = \frac{J_\Phi^{-T} n(0)}{|J_\Phi^{-T} n(0)|}, \quad \text{где} \quad J^{-T} = (J^{-1})^T,$$

$n(t)$ – нормаль к Γ_t, $n(0) \equiv n$ – нормаль к Γ. Воспользовавшись преобразованием координат обратным к (5), перейдем от (4) к задаче в заданной области Ω для двух неизвестных функций $W(y,t) = w(e_\Phi(y,t),t)$ и $\Phi(y,t)$:

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_{\Phi,0} W = 0, \quad y \in \Omega, \quad t > 0, \\
W|_S = b, \\
W|_\Gamma = 0, \quad \left(\Phi_t + c_0 B_\Phi \frac{\partial W}{\partial n}\right)\Big|_\Gamma = 0, \\
\Delta\Phi = 0, \quad y \in \Omega, \quad t > 0, \\
\Phi|_S = 0, \quad \Phi|_{\Gamma,t=0} = 0,
\end{gathered} \tag{6}$$

здесь введены следующие обозначения:

$$\mathcal{L}_{\Phi,0}W = L_{\Phi,0}W - (N\cdot J_\Phi^{-T}\nabla W)L_{\Phi,0}\Phi + \vec{m}(\Phi)\cdot\nabla W, \tag{7}$$

$$L_{\Phi,0}W = \sum_{k,j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} J_\Phi^{kp}J_\Phi^{jp}\frac{\partial^2 W}{\partial y_k\partial y_j},$$

$$[\vec{m}(\Phi)]_p = \sum_{j,k,i,q=1}^{n} J_\Phi^{ki}J_\Phi^{pj}J_\Phi^{qi}\left(\frac{\partial N_j}{\partial y_q}\frac{\partial\Phi}{\partial y_k} + \frac{\partial N_j}{\partial y_k}\frac{\partial\Phi}{\partial y_q} + \Phi\frac{\partial^2 N_j}{\partial y_k\partial y_q}\right),$$

$$B_\Phi = (N\cdot J_\Phi^{-T}n)^{-1}(n\cdot(J_\Phi^{-1}J_\Phi^{-T})n).$$

Сформулируем теорему о разрешимости задачи (6), доказанную в [10].

Через $\widetilde{C}([0,T);C^l(\Omega))$ обозначим пространство функций непрерывных по $(x,t)\in\{(x,t)|x\in\Omega, t\in[0,T)\}$ и имеющих конечную норму

$\sup\limits_{t<T}|u(\cdot,t)|_\Omega^{(l)}$, где $|u|_\Omega^{(l)}$ – норма в пространстве $C^l(\Omega)$.

Теорема 1 ([10]). *Пусть поверхности $S,\Gamma\in C^{2+\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$, заданная положительная функция b является элементом пространства $\widetilde{C}([0,T);C^{2+\alpha}(S))$. Существует единственное решение $(W(y,t), \Phi(y,t))$ задачи (6), определенное на $\Omega\times[0,t^*)$, с некоторым $t^*<T$ и обладающее следующими свойствами:*

$$W\in\widetilde{C}([0,t^*);C^{2+\alpha}(\Omega)),\quad \Phi\in\widetilde{C}([0,t^*);C^{2+\alpha}(\Omega)),$$
$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_\Gamma\in\widetilde{C}([0,t^*);C^{1+\alpha}(\Gamma)),$$
$$\sup_{\tau<t}|W(\cdot,\tau)|_\Omega^{(2+\alpha)} + \sup_{\tau<t}|\Phi(\cdot,\tau)|_\Omega^{(2+\alpha)}$$
$$+\sup_{\tau<t}|\Phi_\tau(\cdot,\tau)|_\Gamma^{(1+\alpha)} \leqslant c\sup_{\tau<t}|b(\cdot,\tau)|_S^{(2+\alpha)},\quad \forall t\leqslant t^*. \tag{8}$$

Обозначим через $\rho^*(y,t)$, $y\in\Omega$, $t>0$ продолжение неизвестной функции $\rho(\xi,t)$, определяющей свободную границу в задаче (1) в область $\Omega\times[0,T)$ с сохранением класса и так, чтобы $\rho^*|_S=0$ (в дальнейшем, для удобства вычислений мы также подчиним ρ^* некоторому параболическому уравнению). Введем преобразование координат

$$x = y + N(y)\rho^*(y,t) \equiv e_{\rho^*}(y,t). \tag{9}$$

При преобразовании $e_{\rho^*}^{-1}$, обратном к (9), задача (1) переходит в следующую задачу в заданной области Ω для двух неизвестных функций $\rho^*(y,t)$ и $\mathcal{V}(y,t) = v(e_{\rho^*}(y,t),t)$:

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_{\rho^*,\varepsilon}\mathcal{V} = 0, \quad y \in \Omega, \quad t > 0, \\ \mathcal{V}|_S = b, \quad \mathcal{V}|_{t=0} = v_0, \\ \mathcal{V}|_\Gamma = 0, \quad \left(\rho_t^* + c_0 B_{\rho^*}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n}\right)\bigg|_\Gamma = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\mathcal{L}_{\rho^*,\varepsilon}\mathcal{V} = L_{\rho^*,\varepsilon}\mathcal{V} - (N \cdot J_{\rho^*}^{-T}\nabla\mathcal{V})L_{\rho^*,\varepsilon}\rho^* - \vec{m}(\rho^*)\cdot\nabla\mathcal{V},$$

$$L_{\rho^*,\varepsilon}\mathcal{V} = \varepsilon\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial t} - L_{\rho^*,0}\mathcal{V},$$

$L_{\rho^*,0}$, $\vec{m}(\rho^*)$, S_{ρ^*} те же обозначения, что в (7), J_{ρ^*} – матрица Якоби преобразования (9).

Очевидно, что при $t = 0$ решение задачи Hele–Show (4) $w(x,0) = w_0$ является решением задачи Дирихле

$$\begin{gathered} \Delta w_0 = 0, \quad x \in \Omega, \\ w_0|_S = b(x,0), \quad w_0|_\Gamma = 0 \end{gathered}$$

и может не совпадать с заданным начальным условием в задаче Стефана (1). Введем вспомогательную функцию $V(x,t)$, которая снимает неоднородность в начальный момент времени. Пусть $V(x,t)$ является решением следующей задачи в области Ω_t^0, $t \in [0,t^*)$ с движущейся известной границей, той же что и в задаче Hele–Show (4)

$$\begin{gathered} \varepsilon V_t - \Delta V = 0, \quad x \in \Omega_t^0, \quad t > 0, \\ V|_S = 0, \quad V|_{\Gamma_t^0} = 0, \\ V|_{t=0} = v_0 - w_0. \end{gathered} \tag{11}$$

При преобразовании e_Φ^{-1}, обратном к (5), (11) преобразуется к виду

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}V(y,t) = 0, \quad y \in \Omega, \quad t > 0, \\ V|_S = 0, \quad V|_\Gamma = 0, \quad V|_{t=0} = v_0 - w_0. \end{gathered} \tag{12}$$

Мы докажем разрешимость задачи (10) на некотором интервале времени, не зависящем от ε, при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, сравнивая ее решение $(\mathcal{V}, \rho^*)$ с решением задачи в квазистационарном приближениии (W, Φ). А именно, будем искать решение в виде

$$\mathcal{V} = W + V + \mathcal{U}, \quad \rho^* = \Phi + \sigma, \tag{13}$$

где $\mathcal{U}$ и σ – новые неизвестные функции. Вследствие (6), (10), (12), (13) $\mathcal{U}$ и σ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\mathcal{L}_{\Phi+\sigma,\varepsilon}\mathcal{U} = (\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon} - \mathcal{L}_{\Phi+\sigma,\varepsilon})(W+V) - \varepsilon W_t + \varepsilon\Phi_t(N \cdot J^{-T}\nabla W) \text{ в } \Omega, t > 0,$$
$$\mathcal{U}|_S = 0, \quad \mathcal{U}|_\Gamma = 0, \quad \mathcal{U}|_{t=0} = 0, \tag{14}$$
$$\sigma_t + c_0 B_{\Phi+\sigma}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = c_0(B_\phi - B_{\phi+\sigma})\frac{\partial(W+V)}{\partial n} - c_0 B_\Phi \frac{\partial V}{\partial n} \quad \text{на} \quad \Gamma,$$
$$\sigma|_S = 0, \quad \sigma|_{t=0} = 0.$$

Так как от продолжения ρ^* мы пока потребовали лишь выполнения однородного условия Дирихле на поверхности S, можем, для упрощения дальнейших вычислений, дополнить задачу (14) параболическим уравнением для неизвестной функции σ:

$$L_{\Phi,\varepsilon}\sigma = 0. \tag{15}$$

Для того, чтобы избежать условий согласования первого порядка, докажем теоремы существования решений задач (12), (14) в весовых пространствах Гёльдера, допускающих особенности при $t = 0$.

Норма в весовых пространствах Гёльдера $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{1+\varkappa}(Q_T)$, где $\alpha \in (0,1)$, $\varkappa \in (0,1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $Q_T = \Omega \times [0,T)$, введенных В. С. Белоносовым и Т. И. Зеленяком [18], определяется следующим образом

$$|u|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{1+\varkappa,Q_T} = |u|^{(1+\varkappa,\frac{1+\varkappa}{2})}_{Q_T} + \sup_{t<T} t^{\frac{1-\varkappa}{2}}(\sup_\Omega |D_t u(x,t)| + \sup_\Omega |D^2_x u(x,t)|)$$
$$+ \sup_{t<T} t^{\frac{1+\alpha-\varkappa}{2}}([u]^{(2+\alpha)}_{x,Q'_t} + [u]^{(1+\alpha/2)}_{t,Q'_t}), \quad Q'_t = \Omega \times (t/2, t),$$
$$|u|^{(1+\varkappa,\frac{1+\varkappa}{2})}_{Q_T} = |u|_{Q_T} + |D_x u|_{Q_T} + [u]^{(1+\varkappa)}_{x,Q_T} + [u]^{(\frac{1+\varkappa}{2})}_{t,Q_T},$$
$$[u]^{(2+\alpha)}_{x,Q_t} = \sup_{(x,\tau),(y,\tau)\in Q_t} \frac{|D^2_x u(x,\tau) - D^2_y u(y,\tau)|}{|x-y|^\alpha},$$
$$[u]^{(1+\alpha/2)}_{t,Q_t} = \sup_{(x,\tau_1),(x,\tau_2)\in Q_t} \frac{|D_\tau u(x,\tau_1) - D_\tau u(x,\tau_2)|}{|\tau_1 - \tau_2|^{\alpha/2}},$$

$$|u|_{Q_t} = \sup_{(x,\tau)\in Q_t} |u(x,\tau)|.$$

Аналогично, норма в пространстве $C_{\varkappa}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(S_T)$, $S_T = S\times[0,T)$, $S=\partial\Omega$ или $S=\mathbb{R}^{n-1}$, равна

$$|u|_{\varkappa,S_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} = |u|_{S_T}^{(\varkappa,\frac{\varkappa}{2})} + \sup_{t<T} t^{\frac{1+\alpha-\varkappa}{2}}([u]_{x,S\times(t/2,t)}^{(1+\alpha)}$$

$$+[u]_{t,S\times(t/2,t)}^{(\frac{1+\alpha}{2})}) + \sup_{t<T} t^{\frac{1-\varkappa}{2}} \sup_S |D_x u(x,t)|.$$

Как будет видно ниже, при оценках в нормах весовых пространств решений задач с множителем ε при производной по времени в уравнении, появляются коэффициенты вида $(\frac{\tau}{\varepsilon})^\gamma$, $\gamma>0$. Чтобы избежать роста этих коэффициентов при $\varepsilon\to 0$ и получить оценки, равномерные по параметру ε, мы будем пользоваться оценкой в весовой норме при $t\in(0,\varepsilon)$ и оценкой в обычной гёльдеровской норме при $t\in(\varepsilon,T)$.

Пусть $u\in C_{1+\varkappa}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathcal{D}_T)$, $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}_T=\mathcal{D}\times[0,T)$. Введем следующие обозначения:

$$X^\varepsilon[u,\mathcal{D}](t) = X_\varkappa[u,\mathcal{D}](t), \quad t\in(0,\varepsilon],$$

$$X^\varepsilon[u,\mathcal{D}](t) = X_\varkappa[u,\mathcal{D}](\varepsilon) + X_0[u,\mathcal{D},(\varepsilon,t)], \quad t\in(\varepsilon,T),$$

где

$$X_\varkappa[u,\mathcal{D}](t) = \sup_{\tau<t} |u(\cdot,\tau)|_{C^{1+\varkappa}(\mathcal{D})}$$

$$+\varepsilon^{\frac{1+\varkappa}{2}}[u]_{t,\mathcal{D}\times(0,t)}^{(\frac{1+\varkappa}{2})} + \sup_{\tau<t}(\frac{\tau}{\varepsilon})^{\frac{1-\varkappa}{2}}(\sup_{\mathcal{D}}|D^2u(x,\tau)| + \varepsilon\sup_{\mathcal{D}}|u_\tau(x,\tau)|),$$

$$+\sup_{\tau<t}(\frac{\tau}{\varepsilon})^{\frac{1+\alpha-\varkappa}{2}}([D^2u(\cdot,\tau)]_{\mathcal{D}}^{(\alpha)} + \varepsilon[u_\tau(\cdot,\tau)]^{(\alpha)}$$

$$+\varepsilon^{\alpha/2}[D^2u]_{\tau,\mathcal{D}\times(\tau/2,\tau)}^{(\alpha/2)} + \varepsilon^{1+\alpha/2}[u_\tau]_{\tau,\mathcal{D}\times(\tau/2,\tau)}^{(\alpha/2)}),$$

$$X_0[u,\mathcal{D},(a,b)] = \sup_{\tau\in(a,b)} |u(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\mathcal{D})}$$

$$+\varepsilon\sup_{\tau\in(a,b)}|u_\tau(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\mathcal{D})} + \varepsilon^{\alpha/2}[D^2u]_{t,\mathcal{D}\times(a,b)}^{(\alpha/2)} + \varepsilon^{1+\alpha/2}[u_t]_{t,\mathcal{D}\times(a,b)}^{(\alpha/2)}.$$

При фиксированном $\varepsilon>0$ норма $X^\varepsilon[u,\mathcal{D}](t)$ эквивалентна норме весового пространства $C_{1+\varkappa}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathcal{D}_t)$ определенной выше.

Пусть $f \in C^{\alpha,\alpha/2}_{\varkappa-1}(\mathcal{D}_T)$, обозначим

$$\mathcal{K}^{\varepsilon}[f,\mathcal{D}](t) = \mathcal{K}_{\varkappa}[f,\mathcal{D}](t), \quad t \in (0,\varepsilon],$$

$$\mathcal{K}^{\varepsilon}[f,\mathcal{D}](t) = \mathcal{K}_{\varkappa}[f,\mathcal{D}](\varepsilon) + \mathcal{K}_0[f,\mathcal{D},(\varepsilon,t)], \quad t \in (\varepsilon,T),$$

где

$$\mathcal{K}_{\varkappa}[f,\mathcal{D}](t) = \sup_{\tau<t}(\frac{\tau}{\varepsilon})^{\frac{1-\varkappa}{2}} \sup_{\mathcal{D}} |f(x,\tau)| +$$

$$+ \sup_{\tau<t}(\frac{\tau}{\varepsilon})^{\frac{1+\alpha-\varkappa}{2}} ([f(\cdot,\tau)]^{(\alpha)}_{\mathcal{D}} + \varepsilon^{\alpha/2}[f]^{(\alpha/2)}_{\mathcal{D}\times(\tau/2.\tau)}),$$

$$\mathcal{K}_0[f,\mathcal{D},(a,b)] = \sup_{\tau\in(a,b)} |f(\cdot,\tau)|_{C^{\alpha}(\mathcal{D})} + \varepsilon^{\alpha/2} \sup_{\tau\in(a,b)} [f]^{(\alpha/2)}_{\tau,\mathcal{D}\times(a,\tau)}.$$

При фиксированном $\varepsilon > 0$ норма $\mathcal{K}^{\varepsilon}[f,\mathcal{D}](t)$ эквивалентна норме весового пространства $C^{\alpha,\alpha/2}_{\varkappa-1}(\mathcal{D}_t)$.

Пусть $\varphi \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{\varkappa}(S\times[0,t))$, $S = \partial\mathcal{D}$ или $S = \mathbb{R}^{n-1}$, обозначим

$$P^{\varepsilon}[\varphi,S](t) = P_{\varkappa}[\varphi,S](t), \quad t \in (0,\varepsilon],$$

$$P^{\varepsilon}[\varphi,S](t) = P_{\varkappa}[\varphi,S](\varepsilon) + P_0[\varphi,S,(\varepsilon,t)], \quad t \in (\varepsilon,T),$$

где

$$P_{\varkappa}[\varphi,S](t) = \sup_{\tau<t} |\varphi(\cdot,\tau)|_{C^{\varkappa}(S)} +$$

$$+\varepsilon^{\varkappa/2}[\varphi]^{(\varkappa/2)}_{t,S\times(0,t)} + \sup_{\tau<t}(\frac{\tau}{\varepsilon})^{\frac{1-\varkappa}{2}} \sup_{S} |\nabla\varphi(x,\tau)| +$$

$$+ \sup_{\tau<t}(\frac{\tau}{\varepsilon})^{\frac{1+\alpha-\varkappa}{2}} ([\varphi]^{(1+\alpha)}_{S\times(\tau/2,\tau)} + \varepsilon^{\alpha/2}[\varphi]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{\tau,S\times(\tau/2,\tau)}),$$

$$P_0[\varphi,S,(a,b)] = \sup_{\tau\in(a,b)} |\varphi|_{C^{1+\alpha}(S)} + \varepsilon^{\frac{1+\alpha}{2}} [\varphi]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,S\times(a,b)}.$$

При фиксированном $\varepsilon > 0$ норма $P^{\varepsilon}[\varphi,S](t)$ эквивалентна норме весового пространства $C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{\varkappa}(S\times[0,t))$.

Отметим, что выражения $X_{\varkappa}$, $\mathcal{K}_{\varkappa}$, $P_{\varkappa}$, X_0, $\mathcal{K}_0$, P_0 возникают при пересчете гёльдеровских норм, если сделать замену переменной $t \to t/\varepsilon$.

Сформулируем теорему о разрешимости вспомогательной задачи (12).

Теорема 2. *Пусть $S, \Gamma \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. Заданная положительная функция $b \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{1+\varkappa}(S_T)$, $v_0 \in C^{1+\varkappa}(\Omega)$. (Φ, W) – решение задачи (6) соответствующей задаче Hele–Show (см.* Т.1*), определенное при $t \in [0,t^*)$. Тогда задача (12) имеет единственное решение $V \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{1+\varkappa}(\Omega \times [0,t^*))$ и для этого решения имеет место оценка*

$$X^\varepsilon[V,\Omega](t) \leqslant c|v_0 - w_0|_{C^{1+\varkappa}(\Omega)}, \quad t \in [0,t^*). \tag{16}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть S, $\Gamma \in C^{3+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $v_0 \in C^{1+\varkappa}(\Omega)$, $b \in C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(S\times[0,t^*))$, $b_t \in \widetilde{C}([0,t^*); C^{2+\alpha}(S))$, выполнены условия (2), (3). (Φ, W) – решение задачи (6), V – решение задачи (12), определенные при $t \in [0,t^*)$* (см. Т. 1 и Т. 2).

При всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 << 1$, задача (14), (15) имеет единственное решение $(\mathcal{U},\sigma)$, определенное на $\Omega \times [0,t^0)$, $t^0 \leqslant t^*$, со следующими свойствами:

$$\mathcal{U} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\varkappa+1}(\Omega \times [0,t^0)),$$

$$\sigma \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\varkappa+1}(\Omega \times [0,t^0)), \quad \sigma_t|_\Gamma \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{\varkappa}(\Gamma \times [0,t^0)),$$

$$\begin{aligned} &X^\varepsilon[\mathcal{U},\Omega](t) + X^\varepsilon[\sigma,\Omega](t) + P^\varepsilon[\sigma_t,\Gamma](t) \\ &\leqslant c\big(K^\varepsilon[\varepsilon W_t + \varepsilon\Phi_t(N\cdot J^{-T}\nabla W),\Omega](t) \\ +&P^\varepsilon[c_0 B_\Phi \frac{\partial V}{\partial n},\Gamma](t)\big) \leqslant c(|v_0|_{C^{1+\varkappa}(\Omega)} + X^\varepsilon[b,S](t)), \quad t \leqslant t^0. \end{aligned} \tag{17}$$

Если $V_0 = v_0 - w_0 \in C^{3+\alpha}(\Omega)$, то $(\mathcal{U},\sigma)$ имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, а именно, имеет место оценка

$$\begin{aligned} &\varepsilon \sup_{\tau<t} |\mathcal{U}_\tau(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\Omega)} + \sup_{\tau<t} |\mathcal{U}(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} + \\ +&\varepsilon \sup_{\tau<t} |\sigma_\tau(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\Omega)} + \sup_{\tau<t} |\sigma(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \leqslant c\varepsilon, \quad t < t_0, \end{aligned} \tag{18}$$

постоянная c не зависит от ε.

Эта теорема вместе с теоремами 1 и 2 гарантирует существование решения задачи (10) $\mathcal{V} = \mathcal{U} + W + V$, $\rho^* = \Phi + \sigma$ при $t \in [0,t_0)$. Возвращаясь к исходной задаче Стефана (1) с помощью преобразования (5), получаем решение на некотором, не зависящем от ε

промежутке времени $[0, t_0)$, при условии, что удельная теплоемкость ε достаточно мала: $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Причем это решение отличается от суммы решения задачи в квазистационарном приближении с функцией пограничного слоя V на величины порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, что подтверждает справедливость квазистационарного приближения (4) для задачи Стефана (1).

Работа состоит из пяти параграфов, в каждом из которых своя нумерация. При ссылке на формулу из другого параграфа перед номером формулы указывается номер параграфа.

2. Линейные задачи

Выделим линейную часть в задаче (1.14), (1.15). Для этого введем вариации операторов

$$\delta\mathcal{L}_\Phi = \frac{d}{d\lambda}\mathcal{L}_{\Phi+\lambda\sigma}|_{\lambda=0}, \quad \delta B_\Phi = \frac{d}{d\lambda}B_{\Phi+\lambda\sigma}|_{\lambda=0}.$$

Уравнение в задаче (1.14) можем записать в виде

$$\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}\mathcal{U} + \delta\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}(W+V) = -\varepsilon W_t + \varepsilon\Phi_t(N \cdot J^{-T}\nabla W)$$
$$-(\mathcal{L}_{\Phi+\sigma,\varepsilon} - \mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon})\mathcal{U} - (\mathcal{L}_{\Phi+\sigma,\varepsilon} - \mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon} - \delta\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon})(W+V)$$

а динамическое краевое условие в виде

$$\sigma_t + c_0 B_\Phi \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n} + \delta B_\Phi \frac{\partial(W+V)}{\partial n} = -c_0 B_\Phi \frac{\partial V}{\partial n} -$$
$$-c_0(B_{\Phi+\sigma} - B_\phi)\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n} - c_0(B_{\Phi+\sigma} - B_\Phi - \delta B_\Phi)\frac{\partial(W+V)}{\partial n}.$$

Вследствие формулы (1.7), имеем

$$\delta\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}(W+V) = \delta L_{\Phi,\varepsilon}(W+V) - (N \cdot \delta J_\Phi^{-T}\nabla(W+V))L_{\Phi,\varepsilon}\Phi$$
$$-(N \cdot J_\Phi^{-T}\nabla(W+V)(L_{\Phi,\varepsilon}\sigma + \delta L_{\Phi,\varepsilon}\Phi) - \delta\vec{m}(\Phi) \cdot \nabla(W+V).$$

Выражения вариаций для операторов аналогичных $\delta L_{\Phi,\varepsilon} = \delta L_{\Phi,0}$, δB_Φ, $\delta\vec{m}(\Phi)$ посчитаны в [11]. В частности,

$$\delta L_{\Phi,\varepsilon}(W+V) = -\sum_{k,j=1}^{n} \delta\mathcal{A}^\Phi_{k,j}\frac{\partial^2(W+V)}{\partial y_k \partial y_j},$$

где

$$\mathcal{A}^\Phi = J_\Phi^{-1}J_\Phi^{-T}, \quad \delta J_\Phi^{-1} = -J_\Phi^{-1}(\nabla \otimes N\sigma)^T J_\Phi^{-1},$$

$$\delta B_\Phi = -2\mathcal{A}^\Phi n\cdot\nabla\sigma - (\mathcal{A}^\Phi n\cdot n)\frac{N\cdot J_\Phi^{-T}\nabla\sigma}{N\cdot J_\Phi^{-T}n}$$

$$+q(N,\Phi)\sigma \equiv -Q_n(N,\Phi)\frac{\partial\sigma}{\partial n} + Q'(N,\Phi)\cdot\nabla\sigma + q(N,\Phi)\sigma,$$

где Q_n, Q', q – непрерывные функции N, Φ, Φ_{yj}, $j = 1,\dots,n$. Отметим, что в силу предположения $N\cdot n_0 \geqslant d > 0$, коэффициент $Q_n(N,\Phi)$ положителен.

Поскольку имеет место уравнение (1.15), в выражения вариаций входят производные функции σ не выше первого порядка и задача (1.14), (1.15) принимает вид:

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}\mathcal{U} + \vec{h}\cdot\nabla\sigma + h_1\sigma = f_\varepsilon + \mathcal{F}(\mathcal{U},\sigma), \quad y\in\Omega, \quad t>0,\\
\mathcal{U}|_S = 0 \quad \mathcal{U}|_\Gamma = 0, \quad \mathcal{U}|_{t=0} = 0,\\
L_{\Phi,\varepsilon}\sigma = 0, \quad y\in\Omega, \quad t>0,\\
\sigma|_S = 0, \quad \sigma|_{t=0} = 0,\\
\sigma_t - Q_n\frac{\partial(W+V)}{\partial n}\frac{\partial\sigma}{\partial n} + Q'\cdot\nabla'\sigma\frac{\partial(W+V)}{\partial n} + q\sigma\\
+c_0B_\Phi\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n} = -c_0B_\Phi\frac{\partial V}{\partial n} + G(\mathcal{U},\sigma) \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad t>0,
\end{gathered}\tag{1}$$

где

$$f_\varepsilon = -\varepsilon W_t + \varepsilon\Phi_t(N\cdot J_\Phi^{-T}\nabla W),$$

через $\mathcal{F}$, G обозначены нелинейные слагаемые

$$\begin{gathered}
\mathcal{F} = -(\mathcal{L}_{\Phi+\sigma,\varepsilon} - \mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon})\mathcal{U} - (\mathcal{L}_{\Phi+\sigma,\varepsilon} - \mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon} - \delta\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon})(W+V),\\
G = -c_0(B_{\Phi+\sigma} - B_\Phi)\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n} - c_0(B_{\Phi+\sigma} - B_\Phi - \delta B_\Phi)\frac{\partial(W+V)}{\partial n}.
\end{gathered}\tag{2}$$

Для доказательства разрешимости задачи (1), рассмотрим две вспомогательные линейные задачи:

задачу с динамическим краевым условием

$$\begin{gathered}
\varepsilon u_t - \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial y_k\partial y_j} = 0, \quad y\in\Omega, \quad t>0,\\
u|_S = 0, \quad u|_{t=0} = 0,\\
\left.\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \vec{g}\cdot\nabla u + qu\right)\right|_\Gamma = \varphi;
\end{gathered}\tag{3}$$

и задачу Дирихле

$$eu_t - \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(y,t)\frac{\partial u}{\partial y_i} = f, \quad y \in \Omega, \quad t > 0,$$
$$u|_S = b, \quad u|_\Gamma = \psi, \quad u|_{t=0} = u_0. \tag{4}$$

Мы докажем оценки решений этих задач, равномерные относительно параметра ε. Сначала рассмотрим модельные полупространственные задачи в $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}, \quad x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{gathered} \varepsilon u_t - \Delta u = f, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t > 0, \\ (u_t + a \cdot \nabla u)|_{x_n=0} = \varphi, \quad a \in \mathbb{R}^n, \quad a_n < 0, \\ u|_{t=0} = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

и

$$\begin{gathered} \varepsilon u_t - \Delta u = f, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t > 0, \\ u|_{x_n=0} = \psi, \quad u|_{t=0} = u_0. \end{gathered} \tag{6}$$

Лемма 1. *Если*

$$f \in C^{\alpha,\alpha/2}_{\varkappa-1}(\mathbb{R}^n_{+,T}),\ u_0 \in C^{1+\varkappa}(\mathbb{R}^n_+),\ \psi \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\varkappa+1}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

$\alpha \in (0,1)$, $\varkappa \in (0,1)$ и выполнены условия согласования нулевого порядка, то для решения задачи (6) имеет место оценка

$$\begin{aligned} X_\varkappa[u, \mathbb{R}^n_+](t) \leqslant c(|u_0|_{C^{1+\varkappa}(\mathbb{R}^n_+)} + X_\varkappa[\psi, \mathbb{R}^{n-1}](t) \\ + \mathcal{K}_\varkappa[f, \mathbb{R}^n_+](t)), \quad t \in (0,T). \end{aligned} \tag{7}$$

Если $f \in C^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^n_{+,T})$, $u_0 \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$, $\psi \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ и выполнены условия соглсования первого порядка, то для решения задачи (6) имеет место оценка в пространствах Гёльдера без веса:

$$\begin{aligned} X_0[u, \mathbb{R}^n_+, (0,t)] \leqslant c(|u_0|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n_+)} \\ + X_0[\psi, \mathbb{R}^{n-1}, (0,t)] + \mathcal{K}_0[f, \mathbb{R}^n_+, (0,t)]), \quad t \in (0,T). \end{aligned} \tag{8}$$

(см. определение норм в п. 1).

Доказательство. Сделаем преобразование координат $t' = t/\varepsilon$, (6) переходит в

$$u^\varepsilon_{t'} - \Delta u^\varepsilon = f^\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t' \in (0, T/\varepsilon),$$

$$u^\varepsilon|_{t'=0} = u_0, \quad u^\varepsilon|_{x_n=0} = \psi^\varepsilon, \tag{9}$$

где $u^\varepsilon(x,t') = u(x,\varepsilon t')$, $f^\varepsilon(x,t') = f(x,\varepsilon t')$, $\psi^\varepsilon(x',t') = \psi(x',\varepsilon t')$.

Задача (9) имеет единственное решение $u^\varepsilon \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\varkappa+1}(\mathbb{R}^n_+ \times [0,T))$, которое оценивается следующим образом [16]:

$$|u^\varepsilon|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\varkappa+1}(\mathbb{R}^n_{+,T})} \leqslant c(|f^\varepsilon|_{C^{\alpha,\alpha/2}_{\varkappa-1}(\mathbb{R}^n_{+,T})} + \\ +|u_0|_{C^{1+\varkappa}(\mathbb{R}^n_+)} + |\psi^\varepsilon|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\varkappa+1}(\mathbb{R}^{n-1}_T)}). \tag{10}$$

При обратном преобразовании $t = \varepsilon t'$ оценка (10) переходит в (7). Неравенство (8) следует из оценки решения задачи Дирихле (9) в обычных пространствах Гёльдера.

Лемма 2 (следует из результатов [15] и леммы 1). *Если $\varphi \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{\varkappa}(\mathbb{R}^{n-1}_T)$, $f \in C^{\alpha,\alpha/2}_{\varkappa-1}(\mathbb{R}^n_{+,T})$, $\alpha,\sigma \in (0,1)$ и выполнено условие согласования $\varphi(x',0) = 0$, то задача (5) имеет единственное решение $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{1+\varkappa}(\mathbb{R}^n_{+,T})$, для которого верна оценка*

$$X_\varkappa[u,\mathbb{R}^n_+](t) + P_\varkappa[u_t|_{x_n=0},\mathbb{R}^{n-1}](t) \leqslant \\ \leqslant c(P_\varkappa[\varphi,\mathbb{R}^{n-1}](t) + \mathcal{K}_\varkappa[f,\mathbb{R}^n_+](t)), \quad t \in (0,T). \tag{11}$$

Если $\varphi \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}_T)$ и выполнены условия согласования первого порядка, то для решения задачи (5) имеет место оценка в пространствах Гёльдера без веса:

$$X_0[u,\mathbb{R}^n_+,(0,t)] + P_0[u_t|_{x_n=0},\mathbb{R}^{n-1},(0,t)] \leqslant \\ \leqslant c(P_0[\varphi,\mathbb{R}^{n-1},(0,t)] + \mathcal{K}_0[f,\mathbb{R}^n_+,(0,t)]), \quad t \in (0,T). \tag{12}$$

Как видно из (7), (11) (см. определение норм $\mathcal{K}_\varkappa$, $P_\varkappa$, $X_\varkappa$ в п. 1), при оценках в нормах весовых пространств появляются коэффициенты вида $(\frac{\tau}{\varepsilon})^\gamma$, $\gamma > 0$, растущие при $\varepsilon \to 0$. Чтобы избежать роста этих коэффициентов, мы применим оценку в весовой норме при $t \in (0,\varepsilon)$ и оценку в обычной Гёльдеровской норме при $t \in [\varepsilon,T]$. Так как при $t \in [\varepsilon,T]$ все функции являются элементами обычных пространств Гёльдера и при $t = \varepsilon$ выполнены условия согласования первого порядка, то вследствие (7), (8) решение задачи (6) подчиняется оценке

$$X^\varepsilon[u,\mathbb{R}^n_+](t) \leqslant c(|u_0|_{C^{1+\varkappa}(\mathbb{R}^n_+)} \\ +X^\varepsilon[\psi,\mathbb{R}^{n-1}](t) + \mathcal{K}^\varepsilon[f,\mathbb{R}^n_+](t)), \quad t \in (0,T), \tag{13}$$

вследствие (11), (12), решение задачи (5) подчиняется оценке

$$X^\varepsilon[u,\mathbb{R}^n_+](t)+P^\varepsilon[u_t|_{x_n=0},\mathbb{R}^{n-1}](t)\leqslant \\ \leqslant c(P^\varepsilon[\varphi,\mathbb{R}^{n-1}](t)+\mathcal{K}^\varepsilon[f,\mathbb{R}^n_+](t)). \tag{14}$$

Основываясь на оценках (13), (14), с помощью метода Шаудера, приходим к следующим результатам для линейных вспомогательных задач (3), (4).

Теорема 4. *Пусть* $S,\Gamma\in C^{2+\alpha}$, $a_{ij}\in C^{\alpha,\alpha/2}(\Omega_T)$, $\vec g$, $q\in C^{\alpha,\alpha/2}(\Gamma_T)$, $\vec g\cdot\vec n_0\geqslant\delta_0>0$. *При всех* $\varphi\in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{\varkappa}(\Gamma_T)$ *задача (3) имеет единственное решение* $u\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{1+\varkappa}(\Omega_T)$, *для которого верна оценка*

$$X^\varepsilon[u,\Omega](t)+P^\varepsilon[u_t|_\Gamma,\Gamma](t)\leqslant cP^\varepsilon[\varphi,\Gamma](t),\quad t\in(0,T). \tag{15}$$

Теорема 5. *Пусть* $S,\Gamma\in C^{2+\alpha}$, a_{ij}, $a_i\in C^{\alpha,\alpha/2}(\Omega_T)$. *При всех* $u_0\in C^{1+\varkappa}(\Omega)$, $b\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\varkappa+1}(S_T)$, $\psi\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\varkappa+1}(\Gamma_T)$, $f\in C^{\alpha,\alpha/2}_{\varkappa-1}(\Omega_T)$ *задача (4) имеет единственное решение* $u\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\varkappa+1}(\Omega_T)$, *для которого верна оценка*

$$X^\varepsilon[u,\Omega](t)\leqslant c(|u_0|_{C^{1+\varkappa}(\Omega)}+X^\varepsilon[b,S](t) \\ +X^\varepsilon[\psi,\Gamma](t)+\mathcal{K}^\varepsilon[f,\Omega](t)),\quad t\in(0,T). \tag{16}$$

Доказательство теоремы 4. Разрешимость задачи (3) при фиксированном $\varepsilon>0$ следует из результатов работы [13]. Докажем оценку (15). Сначала оценим полунорму

$$A=\sup_{\tau<t}a_\beta(\frac{\tau}{\varepsilon})[D^2u]^{(\alpha)}_\Omega,\quad t\leqslant T, \tag{17}$$

где $a_\beta(\frac{\tau}{\varepsilon})=\min(1,(\frac{\tau}{\varepsilon})^\beta)$, $\beta=\frac{1+\alpha-\varkappa}{2}$.

Существуют индексы i,j и точки x_0, $y_0\in\Omega$, $t_0\in(0,T)$, такие, что верно неравенство:

$$a_\beta(\frac{t_0}{\varepsilon})\frac{|u_{x_ix_j}(x_0,t_0)-u_{y_iy_j}(y_0,t_0)|}{|x_0-y_0|^\alpha}\geqslant c^*A, \tag{18}$$

где c^* зависит от числа слагаемых в полунорме A.

Фиксируем достаточно малое положительное число λ. Если $|x_0-y_0| \geqslant \lambda/2$, то (18) и интерполяционное неравенство приводят к оценке

$$A \leqslant \frac{1}{c^*} a_\beta(\frac{t_0}{\varepsilon}) \frac{2\max\limits_\Omega |u_{x_i x_j}(x,t_0)|}{(\lambda/2)^\alpha} \leqslant (\varepsilon_1 A + C_{\varepsilon_1} \max_\Omega |u|) \frac{2}{c^*(\frac{\lambda}{2})^\alpha}.$$

Выбрав ε_1 так, чтобы $\frac{2\varepsilon_1}{c^*(\lambda/2)^\alpha} < \frac{1}{2}$, имеем

$$A \leqslant 2C_{\varepsilon_1} \max_\Omega |u|. \tag{19}$$

Если же $|x_0 - y_0| < \frac{\lambda}{2}$, рассмотрим три возможности:

1) x_0 или y_0 "близки" к Γ;
2) x_0 или y_0 "близки" к S;
3) x_0 и y_0 не приближаются к $\partial\Omega$.

1) Если $\operatorname{dist}\{x_0,\Gamma\} < \frac{\lambda}{2}$ или $\operatorname{dist}\{y_0,\Gamma\} < \frac{\lambda}{2}$, выберем точку $z_0 \in \Gamma$ ближайшую к x_0 или y_0.

Не ограничивая общности, можем считать, что точка z_0 совпадает с началом координат, а нормаль к поверхности Γ в этой точке $\vec{n}(z_0)$ направлена по оси z_n (этого можно добиться, выполняя ортогональное преобразование координат). Пусть в окрестности начала координат $\mathcal{K}_{2\lambda}(0)$ поверхность Γ задается уравнением

$$x_n = F(x'), \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{K}_{2\lambda}(0).$$

Тогда, согласно предположениям теоремы,

$F \in C^{2+\alpha}(\mathcal{K}_{2\lambda}(0))$, $F(0) = 0$,

$\nabla' F(0) = (F_{x_1}(0), \dots, F_{x_{n-1}}(0)) = 0$.

Сделаем преобразование координат, распрямляющее границу

$$z' = x', \quad z_n = x_n - F(x').$$

Уравнение задачи (3) преобразуется к виду

$$\varepsilon \tilde{u}_t - \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}(z,t) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z_i \partial z_j} - \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(z,t) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z_i} = 0,$$

где

$$\tilde{a}_{ij}(z,t) = \sum_{p,k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial x_p} a_{pk} \frac{\partial z_j}{\partial x_k},$$

через $\tilde{u}$ обозначена функция u в новых координатах. Краевое условие на поверхности Γ переходит в краевое условие такого же типа. Выполняя при необходимости дополнительную линейную замену переменных, добьемся того, чтобы $\tilde{a}_{ij}(0,t_0) = \delta_{ij}$.

Умножим уравнение и краевое условие на гладкую срезающую функцию $\xi_\lambda(z)\eta_\lambda(t-t_0)$, где $\xi_\lambda(z) = 0$ при $|z| > 2\lambda$, $\xi_\lambda(z) = 1$ при $|z| < \lambda$, $|\mathcal{D}^j\xi_\lambda| \leqslant c|\lambda|^{-j}$; $\eta_\lambda(t-t_0) = 0$ при $|t-t_0| > 2\lambda^2$, $\eta_\lambda(t-t_0) = 1$ при $|t-t_0| < \lambda^2$, $\left|\frac{d^k\eta_\lambda}{dt^k}\right| \leqslant c|\lambda|^{-2k}$.

Обозначим $v = \tilde{u}\xi_\lambda(z)\eta_\lambda(t-t_0)$. Функция v является решением следующей задачи в полупространстве

$$\varepsilon v_t - \Delta v = \sum_{i,j=1}^{n} (\tilde{a}_{ij}(z,t) - \delta_{ij}) v_{z_i z_j} \tag{20}$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(z,t)\Big(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z_i}\frac{\partial \xi_\lambda(z)}{\partial z_j} + \tilde{u}\frac{\partial^2 \xi_\lambda(z)}{\partial z_i \partial z_j}\Big)\eta_\lambda(t-t_0)$$

$$+\varepsilon\tilde{u}\xi_\lambda(z)\frac{d}{dt}\eta_\lambda(t-t_0) + \sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i(z,t)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z_i}\xi_\lambda(z)\eta_\lambda(t-t_0) \equiv F(z,t), z_n > 0.$$

$$\begin{gathered} v_t + \tilde{g}(0,t_0)\cdot\nabla v = \hat{\varphi}(z,t)\xi_\lambda\eta_\lambda + \tilde{u}\xi_\lambda(z)\frac{d}{dt}\eta_\lambda(t-t_0) \\ +(\tilde{g}(0,t_0) - \tilde{g}(z,t))\cdot\nabla v + \tilde{g}(z,t)\cdot\nabla\xi_\lambda(z)\eta_\lambda(t-t_0) \\ -\tilde{g}v \equiv \tilde{\varphi}\xi_\lambda\eta_\lambda + R(z,t) \\ v|_{t=\max\{0,t_0-2\lambda^2\}} = 0. \end{gathered}$$

Применим Лемму 2. Если $\max\{0, t_0 - 2\lambda^2\} < \varepsilon$, воспользуемся весовой оценкой (11), имеем

$$\begin{aligned} X_\varkappa[v,\mathbb{R}^n_+](t) \leqslant c(P_\varkappa[\tilde{\varphi}\xi_\lambda\eta_\lambda + R(z,t),\mathbb{R}^{n-1}](t) \\ +\mathcal{K}_\varkappa[F(z,t),\mathbb{R}^n_+](t)). \end{aligned} \tag{21}$$

Если же $t_0 - 2\lambda^2 > \varepsilon$, воспользуемся оценкой без веса (12), имеем

$$\begin{aligned} X_0[v,\mathbb{R}^n_+,(0,t)] \leqslant c(P_0[\tilde{\varphi}\xi_\lambda\eta_\lambda + R(z,t),\mathbb{R}^{n-1},(0,t)] \\ +\mathcal{K}_0[F(z,t),\mathbb{R}^n_+,(0,t)]). \end{aligned} \tag{22}$$

Функции $R(z,t)$ и $F(z,t)$ содержат старшие производные функции v с коэффициентами, обращающимися в ноль при $z=0$, $t=t_0$

и младшие производные $\tilde{u}$, умноженные на производные от срезающих функций. Все слагаемые, содержащие производные $\tilde{u}$ не выше первого порядка, оценим с помощью интерполяционных неравенств. Слагаемые, содержащие производные второго порядка, будут малы если λ достаточно маленькое. Действительно, так как $a_{ij} \in C^{\alpha,\alpha/2}$, $\vec{g} \in C^{\alpha,\alpha/2}$, можно выбрать λ так, чтобы

$$\sum_{i,j=1}^{n} |\tilde{a}_{ij}(z,t) - \delta_{ij}| < \frac{1}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{g}_i(0,t_0) - \tilde{g}_i(z,t)| < \frac{1}{2}.$$

Тогда из (18), (21), (22) вытекает оценка

$$A \leqslant X^{\varepsilon}[v,\mathbb{R}^n_+](t) \leqslant c(P^{\varepsilon}[\varphi,\Gamma](t) + \max_{\Omega}|u|), \quad t \leqslant T. \tag{23}$$

2) Если $\mathrm{dist}\{x_0,S\} < \frac{\lambda}{2}$ или $\mathrm{dist}\{y_0,S\} < \frac{\lambda}{2}$, выберем точку $z_0 \in S$, ближайшую к x_0 или y_0, не ограничивая общности, будем считать, что z_0 совпадает с началом координат. Так же как в п. 1 сделаем преобразование координат, распрямляющее границу, умножим уравнение и краевое условие на гладкую срезающую функцию $\xi_\lambda(z)\eta_\lambda(t-t_0)$ и обозначим $v = \tilde{u}\xi_\lambda\eta_\lambda$. Тогда функция v является решением задачи Дирихле в полупространстве:

$$\varepsilon v_t - \Delta v = F(z,t), \quad z_n > 0, \quad t > 0, \quad v|_{z_{n=0}} = 0, \quad v|_{t=0} = 0.$$

Применяя Лемму 1 и оценивая F с помощью интерполяционного неравенства, опять приходим к (23).

3. Ясно, что оценка (23) верна и в этом случае.

Вследствие уравнения теплопроводности и (23), имеем:

$$\varepsilon \sup_{\tau<t} a_\beta(\frac{\tau}{\varepsilon})[u_\tau]^{(\alpha)} \leqslant A \leqslant c(P^{\varepsilon}[\varphi,\Gamma] + \max_{\Omega}|u|). \tag{24}$$

Для оценки слагаемых

$$\varepsilon^{\alpha/2} \sup_{\tau<t} a_\beta[\mathcal{D}^2 u]^{(\alpha/2)}_{\tau,\Omega\times(\tau/2,\tau)} + \varepsilon^{1+\alpha/2} \sup_{\tau<t} a_\beta[\mathcal{D}_\tau u]^{(\alpha/2)}_{\tau,\Omega\times(\tau/2,\tau)}$$

применим интерполяционное неравенство

$$\sup_{\Omega}|\mathcal{D}^2 u| \leqslant c([\mathcal{D}^2 u]^{(\alpha)}_{\Omega})^{1-\alpha/2}([u]^{(\alpha)}_{\Omega})^{\alpha/2}$$

к конечной разности

$$\Delta_t(h)u = u(x,t+h) - u(x,t) = \int\limits_0^h u_\xi(x,\xi)d\xi,$$

и, так как

$$[\Delta_t(h)u]^{(\alpha)} \leqslant \int\limits_0^h [u_\xi]^{(\alpha)}d\xi \leqslant \sup_{\tau<t}[u_\tau]^{(\alpha)}h,$$

имеем

$$|\Delta_t(h)D^2u| \leqslant c([\Delta_t(h)D^2u]_\Omega^{(\alpha)})^{1-\alpha/2}([\Delta_t(h)u]^{(\alpha)})^{\alpha/2}$$

$$\leqslant c([\Delta_t(h)D^2u]_\Omega^{(\alpha)})^{1-\alpha/2}h^{\alpha/2}\sup_{\tau<t}[u_\tau]^{(\alpha)})^{\alpha/2}.$$

Вследствие чего, учитывая также уравнение, получим

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\alpha/2}\sup_{\tau<t} a_\beta[\mathcal{D}^2u]^{(\alpha/2)} + \varepsilon^{1+\alpha/2}\sup_{\tau<t} a_\beta[u_\tau]^{(\alpha/2)}\\ \leqslant c(A+\varepsilon\sup_{\tau<t} a_\beta(\frac{\tau}{\varepsilon})[u_\tau]^{(\alpha)}).\end{aligned} \qquad (25)$$

Неравенства (23)-(25) дают оценку старших слагаемых в $X^\varepsilon[u,\Omega]$. Остальные оценим по интерполяционным неравенствам, это даст

$$X^\varepsilon[u,\Omega](t) \leqslant c(P^\varepsilon[\varphi,\Gamma](t) + \max_\Omega|u|). \qquad (26)$$

Поскольку $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_\Gamma = \varphi + \vec{g}\cdot\nabla u - qu$,

$$\begin{aligned}P^\varepsilon[u_t|_\Gamma,\Gamma](t) &\leqslant c(X^\varepsilon[u,\Omega](t) + P^\varepsilon[\varphi,\Gamma](t))\\ &\leqslant c(P^\varepsilon[\varphi,\Gamma](t) + \max_\Omega|u|).\end{aligned} \qquad (27)$$

По принципу максимума, так как $u|_S = 0$, $u|_{t=0} = 0$,

$$\max_\Omega|u| \leqslant \max_\Gamma|u|.$$

Очевидно, $u(\cdot,t)|_\Gamma = \int\limits_0^t \frac{\partial u(;\xi)}{\partial\xi}\big|_\Gamma d\xi$ и $\max\limits_\Gamma|u| \leqslant \int\limits_0^t |u_\xi(\cdot,\xi)|_\Gamma^{(\varkappa)}d\xi$.

Следовательно, из (27) вытекает

$$P^\varepsilon[u_t,\Gamma](t) \leqslant c(P^\varepsilon[\varphi,\Gamma](t) + \int\limits_0^t |u_\xi(\cdot,\xi)|^{(\varkappa)} d\xi)$$

$$\leqslant c(P^\varepsilon[\varphi,\Gamma](t) + \int\limits_0^t P^\varepsilon[u_\xi|_\Gamma,\Gamma](\xi)d\xi. \tag{28}$$

Применив к (28) лемму Грануолла, получим

$$P^\varepsilon[u_t,\Gamma](t) \leqslant cP^\varepsilon[\varphi,\Gamma](t),$$

что вместе с (27) и доказывает оценку (15).

Оценка (16) теоремы 5 доказывается методом Шаудера на основании оценок модельной полупространственной задачи Дирихле (см. оценки (7), (8) леммы 1).

Отбросив нелинейные слагаемые в задаче (1), приходим к следующей линейной системе:

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}\mathcal{U} + \vec{h}\cdot\nabla\sigma + h_1\sigma = f, \quad y\in\Omega, \quad t>0,\\
\mathcal{U}|_S = 0, \quad \mathcal{U}|_\Gamma = 0, \quad \mathcal{U}|_{t=0} = 0,\\
L_{\Phi,\varepsilon}\sigma = 0, \quad y\in\Omega, \quad t>0,\\
\sigma|_S = 0, \quad \sigma|_{t=0} = 0,\\
\sigma_t - Q_n\frac{\partial(W+V)}{\partial n}\frac{\partial\sigma}{\partial n} + Q'\cdot\nabla'\sigma\frac{\partial(W+V)}{\partial n} + q\sigma\\
+c_0B_\phi\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n} = \psi \quad \text{на} \quad \Gamma, t>0.
\end{gathered} \tag{29}$$

Теорема 6. *Пусть* $S,\Gamma\in C^{3+\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$, $v_0\in C^{1+\varkappa}(\Omega)$, $b\in C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(S)$, $b_t\in\widetilde{C}([0,t^*);C^{2+\alpha}(S\times[0,t)))$ *и выполняются условия* (1.2), (1.3). (Φ,W) *– решение задачи в квазистационарном приближении* (1.6), V *– решение вспомогательной задачи* (1.12), *определенные при* $t\in[0,t^*)$. *При всех* $f\in C^{\alpha,\alpha/2}_{\varkappa-1}(\Omega\times[0,t^*))$, $\psi\in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{\varkappa}(\Gamma\times[0,t^*))$. *Система* (29) *имеет единственное решение* $(\mathcal{U},\sigma)$ *со следующими свойствами:* $\mathcal{U},\sigma\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{1+\varkappa}(\Omega\times[0,t^*))$, $\sigma_t|_\Gamma\in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{\varkappa}(\Gamma\times[0,t^*))$ *и имеет место оценка*

$$\begin{gathered}
X^\varepsilon[\mathcal{U},\Omega](t) + X^\varepsilon[\sigma,\Omega](t) + P^\varepsilon[\sigma_t|_\Gamma,\Gamma](t)\\
\leqslant c_1(\mathcal{K}^\varepsilon[f,\Omega](t) + P^\varepsilon[\psi,\Gamma](t)) \equiv c\mathcal{M}(t), \quad t\in(0,t^*).
\end{gathered} \tag{30}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 6, тогда*

1) *коэффициенты операторов* $\mathcal{L}_{\phi,\varepsilon}, B_\Phi$ *функции* $\vec{h}, h_1$, Q_n, Q', q, $D_x^2\Phi \in C^{\alpha,\alpha/2}(\Omega\times[0,t^*))$.

2) *решение задачи* (1.6) (W,Φ) *имеет производную по времени, причем* W_t, $\Phi_t(N\cdot J^{-T}\nabla W)\in C^{\alpha,\alpha/2}(\Omega\times[0,t^*))$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы 6, тогда* $\exists\varepsilon_0>0$ *такое что при* $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $t\in[0,t^*)$

$$\left.\frac{\partial(W_+V)}{\partial n}\right|_\Gamma \geqslant \delta^*>0. \tag{31}$$

Доказательство лемм 3 и 4 приведем в §5.

Доказательство Теоремы 6. Воспользуемся методом последовательных приближений, разбивая на каждом шаге задачу (29) на две. Сначала найдем $\mathcal{U}^{(0)}$ как решение задачи

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}\mathcal{U}^{(0)}=f,\quad y\in\Omega,\quad t>0,\\ \mathcal{U}^{(0)}|_S=0,\quad \mathcal{U}^{(0)}|_\Gamma=0,\quad \mathcal{U}^{(0)}|_{t=0}=0.\end{gathered} \tag{32}$$

Так как $f\in C^{\alpha,\alpha/2}_{\varkappa-1}(\Omega\times[0,t^*))$, и вследствие леммы 3 к задаче (32) применима теорема 5, согласно которой задача (32) имеет единственное решение $\mathcal{U}^{(0)}\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\varkappa+1}\,(\Omega\times[0,t^*))$, для которого верна оценка

$$X^\varepsilon[\mathcal{U}^{(0)},\Omega](t)\leqslant c\mathcal{K}^\varepsilon[f,\Omega](t),\quad t\in(0,t^*). \tag{33}$$

Затем найдем $\sigma^{(0)}$ как решение задачи

$$\begin{gathered}L_{\Phi,\varepsilon}\sigma^{(0)}=0,\quad y\in\Omega,\quad t>0,\\ \sigma^{(0)}|_S=0,\quad \sigma^{(0)}|_{t=0}=0,\\ \sigma^{(0)}_t-Q_n\frac{\partial}{\partial n}(W+V)\frac{\partial\sigma^{(0)}}{\partial n}+Q'\cdot\nabla'\sigma^{(0)}\frac{\partial(W+V)}{\partial n}+q\sigma^{(0)}\\ =\psi-c_0B_\Phi\frac{\partial u^{(0)}}{\partial n}\quad\text{на}\quad\Gamma.\end{gathered} \tag{34}$$

По лемме 4, учитывая что, как отмечалось выше, коэффициент $Q_n(N,\Phi)$ положителен, заключаем что коэффициент $Q_n\frac{\partial}{\partial n}(W+V)$ тоже положителен. Воспользовавшись также леммой 3, видим, что к задаче (34) применима теорема 4. По теореме 4 задача (34) имеет единственное решение $\sigma^{(0)} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\varkappa+1}(\Omega\times[0,t^*))$, причем $\sigma^{(0)}_t|_\Gamma \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{\varkappa}(\Gamma\times[0,t^*))$ и имеет место оценка

$$X^\varepsilon[\sigma^{(0)},\Omega](t) + P^\varepsilon[\sigma^{(0)}_t|_\Gamma,\Gamma](t) \leqslant c(P^\varepsilon[\psi,\Gamma](t) + P^\varepsilon\Big[\frac{\partial\mathcal{U}^{(0)}}{\partial n},\Gamma\Big](t))$$
$$\leqslant c(P^\varepsilon[\psi,\Gamma](t) + X^\varepsilon[\mathcal{U}^{(0)},\Omega](t)) \leqslant c\mathcal{M}(t). \tag{35}$$

Затем определим $\mathcal{U}^{(m+1)}$, $\sigma^{(m+1)}$, $m=0,1,2,\ldots$ как решения задач

$$\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}\mathcal{U}^{(m+1)} = f - \vec{h}\cdot\nabla\sigma^{(m)} - h_1\sigma^{(m)}, \quad y\in\Omega, \quad t>0,$$
$$\mathcal{U}^{(m+1)}|_S = 0, \quad \mathcal{U}^{(m+1)}|_\Gamma = 0, \quad \mathcal{U}^{(m+1)}|_{t=0} = 0; \tag{36}$$

$$L_{\Phi,\varepsilon}\sigma^{(m+1)} = 0, \quad y\in\Omega, \quad t>0,$$
$$\sigma^{(m+1)}|_S = 0, \quad \sigma^{(m+1)}|_{t=0} = 0, \tag{37}$$
$$\sigma^{(m+1)}_t - Q_n\frac{\partial}{\partial n}(W+V)\frac{\partial\sigma^{(m+1)}}{\partial n}$$
$$+Q'\cdot\nabla'\sigma^{(m+1)}\frac{\partial(W+V)}{\partial n} + q\sigma^{(m+1)} = \psi - c_0B_\Phi\frac{\partial\mathcal{U}^{(m+1)}}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma.$$

Разрешимость задач (36), (37) и оценки в весовых пространствах Гёльдера следуют из теорем 4, 5.

Рассмотрим разности

$$Z^{(m+1)} = \mathcal{U}^{(m+1)} - \mathcal{U}^{(m)}, \quad \eta^{(m+1)} = \sigma^{(m+1)} - \sigma^{(m)},$$

очевидно что

$$\mathcal{U}^{(m+1)} = \mathcal{U}^{(0)} + \sum_{j=0}^{m} Z^{(j+1)}, \quad \sigma^{(m+1)} = \sigma^{(0)} + \sum_{j=0}^{m}\eta^{(j+1)},$$

$Z^{(j+1)}$ – решение задачи

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}Z^{(j+1)} = -\vec{h}\cdot\nabla\eta^{(j)} - h_1\eta^{(j)}, \quad y\in\Omega, \quad t>0,\\ Z^{(j+1)}|_S = 0, \quad Z^{(j+1)}|_\Gamma = 0, \quad Z^{(j+1)}|_{t=0} = 0, \quad j=1,2,\ldots\end{gathered} \tag{38}$$

$Z^{(1)}$ – решение задачи

$$\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}Z^{(1)} = -\vec{h}\cdot\nabla\sigma^{(0)} - h_1\sigma^{(0)}, \quad y\in\Omega, \quad t>0,$$
$$Z^{(1)}|_S = 0, \quad Z^{(1)}|_\Gamma = 0, \quad Z^{(1)}|_{t=0} = 0. \tag{39}$$

$\eta^{(j+1)}$ – решение задачи

$$\begin{gathered} L_{\Phi,\varepsilon}\eta^{(j+1)} = 0, \quad y \in \Omega, \quad t > 0, \\ \eta^{(j+1)}|_S = 0, \quad \eta^{(j+1)}|_{t=0} = 0, \\ \eta_t^{(j+1)} - Q_n \frac{\partial}{\partial n}(W+V)\frac{\partial \eta^{(j+1)}}{\partial n} + Q' \cdot \nabla' \eta^{(j+1)} + q\eta^{(j+1)} \\ = -c_0 B_\Phi \frac{\partial Z^{(j+1)}}{\partial n} \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 0,1,2,3\ldots \end{gathered} \tag{40}$$

Очевидно, что вследствие лемм 3 и 4 к задачам (38), (39), (40) также применимы теоремы 4 и 5. По теореме 5, существует единственное решение задачи (39) $Z^{(1)} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\varkappa+1}(\Omega \times [0,t^*))$, для которого верна оценка

$$\begin{aligned} X^\varepsilon[Z^{(1)},\Omega](t) &\leqslant c\mathcal{K}^\varepsilon[\vec{h}\cdot\nabla\sigma^{(0)} + h_1\sigma^{(0)},\Omega](t) \\ &\leqslant cX^\varepsilon[\sigma^{(0)},\Omega](t) \leqslant c\mathcal{M}(t), \quad t \in (0,t^*). \end{aligned} \tag{41}$$

По теореме 4, существует решение задачи (40) при $j = 0$: $\eta^{(1)} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\varkappa+1}(\Omega \times [0,t^*))$, для него верна оценка

$$\begin{gathered} X^\varepsilon[\eta^{(1)},\Omega](t) + P^\varepsilon[\eta_t^{(1)}|_\Gamma,\Gamma](t) \\ \leqslant cP^\varepsilon\left[\frac{\partial Z^{(1)}}{\partial n},\Gamma\right](t) \leqslant cX^\varepsilon[Z^{(1)},\Omega](t) \leqslant c\mathcal{M}(t),\ t \in (0,t^*). \end{gathered} \tag{42}$$

Последовательно применяя теоремы 5 и 4, найдем решения задач (38), (40) при $j = 1,2,3,\ldots$ $Z^{(j+1)} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{1+\varkappa}(\Omega \times [0,t^*))$, $\eta^{(j+1)} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{1+\varkappa}(\Omega \times [0,t^*))$, удовлетворяющие оценкам

$$X^\varepsilon[Z^{(j+1)},\Omega](t) \leqslant c\mathcal{K}^\varepsilon[\vec{h}\cdot\nabla\eta^{(j)} + h_1\eta^{(j)},\Omega](t), \tag{43}$$

$$\begin{aligned} X^\varepsilon[\eta^{(j+1)},\Omega](t) + P^\varepsilon[\eta^{(j+1)},\Gamma](t) &\leqslant cP^\varepsilon\left[\frac{\partial Z^{(j+1)}}{\partial n},\Gamma\right](t) \\ &\leqslant cX^\varepsilon[Z^{(j+1)},\Omega](t), \quad t \in (0,t^*). \end{aligned} \tag{44}$$

Введем обозначение

$$Y_j(t) = X^\varepsilon[Z^{(j)},\Omega](t) + X^\varepsilon[\eta^{(j)},\Omega](t) + P^\varepsilon[\eta^{(j)},\Gamma](t), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Сложив неравенства (41) и (42), получим

$$Y_1(t) \leqslant c\mathcal{M}(t). \tag{45}$$

Правую часть в неравенстве (43) оценим по интерполяционным неравенствам следущим образом:

$$\mathcal{K}^\varepsilon[\vec{h} \cdot \nabla \eta^{(j)} + h_1 \eta^{(j)}, \Omega](t)$$
$$\leqslant c(\vec{h}, h_1)\big(\delta X^\varepsilon[\eta^{(j)}, \Omega](t) + c_\delta \max_{\substack{y \in \Omega \\ \tau \in (0,t)}} |\eta^{(j)}(y,\tau)|\big).$$

Тогда из (43), (44) следует

$$Y_{j+1}(t) \leqslant c(\delta Y_j(t) + c_\delta \max_{\substack{y \in \Omega \\ \tau \in (0,t)}} |\eta^{(j)}(y,\tau)|), \quad t \in (0, t^*).$$

По принципу максимума

$$\max_{\substack{y \in \Omega \\ \tau \in (0,t)}} |\eta^{(j)}(y,\tau)| = \max_{\substack{y \in \Gamma \\ \tau \in (0,t)}} |\eta^{(j)}(y,\tau)|$$
$$\leqslant \int\limits_0^t |\eta_\xi^{(j)}(\cdot,\xi)|_\Gamma d\xi \leqslant \int\limits_0^t P^\varepsilon[\eta_\xi^{(j)}|_\Gamma, \Gamma](\xi) d\xi \leqslant \int\limits_0^t Y_j(\xi) d\xi.$$

Следовательно,

$$Y_{j+1}(t) \leqslant c(\delta Y_j(t) + c_\delta \int\limits_0^t Y_j(\xi) d\xi). \tag{46}$$

Считая δ достаточно маленьким, просуммируем неравенства (45) и (46) при $j = 1, \dots m$, получим

$$\sum_{j=1}^{m+1} Y_j(t) \leqslant c\big(\mathcal{M}(t) + \delta \sum_{j=2}^{m} Y_j(t) + c_\delta \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{m} Y_j(\xi) d\xi\big),$$

откуда при достаточно малом δ вытекает

$$\sum_{j=1}^{m+1} Y_j(t) \leqslant c\big(\mathcal{M}(t) + \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{m+1} Y_j(\xi) d\xi\big).$$

Из леммы Гронуолла следует, что суммы $\sum\limits_{j=1}^{m+1} Y_j(t)$ равномерно ограничены сверху через $\mathcal{M}(t)$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} Y_j(t)$ сходится. Переходя к пределу при $m \to +\infty$, найдем решение задачи (29)

$$(\mathcal{U}, \sigma) = \lim_{m\to+\infty} (\mathcal{U}^{(m)}, \sigma^{(m)}),$$

для которого имеет место оценка (30). Полученное решение единственно, т.к. разность двух решений $(\mathcal{U}, \sigma)$, $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\sigma})$ является решением задачи (29) с $f = 0$, $\psi = 0$ и следовательно, удовлетворяет оценке (30) с $\mathcal{M}(t) \equiv 0$. Откуда $\mathcal{U} \equiv \widetilde{\mathcal{U}}$, $\sigma \equiv \widetilde{\sigma}$.

3. Функция пограничного слоя

Так как по Лемме 3 коэффициенты уравнения в задаче (1.12) принадлежат пространству $C^{\alpha,\alpha/2}(\Omega \times [0, t^*))$, Теорема 2 следует из Теоремы 5.

Для того, чтобы показать что решение задачи (1.14), (1.15) $(\mathcal{U}, \sigma)$ имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon)$, требуется дополнительное исследование функции “пограничного слоя” V. Сначала докажем что L_2-норма этой функции экспоненциально убывает по времени.

Лемма 5. *Решение V задачи* (1.12) *удовлетворяет оценке*

$$\|V(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|V_0\|_{L_2(\Omega)} e^{-a\frac{t}{\varepsilon}}, \quad a > 0. \tag{1}$$

Доказательство. С помощью преобразования координат (1.5) вернемся от (1.12) к задаче (1.11) в области Ω_t^0 с известной движущейся границей. Домножим уравнение на функцию V и проинтегрируем по Ω_t^0:

$$\varepsilon \int\limits_{\Omega_t^0} V V_t dx - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega_t^0} V_{x_j x_j} V \; dx = 0.$$

Проинтегрируем по частям, воспользовавшись однородными краевыми условиями на $\partial\Omega_t^0$, имеем

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \|V\|^2_{L_2(\Omega_t^0)} + \|\nabla V\|^2_{L_2(\Omega_t^0)} = 0.$$

Еще раз воспользовавшись однородностью краевых условий, приходим к неравенству

$$\varepsilon\frac{d}{dt}\|V\|_{L_2(\Omega_t^0)} \leqslant -c\|V\|_{L_2(\Omega_t^0)}. \tag{2}$$

Так как $V|_{t=0} = V_0$, из (2) следует оценка

$$\|V(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega_t^0)} \leqslant ce^{-\frac{at}{\varepsilon}}\|V_0\|_{L_2(\Omega)},$$

с некоторым $a > 0$. Выполняя преобразование координат обратное к (1.5), приходим к (1).

Лемма 6. *Пусть* $V_0 \in C^{2+\alpha}(\Omega)$, *тогда*

$$\int\limits_0^{t_0} |V(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}d\tau \leqslant c\varepsilon|V_0|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}, \quad t_0 \leqslant t^*, \tag{3}$$

если $\Gamma, S \in C^{3+\alpha}$, $V_0 \in C^{3+\alpha}$, *то*

$$\int\limits_0^{t_0} |V(\cdot,\tau)|_{C^{3+\alpha}(\Gamma)}d\tau \leqslant c\varepsilon|V_0|_{C^{3+\alpha}(\Omega)}, \quad t_0 \leqslant t^*, \tag{4}$$

с постоянными, не зависящими от ε.

Доказательство. Применим метод, предложенный в [14] для доказательства оценок функции пограничного слоя в гидродинамике.

Предложение 1. *Для решения задачи* (1.12) *имеет место оценка*

$$\begin{aligned}\varepsilon \sup_{t-\delta<\tau<t} |V_\tau(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\Omega)} + \sup_{t-\delta<\tau<t} |V(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}_{(\Omega)}} \\ \leqslant c\varepsilon\delta^{-1}(1+\varepsilon\delta^{-1})^\beta \sup_{t-2\delta<\tau<t} \|V(\cdot,\tau)\|_{L_2(\Omega)},\end{aligned} \tag{5}$$

где $t \in (\varepsilon, t_0)$, $\delta = t/4$, $\beta = \frac{2\alpha+3}{4}$.

Доказательство. Фиксируем $t \in (\varepsilon, t_0)$ и введем срезающую функцию $\omega_\lambda(\tau)$, $\tau > 0$, $\lambda \in (0, \delta]$ со следующими свойствами:

$\omega_\lambda(\tau)$ – гладкая монотонная функция, равная нулю при $\tau < t-2\delta+\frac{\lambda}{2}$, равная единице при $\tau > t-2\delta+\lambda$, для которой справедлива оценка $|\omega'_\lambda(\tau)| \leqslant \frac{c}{\lambda}$. Функция $u = V\omega_\lambda(\tau)$ является решением задачи

$$\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon} u = \varepsilon V \omega'_\lambda(t), \quad y \in \Omega, \quad t > 0,$$
$$u|_S = 0, \quad u|_\Gamma = 0, \quad u|_{t=0} = 0.$$

Согласно оценке решения задачи Дирихле, имеем

$$\begin{aligned} &\varepsilon \sup_{t-2\delta+\lambda<\tau<t} |V_\tau(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\Omega)} + \sup_{t-2\delta+\lambda<\tau<t} |V(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \\ &\qquad \leqslant \varepsilon \sup_{\tau<t} |u_\tau(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\Omega)} + \sup_{\tau<t} |u(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \\ &\qquad\quad \leqslant c\varepsilon\lambda^{-1} \sup_{t-2\delta+\frac{\lambda}{2}<\tau<t} |V(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\Omega)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Применим интерполяционное неравенство

$$|V(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\Omega)} \leqslant \mu |V(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} + c\mu^{-\beta} \|V(\cdot,\tau)\|_{L_2(\Omega)},$$

$\beta = \frac{2\alpha+3}{4}$, которое имеет место с произвольным $\mu \in (0,1)$.

Из (6) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\varepsilon \sup_{t-2\delta+\lambda<\tau<t} |V_\tau(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\Omega)} + \sup_{t-2\delta+\lambda<\tau<t} |V(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \\ &\qquad \leqslant c_1\varepsilon\lambda^{-1}\mu \sup_{t-2\delta+\frac{\lambda}{2}<\tau<t} |V(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \\ &\qquad +c_2\varepsilon\lambda^{-1}\mu^{-\beta} \sup_{t-2\delta+\frac{\lambda}{2}<\tau<t} \|V(\cdot,\tau)\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Положим $\mu = \frac{\mu_1}{1+\varepsilon\lambda^{-1}}$, $\mu_1 \in (0,1)$ и умножим обе части неравенства (7) на $\lambda(1+\varepsilon\lambda^{-1})^{-\beta}$.

Пусть

$$f(\lambda) = \frac{\lambda}{(1+\varepsilon\lambda^{-1})^\beta}(\varepsilon \sup_{t-2\delta+\lambda<\tau<t} |V_\tau(\cdot,\tau)|_{C^\alpha} + \sup_{t-2\delta+\lambda<\tau<t} |V(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}}).$$

Вследствие (7) приходим к неравенству

$$f(\lambda) \leqslant c_1\mu_1 2^{1+\beta} f(\frac{\lambda}{2}) + c_2\varepsilon\mu_1^{-\beta} \sup_{t-2\delta<\tau<t} \|V(\cdot,\tau)\|_{L_2(\Omega)}. \tag{8}$$

Возьмем μ_1 таким маленьким, чтобы $c_1\mu_1 2^{1+\beta} < \frac{1}{2}$. Тогда, поскольку $f(0) = 0$, из (8) следует оценка

$$f(\lambda) \leqslant 2c_2\varepsilon\mu_1^{-\beta} \sup_{t-2\delta<\tau<t} \|V(\cdot,\tau)\|_{L_2(\Omega)}$$

или (что то же самое)

$$\varepsilon \sup_{t-2\delta+\lambda<\tau<t} |V_\tau(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\Omega)} + \sup_{t-2\delta+\lambda<\tau<t} |V(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \\ \leqslant 2c_2\varepsilon\mu_1^{-\beta}\frac{(1+\varepsilon\lambda^{-1})^\beta}{\lambda}\sup_{t-2\delta<\tau<t}\|V(\cdot,\tau)\|_{L_2(\Omega)}. \tag{9}$$

Положив в (9) $\lambda=\delta$, приходим к (5). Неравенство (3) выводится на основании (5) и (1) следующим образом:

$$\int\limits_0^{t_0} |V(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}d\tau = \int\limits_0^{\varepsilon} |V(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}d\tau + \int\limits_\varepsilon^{t_0} |V(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}d\tau \\ \leqslant c\big(\varepsilon|V_0|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} + \varepsilon\|V_0\|_{L_2(\Omega)}\int\limits_\varepsilon^{t_0}\delta^{-1}(t)(1+\varepsilon\delta^{-1}(t))^\beta e^{-\frac{at}{\varepsilon}}dt\big) \\ \leqslant c\varepsilon|V_0|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}.$$

Перейдем к доказательству оценки (4). Введем обозначение $V^i=\partial_iV$, где

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \mathcal{N}_i(x)\sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \mathcal{N}_i \in C^{3+\alpha}(\Omega)$$

– продолжение компонент нормали n_i с $\Gamma\cup S$ в Ω. Оператор ∂_i можно применять к функциям заданным на границе, так как $\partial_i f|_{\Gamma\cup S}$ зависит только от $f|_{\Gamma\cup S}$. Применим оператор ∂_i к задаче (1.12)

$$\varepsilon V^i_t - \mathcal{L}_{\Phi,0}V^i = Q_i(V), \quad y\in\Omega, \quad t>0, \\ V^i|_S=0, \quad V^i|_\Gamma=0, \quad V^i|_{t=0}=V^i_0, \tag{10}$$

здесь введено обозначение $Q_i = -(\partial_i(\mathcal{L}_{\Phi,0}V) - \mathcal{L}_{\Phi,0}\partial_iV)$ – коммутатор зависящий от D^2_xV.

При доказательстве Леммы 3 (см.§5) показано, что $\Phi^i \in \widetilde{C}([0,t^*);C^{2+\alpha})$.

Следовательно, применяя оценку решения задачи Дирихле, имеем

$$\varepsilon\sup_{\tau<t}|V^i_\tau(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\Omega)} + \sup_{\tau<t}|V^i(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \\ \leqslant c(\sup_{\tau<t}|V(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} + |V^i_0|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}). \tag{11}$$

Из (11) вытекает

$$\sup_{\tau<t}|V(\cdot,\tau)|_{C^{3+\alpha}(\Gamma)}\leqslant c\sum_{i=1}^{n}\sup_{\tau<t}|V^i(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}\leqslant c|V_0|_{C^{3+\alpha}(\Omega)}. \qquad (12)$$

Пусть $\omega_\delta(\tau)$, $\tau>0$ та же срезающая функция, что и при доказательстве Предложения 1. Введем функции $\mathcal{U}^i=V^i\omega_\delta$, они являются решениями задач

$$\begin{gathered}\varepsilon\mathcal{U}^i_t-\mathcal{L}_{\Phi,0}\mathcal{U}^i=Q_i(\omega_\delta V)+\varepsilon\mathcal{U}^i\omega'_\delta,\quad y\in\Omega,\quad t>0,\\ \mathcal{U}^i|_S=0,\quad \mathcal{U}^i|_\Gamma=0,\quad \mathcal{U}^i|_{t=0}=0,\end{gathered} \qquad (13)$$

$i=1,2,\dots,n$ и к ним применима оценка решения задачи Дирихле:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\sup_{t-\delta<\tau<t}|V^i_\tau(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\Omega)}+\sup_{t-\delta<\tau<t}|V^i(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}\\ &\qquad\leqslant\varepsilon\sup_{\tau<t}|\mathcal{U}^i_\tau(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\Omega)}+\sup_{\tau<t}|\mathcal{U}^i(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \qquad (14)\\ &\leqslant c\Big(\sup_{t-\frac{3}{2}\delta<\tau<t}|V(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}+\varepsilon\delta^{-1}\sup_{t-\frac{3}{2}\delta<\tau<t}|V(\cdot,\tau)|_{C^{1+\alpha}(\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

Оценивая правую часть (14) так же как при доказательстве Предложения 1 и применяя (5), имеем

$$\begin{gathered}\sup_{t-\delta<\tau<t}|V^i(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}\leqslant c\varepsilon\delta^{-1}(1+\varepsilon\delta^{-1})^{\beta_1}\sup_{t-2\delta<\tau<t}\|V(\cdot,\tau)\|_{L_2(\Omega)},\\ \beta_1>0,\quad i=1,2,\dots,n.\end{gathered} \qquad (15)$$

Из (1), (12), (15) следует

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_0}|V(\cdot,\tau)|_{C^{3+\alpha}(\Gamma)}d\tau\\ &\leqslant c\Big(\int_0^{\varepsilon}\sum_{i=1}^n|V^i(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}d\tau+\int_\varepsilon^{t_0}\sum_{i=1}^n|V^i(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}d\tau\Big)\\ &\leqslant c(\varepsilon|V_0|_{C^{3+\alpha}(\Omega)}+\varepsilon\|V_0\|_{L_2(\Omega)}\int_\varepsilon^{t_0}\delta^{-1}(t)(1+\varepsilon\delta^{-1}(t))^{\beta_1}e^{-\frac{at}{\varepsilon}}dt)\\ &\leqslant c\varepsilon|V_0|_{C^{3+\alpha}(\Omega)},\end{aligned}$$

что и дает (4).

4. Оценка нелинейных слагаемых и доказательство Теоремы 3

Разрешимость задачи (2.1) докажем с помощью метода последовательных приближений. Оценим нелинейные слагаемые (2.2):

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= -(\mathcal{L}_{\Phi+\sigma,\varepsilon} - \mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon})\mathcal{U} - (\mathcal{L}_{\Phi+\sigma,\varepsilon} - \mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon} - \delta\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon})(W+V)\\ &= (\mathcal{L}_{\Phi+\sigma,0} - \mathcal{L}_{\Phi,0})\mathcal{U} + (\mathcal{L}_{\Phi+\sigma,0} - \mathcal{L}_{\Phi,0} - \delta\mathcal{L}_{\Phi,0})(W+V)\\ &\quad -(N\cdot J^{-T}_{\Phi+\sigma} - N\cdot J^{-T}_{\Phi})(\nabla\mathcal{U} + \nabla W + \nabla V)\varepsilon\sigma_t\end{aligned}$$

и

$$G = -c_0(B_{\Phi+\sigma} - B_\Phi)\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n} - c_0(B_{\Phi+\sigma} - B_\Phi - \delta B_\Phi)\frac{\partial(W+V)}{\partial n}.$$

Для этого воспользуемся теми же соображениями, что и в [11] при оценке нелинейных слагаемых аналогичной структуры в весовых гёльдеровских нормах. А именно, применим формулы

$$(\mathcal{L}_{\Phi+\sigma,0} - \mathcal{L}_{\Phi,0})\mathcal{U} = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\lambda}\mathcal{L}_{\Phi+\lambda\sigma,0}\mathcal{U}\,d\lambda,$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\Phi+\sigma} - \mathcal{L}_{\Phi,0} - \delta\mathcal{L}_{\Phi,0})\mathcal{U} &= \int\limits_0^1 \left(\frac{d}{d\lambda}\mathcal{L}_{\Phi+\lambda\sigma,0}\mathcal{U} - \frac{d}{d\mu}\mathcal{L}_{\Phi+\mu\sigma,0}\mathcal{U}|_{\mu=0}\right)d\lambda\\ &= \int\limits_0^1 (1-\mu)\frac{d^2}{d\mu^2}\mathcal{L}_{\Phi+\mu\sigma,0}\mathcal{U}\,d\mu,\end{aligned}$$

аналогичные формулы для $B_{\Phi+\sigma} - B_\Phi$ и $B_{\Phi+\sigma} - B_\Phi - \delta B_\Phi$ и правило вычисления производной $\frac{d}{d\lambda}(f(\lambda\sigma, \lambda\nabla\sigma))$. Приходим к выводу, что $\mathcal{F}$ является линейной комбинацией слагаемых, содержащих множители σ^2, $\sigma\sigma_{yj}$, $\varepsilon\sigma_t\sigma_{y_j}$, $\sigma_{y_j}\mathcal{U}_{y_k}$, $\sigma_{y_j}\mathcal{U}_{y_ky_i}$, $\sigma_{y_j}\sigma_{y_ky_i}$, $\sigma_{y_j}\sigma_{y_k}$, $i,k,j = 1,\dots,n$, т.е. линейны относительно старших производных σ_t, $\sigma_{y_jy_i}$, $\mathcal{U}_{y_ky_i}$ и имеют множитель ε при производной по времени σ_t. Таким образом, достаточно оценить произведение двух функций, одна из которых σ или σ_{y_j}. Оценим, например, $\sigma_{y_j}\mathcal{U}_{y_ky_i}$. Очевидно,

$$\mathcal{K}^\varepsilon[\sigma_{y_j}\mathcal{U}_{y_ky_i}, \Omega](t) \leqslant \sup_{\tau<t}\sup_{\Omega}|\sigma_{y_j}(\cdot,\tau)|\mathcal{K}^\varepsilon[\mathcal{U}_{y_ky_i}, \Omega](t). \tag{1}$$

Применим интерполяционное неравенство

$$\sup_{\Omega}|\sigma_{y_j}(\cdot,\tau)| \leqslant \varepsilon_1^{\varkappa}[\sigma_{y_j}]_{\Omega}^{(\varkappa)} + c\frac{1}{\varepsilon_1}\sup_{\Omega}|\sigma(\cdot,\tau)|$$

с $\varepsilon_1 = \sqrt{\tau}$ и оценку

$$\sup_{\Omega}|\sigma(\cdot,\tau)| \leqslant \sup_{\Gamma}|\sigma(\cdot,\tau)| = \sup_{\Gamma}\int\limits_0^{\tau}\sigma_{\xi}(\cdot,\xi)d\xi \leqslant \tau\sup_{\Gamma}|\sigma_{\tau}|,$$

имеем:

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega}|\sigma_{y_j}(\cdot,\tau)| &\leqslant \tau^{\varkappa/2}[\sigma_{y_j}]_{\Omega}^{(\varkappa)} + c\tau\frac{1}{\sqrt{\tau}}\sup_{\Gamma}|\sigma_{\tau}| \\ &\leqslant \tau^{\varkappa/2}([\sigma_{y_j}]_{\Omega}^{(\varkappa)} + c\tau^{\frac{1-\varkappa}{2}}\sup_{\Gamma}|\sigma_{\tau}|). \qquad (2)\end{aligned}$$

Подставив (2) в (1), получим

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{\varepsilon}[\mathcal{U}_{y_k y_i}\sigma_{y_j},\Omega](t) &\leqslant t^{\varkappa/2}\sup_{\tau<t}([\sigma_{y_j}]_{\Omega}^{(\varkappa)} + c\tau^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}}\sup_{\Gamma}|\sigma_{\tau}|)\mathcal{K}_{\varepsilon}[\mathcal{U}_{y_k,y_i},\Omega](t) \\ &\leqslant t^{\varkappa/2}\big(X^{\varepsilon}[\sigma,\Omega](t) + P^{\varepsilon}[\sigma_t,\Gamma](t)\big)X^{\varepsilon}[\mathcal{U},\Omega](t). \qquad (3)\end{aligned}$$

Аналогично оцениваются и другие произведения. В итоге приходим к оценке

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{\varepsilon}[\mathcal{F}(\mathcal{U},\sigma),\Omega](t) &\leqslant c_2 t^{\varkappa/2}\big(X^{\varepsilon}[\sigma,\Omega](t) \\ &+P^{\varepsilon}[\sigma_t,\Gamma](t)\big)\big(X^{\varepsilon}[\sigma,\Omega](t) + X^{\varepsilon}[\mathcal{U},\Omega](t)\big). \qquad (4)\end{aligned}$$

Такая же оценка имеет место и для разности:

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}^{\varepsilon}[\mathcal{F}(\mathcal{U},\sigma) - \mathcal{F}(\mathcal{U}',\sigma'),\Omega](t) \\ &\leqslant c_3 t^{\varkappa/2}\big(X^{\varepsilon}[\sigma-\sigma',\Omega](t) + P^{\varepsilon}[\sigma_t-\sigma_t',\Gamma](t)\big) \\ &\quad\big(X^{\varepsilon}[\sigma-\sigma',\Omega](t) + X^{\varepsilon}[\mathcal{U}-\mathcal{U}',\Omega](t)\big). \qquad (5)\end{aligned}$$

Нелинейные слагаемые, входящие в G не содержат старших производных от неизвестных функций и производной по времени.

При их оценке опять воспользуемся теми же соображениями, что и при выводе (3), имеем:

$$\begin{aligned}&P^{\varepsilon}[G(\mathcal{U},\sigma),\Gamma](t) \\ &\leqslant ct^{\varkappa/2}\big(P^{\varepsilon}[\sigma_{y_j},\Gamma](t) + P^{\varepsilon}[\sigma_t,\Gamma](t)\big)\big(P^{\varepsilon}[\sigma_{y_j},\Gamma](t) + P^{\varepsilon}[\mathcal{U}_{y_i},\Gamma](t)\big) \\ &\leqslant c_4 t^{\varkappa/2}\big(X^{\varepsilon}[\sigma,\Omega](t) + P^{\varepsilon}[\sigma_t,\Gamma](t)\big)\big(X^{\varepsilon}[\sigma,\Omega](t) + X^{\varepsilon}[\mathcal{U},\Omega](t)\big), \quad (6)\end{aligned}$$

$$P^\varepsilon[G(\mathcal{U},\sigma)-G(\mathcal{U}',\sigma'),\Gamma](t)$$
$$\leqslant c_5 t^{\varkappa/2}\big(X^\varepsilon[\sigma-\sigma',\Omega](t)+P^\varepsilon[\sigma_t-\sigma'_t,\Gamma](t)\big)$$
$$\big(X^\varepsilon[\sigma-\sigma',\Omega](t)+X^\varepsilon[\mathcal{U}-\mathcal{U}',\Omega](t)\big). \tag{7}$$

За нулевое приближение возьмем решение линейной задачи (2.29) с

$$f=f_\varepsilon=-\varepsilon W_t+\varepsilon\Phi_t(N\cdot J_\Phi^{-T}\nabla W),$$
$$\psi=-c_0 B_\Phi\frac{\partial V}{\partial n}. \tag{8}$$

По Лемме 3 $f_\varepsilon\in C^{\alpha,\alpha/2}_{\varkappa-1}(\Omega\times[0,t^*))$ и по теореме 6 существует единственное решение задачи (2.29) $(\mathcal{U}^{(0)},\sigma^{(0)})$ со следующими свойствами:

$$\mathcal{U}^{(0)},\sigma^{(0)}\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{1+\varkappa}(\Omega\times[0,t^*)),$$
$$\sigma_t^{(0)}|_\Gamma\in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{\varkappa}(\Gamma\times[0,t^*))$$

и

$$X^\varepsilon[\mathcal{U}^{(0)},\Omega](t)+X^\varepsilon[\sigma^{(0)},\Omega](t)+P^\varepsilon[\sigma_t^{(0)}|_\Gamma,\Gamma](t) \tag{9}$$
$$\leqslant c_1\big(\mathcal{K}^\varepsilon[-\varepsilon W_t+\varepsilon\Phi_t(N\cdot J_\Phi^{-T}\nabla W),\Omega](t)+P^\varepsilon[B_\Phi\frac{\partial V}{\partial n},\Gamma](t)\big)\equiv c_1 M(t).$$

Приближения $(\mathcal{U}^{(m+1)},\sigma^{(m+1)})$, $m=0,1,2,\ldots$ последовательно найдем как решения задач

$$\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}\mathcal{U}^{(m+1)}+\vec{h}\cdot\nabla\sigma^{(m+1)}+h_1\sigma^{(m+1)}\equiv f_\varepsilon+\mathcal{F}(\mathcal{U}^{(m)},\sigma^{(m)}),\ y\in\Omega,\ t>0,$$
$$\mathcal{U}^{(m+1)}|_S=0,\quad \mathcal{U}^{(m+1)}|_\Gamma=0,\quad \mathcal{U}^{(m+1)}|_{t=0}=0,$$
$$L_{\Phi,\varepsilon}\sigma^{(m+1)}=0,\quad y\in\Omega,\quad t>0, \tag{10}$$
$$\sigma^{(m+1)}|_S=0,\quad \sigma^{(m+1)}|_{t=0}=0,$$
$$\sigma_t^{(m+1)}-Q_n\frac{\partial(W+V)}{\partial n}\frac{\partial\sigma^{(m+1)}}{\partial n}+Q'\cdot\nabla'\sigma^{(m+1)}\frac{\partial(W+V)}{\partial n}+q\sigma^{(m+1)}$$
$$+c_0B_\Phi\frac{\partial\mathcal{U}^{(m+1)}}{\partial n}=\psi+G(\mathcal{U}^{(m)},\sigma^{(m)})\ \text{ на }\ \Gamma,t>0,\ m=0,1,2,\ldots$$

применяя на каждом этапе теорему 6.

Введем в рассмотрение разности $v^{(m+1)} = \mathcal{U}^{(m+1)} - \mathcal{U}^{(m)}$, $r^{(m+1)} = \sigma^{(m+1)} - \sigma^{(m)}$, тогда $\mathcal{U}^{(m+1)} = \mathcal{U}^{(0)} + \sum\limits_{j=0}^{m} v^{(j+1)}$,

$$\sigma^{(m+1)} = \sigma^{(0)} + \sum_{j=0}^{m} r^{(j+1)}, \quad \text{а} \quad (v^{(m+1)}, r^{(m+1)}), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

– решения задач

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon} v^{(m+1)} + \vec{h} \cdot \nabla r^{(m+1)} + h_1 r^{(m+1)} \\
= \mathcal{F}(\mathcal{U}^{(m)}, \sigma^{(m)}) - \mathcal{F}(\mathcal{U}^{(m-1)}, \sigma^{(m-1)}), y \in \Omega, t > 0, \\
v^{(m+1)}|_S = 0, \quad v^{(m+1)}|_\Gamma = 0, \quad v^{(m+1)}|_{t=0} = 0, \\
L_{\Phi,\varepsilon} r^{(m+1)} = 0, \quad y \in \Omega, \quad t > 0, \\
r^{(m+1)}|_S = 0, \quad r^{(m+1)}|_{t=0} = 0, \\
r_t^{(m+1)} - Q_n \frac{\partial(W+V)}{\partial n} \frac{\partial r^{(m+1)}}{\partial n} + Q' \cdot \nabla' r^{(m+1)} \frac{\partial (W+V)}{\partial n} \\
+ q r^{(m+1)} + c_0 B_\Phi \frac{\partial v^{(m+1)}}{\partial n} = G(\mathcal{U}^{(m)}, \sigma^{(m)}) - G(\mathcal{U}^{(m-1)}, \sigma^{(m-1)}) \quad \text{на} \quad \Gamma,
\end{gathered} \tag{11}$$

здесь мы полагааем $\mathcal{U}^{(-1)} \equiv 0$, $\sigma^{(-1)} \equiv 0$, а следовательно и

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}^{(-1)}, \sigma^{(-1)}) \equiv 0, \quad G(\mathcal{U}^{(-1)}, \sigma^{(-1)}) \equiv 0.$$

Покажем, что все приближения определены на некотором интервале $[0, t_0)$, не зависящем от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и последовательности $\{\mathcal{U}^{(m)}\}$, $\{\sigma^{(m)}\}$ сходятся. По теореме 6, при $m = 0$ задача (11) имеет единственное решение $(v^{(1)}, r^{(1)})$ со следующими свойствами:

$$v^{(1)}, r^{(1)} \in C_{1+\varkappa}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\Omega \times [0, t^*)),$$

$r_t^{(1)}|_\Gamma \in C_\varkappa^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma \times [0, t^*))$, из неравенств (2.30), (4), (6), (9) вытекает оценка

$$\begin{gathered}
X^\varepsilon[v^{(1)}, \Omega](t) + X^\varepsilon[r^{(1)}, \Omega](t) + P^\varepsilon[r_t^{(1)}|_\Gamma, \Gamma](t) \\
\leqslant c_1(\mathcal{K}^\varepsilon[\mathcal{F}(\mathcal{U}^{(0)}, \sigma^{(0)}), \Omega](t) + P^\varepsilon[G(\mathcal{U}^{(0)}, \sigma^{(0)}), \Gamma](t)) \\
\leqslant c_1 c_6 t^{\varkappa/2}(X^\varepsilon[\sigma^{(0)}, \Omega](t) + P^\varepsilon[\sigma_t^{(0)}|_\Gamma, \Gamma](t)) \\
\cdot(X^\varepsilon[\sigma^{(0)}, \Omega](t) + X^\varepsilon[\mathcal{U}^{(0)}, \Omega](t)) \leqslant c_1^3 c_6 t^{\varkappa/2} (\mathcal{M}(t))^2, c_6 = \max(c_2, c_4).
\end{gathered} \tag{12}$$

Пусть приближения $(\mathcal{U}^{(j)}, \sigma^{(j)})$, $j = 0, \dots, k$ определены при $t \in [0, t_0)$, тогда по теореме 6 приближение $(\mathcal{U}^{(k+1)}, \sigma^{(k+1)})$ также определено при $t \in [0, t_0)$ и из (2.30), (5), (7) следует

$$\begin{aligned} X^\varepsilon[v^{(k+1)}, \Omega](t) + X^\varepsilon[r^{(k+1)}, \Omega](t) + P^\varepsilon[r_t^{(k+1)}|_\Gamma, \Gamma](t) \\ \leqslant c_1(\mathcal{K}^\varepsilon[\mathcal{F}(\mathcal{U}^{(k)}, \sigma^{(k)}) - \mathcal{F}(\mathcal{U}^{(k-1)}, \sigma^{(k-1)}), \Omega](t) \\ +P^\varepsilon[G(\mathcal{U}^{(k)}\sigma^{(k)}) - G(\mathcal{U}^{(k-1)}, \sigma^{(k-1)}), \Gamma](t)) \qquad (13) \\ \leqslant c_1 c_7 t^{\varkappa/2}(X^\varepsilon[\sigma^{(k)} - \sigma^{(k-1)}, \Omega](t) + P^\varepsilon[\sigma_t^{(k)} - \sigma_t^{(k-1)}, \Gamma](t)) \\ (X^\varepsilon[\sigma^{(k)} - \sigma^{(k-1)}, \Omega](t) + X^\varepsilon[\mathcal{U}^{(k)} - \mathcal{U}^{(k-1)}, \Omega](t)) \\ = c_1^3 c_7 t^{\varkappa/2}(X^\varepsilon[r^{(k)}, \Omega](t) + X^\varepsilon[v^{(k)}, \Omega](t)) \\ \cdot(X^\varepsilon[r^{(k)}, \Omega](t) + P^\varepsilon[r_t^{(k)}|_\Gamma, \Gamma](t)), \quad c_7 = \max(c_3, c_5). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$Y[\mathcal{U}, \sigma](t) = X^\varepsilon[\mathcal{U}, \Omega](t) + X^\varepsilon[\sigma, \Omega](t) + P^\varepsilon[\sigma_t|_\Gamma, \Gamma](t),$$

тогда оценки (9), (12), (13) запишутся в виде

$$Y[\mathcal{U}^{(0)}, \sigma^{(0)}](t) \leqslant c_1 \mathcal{M}(t),$$

$$Y[v^{(1)}, r^{(1)}](t) \leqslant c_1^3 c_6 t^{\varkappa/2}(\mathcal{M}(t))^2, \qquad (14)$$

$$Y[v^{(k+1)}, r^{(k+1)}](t) \leqslant c_1^3 c_7 t^{\varkappa/2}[Y[v^{(k)}, r^{(k)}]]^2. \qquad (15)$$

Выберем t_0 таким маленьким, чтобы $t_0^{\varkappa/2}\mathcal{M}(t_0) \leqslant \theta$, причем $\theta > 0$ таково, что $c_1^3 c_6 \theta < \frac{1}{2}$, $c_1^3 c_7 \theta < \frac{1}{2}$. Тогда, согласно неравенству (14), $Y[v^{(1)}, r^{(1)}](t) \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{M}(t)$, затем применим (15) при $k = 1$ $Y[v^{(2)}, r^{(2)}](t) \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\mathcal{M}(t)$ и т.д. последовательно применяя неравенство (15) при $k = 2, 3, \dots$, получим

$$Y[v^{(k+1)}, r^{(k+1)}] \leqslant (\frac{1}{2})^{k+1}\mathcal{M}(t), \quad t < t_0,$$

следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} Y[v^{(k+1)}, r^{(k+1)}]$ сходится при $t < t_0$ и его сумма ограничена $\mathcal{M}(t)$, $t \in [0, t_0)$.

Переходя к пределу при $m \to +\infty$, заключаем, что

$$(\mathcal{U}, \sigma) = \lim_{m \to +\infty}(\mathcal{U}^{(m)}, \sigma^{(m)})$$

является решением задачи (2.1) (или, что то же самое, задачи (1.14), (1.15)) и имеет место оценка

$$Y[\mathcal{U},\sigma]\leqslant c\mathcal{M}(t),\quad t\in(0,t_0),$$

совпадающая с (1.17).

Перейдем к доказательству оценки (1.18). Введем в рассмотрение функцию σ_1

$$\begin{gathered}L_{\Phi,\varepsilon}\sigma_1=0,\quad y\in\Omega,\quad t>0,\\ \sigma_1|_S=0,\quad \sigma_1|_{t=0}=0,\\ \sigma_1|_\Gamma=-c_0\int\limits_0^{t_0}B_\Phi\frac{\partial V}{\partial n}(y,\tau)d\tau.\end{gathered}\tag{16}$$

По лемме 6 (неравенство (3.4)), имеем

$$\begin{gathered}\varepsilon\sup_{\tau<t_0}|\sigma_{1\tau}(\cdot,\tau)|_{C^\alpha(\Omega)}+\sup_{\tau<t_0}|\sigma_1(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}\\ \leqslant c\int\limits_0^{t_0}\left|\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{C^{2+\alpha}(\Gamma)}d\tau\leqslant c\int\limits_0^{t_0}|V|_{C^{3+\alpha}(\Gamma)}d\tau\leqslant c\varepsilon.\end{gathered}\tag{17}$$

Для $\sigma_2=\sigma-\sigma_1$ и $\mathcal{U}$ приходим к задаче

$$\begin{gathered}L_{\Phi,\varepsilon}\sigma_2=0,\quad y\in\Omega,\quad t>0,\\ \sigma_2|_S=0,\quad \sigma_2|_{t=0}=0,\end{gathered}\tag{18}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\sigma_2-Q_n\frac{\partial}{\partial n}(W+V)\frac{\partial\sigma_2}{\partial n}+Q'\cdot\nabla'\sigma_2\frac{\partial(W+V)}{\partial n_0}+q\sigma_2\\ +c_0B_\Phi\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial n}=-Q_n\frac{\partial}{\partial n}(W+V)\frac{\partial\sigma_1}{\partial n}-Q'\cdot\nabla'\sigma_1\frac{\partial(W+V)}{\partial n}-q\sigma_1\\ +G(\mathcal{U},\sigma_1+\sigma_2)\ \text{на}\ \Gamma,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}\mathcal{U}+\vec{h}\cdot\nabla\sigma_2+h_1\sigma_2=\varepsilon(-W_t+\Phi_t(N\cdot J_\Phi^{-T}\nabla W))\\ -\vec{h}\cdot\nabla\sigma_1-h_1\sigma_1+\mathcal{F}(\mathcal{U},\sigma_1+\sigma_2),\quad y\in\Omega,\quad t>0,\\ \mathcal{U}|_S=0,\quad \mathcal{U}|_\Gamma=0,\quad \mathcal{U}|_{t=0}=0.\end{gathered}$$

Решение задачи (18) оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(t) \equiv \varepsilon \sup_{\tau<t} |\sigma_{2\tau}(\cdot,\tau)|_{C^{\alpha}(\Omega)} + \sup_{\tau<t} |\sigma_2(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \\ +\varepsilon \sup_{\tau<t} |\mathcal{U}_{\tau}(\cdot,\tau)|_{C^{\alpha}(\Omega)} + \sup_{\tau<t} |\mathcal{U}(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \\ \leqslant c\big(\varepsilon(\sup_{\tau<t} |W_{\tau}(\cdot,\tau)|_{C^{\alpha}(\Omega)} + \sup_{\tau<t} |\Phi_{\tau}(\cdot,\tau)|_{C^{\alpha}(\Omega)}) \\ +(\sup_{\tau<t} |\sigma_1(\cdot,\tau)|_{C^{1+\alpha}(\Omega)} + \sup_{\tau<t} |\sigma_1(\cdot,\tau)|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)})(1+\mathcal{R}(t))\big).\end{aligned} \tag{19}$$

Объединяя (17) и (19), получим при достаточно маленьких $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$

$$\begin{aligned}\varepsilon \sup_{\tau<t} |\sigma_{\tau}(\cdot,\tau)|_{C^{\alpha}(\Omega)} + \sup_{\tau<t} |\sigma(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \\ +\varepsilon \sup_{\tau<t} |\mathcal{U}_{\tau}(\cdot,\tau)|_{C^{\alpha}(\Omega)} + \sup_{\tau<t} |\mathcal{U}(\cdot,\tau)|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \leqslant c\varepsilon,\end{aligned} \tag{20}$$

с постоянной $c = c(W,\Phi,V_0)$, не зависящей от ε, что и дает (1.18).

§5. Доказательство Лемм 3 и 4

Доказательство Леммы 3. Так как мы предполагаем, что $\Gamma, S \in C^{3+\alpha}$, $b \in \tilde{C}([0,T), C^{3+\alpha})$, решение задачи (1.6) обладает бóльшей гладкостью по пространственным переменным, чем установлено в [10]. Действительно, пусть $\vec{\mathcal{N}} \in C^{3+\alpha}(\Omega)$ – продолжение $\vec{n}$ с $\Gamma \cup S$ внутрь области Ω, положим

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \mathcal{N}_i(x) \sum_{j=1}^{n} \mathcal{N}_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Если $x \in \Gamma \cup S$, то ∂_i – тангенциальные компоненты градиента и оператор ∂_i можно применять к функциям, заданным на границе. Применим оператор ∂_i ко всем уравнениям задачи (1.6), имеем

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{\Phi,0} W^i - (N \cdot J_{\Phi}^{-T} \nabla W)(L_{\Phi,0} - \Delta)\Phi^i = I_i[W,\Phi], \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ W^i|_S = b^i, \quad W^i|_{\Gamma} = 0, \\ \Phi^i_t + c_0 B_{\Phi} \frac{\partial W^i}{\partial n} + c_0 (B_{\Phi})_{x_i} \frac{\partial W}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = R_i[W,\Phi], \\ \Delta\Phi^i = Q_i[\Phi], \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad \Phi^i|_S = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где $W^i = \partial_i W$, $\Phi^i = \partial_i \Phi$, $b^i = \partial_i b$,

$$I_i[W,\Phi] = \partial_i(\mathcal{L}_{\Phi,0}W) - \mathcal{L}_{\Phi,0}\partial_i W + (N \cdot J^{-T}\nabla W)(L_{\Phi,0} - \Delta)\partial_i \Phi,$$

$$\mathcal{R}_i[W,\Phi] = \partial_i\big(c_0 B_\Phi \frac{\partial W}{\partial n}\big) - c_0 B_\Phi \frac{\partial W^i}{\partial n} - c_0 (B_\Phi)_{x_i} \frac{\partial W}{\partial n}$$

$$Q_i = \partial_i(\Delta\Phi) - \Delta\partial_i\Phi.$$

Так как $\partial_i(uv) = u\partial_i v + \partial_i uv$,

$$\partial_i W_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\partial_i W + \mathcal{N}(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathcal{N}_j(x))\frac{\partial}{\partial x_i}W + \frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{N}(x)\sum_{j=1}^{n}\mathcal{N}_j(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W,$$

коммутатор $I_i[W,\Phi]$ зависит от производных функций W,Φ по пространственным переменным не выше второго порядка, $Q_i[\Phi]$ зависит от производных функции Φ не выше второго порядка, $\mathcal{R}_i[W,\Phi]$ зависит от производных функции Φ не выше первого порядка и $\frac{\partial W}{\partial n}$.

В коэффициентах оператора $\mathcal{L}_{\Phi,0} - \Delta$ присутствуют множители Φ_{x_i}, $i = 1,\dots,n$, поэтому $(L_{\Phi,0} - \Delta)\Phi^i$ можно оценить используя интерполяционное неравенство аналогично нелинейным слагаемым.

Применяя к задаче (1) оценку решения линейной системы типа (1), доказанную в [10], находим

$$\begin{aligned}
&\sup_{\tau<t}|W^i(\cdot,\tau)|_\Omega^{(2+\alpha)} + \sup_{\tau<t}|\Phi^i(\cdot,\tau)|_\Omega^{(2+\alpha)}\\
&+\sup_{\tau<t}|\Phi^i_\tau(\cdot,\tau)|_\Gamma^{(1+\alpha)} \leqslant c(\sup_{\tau<t}|I_i[W(\cdot,\tau),\Phi(\cdot,\tau)]|_\Omega^{(\alpha)}\\
&+\sup_{\tau<t}|(L_{\Phi,0}-\Delta)\Phi^i(\cdot,\tau)|_\Omega^{(\alpha)} + \sup_{\tau<t}|b^i(\cdot,\tau)|_S^{(2+\alpha)} \qquad (2)\\
&+\sup_{\tau<t}|Q_i[\Phi(\cdot,\tau)]|_\Omega^{(\alpha)} + \sup_{\tau<t}|\mathcal{R}_i[W(\cdot,\tau)\Phi(\cdot,\tau)]|_\Gamma^{(1+\alpha)})\\
&\leqslant c_1(\sup_{\tau<t}|b^i(\cdot,\tau)|_S^{(2+\alpha)} + \sup_{\tau<t}|W(\cdot,\tau)|_\Omega^{(2+\alpha)} + \sup_{\tau<t}|\Phi(\cdot,\tau)|_\Omega^{(2+\alpha)}\\
&+\sup_{\tau<t}|\Phi(\cdot,\tau)|_\Gamma|_\Gamma^{(2+\alpha)} + \sup_{\tau<t}|W(\cdot,\tau)|_\Gamma|_\Gamma^{(2+\alpha)}
\end{aligned}$$

$$+t^{\gamma}\sup_{\tau<t}|\Phi^{i}(\cdot,\tau)|_{\Omega}^{(2+\alpha)}(\sup_{\tau<t}|\Phi(\cdot,\tau)|_{\Omega}^{(2+\alpha)}+\sup_{\tau<t}\max_{\Gamma}|\Phi_{\tau}(\cdot,\tau)|),$$

где $\gamma=\frac{1+\alpha}{2+\alpha}\in(0,1)$.

Так как в [10] t^* выбиралось достаточно маленьким при оценке нелинейных слагаемых, в частности, можно считать что

$$c_1 t^{\gamma}\left(\sup_{\tau<t}|\Phi(\cdot,\tau)|_{\Omega}^{(2+\alpha)}+\sup_{\tau<t}\max_{\Gamma}|\Phi_{\tau}(\cdot,\tau)|\right)<\frac{1}{2}.$$

Тогда из неравенств (2) и (1.8) вытекает оценка

$$\sup_{\tau<t}|W^{i}(\cdot,\tau)|_{\Omega}^{(2+\alpha)}+\sup_{\tau<t}|\Phi^{i}(\cdot,\tau)|_{\Omega}^{(2+\alpha)}$$
$$+\sup_{\tau<t}|\Phi_{\tau}^{i}(\cdot,\tau)|_{\Gamma}^{(1+\alpha)}\leqslant c\sup_{\tau<t}|b(\cdot,\tau)|_{S}^{(3+\alpha)},\quad \forall t<t^*. \tag{3}$$

Из (3), в частности, следует что $\Phi_t|_{\Gamma}\in C_x^{2+\alpha}(\Gamma)$. Поскольку Φ является решением уравнения Лапласа в Ω и $\Phi|_S=0$, Φ сохраняет такую же гладкость и внутри области: $\Phi_t\in C_x^{2+\alpha}(\Omega)$, отсюда вытекает первое утверждение Леммы 3. Покажем, что если $b\in C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(S)$, то $W, D_xW,\ D_x^2W\in C_t^{\alpha/2}(\Omega)$. Функция W является решением задачи

$$\mathcal{L}_{\Phi,0}W=0,\quad x\in\Omega,\quad t>0,$$
$$W|s=b,\quad W|_{\Gamma}=0. \tag{4}$$

Коэффициенты оператора $\mathcal{L}_{\Phi,0}$ зависят от Φ и ее производных по пространственным переменным не выше второго порядка, т.к. $\Phi_t\in C_x^{2+\alpha}(\Omega)$, то

$$\mathcal{L}_{\Phi,0}W=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)W_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)W_{x_i},$$

где a_{ij} и a_i таковы, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(a_{ij}),\quad \frac{\partial}{\partial t}(a_i)\in C_x^{\alpha}(\Omega).$$

Конечная разность $\Delta_t(h)W=W(x,t+h)-W(x,t)$ является решением задачи

$$\mathcal{L}_{\Phi,0}\Delta_t(h)W = -\sum_{i,j=1}^{n}\Delta_t(h)a_{ij}W_{x_ix_j}(x,t+h)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Delta_t(h)a_iW_{x_i}(x,t+h),\quad x\in\Omega,\quad t>0,$$

$$\Delta_t(h)W|_S=\Delta_t(h)b,\quad \Delta_t(h)W|_\Gamma=0.$$

Применяя оценку решения задачи Дирихле и принцип максимума, имеем

$$\max_{x\in\Omega}\left|\frac{\Delta_t(h)W}{h^{\alpha/2}}\right| + \sum_{i=1}^{n}\max_{x\in\Omega}\left|\frac{\Delta_t(h)W_{x_i}}{h^{\alpha/2}}\right| + \sum_{i,j=1}^{n}\max_{x\in\Omega}\left|\frac{\Delta_t(h)W_{x_ix_j}}{h^{\alpha/2}}\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{\Delta_t(h)W}{h^{\alpha/2}}\right|^{(2+\alpha)} \leqslant c\left(\left|\frac{\Delta_t(h)b}{h^{\alpha/2}}\right|_S^{(2+\alpha)}\right. \tag{5}$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\Delta_t(h)a_{ij}}{h^{\alpha/2}}W_{x_ix_j}\right|_\Omega^{(\alpha)} + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\Delta_t(h)a_i}{h^{\alpha/2}}W_{x_i}\right|_\Omega^{(\alpha)}\right)$$

$$= c\left(\left|\frac{\int\limits_t^{t+h} b_\xi(\cdot,\xi)d\xi}{h^{\alpha/2}}\right|_S^{(2+\alpha)} + \sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{1}{h^{\alpha/2}}\int\limits_t^{t+h} a_{ij}(x,\xi)d\xi W_{x_ix_j}\right|_\Omega^{(\alpha)}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{h^{\alpha/2}}\int\limits_t^{t+h} a_i(x,\xi)d\xi W_{x_i}\right|_\Omega^{(\alpha)}\right) \leqslant c\Big[|b_t(\cdot,t)|_S^{(2+\alpha)}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial}{\partial t}a_{ij}(\cdot,t)\right|_\Omega^{(\alpha)}\max_\Omega|W_{x_ix_j}| + \max_\Omega\left|\frac{\partial}{\partial t}a_{ij}\right||W_{x_ix_j}|_\Omega^{(\alpha)}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial}{\partial t}a_i(\cdot,t)\right|_\Omega^{(\alpha)}\max_\Omega|W_{x_i}| + \max_\Omega\left|\frac{\partial}{\partial t}a_i\right||W_{x_i}|_\Omega^{(\alpha)}\right)\Big]$$

$$\leqslant c(|b_t(\cdot,t)|_S^{(2+\alpha)} + |\Phi_t(\cdot,t)|_\Omega^{(2+\alpha)}\cdot|W(\cdot,t)|_\Omega^{(2+\alpha)}).$$

Взяв $\sup\limits_{t<t^*}$ и переходя к пределу при $h\to 0$ в левой части неравенства (5), получаем оценку для $[W]_t^{(\alpha/2)}$, $[W_{x_i}]_t^{(\alpha/2)}$, $[W_{x_ix_j}]_t^{(\alpha/2)}$, $t<t^*$.

Так как Φ_t, очевидно, является решением задачи

$$\begin{gathered}\Delta\Phi_t = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,\\ \Phi_t|_S = 0,\\ \Phi_t|_\Gamma = -c_0 B_\Phi \frac{\partial W}{\partial n},\end{gathered} \tag{6}$$

в которой правая часть краевого условия и ее производные по пространственным переменным, по доказанному выше, удовлетворяют условию Гёльдера по переменной t, то $\Phi_t \in C_t^{\alpha/2}(\Omega)$, $\Phi_{x_i t} \in C_t^{\alpha/2}(\Omega)$.

Наконец, покажем что W_t удовлетворяет условию Гёльдера по x и по t. Продифференцируем задачу (4) по переменной t:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{\Phi,0} W_t = N \cdot J_\Phi^{-T} \nabla W (L_{\Phi,0} - \Delta)\Phi_t - \frac{\partial}{\partial t}(L_{\Phi,0}) W\\ +\frac{\partial}{\partial t}(N \cdot J_\Phi^{-T}) \nabla W (L_{\Phi,0} - \Delta)\Phi + N \cdot J_\Phi^{-T} \nabla W \frac{\partial}{\partial t}(L_{\Phi,0})\Phi\\ -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{m}(\Phi))\nabla W, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,\\ W_t|_S = b_t, \quad W_t|_\Gamma = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Запишем уравнение задачи (7) в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 W_t}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) \frac{\partial W_t}{\partial x_i} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2,$$

где $\mathcal{F}_1 = N \cdot J_\Phi^{-T} \nabla W (L_{\Phi,0} - \Delta)\Phi_t$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(D_x\Phi_t, D_x^2 W, D_x^2\Phi, DW, D\Phi)$ содержит остальные слагаемые правой части уравнения. По доказанному выше $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \widetilde{C}([0,t^*), C^\alpha(\Omega))$ и по условию $b_t \in \widetilde{C}([0,t^*); C^{2+\alpha}(S))$. Следовательно, задача (7) имеет единственное решение $W_t \in \widetilde{C}([0,t^*);\ C^{2+\alpha}(\Omega))$, для которого верна оценка

$$\begin{aligned}&\sup_{\tau<t} |W_t(\cdot,\tau)|_\Omega^{(2+\alpha)} \leqslant c(\sup_{\tau<t} |\mathcal{F}_1(\cdot,\tau)|_\Omega^{(\alpha)}\\ &+\sup_{\tau<t} |\mathcal{F}_2(\cdot,\tau)|_\Omega^{(\alpha)} + \sup_{\tau<t} |b_\tau(\cdot,\tau)|_S^{(2+\alpha)})\\ \leqslant c(\sup_{\tau<t} |b_\tau(\cdot,\tau)|_S^{(2+\alpha)} &+ \sup_{\tau<t} |\Phi_\tau(\cdot,\tau)|_\Omega^{(2+\alpha)} + \sup_{\tau<t} |W(\cdot,\tau)|_\Omega^{(2+\alpha)}).\end{aligned} \tag{8}$$

Вследствие (1), конечные разности $\Delta_t(h)W^i$, $\Delta_t(h)\Phi^i$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_{\Phi,0}\Delta_t(h)W^i - (N\cdot J_\Phi^{-T}\nabla W)(L_{\Phi,0}-\Delta)\Delta_t(h)\Phi^i \\
= -\sum_{i,j=1}^{n}\Delta_t(h)a_{ij}W^i_{x_ix_j}(x,t+h) - \sum_{i=1}^{n}\Delta_t(h)a_iW^i_{x_i}(x,t+h) \\
+\Delta_t(h)[N\cdot J_\Phi^{-T}\nabla W(L_{\Phi,0}-\Delta)]\Phi^i + \Delta_t(h)I_i[W,\Phi],\ x\in\Omega,\ t>0, \\
\Delta_t(h)W^i|_S = \Delta_t(h)b^i, \quad \Delta_t(h)W^i|_\Gamma = 0, \\
\Delta_t(h)\Phi^i_t + c_0B_\Phi\frac{\partial\Delta_t(h)W^i}{\partial n} + c_0\Delta_t(h)\frac{\partial}{\partial x_i}(B_\Phi)\frac{\partial W}{\partial n}\Big|_\Gamma \\
= -c_0\Delta_t(h)B_\Phi\frac{\partial W^i(x,t+h)}{\partial n} - c_0\frac{\partial}{\partial x_i}(B_\Phi)\frac{\partial\Delta_t(h)W}{\partial n} \\
+\Delta_t(h)R_i[W,\Phi], \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad (9) \\
\Delta(\Delta_t(h)\Phi^i) = \Delta_t(h)Q_i[\Phi], \quad x\in\Omega, \quad t>0, \\
\Delta_t(h)\Phi^i|_S = 0.
\end{gathered}$$

Для решения задачи (9) имеет место оценка аналогичная (2). Так как по доказанному выше $W_t \in C_x^{2+\alpha}$, $\Phi_t \in C_x^{2+\alpha}$, в Ω, то все слагаемые, входящие в $I_i[W,\Phi]$, $\mathcal{R}_i[W,\Phi]$, B_Φ, $N\cdot J^{-T}\nabla W(L_{\Phi,0}-\Delta)$ имеют производную по времени и могут быть оценены так же как в (5). Применяя те же соображения, что и при выводе оценки (5), приходим к оценке для $[W^i_{x_kx_j}]_t^{(\alpha/2)}$, $t<t^*$, а значит вторые производные правой части краевого условия в задаче (6): $(B_\Phi\frac{\partial W}{\partial n}|_\Gamma)_{x_kx_j}$ удовлетворяют условию Гёльдера по t и следовательно, $\Phi_{tx_kx_j}\in C_t^{\alpha/2}(\Omega)$.

Замечание. Так как нас интересует оценка решения задачи (9) вблизи поверхности Γ, можем домножить W^i,Φ^i на гладкую срезающую функцию равную единице в некоторой окрестности поверхности Γ и нулю вблизи поверхности S. Это даст возможность избежать дополнительных требований гладкости функции b, входящей в краевое условие на поверхности S.

Перейдем в (7) к конечным разностям, имеем

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{\Phi,0}\Delta_t(h)W_t=-\sum_{i,j=1}^{n}\Delta_t(h)a_{ij}W_{tx_ix_j}(x,t+h)\\ -\sum_{i=1}^{n}\Delta_t(h)a_iW_{tx_i}(x,t+h)+\Delta_t(h)\mathcal{F}_1+\Delta_t(h)\mathcal{F}_2,\\ \Delta_t(h)W_t|_S=\Delta_t(h)b_t,\quad \Delta_t(h)W_t|_\Gamma=0.\end{gathered}\tag{10}$$

Так как $a_{11}=\sum\limits_{p=1}^{n}J_\Phi^{1p}J_\Phi^{1p}\geqslant\hat a_{11}>0$, то к задаче (10) применим принцип максимума (см. [19, Теорема 1.2]), согласно которому

$$\begin{gathered}\max_\Omega\left|\frac{\Delta_t(h)W_t}{h^{\alpha/2}}\right|\leqslant c\biggl(\max_\Omega\left|\frac{\Delta_t(h)\mathcal{F}_1}{h^{\alpha/2}}\right|+\max_\Omega\left|\frac{\Delta_t(h)\mathcal{F}_2}{h^{\alpha/2}}\right|\\ +\max_S\left|\frac{\Delta_t(h)b_t}{h^{\alpha/2}}\right|+\sum_{i,j=1}^{n}\max_\Omega\left|\frac{\Delta_t(h)a_{ij}}{h^{\alpha/2}}\right|\max_\Omega|W_{tx_ix_j}|+\\ +\sum_{i=1}^{n}\max_\Omega\left|\frac{\Delta_t(h)a_i}{h^{\alpha/2}}\right|\max_\Omega|W_{tx_i}|\biggr),\quad t\leqslant t^*.\end{gathered}\tag{11}$$

Вследствие (11), переходя к пределу при $h\to 0$, имеем

$$\begin{gathered}[W_t]_t^{(\alpha/2)}\leqslant c\biggl(\sum_{i,j=1}^{n}([\Phi_{tx_ix_j}]_t^{(\alpha/2)}+[\Phi_{x_ix_j}]_t^{(\alpha/2)}+[W_{x_ix_j}]_t^{(\alpha/2)})\\ +\sum_{i=1}^{n}([\Phi_{tx_i}]_t^{(\alpha/2)}+[\Phi_{x_i}]_t^{(\alpha/2)}+[W_{x_i}]_t^{(\alpha/2)})+[b_t]_t^{(\alpha/2)}\biggr),\end{gathered}$$

что завершает доказательство Леммы 3.

Доказательство Леммы 4. Положим $u=W+V$, тогда u является решением задачи

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}u=\varepsilon W_t,\quad y\in\Omega,\quad t>0,\\ u|_S=b,\quad u|_\Gamma=0,\\ u|_{t=0}=v_0.\end{gathered}\tag{12}$$

Разобьем задачу (12) на две:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon}u^{(1)}=0,\quad y\in\Omega,\quad t>0,\\ u^{(1)}|_S=b,\quad u^{(1)}|_\Gamma=0,\quad u^{(1)}|_{t=0}=v_0,\end{gathered}\tag{13}$$

$$\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon} u^{(2)} = \varepsilon W_t, \quad y \in \Omega, \quad t > 0,$$
$$u^{(2)}|_S = 0, \quad u^{(2)}|_\Gamma = 0, \quad u^{(2)}|_{t=0} = 0. \tag{14}$$

I. Оценим $\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\Big|_\Gamma$ в произвольно выбранной точке границы $y_0 \in \Gamma$. Не ограничивая общности, можем считать, что точка y_0 совпадает с началом координат, а нормаль $n(y_0)$ направлена по оси y_n (этого можно добиться, выполнив при необходимости ортогональное преобразование координат). Пусть в окрестности начала координат поверхность Γ задается уравнением

$$y_n = F(y'), \quad y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathcal{K}_\lambda(0),$$
$$F \in C^{2+\alpha}(\bar{K}_\lambda(0)), \quad F(0) = 0, \quad \nabla' F(0) = 0, \quad \lambda > 0.$$

Сделаем преобразование координат распрямляющее границу

$$z' = y', \quad z_n = y_n - F(y') \tag{15}$$

и замену переменной $\tau = t/\varepsilon$. Уравнение в задаче (13) преобразуется к виду

$$\tilde{u}^{(1)}_\tau - (N \cdot J^{-T}_{\tilde{\Phi}} \nabla \tilde{u}^{(1)})\widetilde{\Phi}_\tau - \widetilde{\mathcal{L}}_{\tilde{\Phi},0} \tilde{u}^{(1)} = 0,$$

здесь через $\widetilde{\mathcal{L}}_{\tilde{\Phi},0}$ обозначен равномерно эллиптический оператор, в который переходит $\mathcal{L}_{\Phi,0}$ при преобразовании (15), $\tilde{u}^{(1)}$, $\widetilde{\Phi}$ – функции $u^{(1)}$ и Φ в новых переменных (z, τ).

Предположим, что $\tau \leqslant \tau_0$. Так как $b(x,t) > 0$ при $t > 0$ и $v_0(x) > 0$ внутри Ω, в В силу неравенства Гарнака [20, 21]

$$\tilde{u}^{(1)}(z, \tau) \geqslant \varkappa > 0 \quad \text{если} \quad z_n \geqslant \delta.$$

Построим барьер

$$w^{(1)}(z,\tau) = \exp\big(-\beta(|z - z_0|^2 + (\tau_1 - \tau))\big) - \exp(-\beta(2\delta)^2),$$
$$z_0 = (0, \ldots, 0, 2\delta).$$

Рассмотрим множество

$$Q = \{(z,\tau)\big||z - z_0|^2 + (\tau_1 - \tau) < (2\delta)^2, \quad 0 < \tau < \tau_1, \quad |z - z_0| > \delta\} \leftarrow$$

Параболическая граница Q состоит из множества $\{|z - z_0|^2 + \tau_1 - \tau = 4\delta^2\}$, на котором $w^{(1)} = 0$, $\{|z - z_0| = \delta\}$ и, возможно,$\{|z -$

$z_0|^2 + \tau_1 < 4\delta^2$, $|z - z_0| > \delta\}$, на которых $\tilde{u}^{(1)} \geqslant \varkappa w^{(1)}$. Выбором достаточно большого β добьемся того, чтобы

$$w_\tau^{(1)} - (N \cdot J_{\tilde{\Phi}}^{-T} \nabla w^{(1)})\widetilde{\Phi}_\tau - \widetilde{\mathcal{L}}_{\tilde{\Phi},0} w^{(1)} \leqslant 0.$$

в Q. Тогда по принципу максимума [12], так как $\tilde{u}^{(1)} \geqslant \varkappa w^{(1)}$ на границе, имеем $\tilde{u}^{(1)} \geqslant \varkappa w^{(1)}$ в Q, поэтому

$$\frac{\partial \tilde{u}^{(1)}(0,\tau_1)}{\partial z_n} \geqslant \varkappa \frac{\partial w^{(1)}(0,\tau_1)}{\partial z_n} = 4\varkappa\beta\delta e^{-4\beta\delta^2} \geqslant \delta_0 > 0.$$

Возвращаясь к переменным $t = \tau\varepsilon, y$, в силу произвольности y_0, приходим к выводу, что

$$\left.\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\right|_\Gamma \geqslant \delta_1 > 0, \quad t \leqslant \varepsilon\tau_0. \tag{16}$$

II. Оценим решение задачи (14). Выберем произвольную точку границы $y_0 \in \Gamma$ и воспользуемся преобразованием координат $y \to z$, которое переводит Ω в $\widetilde{\Omega}$, лежащую в полуплоскости $z_n > 0$, точка y_0 становится началом координат. Построим барьер

$$w^{(2)}(z,t) = w^{(2)}(z) = \varepsilon\alpha(1 - e^{-z_n}).$$

Пусть $Q_1 = \widetilde{\Omega} \times \mathbb{R}_+$, очевидно, что $|\tilde{u}^{(2)}| \leqslant w^{(2)}$ на $\partial' Q_1 = \partial\widetilde{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \cup \{z \in \widetilde{\Omega}, t = 0\}$. Выбором достаточно большого α добьемся того, чтобы $\mathcal{L}_{\Phi,\varepsilon} w^{(2)} \geqslant \varepsilon W_t$, тогда по принципу максимума $w^{(2)} \geqslant |\tilde{u}^{(2)}|$ в Q_1 и

$$\left|\frac{\partial \tilde{u}^{(2)}}{\partial n}\right| \leqslant c_2\varepsilon \|W_t\|_\infty,$$

выбором достаточно малого ε_0 добьемся того, чтобы при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$c_2\varepsilon\|W_t\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\delta_1. \tag{17}$$

Таким образом, из (16), (17) получим

$$\frac{\partial}{\partial n}(W + V)|_\Gamma \geqslant \frac{1}{2}\delta_1, \quad t \leqslant \varepsilon\tau_0, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{18}$$

III. Получим оценку при $t > \varepsilon\tau_0$. Так как W – решение задачи в квазистационарном приближении, оценка $\frac{\partial W}{\partial n}|_\Gamma \geqslant \delta_2 > 0$ имеет место при всех $t < t^*$ в силу неравенства Гарнака [22] и леммы о нормальной производной [23]. Кроме того, из полученных в §3 оценок функции пограничного слоя (3.1), (3.5), в частности, следует, что при $t \geqslant \varepsilon\tau_0$

$$\sup_{t-\delta<\tau<t} \left|\frac{\partial V}{\partial n}\right|_\Gamma \Big| \leqslant c\varepsilon\delta^{-1}(1+\varepsilon\delta^{-1})^\beta e^{-\frac{at}{\varepsilon}}\|V_0\|_{L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant c\frac{4}{\tau_0}\big(1+\frac{4}{\tau_0}\big)^\beta e^{-a\tau_0}\|V_0\|_{L_2(\Omega)}. \tag{19}$$

Возьмем τ_0 в п. I таким большим, чтобы правая часть в неравенстве (19) не превосходила $\frac{1}{2}\delta_2$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial n}(W+V)\big|_\Gamma \geqslant \frac{1}{2}\delta_2. \tag{20}$$

Вследствие (18), (19) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ приходим к (2.31).

Авторы благодарят А. И. Назарова за консультации при доказательстве Леммы 4.

Литература

1. L. A. Caffarelly, *Some aspects of the one-phase Stefan problem.* — Indiana Univ. Math. J. **27** (1978), 73–77.
2. D. Kinderlehrer, L. Nirenberg, *The smoothness of the free boundary in the one-phase Stefan problem.* — Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 257–282.
3. А. М. Мейрманов, *О классической разрешимости задачи Стефана.* — Докл. АН СССР **249**, No6 (1979), 1309–1312.
4. E. I. Hanzawa, *Classical solution of the Stefan p[roblem.* — Tohoku Math. J. **33** (1981), 297–335.
5. А. М. Мейрманов, *Задача Стефана.* Наука, Новосибирск (1986), 239 с.
6. Е. В. Радкевич, А. С. Меликулов, *Краевые задачи со свободной границей.* — ФАН, Ташкент (1988).
7. V. A. Solonnikov, *Lectures on evolution free boundary problems: classical solutions.* — Lect. Notes Math., Springer 1812 (2003), 123–175.
8. J. Escher and G. Somonet, *Classical solutions of multidimentional Hele-Show models.* — SIAM J. Math. Anal. **28** (1997), No. 5, 1028–1047.
9. Yi. Fahuai, *Classical solutions of quasi-stationary Stefan problem.* — Chin. Ann. Math. **17** (1996), No. 2, 175–186.
10. Е. В. Фролова, *Квазистационарное приближение для задача Стефана.* — Пробл. мат. анализа **31** (2005), 167–179.
11. Г. И . Бижанова, В. А. Солонников, *О задачах со свободными границами для параболических уравнений второго порядка.* — Алгебра и анализ **12**, No. 6 (2000), 98–139.
12. G. M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations.* World Scientific Publ. (1996).

13. Г. И . Бижанова, В. А. Солонников, *О разрешимости начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в граничном условии в весовом гёльдеровском пространстве функций.* — Алгебра и анализ **5**, No. 1 (1993), 109–142.
14. V. A. Solonnikov, *On the justification of the quasistationary approximation in the problem of motion of a viscous capillary drop.* — Interfaces and Free Boundaries **1** (1999), 125–173.
15. В. А. Солонников, Е. В. Фролова, *Весовые оценки решения линейной задачи, связанной с однофазной задачей Стефана, в случае стремления к нулю удельной теплоемкости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **336** (2006), 239–263.
16. В. А. Солонников, А. Г. Хачатрян, *Оценки решений параболических начально-краевых задач в весовых гёльдеровских нормах.* — Тр. МИАН СССР **147** (1980), 147–155.
17. Г. И . Бижанова, *Исследование разрешимости в весовом гёльдеровском пространстве функций многомерных двухфазных задач Стефана и нестационарной фильтрации Флорина для параболических уравнений второго порядка.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **213** (1994), 14–47.
18. В. С. Белоносов, Т. И. Зеленяк, *Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений.* НГУ, Новосибирск (1975).
19. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, М. (1973), 576 с.
20. А. В. Иванов, *Исследование свойств обобщенных решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка.* Канд. диссертация, ЛГУ, 1966.
21. Н. В. Крылов, М. В. Сафонов, *Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами.* — Изв. АН СССР **44** (1980), 161–175.
22. D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer–Verlag (1977), 401 s.
23. Е. М. Ландис, *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.* Наука, М. (1971), 287 с.

On the justification of the quasistationary approximation for the Stefan problem.

We prove the unique solvability of the one-phase Stefan problem with a small multiplier ε at the time derivative in the equation on a certain time interval independent of ε for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. We compare the solution to the Stefan problem with the solution to the Hele-Show problem which describes the process of melting materials with zero specific heat ε and can be considered as a quasistationary approximation for the Stefan problem. We show that the difference of the solutions has order $\mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(e^{-\frac{ct}{\varepsilon}})$. This provides justification of the quasistationary approximation.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 13 ноября 2007 г.