Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 348, 2007 г.

С. А. Назаров

О СГУЩЕНИИ ТОЧЕЧНОГО СПЕКТРА НА НЕПРЕРЫВНОМ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть Σ – область на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni x' = (x_2, x_3)$, ограниченная отрезком $\gamma = \{x' : x_3 = 0,\ |x_2| < l\}$ длиной $2l > 0$ и замкнутой простой гладкой дугой Γ, которая соединяет точки $(\pm l, 0)$ внутри полуплоскости $\mathbb{R}^2_- = \{x' : x_3 < 0\}$ и встречается в этих точках с отрезком γ под углами $\alpha_\pm \in (0, \pi)$ (см. рис. 1). Введем трехмерный цилиндр $\Pi = \mathbb{R} \times \Sigma \ni x = (x_1, x')$ и ограниченную область $\Theta_\varepsilon \subset \Pi$, характеризующуюся малым положительным параметром ε. Поверхность $\partial\Theta_\varepsilon$ кусочно гладкая, т.е. на ней могут быть конические точки и ребра, гладкие замкнутые или пересекающиеся, однако область $\Xi_\varepsilon = \Pi \setminus \overline{\Theta}_\varepsilon$ представима в виде объединения конечного числа областей с липшицевыми границами. Поверхность $\partial\Theta_\varepsilon$ зависит от параметра произвольным образом, в частности, может иметь общие участки с $\partial\Pi$. Единственное предположение: в Ξ_ε имеется тонкая область – “пластина”

$$\Omega_\varepsilon = \{x = (y_1, y_2, z) : y = (y_1, y_2) \in \omega,\\ z \in \Upsilon_\varepsilon(y) := (-\varepsilon h(y), 0)\}, \quad (1.1)$$

у которой нижнее слабоискривленное основание $\omega_\varepsilon = \{x : y \in \omega, z = -\varepsilon h(y)\}$ лежит на поверхности $\partial\Theta_\varepsilon$, а верхнее – на горизонтальной поверхности $\Lambda := \mathbb{R} \times \gamma$. В правой части (1.1) ω – непустое открытое, не обязательно связное множество на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y$, а h – гладкая функция на замыкании $\overline{\omega} = \omega \cup \partial\omega$ множества ω. Подчеркнем, что удобно использовать разные обозначения (x_1, x') и (y, z) для одной той же декартовой системы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07–01–00476).

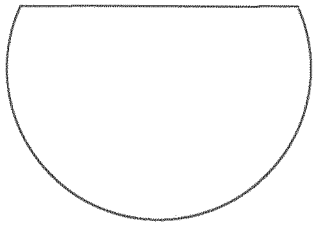

Рис. 1. Сечение канала.

координат x, причем первое соотносится с цилиндром Π, а второе – с пластиной Ω_ε.

В области Ξ_ε рассмотрим спектральную задачу линейной теории волн на поверхности идеальной жидкости (см., например, [1, гл. 1]):

$$-\Delta_x \Psi_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Xi_\varepsilon, \tag{1.2}$$

$$\partial_z \Phi_\varepsilon(x) = \lambda_\varepsilon \Phi_\varepsilon(x), \quad x \in \Lambda_\varepsilon := \Lambda \setminus \partial\Theta_\varepsilon, \tag{1.3}$$

$$\partial_n \Phi_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi_\varepsilon \setminus \overline{\Lambda}. \tag{1.4}$$

Здесь Φ_ε – потенциал скоростей, λ_ε – спектральный параметр (в механической постановке он пропорционален квадрату частоты гармонических колебаний системы), Δ_x – лапласиан, а ∂_n – производная вдоль внешней нормали к поверхности $\partial\Xi_\varepsilon$, причем $\partial_n = \partial_z$ на горизонтальной полосе Λ, на которой поставлено спектральное краевое условие Стеклова (1.3). Разумеется, краевое условие Неймана (1.4) задано в тех точках $x \in \partial\Xi_\varepsilon \setminus \overline{\Lambda}$, где нормаль n определена корректно, т.е. почти всюду на поверхности благодаря ее липшицевости. При указанной интерпретации спектральной задачи Стеклова (1.2)–(1.4) описанная геометрия соответствует, например, двум объектам, схематически изображенным на рис. 2 и 3: катеру на подводных крыльях и притопленному контейнеру с плоской крышкой. Плоские картинки воспроизводят только поперечные сечения, а пунктирная линия отражает продольную плоскость симметрии $\{x : x_2 = 0\}$, которая вовсе не обязательна в §2 и первой половине §3, но играет решающую роль в рассуждениях из второй половины §3 и всего §4. Отметим, что на рис. 2 изображено плавающее, а на рис. 3 – погруженное тело.

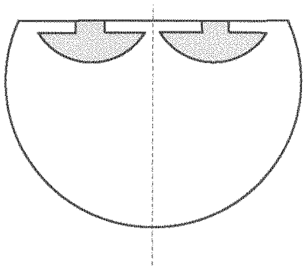

Рис. 2. Катер на подводных крыльях.

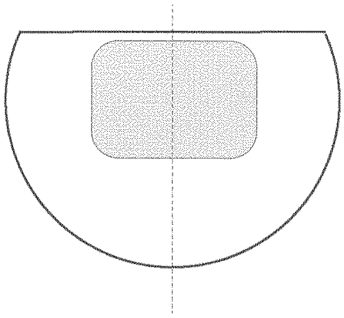

Рис. 3. Притопленный контейнер.

Ввиду иррегулярностей границы корректная формулировка задачи (1.3)–(1.4) апеллирует к интегральному тождеству [2]

$$(\nabla_x\Phi_\varepsilon, \nabla_x\Psi)_{\Xi_\varepsilon} = \lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon, \Psi)_{\Lambda_\varepsilon}, \quad \Psi \in H^1(\Xi_\varepsilon), \tag{1.5}$$

где ∇_x – градиент, $(\ ,\ )_\Xi$ – скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Xi)$, скалярном или векторном и обычно вещественном, а $H^1(\Xi_\varepsilon)$ – пространство Соболева. Это пространство, снабженное специфическим скалярным произведением

$$\langle\Phi, \Psi\rangle = (\nabla_x\Phi, \nabla_x\Psi)_{\Xi_\varepsilon} + (\Phi, \Psi)_{\Lambda_\varepsilon}, \tag{1.6}$$

обозначим $\mathcal{H}_\varepsilon$. Эквивалентная формулировка вариационной задачи как абстрактного уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\varepsilon$

$$\mathcal{K}_\varepsilon\Phi_\varepsilon = \mu_\varepsilon\Phi_\varepsilon \tag{1.7}$$

оперирует с новым спектральным параметром

$$\mu_\varepsilon = (1 + \lambda_\varepsilon)^{-1} \tag{1.8}$$

и оператором $\mathcal{K}_\varepsilon$ в $\mathcal{H}_\varepsilon$, определенным формулой

$$\langle \mathcal{K}_\varepsilon \Phi, \Psi \rangle = (\Phi, \Psi)_{\Lambda_\varepsilon}, \quad \Phi, \Psi \in \mathcal{H}_\varepsilon, \tag{1.9}$$

и являющимся положительным, непрерывным и симметрическим, а значит, самосопряженным. Из-за неограниченности поверхности Λ_ε оператор $\mathcal{K}_\varepsilon$ не может быть компактным. Кроме того, у него бесконечномерное ядро

$$\overset{0}{H}{}^1(\Xi_\varepsilon; \Lambda) = \{\Phi \in H^1(\Xi_\varepsilon) : \Phi(x) = 0, x \in \Lambda_\varepsilon\}. \tag{1.10}$$

Связь (1.8) спектральных параметров передает свойства спектра оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$ спектру задачи (1.2)–(1.4). Единственное исключение – ядро (1.10), которое отсутствует у задачи (1.2)–(1.4), так как точке $\mu = 0$ отвечает бесконечно удаленная точка λ.

В §3 будет проверено следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Непрерывный спектр оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$ покрывает сегмент $[0,1] := \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\mu = 0, \operatorname{Re}\mu \in [0,1]\}$, а остальная часть $\mathbb{C}\backslash[0,1]$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ представляет собой резольвентное поле оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$.*

Еще одно утверждение, доказанное в §3, имеет дело со сужением $\mathcal{K}_\varepsilon^\pm$ оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$ на подпространство $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm$ функций, нечетных относительно переменной x_2,

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\pm = \{\Phi \in \mathcal{H}_\varepsilon : \Phi(x_1, -x_2, x_3) = -\Phi(x_1, x_2, x_3)\}, \tag{1.11}$$

и, разумеется, предполагает симметрию области Ξ_ε относительно вертикальной плоскости $\{x : x_2 = 0\}$, а именно,

$$\Xi_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x_1, -x_2, x_3) \in \Xi_\varepsilon\}. \tag{1.12}$$

Теорема 1.2. *Существует порог $\mu_\Sigma \in (0,1)$, который зависит только от поперечного сечения Σ канала Π и для которого полуотрезок $(\mu_\Sigma, 1]$ на вещественной оси содержит дискретный спектр оператора $\mathcal{K}_\varepsilon^\pm$ в гильбертовом пространстве (1.11). Сегмент $[0, \mu_\Sigma]$ покрыт непрерывным спектром, а множество $\mathbb{C}\backslash[0,1]$ принадлежит резольвентному полю оператора $\mathcal{K}_\varepsilon^\pm$.*

Ясно, что любое собственное число оператора $\mathcal{K}_\varepsilon^\pm$ принадлежит точечному спектру оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$, который по теореме 1.1 лежит на непрерывном.

Переход к подпространству (1.11) равносилен переформулировке задачи (1.2)–(1.4) на половине области Ξ_ε, например, правой $\Xi_\varepsilon^+ = \{x \in \Xi_\varepsilon : x_2 > 0\}$ (ср. рис. 2 и 3), и добавлению краевых условий Дирихле

$$\Phi_\varepsilon^+(x) = 0, \quad x \in \xi_\varepsilon, \tag{1.13}$$

на образованной искусственно поверхности $\xi_\varepsilon = \{x \in \Xi_\varepsilon : x_2 = 0\}$. Нечетное продолжение собственной функции $\Phi_\varepsilon^+ \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Xi_\varepsilon^+; \xi_\varepsilon)$ усеченной задачи в Ξ_ε^+ на область Ξ_ε является собственной функцией исходной задачи (1.2)–(1.4), отвечающей тому же собственному числу $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^+$.

Прием постановки искусственных краевых условий на плоскости геометрической симметрии для уменьшения непрерывного спектра был впервые предложен в работе [3], где было показано существование точечного спектра на непрерывном для уравнения Гельмгольца с краевыми условиями Неймана в полосе с симметричным отверстием. Этот же прием и его варианты применялись в статьях [4] и [5] для плоской и пространственной задач об упругих волноводах. В §4 теоремы 1.1 и 1.2 используются для проверки следующего факта

Теорема 1.3. *Для любых чисел, натурального $J \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ и положительного d, найдется такая величина $\varepsilon(J, d) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon(J, d)]$ на сегменте $[(1 + d)^{-1}, 1]$ непрерывного спектра оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$ найдется по крайней мере J различных собственных чисел этого оператора.*

В согласии с формулой (1.8) теорема 1.3 доставляет не менее J собственных функций $\Phi_\varepsilon^{(j)} \in \mathcal{H}_\varepsilon$ задачи (1.2)–(1.4), отвечающих ее собственным числам $\lambda_\varepsilon^{(j)} \in (0, d]$, $j = 1, \dots, N(\varepsilon)$; иными словами, $N(\varepsilon) \geqslant J$. Такие собственные функции экспоненциально затухают на бесконечности (см. конец §3) и поэтому обладают конечной энергией. Они называются "ловушечными модами" (trapped modes), допускают разнообразные физические интерпретации и означают потерю однозначной разрешимости неоднородной краевой задачи (1.2)–(1.4), дополненной подходящими условиями излучения (см., например, [1]).

В обзоре [6] приведен достаточно полный список литературы по теоремам существования и единственности в теории поверхностных волн и примерам конкретным ловушечных мод. Дополним этот список ссылками на признак [7, 8] и критерий [9, 10] появления экспоненциально затухающих решений формально самосопряженных краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность, к которым сводятся практически все задачи дифракции. Подчеркнем, что упомянутый критерий пригоден для строго обоснованной численной реализации алгоритма поиска решений с конечной энергией.

Все известные автору примеры неединственности решений в линейной теории поверхностных волн имеют дело с конкретными геометрическими формами и одиночными ловушечными модами. В этом отношении теорема 1.3 стоит особняком: она позволяет на сколь угодно короткий сегмент $[0,d]$ непрерывного спектра вариационной задачи (1.5) или, что то же, краевой задачи (1.2)–(1.4) "посадить" любое количество собственных чисел, не предъявляя одновременно никаких *глобальных* требований к форме тела – область $\Theta_\varepsilon \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ может быть произвольной. Сам результат выводится по стандартной схеме [3] после исследования вспомогательной спектральной задачи Стеклова на тонкой пластине (1.1) со смешанными краевыми условиями

$$-\Delta_x u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \tag{1.14}$$

$$\partial_z u_\varepsilon(y,0) = \sigma_\varepsilon u_\varepsilon(y,0),\ y \in \omega, \quad \partial_n u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \omega_\varepsilon, \tag{1.15}$$

$$u_\varepsilon(y,z) = 0, \quad y \in \partial\omega, \quad z \in \Upsilon_\varepsilon(y). \tag{1.16}$$

В §2 при помощи процедур построения и обоснования асимптотики решений эллиптических краевых условий в тонких областях (см. [11, 12], а также [13] и др.) выведена предельная ($\varepsilon = 0$) спектральная задача Дирихле

$$-\nabla_y \cdot h(y)\nabla_y w(y) = \beta w(y), y \in \omega, \quad w(y) = 0, \quad y \in \partial\omega, \tag{1.17}$$

где $\nabla_y = (\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2)$, а точкой обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$, т.е. $\nabla_y \cdot = \operatorname{div}$, и установлено следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Пусть k – натуральное число и $\beta^{(k)}$ – член последовательности*

$$0 < \beta^{(1)} \leqslant \beta^{(2)} \leqslant \dots \leqslant \beta^{(k-1)} < \beta^{(k)} = \\ = \beta^{(k+\varkappa_k-1)} < \beta^{(k+\varkappa_k)} \leqslant \dots \to +\infty \tag{1.18}$$

собственных чисел задачи (1.17), *т.е. ее $\varkappa_k$-кратное собственное число. Существуют такие величины $\varepsilon_k > 0$ и $c_k > 0$, что при $\varepsilon \in$*

$(0, \varepsilon_k]$ *в последовательности*

$$0 < \sigma_\varepsilon^{(1)} \leqslant \sigma_\varepsilon^{(2)} \leqslant \dots \leqslant \sigma_\varepsilon^{(q)} \leqslant \dots \to +\infty \tag{1.19}$$

собственных чисел задачи (1.14)–(1.16) *найдутся элементы* $\sigma_\varepsilon^{(p)}, \dots, \sigma_\varepsilon^{(p+\varkappa_k-1)}$, *удовлетворяющие неравенству*

$$|\sigma_\varepsilon^{(q)} - \varepsilon\beta^{(k)}| \leqslant c_k\varepsilon^2. \tag{1.20}$$

Замечание 1.1. Первые собственные числа $\beta^{(1)}$ и $\sigma_\varepsilon^{(1)}$ не обязательно простые, так как множество ω не предполагается связным. □

Формула (1.20) показывает, что спектры в семействе задач (1.14)–(1.16) сгущаются к началу координат при $\varepsilon \to +0$. Ввиду условий Дирихле (1.16) на боковой поверхности пластины такой же результат верен и для задач (1.14)–(1.16) и (1.17) в областях $\Omega_\varepsilon^+ = \{x \in \Omega_\varepsilon : x_2 > 0\}$ и $\omega^+ = \{y \in \omega : y_2 > 0\}$ соответственно. Теперь доказательство теоремы 1.3 получается применением максиминимального принципа (см. [14, теорема 10.2.2]) и привлечением пробных функций, полученных подходящим продолжением собственных функций задачи Стеклова с множества Ω_ε^+ на всю область Ξ_ε (подробности см. в §4).

Основное внимание в работе уделяется теореме 1.3, установленной, в частности, при помощи асимптотического анализа задачи Стеклова (1.14)–(1.15) в тонкой области. Между тем, развиваемый подход позволяет идентифицировать ловушечные моды и без предположения о малости параметра ε в формуле (1.1) – об этом речь идет в конце §4.

2. Асимптотика собственных чисел задачи Стеклова в тонкой области

Для решений спектральной задачи (1.14)–(1.16) примем стандартные асимптотические анзацы (ср. статьи [11, 12] и монографию [13, гл. 7])

$$\sigma_\varepsilon = \varepsilon\beta + \dots, \tag{2.1}$$

$$u_\varepsilon(x) = w(y) + \varepsilon^2 w_2(y,\zeta) + \dots. \tag{2.2}$$

Здесь β и w, w_2 – число и функции, подлежащие определению, а $\zeta = \varepsilon^{-1}z \in \Upsilon_1(y)$ – “быстрая” переменная. В силу определения (1.1) тонкой пластины Ω_ε нормаль n на ее нижнем основании имеет вид

$$n(\varepsilon, y) = \left(1 + \varepsilon^2 |\nabla_y h(y)|^2\right)^{-1/2} (-\varepsilon \nabla_y h(y), -1).$$

Таким образом, дифференциальные операторы допускают расщепления

$$\begin{gathered} \Delta_x = \varepsilon^{-2} \partial_\zeta^2 + \Delta_y \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ \partial_n = -\varepsilon^{-1} \partial_\zeta - \varepsilon \nabla_y h(y) \cdot \nabla_y + \ldots \quad \text{на} \quad \omega_\varepsilon, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\partial_\zeta = \partial / \partial \zeta$, а многоточием обозначены младшие члены, несущественные в формальном асимптотическом анализе.

Подставим разложения (2.1)–(2.3) в уравнение (1.14) и краевые условия (1.15), после чего соберем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра и получим следующие задачи Неймана для обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $\Upsilon_1(y) = (-h(y), 0)$:

$$-\partial_\zeta^2 w(y) = 0, \quad \zeta \in \Upsilon_1(y), \quad \partial_\zeta w(y) = 0, \quad \zeta = -h(y), 0; \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} -\partial_\zeta^2 w_2(y, \zeta) = \Delta_y w(y), \, \zeta \in \Upsilon_1(y), \\ \partial_\zeta w_2(y, 0) = \beta w(y), \quad -\partial_\zeta w_2(y, -h(y)) = \nabla_y h(y) \cdot \nabla_y w(y). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Соотношения (2.4) выполнены, так как функция w не зависит от быстрой переменной ζ. Условие разрешимости задачи (2.5)

$$0 = \int\limits_{-h(y)}^{0} \Delta_y w(y) \, d\zeta + \beta w(y) + \nabla_y h(y) \cdot \nabla_y w(y) =$$

$$= h(y) \Delta_y w(y) + \nabla_y h(y) \cdot \nabla_y w(y) + \beta w(y) = \nabla_y \cdot h(y) \nabla_y w(y) + \beta w(y)$$

принимают вид дифференциального уравнения из спектральной задачи (1.17). Подчеркнем, что множитель ε был введен в правую часть (2.1) именно для того, чтобы главный член невязки, порожденной слагаемым $\sigma_\varepsilon u_\varepsilon$ из условия Стеклова (1.15), появился как раз во вспомогательной задаче (2.5) для поправочного члена $\varepsilon^2 w_2$ асимптотического анзаца (2.2).

Благодаря условию Дирихле в задаче (1.17) функция (2.2) оставляет пренебрежимо малую невязку в краевом условии (1.16) на боковой поверхности пластины Ω_ε. Итак, если β и w – собственные число и функция задачи (1.17), то можно определить и слагаемое $\varepsilon^2 w_2(y, \zeta)$ в асимптотическом анзаце (2.2). На этом формальное построение главных асимптотических членов решения задачи (1.14)–(1.16) заканчивается.

Спектральная задача (1.17) имеет последовательность (1.18) собственных чисел $\beta^{(k)}$, а соответствующие собственные функции $w^{(k)}$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(h\nabla_y w^{(k)}, \nabla_y w^{(j)})_\omega + (w^{(k)}, w^{(j)})_\omega = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{N}; \tag{2.6}$$

при этом $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера.

Для обоснования построенной асимптотики воспользуемся классическим результатом, известным как "лемма о почти собственных значениях и векторах" – ее доказательство можно найти в работе [15] (см. также книгу [14]).

Лемма 2.1. *Пусть K – компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $\langle\, , \rangle_H$. Если элемент $U \in H$ и величина $t \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ таковы, что*

$$\|U; H\| = 1, \quad \|KU - tU; H\| = \delta < t,$$

то найдется собственное число $\tau^{(k)}$ оператора K, удовлетворяющее неравенству

$$|t - \tau^{(k)}| \leqslant \delta.$$

Более того, при любом $\widehat{\delta} \in (\delta, t)$ существуют коэффициенты a_k, при которых выполнено соотношение

$$\|u - \sum a_k u^{(k)}; H\| \leqslant 2\delta/\widehat{\delta},$$

где суммирование распространено на все собственные числа оператора K из сегмента $[t - \widehat{\delta}, t + \widehat{\delta}]$, а соответствующие собственные векторы $u^{(k)} \in H$ и коэффициенты a_k подчинены условиям $\langle u^{(k)}, u^{(j)}\rangle_H = \delta_{j,k}$ и $\sum |a_k|^2 = 1$.

Под $H = H_\varepsilon$ будем понимать подпространство функций $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, выделенное краевым условием (1.16), причем

$$\langle u, v\rangle_{H_\varepsilon} = (\nabla_x u, \nabla_x v)_{\Omega_\varepsilon} + \varepsilon(u(\cdot, 0), v(\cdot, 0))_\omega \tag{2.7}$$

и $v(\cdot, 0)$ – след функции v на верхнем основании пластины (1.1). Оператор $K = K_\varepsilon$ введем формулой

$$\langle K_\varepsilon u, v\rangle_{H_\varepsilon} = (u(\cdot, 0), v(\cdot, 0))_\omega. \tag{2.8}$$

Благодаря компактности вложения $H^1(\Omega_\varepsilon)\subset L_2(\partial\Omega_\varepsilon)$ он обладает свойствами, затребованными в лемме 2.1. Помимо бесконечномерного ядра, состоящего из функций $v\in H_\varepsilon$, обращающихся в нуль на верхнем основании пластины, оператор K_ε имеет собственные числа

$$\tau^{(q)}=(\varepsilon+\sigma_\varepsilon^{(q)})^{-1}, \qquad (2.9)$$

где $\sigma_\varepsilon^{(q)}$ – собственные числа (1.19) задачи (1.14)–(1.16).

Пусть $\beta^{(k)}$ – $\varkappa_k$-кратное число задачи Дирихле (1.17) (см. среднюю часть формулы (1.18)). В качестве $\varkappa_k$ экземпляров приближенных решений $\{t^{(p)},U^{p)}\}$ абстрактного спектрального уравнения $K_\varepsilon u=\tau u$ возьмем пары

$$t^{(p)}=\varepsilon^{-1}(1+\beta^{(k)})^{-1},\quad U^{(p)}(x)=\|w^{(p)};H_\varepsilon\|^{-1}w^{(p)}(y); \qquad (2.10)$$

здесь $p=k,\dots,k+\varkappa_k-1$. Поскольку функции $U^{(p)}$ не зависят от быстрой переменной ζ, при учете формул (2.7), (2.6) и (1.1) находим, что

$$\|w^{(p)};H_\varepsilon\|=\varepsilon^{1/2},$$
$$\langle U^{(p)},U^{(q)}\rangle_{H_\varepsilon}=\delta_{p,q},\quad p,q=k,\dots,k+\varkappa_k-1. \qquad (2.11)$$

При помощи соотношений (2.10), (2.12) и (2.8) вычислим величины δ, фигурирующие в лемме 2.1, а именно,

$$\delta:=\|K_\varepsilon U^{(p)}-t^{(p)}U^{(p)};H_\varepsilon\|=$$
$$=\varepsilon^{-3/2}(1+\beta^{(k)})^{-1}\sup_{\dots}\left|\langle\varepsilon(1+\beta^{(k)})K_\varepsilon w^{(p)}-w^{(p)},W\rangle_{H_\varepsilon}\right|= \qquad (2.12)$$
$$=\varepsilon^{-3/2}(1+\beta^{(k)})^{-1}\sup_{\dots}\left|\varepsilon\beta^{(k)}(w^{(p)},W(\cdot,0))_\omega-(\nabla_y w^{(p)},\nabla_y W)_{\Omega_\varepsilon}\right|=$$
$$=\varepsilon^{-1/2}(1+\beta^{(k)})^{-1}\sup_{\dots}\left|\Big(h\nabla_y w^{(p)},\overline{\nabla_y W}\Big)_\omega-\beta^{(k)}(w^{(p)},W(\cdot,0))_\omega\right|.$$

Здесь многоточие заменяет высказывание “$W\in H_\varepsilon:\|W;H_\varepsilon\|=1$”, а чертой обозначена процедура вычисления среднего по отрезку $\Upsilon_\varepsilon(y)$, т.е.

$$\overline{Z}(y)=\varepsilon^{-1}h(y)^{-1}\int\limits_{-\varepsilon h(y)}^{0}Z(y,z)dz. \qquad (2.13)$$

Лемма 2.2. *Справедливы оценки*

$$\|W(\cdot,0)-\overline{W};L_2(\omega)\|\leqslant c\varepsilon^{1/2}\|\partial_z W;L_2(\Omega_\varepsilon)\|,$$
$$\|\nabla_y\overline{W}-\overline{\nabla_y W};L_2(\omega)\|\leqslant c\varepsilon^{1/2}\|\partial_z W;L_2(\Omega_\varepsilon)\|, \tag{2.14}$$

в которых постоянные не зависят от функции $W\in H^1(\Omega_\varepsilon)$ и параметра $\varepsilon\in(0,1]$.

Доказательство. Имея в виду окончательное замыкание по соболевской норме в $H^1(\Omega_\varepsilon)$, будем обращаться с W как с гладкой функцией. Применяя формулу Ньютона–Лейбница

$$W(y,0)-W(y,z)=\int\limits_z^0 \partial_\mathfrak{z} W(y,\mathfrak{z})\,d\mathfrak{z}, \tag{2.15}$$

обнаруживаем, что

$$\left|W(y,0)-\overline{W}(y)\right|^2=\frac{1}{\varepsilon^2 h(y)^2}\left|\int\limits_{\varepsilon h(y)}^0\int\limits_z^0 \partial_\mathfrak{z} W(y,\mathfrak{z})\,d\mathfrak{z}\,dz\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int\limits_{-\varepsilon h(y)}^0 |\partial_\mathfrak{z} W(y,\mathfrak{z})|\,d\mathfrak{z}\right|^2\leqslant c\varepsilon\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon(y)}|\partial_z W(y,z)|^2\,dz. \tag{2.16}$$

Для проверки первого соотношения (2.14) осталось проинтегрировать неравенство (2.16) (без средней его части) по области $\omega\ni y$.

Согласно правилу дифференцирования интегралов с переменными пределами имеем

$$\nabla_y\overline{W}(y)-\overline{\nabla_y W}(y)=h(y)^{-1}\nabla_y h(y)\left(W(y,-\varepsilon h(y))-\overline{W}(y)\right).$$

Аналогичные (2.15), (2.16) выкладки показывают, что

$$\|W(\cdot,-\varepsilon h(\cdot))-\overline{W};L_2(\omega)\|\leqslant c\,\varepsilon^{1/2}\|\partial_z W;L_2(\Omega_\varepsilon)\|.$$

Второе соотношение (2.14) стало очевидным. □

Поскольку в задаче (1.17) собственные число $\beta^{(k)}$ и функция $w^{(p)}\in\overset{0}{H}{}^1(\omega;\partial\omega)$ (ср. определение (1.10)) удовлетворяют интегральному тождеству [2]

$$\left(h\nabla_y w^{(p)},\nabla_y\overline{W}\right)_\omega=\beta^{(k)}\left(w^{(p)},\overline{W}\right)_\omega,\quad \overline{W}\in\overset{0}{H}{}^1(\omega;\partial\omega). \tag{2.17}$$

Лемма 2.2 устанавливает, что выражение (2.12) не превосходит величины δ_k, зависящей от номера k, но не от параметра $\varepsilon \in (0,1]$. Таким образом, по лемме 2.1 найдется собственное число (2.9) оператора K_ε, удовлетворяющее соотношению

$$\left|\tau_\varepsilon^{(q)} - \varepsilon^{-1}(1+\beta^{(k)})^{-1}\right| = \\ = \left|(\varepsilon + \sigma_\varepsilon^{(q)})^{-1} - \varepsilon^{-1}(1+\beta^{(k)})^{-1}\right| \leqslant \delta_k. \quad (2.18)$$

Отсюда при малом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_k]$ вытекает неравенство (1.20) с множителем c_k, зависящим от величин δ_k и $\beta^{(k)}$. В самом деле, эквивалентное (2.18) соотношение

$$|\sigma_\varepsilon^{(q)} - \varepsilon\beta^{(k)}| \leqslant \delta_k\varepsilon(1+\beta^{(k)})(\varepsilon + \sigma^{(q)}) \quad (2.19)$$

в случае $\varepsilon \leqslant \varepsilon_k = [2\delta_k(1+\beta^{(k)})]^{-1}$ обеспечивает оценку

$$\sigma_\varepsilon^{(q)} \leqslant \varepsilon\left(1 - \delta_k\varepsilon(1+\beta^{(k)})\right)^{-1}\left(\beta^{(k)} + \delta_k\varepsilon^2(1+\beta^{(k)})\right),$$

позволяющую нужным образом обработать последний сомножитель в (2.19).

Осталось убедиться в том, что неравенству (2.18) удовлетворяют по крайней мере $\varkappa_k$ элементов последовательности (1.19). С этой целью воспользуемся второй частью леммы 2.1, положив $\widehat{\delta} = T\delta_k$, где T – не зависящее от параметра ε, но большое положительное число. Отметим, что требование $\widehat{\delta} \in (\delta, t)$ в лемме 2.1 разве лишь уменьшает верхнюю границу $\varepsilon_k > 0$ для параметра ε, поскольку $t^{(p)} = O(\varepsilon^{-1})$. При $p = k, \ldots, k + \varkappa_k - 1$ найдутся такие коэффициенты a_j^p с номерами $j = N(\varepsilon), \ldots, N(\varepsilon) + X(\varepsilon) - 1$, что

$$\left\| U^{(p)} - \sum_{j=N(\varepsilon)}^{N(\varepsilon)+X(\varepsilon)-1} a_j^p u_\varepsilon^{(j)}; H \right\| \leqslant 2\,\frac{\delta_k}{\widehat{\delta}} = \frac{2}{T}. \quad (2.20)$$

Здесь $\tau_\varepsilon^{(N(\varepsilon))}, \ldots, \tau_\varepsilon^{(N(\varepsilon)+X(\varepsilon)-1)}$ – список всех собственных чисел оператора K_ε, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\tau_\varepsilon^{(j)} - \varepsilon^{-1}(1+\beta^{(k)})^{-1}\right| \leqslant T\delta_k, \quad (2.21)$$

а соответствующие собственные функции $u_\varepsilon^{(j)} \in H_\varepsilon$ подчинены условиям ортогональности и нормировки

$$\langle u_\varepsilon^{(j)}, u_\varepsilon^{(k)} \rangle_{H_\varepsilon} = \delta_{j,k}. \quad (2.22)$$

Напомним, что столбцы коэффициентов

$$a^p = \left(a^p_{N(\varepsilon)}, \ldots, a^p_{N(\varepsilon)+X(\varepsilon)-1}\right)$$

имеют единичную длину. В силу требования (2.22) имеем

$$\left\| \sum_{j=N(\varepsilon)}^{N(\varepsilon)+X(\varepsilon)-1} a^p_j u^{(j)}_\varepsilon; H \right\| = 1.$$

Перечисленные формулы вместе с (2.11) показывают, что

$$\delta_{p,q} = \left\langle U^{(p)}, U^{(q)} \right\rangle_{H_\varepsilon} + \left\langle U^{(p)} - S^{(p)}, U^{(q)} \right\rangle_{H_\varepsilon} +$$
$$+ \left\langle S^{(p)}, U^{(q)} - S^{(p)} \right\rangle_{H_\varepsilon} + \left\langle S^{(p)}, S^{(q)} \right\rangle_{H_\varepsilon} =$$
$$= A_{p,q} + \sum_{j=N(\varepsilon)}^{N(\varepsilon)+X(\varepsilon)-1} a^p_j a^q_j, \quad \|A_{p,q}\| \leqslant 4T^{-1};$$

здесь $p, q = k, \ldots, k + \varkappa_k - 1$ и $S^{(p)}$ – сумма по j из-под знака нормы в левой части (2.20). Таким образом, столбцы $a^k, \ldots, a^{k+\varkappa-1} \in \mathbb{R}^{X(\varepsilon)}$ "почти ортонормированы", т.е. при достаточно малом $4T^{-1}$ они оказываются линейно независимы и, значит, $X(\varepsilon) \geqslant \varkappa_k$. Поскольку неравенство (2.21) мало чем отличается от неравенства (2.18), приведшего к оценке (1.20), теорема 1.4 доказана.

Замечание 2.1 Утверждение теоремы 1.4 оказывается достаточным для преследуемых целей, однако не является полным: в нем не указано, что неравенству (1.20) удовлетворяют собственные числа $\sigma^{(k)}_\varepsilon, \ldots, \sigma^{(k+\varkappa_k-1)}_\varepsilon$ и никакие другие из последовательности (1.19). В книге [13, гл. 7] разработан метод прямого и обратного сведений, позволяющий убедиться в справедливости упомянутого факта и, более того, получить оценки асимптотических остатков в разложениях собственных чисел и функций с мажорантами, в которых явно выделена зависимость от собственного числа $\beta^{(k)}$, его кратности $\varkappa_k$ и других атрибутов предельного спектра (1.18). Этот метод был применен в работах [16–18] и годится для исследования задачи (1.14)–(1.16), однако ввиду излишней громоздкости здесь не воспроизводится. Подчеркнем, что даже исчерпывающий список собственных чисел оператора

K_ε не позволяет судить об истинном количестве элементов точечного спектра оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$ на полуинтервале $((1+d)^{-1}, 1]$ хотя бы потому, что этот оператор может, вообще говоря, иметь собственные функции, четные по переменной x_2. Автор не знает ограничений на данные задачи, при которых слова "по крайней мере" в формулировке теоремы 2.2 можно заменить словом "точно". □

Закончим изучение спектра задачи Стеклова в тонкой области простым утверждением о сходимости нормированных собственных чисел и функций. При помощи известного приема (см., например, [19]) из этого утверждения выводится факт, обсуждавшийся в замечании 2.1, но остающийся без применения в §4.

Предложение 2.1. *Пусть $\sigma_\varepsilon^{(q)}$ и $u_\varepsilon^{(q)}$ – собственное число с зафиксированным номером и соответствующая собственная функция задачи* (1.14)–(1.16), *нормированная формулами* (2.22) *и* (2.7). *Тогда имеют место сходимости*

$$\varepsilon^{-1/2}\overline{u_\varepsilon^{(q)}} \to w \quad \text{слабо в} \quad \overset{\circ}{H}{}^1(\omega;\partial\omega) \quad \text{и сильно в} \quad L_2(\omega), \tag{2.23}$$

$$\varepsilon^{-1}\sigma_\varepsilon^{(q)} \to \beta \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0, \tag{2.24}$$

причем β – собственное число задачи (1.17), *w – соответствующая собственная функция, нормированная условием* (2.6), *а чертой обозначена процедура вычисления среднего* (2.13).

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon^{(q)}]$, где $\varepsilon^{(q)} = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q\} > 0$. По теореме 1.4 в $c_k\varepsilon$-окрестности собственного числа $\beta^{(k)}$ найдется не менее $\varkappa_k$ нормированных собственных чисел $\varepsilon^{-1}\sigma_\varepsilon^{(p)}$. Таким образом, заведомо справедливо соотношение

$$\varepsilon^{-1}\sigma_\varepsilon^{(q)} \leqslant \beta^{(q)} + c^{(q)}\varepsilon \leqslant C^{(q)} := \beta^{(q)} + c^{(q)}\varepsilon^{(q)},$$
$$c^{(q)} = \min\{c_1, \dots, c_q\} > 0, \tag{2.25}$$

и поэтому существует бесконечно малая последовательность значений параметра ε, вдоль которой реализуется сходимость (2.24).

В интегральное тождество [2]

$$(\nabla_x u_\varepsilon^{(q)}, \nabla_x v)_{\Omega_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon^{(q)}(u_\varepsilon^{(q)}(\cdot, 0), v(\cdot, 0))_\omega, \quad v \in H_\varepsilon, \tag{2.26}$$

обслуживающее задачу (1.14)–(1.16), подставим пробную функцию $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\omega;\partial\omega)$, не зависящую от поперечной переменной. Рассмотрим функцию

$$\Omega_1 \ni (y,\zeta) \mapsto \mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}(y,\zeta) = \varepsilon^{1/2} u_\varepsilon^{(q)}(y,\varepsilon\zeta), \tag{2.27}$$

для которой ввиду нормировки (2.22), (2.7) справедливо равенство

$$\varepsilon^{-2}\|\partial_z \mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}; L_2(\Omega_1)\|^2 + \|\nabla_y \mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}; L_2(\Omega_1)\|^2 + \|\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}(\cdot,0); L_2(\omega)\|^2 = 1.$$

Следовательно, вдоль некоторой бесконечно малой последовательности значений параметра ε (ее можно считать той же, что и ранее для сходимости (2.24)) верны высказывания

$$\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)} \to w \quad \text{слабо в} \quad H^1(\Omega_1) \quad \text{и сильно в} \quad L_2(\Omega_1),$$
$$\partial_\zeta \mathbf{u}_\varepsilon^{(q)} \to 0 \quad \text{сильно в} \quad L_2(\Omega_1).$$

Таким образом, функция $w \in \overset{\circ}{H}{}^1(\omega;\partial\omega)$ не зависит от переменной ζ, и согласно определению (2.27) имеем

$$\overline{u_\varepsilon^{(q)}} = h^{-1}\int_{-h}^{0} \mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}\, d\zeta \to w \quad \text{слабо в} \quad H^1(\omega) \quad \text{и сильно в} \quad L_2(\omega).$$

Кроме того, благодаря компактности вложения $H^1(\Omega_1) \subset L_2(\partial\Omega_1)$ обнаруживаем, что

$$\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}(\cdot,0) \to w \quad \text{сильно в} \quad L_2(\omega).$$

Следовательно, тождество (2.26), переписанное в виде

$$(\nabla_y \mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}, \nabla_y v)_{\Omega_1} = \varepsilon^{-1}\sigma_\varepsilon^{(q)}(\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}(\cdot,0), v)_\omega,$$

допускает предельный переход $\varepsilon \to +0$ и превращается в аналогичное (2.22) интегральное тождество

$$(h\nabla_y w, \nabla_y v)_\omega = \beta(w,v)_\omega, \quad v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\omega), \tag{2.28}$$

обслуживающее задачу (1.17). Наконец, в силу равенств (2.26), (2.21) и (2.28) справедливо соотношение

$$1 = \|\nabla_x u_\varepsilon^{(q)}; L_2(\Omega_\varepsilon)\|^2 + \varepsilon\|u_\varepsilon^{(q)}(\cdot,0); L_2(\omega)\|^2 =$$

$$= (\sigma_\varepsilon^{(q)} + \varepsilon)\|u_\varepsilon^{(q)}(\cdot, 0); L_2(\omega)\|^2 =$$
$$= (\varepsilon^{-1}\sigma_\varepsilon^{(q)} + 1)\|\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}(\cdot, 0); L_2(\omega)\|^2 \to (\beta + 1)\|w; L_2(\omega)\|^2 =$$
$$= \|h^{1/2}\nabla_y w; L_2(\omega)\|^2\| + \|w; L_2(\omega)\|^2.$$

Итак, β – собственное число, а w – нормированная собственная функция задачи (1.17). Остается заметить, что ввиду единственности слабого предела сходимости (2.23) и (2.24) имеют место при любой бесконечно малой последовательности значений параметра ε.

3. Спектр задачи Стеклова в бесконечной области

Теория эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность построена в полной мере (см. ключевые работы [20–23], а также, например, монографию [24]). Применим результаты и методы этой теории для изучения свойств оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$, определенного формулой (1.9) и поставленного в §1 в соответствие спектральной задаче (1.2)–(1.4).

Сначала рассмотрим вспомогательную (модельную) задачу на сечении Σ цилиндра Π, а именно,

$$\begin{gathered} -\Delta_{x'}\varphi(x') = \eta^2\varphi(x'), \quad x' \in \Sigma, \\ \partial_n\varphi(x') = \lambda\varphi(x'), \quad x' \in \gamma, \quad \partial_n\varphi(x') = 0, \quad x' \in \Gamma. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь λ – некоторое фиксированное число, неотрицательное, а η – спектральный параметр, т.е. оператор задачи (3.1) следует понимать как полиномиальный (квадратичный) пучок.

Пусть $A(\lambda)$ – неограниченный оператор в пространстве $L_2(\Sigma)$, ассоциированный [14, гл. 10] с билинейной формой

$$Q(\varphi, \psi; \lambda) = (\nabla_y\varphi, \nabla_y\psi)_\Sigma - \lambda(\varphi, \psi)_\gamma. \tag{3.2}$$

Форма (3.2) симметрична, полуограничена снизу и замкнута, так как при достаточно большой постоянной $c_\lambda > 0$ сумму $Q(\varphi, \psi; \lambda) + c_\lambda(\varphi, \psi)_\Sigma$ можно взять в качестве скалярного произведения в пространстве $H^1(\Sigma)$ благодаря следовому неравенству [2], выражающему компактность вложения $H^1(\Sigma) \subset L_2(\gamma)$,

$$\|\varphi; L_2(\gamma)\| \leqslant t\|\varphi; H^1(\Sigma)\| + C(t)\|\varphi; L_2(\Sigma)\|; \tag{3.3}$$

здесь t – произвольное положительное число, а множитель $C(t)$ неограниченно возрастает при $t \to +0$. Согласно теореме 10.1.2

[14] оператор $A(\lambda)$ самосопряжен. Его областью определения $\mathcal{D}(A(\lambda))$ служит весовой класс $V_1^{2,0}(\Sigma)$, порожденный ступенчатой весовой нормой (см., например, статьи [25, 26] и [23])

$$\|\varphi; V_1^{2,0}(\Sigma)\| = \\ = \left(\|\varphi; L_2(\Sigma)\|^2 + \|\nabla_{x'}\varphi; L_2(\Sigma)\|^2 + \|\rho\nabla_{x'}^2\varphi; L_2(\Sigma)\|^2\right)^{1/2}, \quad (3.4)$$

где $\rho(x')$ – расстояние от точки x' до ближайшей из угловых точек $(\pm l, 0)$ на дуге $\partial\Sigma$, а $\nabla_{x'}^k\varphi$ – совокупность всех производных функции φ порядка k. Вложение $H^1(\Sigma) \subset L_2(\gamma)$ компактно, а значит, по теореме 10.1.5 [14] спектр оператора $A(\lambda)$ дискретен. Поскольку $Q(1,1;\lambda) < 0$ при положительном λ, теорема 10.2.1 [14] гарантирует, что первое собственное число $\alpha_0(\lambda)$ оператора $A(\lambda)$, являющееся нижней гранью его спектра, отрицательно. Обозначим $\varphi_0(\cdot;\lambda) \in V_1^{2,0}(\Sigma) \subset H^1(\Sigma)$ соответствующую собственную функцию. При $\lambda = 0$ положим $\alpha_0(0) = 0$, $\varphi_0(x';0) = 1$.

Числа $\eta_0^\pm(\lambda) = \pm i|\alpha_0(\lambda)|^{1/2}$, где i – мнимая единица, является собственными для пучка (3.1), и им отвечает собственная функция $\varphi_0(\cdot;\lambda)$. Нетрудно убедиться в том, что функция

$$\Pi \ni x \mapsto \Phi^\pm(x';\lambda) = \exp(\eta_0^\pm(\lambda)\, x_1)\varphi_0(x') \quad (3.5)$$

является гармонической и удовлетворяет условию Стеклова (1.3) на горизонтальной поверхности Λ, а также однородному условию Неймана на “дне и стенках” $\mathbb{R}\times\Gamma$ канала Π. При $\lambda = 0$ алгебраическая кратность собственного числа $\eta = 0$ равна двум и помимо собственного $\varphi_0(x';0) = 1$ имеется присоединенный вектор (функция) $\varphi_1(x';0) = 0$, которые порождают два аналогичных (3.5) решения однородной задачи в цилиндре Π, а именно,

$$\Phi^0(x;0) = 1, \quad \Phi^1(x;0) = x_1. \quad (3.6)$$

Доказательство теоремы 1. Если $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{R}}_+$, то по лемме Лакса–Мильграма интегральное тождество [2]

$$(\nabla_x\Phi_\varepsilon, \nabla_x\Psi)_{\Xi_\varepsilon} - \lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon, \Psi)_{\Lambda_\varepsilon} = F_\varepsilon(\Psi), \quad \Psi \in \mathcal{H}_\varepsilon,$$

обслуживающее неоднородную задачу (1.2)–(1.4), имеет единственное решение $\Phi_\varepsilon \in H^1(\Xi_\varepsilon)$ для любого функционала $F_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon^*$ на гильбертовом пространстве $H^1(\Xi_\varepsilon)$, и для этого решения верна оценка

$$\|\Phi_\varepsilon; \mathcal{H}_\varepsilon\| \leqslant C_\varepsilon\|F_\varepsilon; \mathcal{H}_\varepsilon^*\|.$$

Эти факты вытекают из известного неравенства (см., например, [2])

$$\|\Psi; L_2(\Xi_\varepsilon)\| \leqslant c_\varepsilon(\|\nabla_x \Psi; L_2(\Xi_\varepsilon)\| + \|\Psi; L_2(\Lambda_\varepsilon)\|).$$

При учете замены спектрального параметра (1.8) они позволяют заключить, что резольвентное поле оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$ из формул (1.9) и (1.7) покрывает множество $\mathbb{C} \setminus [0,1] \ni \mu$. Для каждой точки $\mu \in (0,1]$ построим сингулярную последовательность Вейля. Поскольку у оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$ имеется бесконечномерное ядро, приведенные наблюдения и объявленный результат означают, что сегмент $[0,1]$ представляет собой существенный спектр оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$.

Пусть $\mu \in (0,1]$. В соответствии с формулой (1.8) зафиксируем число $\lambda = \mu^{-1} - 1 \geqslant 0$, и далее не будем указывать его в обозначениях атрибутов модельной спектральной задачи (3.1). Рассмотрим функции

$$\Psi^m(x) = \chi_m(x_1) b_m \Phi(x), \quad \Phi(x) = \cos(|\eta_0| x_1)\, \varphi(x'), \tag{3.7}$$

где b_m – некоторые числа,

$$\chi_m(x_1) = \chi\left(\frac{x_1}{2\pi|\eta_0|} - 2^m\right) \chi\left(2^{m+1} - 1 - \frac{x_1}{2\pi|\eta_0|}\right), \tag{3.8}$$

а $\chi(x_1)$ – эталонная срезка, равная нулю при $x_1 \leqslant 0$ и единице при $x_1 \geqslant 1$. Функция Φ есть вещественная часть функции (3.5) или сама первая функция (3.6) при $\lambda = 0$. На цилиндре

$$\Pi_m = \left\{x \in \Pi : 2^m + 1 < (2\pi|\eta_0|)^{-1} x_1 < 2^{m+1} - 1\right\}, \tag{3.9}$$

срезка χ_m равна единице. Натуральное число $m \geqslant 2$ возьмем настолько большим, чтобы носитель функции Φ^m не пересекался с множеством $\overline{\Theta_\varepsilon}$. Тогда в силу формул (1.6) и (3.7) имеем

$$\langle \Phi^m, \Phi^m \rangle \geqslant \|\nabla_x \Phi^m; L_2(\Pi_m)\|^2 + \|\Phi^m; L_2(\Lambda \cap \overline{\Pi}_m)\|^2 =$$

$$= b_m^2 \int\limits_{2\pi|\eta_0|(2^m+1)}^{2\pi|\eta_0|(2^{m+1}-1)} \Big\{ \int\limits_\Sigma \Big(\Big(|\nabla_{x'} \varphi_0(x')|^2 \left[\cos(|\eta_0| x_1)\right]^2 +$$

$$+ |\varphi_0(x')|^2 |\eta_0|^2 \left[\sin(|\eta_0| x_1)\right]^2 \Big)\, dx' +$$

$$+\int\limits_{\gamma} |\varphi_0(x')|^2 \left[\cos(|\eta_0|x_1)\right]^2 \, dx_1 \Big\} \, dx_1 = b_m^2 2\pi|\eta_0|(2^m - 2^{m-1} - 1)\times$$

$$\left(\|\nabla_{x'}\varphi_0; L_2(\Sigma)\|^2 + |\eta_0|^2\|\varphi_0; L_2(\Sigma)\|^2 + \|\varphi_0; L_2(\gamma)\|^2\right). \qquad (3.10)$$

Коэффициент $b_m = O(2^{-m/2})$ подберем так, чтобы правая часть (3.10) стала равной единице. Согласно определениям (3.7) и (3.8) выполнено соотношение

$$\langle\Phi^m, \Phi^m\rangle - 1 = b_m^2(B_0 + B_1), \qquad (3.11)$$

где величины B_0 и B_1, получающиеся в результате вычисления норм на цилиндрах

$$\left\{x \in \Pi : (2\pi|\eta_0|)^{-1}x_1 \in (2^m, 2^m + 1)\right\}$$

и

$$\left\{x \in \Pi : (2\pi|\eta_0|)^{-1}x_1 \in (2^{m+1} - 1, 2^{m+1})\right\}$$

фиксированной высоты (высота цилиндра (3.9) увеличивается при $m \to \infty$), зависят от эталонной срезки χ и от собственного числа η_0, но не от индекса m. Поскольку b_m – бесконечно малая при $m \to +\infty$ и носители функций Φ_m и Φ_n не пересекаются при $m \neq n$, из формул (3.10) и (3.11) выводим, что нормы $\|\Phi^m; \mathcal{H}_\varepsilon\|$ равномерно ограничены и отделены от нуля, причем последовательность $\{\Phi_m\}$ сходится к нулю слабо в $\mathcal{H}_\varepsilon$ при $m \to +\infty$. Кроме того, имеем

$$\|\mathcal{K}_\varepsilon\Phi_m - \mu\Phi_m; H^1(\Xi_\varepsilon)\| = \sup_{\dots} |\langle\mathcal{K}_\varepsilon\Phi^m - \mu\Phi^m, \Psi\rangle| =$$

$$= \mu b_m \sup_{\dots} |(\nabla_x(\chi_m\Phi), \nabla_x\Psi)_{\Xi_\varepsilon} - \lambda(\chi_m\Phi, \Psi)_{\Lambda_\varepsilon}| =$$

$$= \mu b_m \sup_{\dots} \Big|(\nabla_x\Phi, \nabla_x(\chi_m\Psi))_\Pi - \lambda(\Phi, \chi_m\Psi)_{\Lambda_\varepsilon} +$$

$$+(\Phi\nabla_x\chi_m, \nabla_x\Psi)_\Pi - (\nabla_x\Phi, \Psi\nabla_x\chi_m)_\Pi\Big|; \qquad (3.12)$$

здесь многоточие означает “$\Psi \in \mathcal{H}_\varepsilon : \|\Psi; \mathcal{H}_\varepsilon\| = 1$”. Разность первых двух скалярных произведений в правой части (3.12) обращаются в нуль, так как Φ – решение однородной задачи (1.2)–(1.4) в цилиндре Π (приняли во внимание аналогичное (1.5) интегральное тождество в Π с пробной функцией $\chi_m\Psi$, имеющей компактный носитель). Поскольку производные срезающей функции χ_m

отличны от нуля только на объединении двух цилиндров высотой $2\pi|\eta_0|$, модули третьего и четвертого скалярных произведений справа в (3.12) не превосходят величины $c\|\Psi;\mathcal{H}_\varepsilon\| = \mathrm{const}$. Следовательно, выражение (3.12) оказывается бесконечно малым при $m \to +\infty$, а функции Φ^m действительно образуют сингулярную последовательность Вейля для оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$ в точке μ. Иными словами, эта точка принадлежит существенному спектру оператора. Ее принадлежность непрерывному спектру поясняется в замечании 3.1. Теорема 1.1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.2 следует той же схеме, но имеет два отличия: вычисление порога μ_Σ и проверка дискретности спектра на полуотрезке $(\mu_\Sigma, 1]$. Спектральную задачу Стеклова, суженную на подобласть Ξ_ε^+ и снабженную искусственным краевым условием Дирихле на специально образованной поверхности ξ_ε, далее именуем задачей (1.2)–(1.4), (1.13) на множестве Ξ_ε^+. Аналогичное обозначение используется для спектральной задачи (3.1) на половине $\Sigma^+ = \{x' \in \Sigma : x_2 > 0\}$ сечения, дополненной искусственным краевым условием

$$\varphi(x') = 0, \quad x' \in \Sigma, \quad x_2 = 0. \tag{3.13}$$

С задачей (3.1), (3.13) на области Σ^+ свяжем неограниченный оператор $A^\pm(\lambda)$ и форму $Q^\pm(\cdot,\cdot;\lambda)$, полученные сужением областей определения оператора $A(\lambda)$ и формы $Q(\cdot,\cdot;\lambda)$ (см. соотношения (3.2)) на линейные подпространства нечетных относительно переменной x_2 функций. Обозначим λ_Σ и φ_Σ первое собственное число и соответствующую собственную функцию задачи Стеклова

$$\begin{gathered} -\Delta_{x'}\varphi(x') = 0,\ x \in \Sigma^+, \quad \partial_n\varphi(x') = \lambda\varphi(x'), \quad x' \in \gamma \cap \partial\Sigma^+, \\ \partial_n\varphi(x') = 0, \quad x \in \Gamma \cap \partial\,\Sigma, \quad \varphi(x') = 0,\ x \in \partial\Sigma^+ \cap \Sigma. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Ввиду условия Дирихле на части границы $\partial\Sigma^+$ это собственное число положительно. В соответствии со связью (1.8) спектральных параметров положим $\mu_\Sigma = (1+\lambda_\Sigma)^{-1}$ и убедимся в том, что μ_Σ – искомый порог.

Если $\lambda < \lambda_\Sigma$, то форма $Q^\pm(\cdot,\cdot;\lambda)$ положительно определена, так как выполнены неравенства

$$
\begin{gathered}
\|\varphi; L_2(\gamma\cap\partial\Sigma^+)\|^2 \leqslant \lambda_\Sigma^{-1}\|\nabla_x\varphi; L_2(\Sigma^+)\|^2,\\
\|\varphi; L_2(\Sigma^+)\|^2 \leqslant c_\Sigma\|\nabla_x\varphi; L_2(\Sigma^+)\|^2,\\
\|\nabla_x\varphi; L_2(\Sigma^+)\|^2 - \lambda\|\varphi; L_2(\gamma\cap\partial\Sigma^+)\|^2 \geqslant\\
\geqslant (1-\lambda_\Sigma^{-1}\lambda)\|\nabla_x\varphi; L_2(\Sigma^+)\|^2 \geqslant c_\Sigma^{-1}(1-\lambda_\Sigma^{-1}\lambda)\|\varphi; L_2(\Sigma^+)\|^2.
\end{gathered}
\tag{3.15}
$$

При $\lambda > \lambda_\Sigma$ эта форма лишь полуограничена снизу из-за соотношения

$$
Q^+(\varphi_\Sigma, \varphi_\Sigma; \lambda) = (1-\lambda_\Sigma^{-1}\lambda)\|\nabla_x\varphi_\Sigma; L_2(\Sigma^+)\|^2 < 0.
$$

Следовательно, такие же конструкции, как и в доказательстве теоремы 1.1, демонстрируют, что в каждой точке $\mu \in (0, \mu_\Sigma]$ имеется сингулярная последовательность Вейля для оператора $\mathcal{K}_\varepsilon^\pm$, т.е. указанный полуинтервал лежит на непрерывном спектре.

При $\lambda \in [0, \lambda_\Sigma)$ или, что то же, при $\mu \in (\mu_\Sigma, 1]$ у пучка (3.1), (3.13) в области Σ' нет собственных чисел на мнимой оси (потому, что все собственные числа оператора $A^\pm(\lambda)$ положительны). Общие результаты теории краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность (см. работы [20, 23], а также книгу [24, гл. 5]) устанавливают фредгольмовость оператора задачи (1.2)–(1.4), (1.13) на множестве Ξ_ε^+. Это наблюдение гарантирует дискретность спектра оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$ на полуинтервале $(\mu_\Sigma, 1]$ и тем самым завершает доказательство теоремы 1.2. □

Для удобства читателя приведем элементарное доказательство упомянутого в предыдущем абзаце факта, которое основано на трюке, предложенном в работе [27], и попутно проверим экспоненциальное затухание собственных функций $\Phi_\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Sigma_\varepsilon^+; \xi_\varepsilon)$ задачи Стеклова. Впрочем, последнее свойство также вытекает из общих результатов названной теории.

Рассмотрим вспомогательную вариационную задачу

$$
(\nabla_x v, \nabla_x w)_{\Xi_\varepsilon^+} - \lambda\Big((v,w)_{\Lambda_\varepsilon^+} - M(v,w)_{\Xi_\varepsilon^+(L)}\Big) = F(w),
$$
$$
w \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Xi_\varepsilon^+; \xi_\varepsilon), \tag{3.16}
$$

где

$$
\Lambda_\varepsilon^+ = \{x \in \Lambda_\varepsilon : x_2 > 0\}, \quad \Xi_\varepsilon^+(L) = \Xi_\varepsilon(L) \cap \Xi_\varepsilon^+
$$

и

$$\Xi_\varepsilon(L) = \{x \in \Xi_\varepsilon : |x_1| < L\},$$

M – положительное число, подлежащее дальнейшему определению, а длина L зафиксирована так, что $\Theta_\varepsilon \subset \{x \in \Pi : |x_1| < L\}$. С интегральным тождеством (3.16) свяжем оператор $\mathcal{K}_\varepsilon^\pm(L, M)$ на подпространстве (1.11), который задан аналогичной (1.9) формулой

$$\left\langle \mathcal{K}_\varepsilon^\pm(L, M)\Phi, \Psi \right\rangle = (\Phi, \Psi)_{\Lambda_\varepsilon} - M(\Phi, \Psi)_{\Xi_\varepsilon(L)}.$$

Благодаря компактности вложения $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm \subset L_2(\Xi_\varepsilon(L))$ разность $\mathcal{K}_\varepsilon^\pm - \mathcal{K}_\varepsilon^\pm(L, M)$ оказывается компактным оператором в $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm$ при любых L и M, а значит, отсутствие спектра оператора $\mathcal{K}_\varepsilon^\pm(L, M)$ на полуинтервале $(\mu_\Sigma, 1]$ влечет за собой дискретность спектра оператора $\mathcal{K}_\varepsilon^\pm$ на этом же полуинтервале.

Обобщим постановку задачи (3.16). С этой целью введем весовой класс $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm(\beta)$, порожденный весовым множителем

$$\mathcal{R}_\beta(x) = \exp\left(\beta(1 + x_1^2)^{1/2}\right). \tag{3.17}$$

Именно, пространство $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm(\beta)$ состоит из тех функций $v \in H^1_{loc}(\overline{\Xi_\varepsilon})$, которые нечетны относительно переменной x_2 и обладают конечной нормой $\|\mathcal{R}_\beta v; \mathcal{H}^\pm\|$.

Если $\beta > 0$, то функция $v \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(\beta)$ экспоненциально затухает на бесконечности, но при $\beta < 0$ пространство $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm(\beta)$ включает в себя функции с экспоненциальным ростом при $x_1 \to \pm\infty$. Ясно, что $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm(0) = \mathcal{H}_\varepsilon^\pm$ и $\mathcal{R}_\beta^2 w \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(-\beta)$ для $w \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(\beta)$.

Под обобщенным решением задачи (3.16) в классе $\mathcal{H}_\beta^\pm$ с правой частью $F \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(-\beta)^*$ (линейные функционалы на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm(-\beta)$) понимаем функцию $v_\beta \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(\beta)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(\nabla_x v_\beta, \nabla_x(\mathcal{R}_\beta^2 w))_{\Xi_\varepsilon^+} - \lambda\Big((v_\beta, \mathcal{R}_\beta^2 w)_{\Lambda^+} - M(v_\beta, \mathcal{R}_\beta^2 w)_{\Xi_\varepsilon^+(L)}\Big) = \\ = F(\mathcal{R}_\beta^2 w), \quad w \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(\beta). \tag{3.18}$$

Это тождество формально получено из тождества (3.16) заменой $w \mapsto \mathcal{R}_\beta^2 w$ пробной функции, а под $(\cdot,\cdot)_\Xi$ подразумевается расширение скалярного произведения в пространстве Лебега $L_2(\Xi)$ до двойственности между подходящими весовыми пространствами – в этом смысле все слагаемые в (3.18) определены корректно, так как $\mathcal{R}_\beta^2 w \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(-\beta)$ (см. предыдущий абзац).

Предложение 3.1. *Существуют такие положительные числа M и B, что при $|\beta| < B$ задача (3.15) с правой частью $F \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(-\beta)^*$ допускает единственное решение $v_\beta \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(\beta)$ и для него верна оценка*

$$\|v_\beta; \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(\beta)\| \leqslant c\|F; \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(-\beta)^*\|,$$

причем постоянная c зависит от параметров $\lambda \in [0, \lambda_\Sigma)$, M и ε, но не от функционала F.

Доказательство. Положим $V = \mathcal{R}_\beta v_\beta, W = \mathcal{R}_\beta w$ и при помощи несложных преобразований (нескольких коммутирований дифференциального оператора ∇_x с весовым множителем (3.17)) преобразуем первое слагаемое из левой части (3.18) к следующему виду:

$$\begin{aligned} I(V,W) &= (\mathcal{R}_\beta \nabla_x v_\beta, \nabla_x W)_{\Xi_\varepsilon^+} + (\mathcal{R}_\beta \nabla_x v_\beta, W\mathcal{R}_\beta^{-1}\nabla_x \mathcal{R}_\beta)_{\Xi_\varepsilon^+} = \\ &= (\nabla_x V, \nabla_x W)_{\Xi_\varepsilon^+} - (V\mathcal{R}_\beta^{-1}\nabla_x\mathcal{R}_\beta, \nabla_x W)_{\Xi_\varepsilon^+} + \\ &+ (\nabla_x V, W\mathcal{R}_\beta^{-1}\nabla_x\mathcal{R}_\beta)_{\Sigma_\varepsilon^+} - (V\mathcal{R}_\beta^{-1}\nabla_x\mathcal{R}_\beta, W\mathcal{R}_\beta^{-1}\nabla_x\mathcal{R}_\beta)_{\Xi_\varepsilon^+}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Благодаря лемме Лакса–Мильграма теперь достаточно убедиться в справедливости оценки

$$\begin{aligned} \|\nabla_x V; L_2(\Xi_\varepsilon^+)\|^2 &\leqslant \\ &\leqslant c\Big(I(V,V) - \lambda\big((V,V)_{\Lambda^+} - M(V,V)_{\Xi_\varepsilon^+(L)}\big)\Big). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Заметим, что при $W = V$ второе и третье слагаемые в правой части (3.19) взаимно сокращаются ввиду вещественности всех функций. Кроме того, выполнено соотношение

$$|\nabla_x \mathcal{R}_\beta(x)| \leqslant \beta\mathcal{R}_\beta(x).$$

В силу неравенств (3.15) на сечении Σ^+ имеем

$$\begin{aligned} &\|\nabla_x V; L_2(\Xi_\varepsilon^+ \setminus \Xi_\varepsilon^+(L))\|^2 - \|V\mathcal{R}_\beta^{-1}\nabla_x\mathcal{R}_\beta; L_2(\Xi_\varepsilon^+ \setminus \Xi_\varepsilon^+(L))\|^2 - \\ &-\lambda\|V; L_2(\Lambda_\varepsilon^+ \setminus \Xi_\varepsilon^+(L))\|^2 \geqslant (1-\lambda_\Sigma^{-1}\lambda)\|\nabla_x V; L_2(\Xi_\varepsilon^+ \setminus \Xi_\varepsilon^+(L))\|^2 - \\ &-\beta^2\|V; L_2(\Xi_\varepsilon^+ \setminus \Xi_\varepsilon^+(L))\|^2 \geqslant (1-\lambda_\Sigma^{-1}\lambda - c_\Sigma\beta^2)\|\nabla_x V; L_2(\Xi_\varepsilon^+ \setminus \Xi_\varepsilon^+(L))\|^2. \end{aligned} \tag{3.21}$$

При малом β^2 коэффициент при квадрате нормы справа остается положительным, так как $\lambda < \lambda_\Sigma$. Еще раз воспользуемся вариантом следового неравенства (см., например, [2] и ср. с (3.3))

$$\|V; L_2(\Lambda_\varepsilon^+ \cap \partial\Xi_\varepsilon^+(L))\|^2 \leqslant t\|\nabla_x V; L_2(\Xi_\varepsilon^+(L))\|^2 + C(t)\|V; L_2(\Xi_\varepsilon^+(L))\|^2,$$

с произвольным положительным t. В результате при условии $M \geqslant C(t)$ находим, что

$$\|\nabla_x V; L_2(\Xi_\varepsilon^+(L))\|^2 - \|V\mathcal{R}_\beta^{-1}\nabla_x\mathcal{R}_\beta; L_2(\Xi_\varepsilon^+(L))\|^2 -$$
$$-\lambda(\|V; L_2(\Lambda_\varepsilon^+ \cap \overline{\Xi_\varepsilon^+(L)})\|^2 - M\|V; L_2(\Xi_\varepsilon^+(L))\|^2) \geqslant \tag{3.22}$$
$$\geqslant (1 - \lambda t - c(\Xi_\varepsilon^+(L))\beta^2)\|\nabla_x V; L_2(\Xi_\varepsilon^+(L))\|^2,$$

где $c(\Xi_\varepsilon^+(L))$ – постоянная в неравенстве Фридрихса

$$\|V; L_2(\Xi_\varepsilon^+(L))\|^2 \leqslant c(\Xi_\varepsilon^+(L))\|\nabla_x V; L_2(\Xi_\varepsilon^+(L))\|^2,$$
$$V \in \overset{0}{H}{}^1\left(\Xi_\varepsilon^+(L); \xi_\varepsilon \cap \partial\Xi_\varepsilon^+(L)\right).$$

Коэффициент при квадрате нормы $\|\nabla_x V; L_2(\Xi_\varepsilon^+(L))\|$ в правой части (3.22) положителен при малых t и β^2.

Оценка (3.20) вытекает из проверенных соотношений (3.21) и (3.22). Предложение 3.1 доказано. □

Если $F \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(-\beta)^*$ при некотором положительном показателе β, то, разумеется, $F \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm$. Поскольку линеал $C_0^\infty(\overline{\Xi_\varepsilon^+} \setminus \xi_\varepsilon)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями плотен в пространстве $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm(\beta)$ с любым весовым показателем β, в случае $\beta > 0$ решение $v_\beta \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(\beta) \subset \mathcal{H}_\varepsilon^\pm$ задачи (3.18) удовлетворяет интегральному тождеству (3.16) и совпадает с его решением v в силу единственности последнего (предложение 3.1 при $\beta = 0$). Иными словами, решение задачи (3.16) с правой частью $F \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm(-\beta)^* \subset (\mathcal{H}_\varepsilon^\pm)^*$, $\beta > 0$, экспоненциально затухает на бесконечности. Это свойство присуще и собственной функции Φ_ε^+ задачи (1.2)–(1.4), (1.13) в области Ξ_ε^+, отвечающей собственному числу $\lambda_\varepsilon^+ \in [0, \lambda_\Sigma)$, так как она удовлетворяет тождеству (3.16) с параметром $\lambda = \lambda_\varepsilon^+$ и функционалом

$$w \mapsto F(w) = \lambda_\varepsilon^+ M(v, w)_{\Xi_\varepsilon^+(L)},$$

принадлежащим пространству $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm(-\beta)^*$ при любом β ввиду ограниченности множества интегрирования.

Замечание 3.1. Зафиксируем параметр λ_ε. Уже упоминавшаяся теория эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность устанавливает фредгольмовость оператора: $\mathcal{H}_\varepsilon(\beta) \to \mathcal{H}_\varepsilon(\beta)^*$ задачи (1.2)–(1.4) в области

Ξ_ε при всех значениях весового индекса β, за исключением счетного набора запретных индексов $\beta = -\mathrm{Re}\,\eta$, где η – собственное число пучка (3.1) на сечении Σ. То же верно и для оператора: $\mathcal{H}_\varepsilon(\beta) \to \mathcal{H}_\varepsilon(\beta)^*$ задачи (1.2)–(1.4), (1.13) в области Ξ_ε^+, соотнесенной с пучком (3.1), (3.13) на половине Σ^+ сечения Σ. Эти факты, в частности, означают, что при некоторых отрицательных индексах β ядра названных операторов конечномерны. Как и в рассуждениях предшествующих замечанию, ядра операторов при $\beta = 0$ включены в аналогичные ядра при $\beta < 0$, т.е. также имеют конечные размерности. Следовательно, точке $\mu = (1+\lambda)^{-1}$ существенного спектра оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$ отвечает конечномерное подпространство $\ker(\mathcal{K}_\varepsilon - \mu)$, а значит, эта точка лежит на непрерывном спектре. $\square$

4. Свойство концентрации точечного спектра

Доказательство теоремы 1.3 основано на применении максиминимального принципа (см. [14, теорема 10.2.2]) к оператору $-\mathcal{K}_\varepsilon^\pm$ (со знаком минус), который остается полуограниченным снизу. По теореме 1.2 спектр этого оператора располагается на сегменте $[-1, 0]$ и оказывается дискретным на полуинтервале $[-1, -\mu_\Sigma)$. Через $-\mu_\varepsilon^{(1)}, \dots, -\mu_\varepsilon^{(N(\varepsilon))}$ обозначим все собственные числа оператора $-\mathcal{K}_\varepsilon^\pm$ на упомянутом полуинтервале, которые упорядочим по неубыванию; пока не исключен случай $N(\varepsilon) = 0$. Максиминимальный принцип гарантирует, что

$$-\mu_\varepsilon^{(n)} = \max_{\mathcal{E}_n \subset \mathcal{H}_\varepsilon^\pm} \inf_{\Phi \in \mathcal{E}_n \setminus \{0\}} \frac{\langle -\mathcal{K}_\varepsilon^\pm \Phi, \Phi\rangle}{\langle \Phi, \Phi\rangle}. \tag{4.1}$$

Здесь $n = 1, \dots, N(\varepsilon)$ и $\mathcal{E}_n$ – линейные подпространства в $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm$ с коразмерностью $n-1$ (т.е. $\dim(\mathcal{H}_\varepsilon^\pm \ominus \mathcal{E}_n) = n-1$ и, в частности, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{H}_\varepsilon^\pm$).

При наличии симметрии (1.12) можно, не ограничивая общности, предположить, что множества Ω_ε и ω содержатся соответственно в Ξ_ε^+ и Λ_ε^+ (ср. текст в конце §1). Любое подпространство $\mathcal{E}_n$ содержит какую-либо нетривиальную линейную комбинацию

$$\Phi = a_1 u_\varepsilon^{(1)} + \dots + a_n u_\varepsilon^{(n)} \tag{4.2}$$

собственных функций задачи (1.14)–(1.16), продолженных нулем с пластины Ω_ε на всю область Ξ_ε^+. В силу соотношений (1.6), (1.9) и (2.26) имеем

$$\|\nabla_x u_\varepsilon^{(q)}; L_2(\Xi_\varepsilon^+)\|^2 = \sigma_\varepsilon^{(q)} \|u_\varepsilon^{(q)}; L_2(\Lambda_\varepsilon^+)\|^2, \tag{4.3}$$

$$\frac{\langle -\mathcal{K}_\varepsilon^\pm \Phi, \Phi\rangle}{\langle \Phi, \Phi\rangle} = -\frac{2\sum\limits_{q=1}^{n} a_q^2 \|u_\varepsilon^{(q)}; L_2(\Lambda_\varepsilon^+)\|^2}{2\sum\limits_{q=1}^{n} a_q^2 (\sigma_\varepsilon^{(q)}+1)\|u_\varepsilon^{(q)}; L_2(\Lambda_\varepsilon^+)\|^2} \leqslant -\frac{1}{1+\sigma_\varepsilon^{(n)}}.$$

Следовательно, оценивая *infimum* в (4.1) сверху при помощи формул (4.2), (4.3) и (2.22), (2.7), находим, что

$$-\mu_\varepsilon^{(n)} \leqslant -(1+\sigma_\varepsilon^{(n)})^{-1},$$

а значит, благодаря неравенству (2.25), обеспеченному теоремой 1.4, получаем оценку

$$\mu_\varepsilon^{(n)} \geqslant (1+\sigma_\varepsilon^{(n)})^{-1} \geqslant (1+\varepsilon\beta^{(n)} + c^{(n)}\varepsilon^2)^{-1}. \tag{4.4}$$

Пусть теперь J и d – числа из формулировки теоремы 1.3 и $\varepsilon^{(J)} = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J\}$, где ε_k – числа из теоремы 1.4. Выберем верхнюю границу $\varepsilon(J,d)$ изменения параметра настолько малой, что $\varepsilon(J,d) \leqslant \varepsilon^{(J)}$ и $\varepsilon(J,d)\beta^{(j)} + c^{(j)}\varepsilon(J,d)^2 < d$ при $j = 1, \dots, J$. Тогда теорема 10.2.2 [14] вместе с оценкой (4.4) устанавливают, что на полуинтервале $((1+d)^{-1}, 1]$ расположено не менее J собственных чисел оператора $\mathcal{K}_\varepsilon^\pm$, т.е. $N(\varepsilon) \geqslant J$. Как уже пояснялось в §1 эти числа остаются собственными для оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$. Теорема 1.3. доказана. □

Рассмотрим пару конкретных геометрических тел (1.1), допускающих явные формулы. Предположим, что в определении (1.1) $\varepsilon = 1$, $h(y) = h = \mathrm{const}$ и ω – прямоугольник $\{y : 0 < y_i < a_i, i = 1, 2\}$, т.е. $\Omega = \Omega_1$ – параллелепипед размером $a_1 \times a_2 \times h$. В этом случае разделение переменных позволяет вычислить первое собственное число задачи (1.14)–(1.16). Именно,

$$\lambda^{(1)} = A\,\frac{\exp(2Ah)-1}{\exp(2Ah)+1}, \quad A = \pi\sqrt{a_1^{-2} + a_2^{-2}},$$

а соответствующая (ненормированная) собственная функция выглядит так:

$$u^{(1)}(x) = \sin\left(\frac{\pi x_1}{a_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a_2}\right) \left(\exp(-Az) + \exp(A(z+2h))\right).$$

Если оказалось, что $\lambda^{(1)}$ строго меньше первого собственного числа λ_Σ модельной задачи Стеклова (3.14), такая же аргументация, как и при доказательстве теоремы 1.3, обеспечивает существование собственного числа задачи (1.2)–(1.4) на сегменте $[0, \lambda_\Sigma]$.

Пусть сечение Σ и его половина Σ_+ – прямоугольники $\{x' : |x_2| < l, 0 > x_3 > -b\}$ и $\{x' : 0 < x_2 < l, 0 > x_3 > -b\}$ (все предшествующие результаты сохраняют силу при кусочно гладкой дуге Γ – лишь изменяется норма (3.4), описывающая область определения неограниченного оператора $A(\lambda)$). Тогда

$$\lambda_\Sigma = B\,\frac{\exp(2Bb) - 1}{\exp(2Bb) + 1}, \quad B = \frac{\pi}{2l}.$$

Отметим, что при постоянных l и a_1, a_2 выполнены соотношения

$$\lambda_\Sigma \to B \quad \text{при} \quad b \to +\infty, \quad \lambda^{(1)} = A^2 h + O(A^3 h^2) \quad \text{при} \quad h \to +0.$$

Таким образом, условие $\lambda^{(1)} < \lambda_\Sigma$ можно соблюсти подгонкой геометрических параметров h и l, b. Определив остальные собственные числа задачи Стеклова в параллелепипеде Ω_1, нетрудно оценить снизу количество собственных чисел задачи (1.2)–(1.4) на сегменте $[0, \lambda_\Sigma]$.

Литература

1. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, Linear Water Waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
2. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* Наука, М., 1973.
3. D. V. Evans, M. Levitin, D. Vasil'ev, *Existence theorems for trapped modes.* — J. Fluid Mech. **261** (1994), 21–31.
4. I. Roitberg, D. Vassiliev, T. Weidl, *Edge resonance in an elastic semi-strip.* — Quart. J. Appl. Math., **51**, No. 1 (1998), 1–13.
5. С. А. Назаров, *Ловушечные моды для цилиндрического упругого волновода с демпфирующей прокладкой.* — Журнал вычисл. матем. и матем. физ. **47** (2007) (принята к печати).

6. C. M. Linton, P. McIver, *Embedded trapped modes in water waves and acustics.* Preprint of Loughborough University, No. 06-24 (2004). (`http://www.lboro.ac.uk/departments/ma/research/preprints/papers06/06-24.pdf`)
7. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Аномалии Вуда и поверхностные волны в задачах рассеяния на периодической границе. 1.* — Матем. сборник **190**, No. 1 (1999), 109–138; 2. **190**, No. 2 (1999), 43–70.
8. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области.* — Зап. научн. семин. ПОМИ РАН **264** (2000), 66–82.
9. С. А. Назаров, *Критерий существования затухающих решений в задаче о резонаторе с цилиндрическим волноводом.* — Функциональный анализ и его приложения **40**, No. 2 (2006), 20–32.
10. С. А. Назаров, *Искусственные краевые условия для поиска поверхностных волн в задаче дифракции на периодической границе.* – Журнал вычисл. матем. и матем. физ. **46**, No. 12 (2006), 2267–2278.
11. С. Н. Леора, С. А. Назаров, А. В. Проскура, *Вывод предельных уравнений для эллиптических краевых задач в тонких областях при помощи ЭВМ.* — Журнал вычислительной матем. и матем. физики **26**, No. 7 (1986), 1032–1048.
12. С. А. Назаров, *Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких.* — Алгебра и анализ **7**, No. 5 (1995), 1–92.
13. С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки.* Новосибирск: Научная книга, 2001.
14. И. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Изд-во Ленингр.ун–та, Л., 1980.
15. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.* — Успехи матем. наук **12**, No. 5 (1957), 3–122.
16. С. А. Назаров, *Равномерные оценки остатков в асимптотических разложениях решений задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрической пластины.* — Проблемы матем. анализа **25**, Новосибирск: Научн. книга (2003), 99–188.
17. M. Lobo, S. A. Nazarov, E. Perez, *Eigen-oscillations of contrasting non-homogeneous bodies: asymptotic and uniform estimates for eigenvalues.* — IMA J. of Applied Mathematics **70** (2005), 419–458.
18. D. Gomez, M. Lobo, S. A. Nazarov, E. Perez, *Spectral stiff problems in domains surrounded by thin bands: Asymptotic and uniform estimates for eigenvalues.* — J. Math. Pures Appl. **85** (2006), 598–632.
19. О. А. Олейник, Г. А. Иосифиан, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных сред.* Изд-во МГУ. М., 1990.
20. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.* Труды Московск. матем. общества **16** (1963), 219–292.

21. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками.* — Math. Nachr. **76** (1977), 29–60.
22. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.* — Math. Nachr. **77** (1977), 25–82.
23. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов.* — Успехи матем. наук. **54**, No. 5 (1999), С. 77–142.
24. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* Наука, М., 1991.
25 С. А. Назаров, *Самосопряженные расширения оператора задачи Дирихле в весовых функциональных пространствах.* — Матем. сборник. **137**, No. 2 (1988), 224–241.
26. С. А. Назаров, *Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых асимптотических разложений.* Труды Санкт-Петербург. матем. о-ва **5** (1996), 112–183.
27. С. А. Назаров, *Асимптотика по малому параметру решения эллиптической по Аграновичу–Вишику краевой задачи в области с конической точкой.* — Проблемы матем. анализа. Вып. 7. Л.: изд-во ЛГУ (1979), 146–167.

Nazarov S. A. On the concentration of the point spectrum on the continuous one in problems of the linearized theory of water-waves.

For the linearized theory of water-waves, we find out families of submersed or surface-piercing bodies in an infinite three-dimensional channel which depend on the small parameter $\varepsilon > 0$ and have the following property: For any positive d and integer J, there exists $\varepsilon(d, J) > 0$ such that, for $\varepsilon \in (0, \varepsilon(d, J)]$, the segment $[0, d]$ of the continuous spectrum of the problem contains at least J eigenvalues. These eigenvalues are associated with trapped modes, i.e., solutions of the homogeneous problem which decay exponentially at infinity and possess a finite energy.

ИПМаш РАН
Поступило 5 ноября 2007 г.

E-mail: serna@snark.ipme.ru,
srgnazarov@yahoo.co.uk