Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 347, 2007 г.

А. В. Соколов

ФАКТОРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СУПЕРСИММЕТРИИ В ОДНОМЕРНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ II: ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ О ПРИВОДИМОСТИ

1. Введение

В этой работе дается строгий анализ факторизации нелинейной суперсимметричной (СУСИ) квантовой механики [1–8] на вещественно-неприводимые элементы СУСИ алгебры, из которых может быть построена любая полиномиальная СУСИ алгебра [9], если использовать цепную (лестничную) конструкцию [11–14]. С точки зрения (почти) изоспектральных преобразований типа Крама–Дарбу [15–18], речь идет о факторизации сплетающих операторов на операторные сомножители первого либо второго порядка по производным с несингулярными вещественными коэффициентами такой, что все промежуточные гамильтонианы имеют несингулярные вещественные потенциалы. Ранее предположение о существовании такой факторизации было сделано в [19, 20].

В [21] была высказана гипотеза о возможности одеть (домножить) оператор сплетания полиномом от гамильтониана, сохранив ту же пару (почти) изоспектральных гамильтонианов, так, чтобы для полученного оператора можно было осуществить лестничную факторизацию на несингулярные вещественные блоки первого порядка по производным. В данной части работы найдены условия для реализации такой программы. Эта часть продолжает исследование, начатое в [22], и здесь доказаны два утверждения, сформулированные в [22], о приводимости (почти) изоспектральных преобразований к цепной последовательности неприводимых блоков первого либо второго порядка по производным:

1) утверждение (теорема 2) о приводимости неминимизируе-

Работа была поддержана грантом РФФИ 06-01-00186-а.

мого [22] оператора сплетания с вещественным спектром матрицы $\mathbf{S}$ [22], домноженного на подходящий полином гамильтониана, к операторам сплетания первого порядка;

2) утверждение (теорема 3) о приводимости неминимизируемого оператора сплетания, матрица $\mathbf{S}$ которого может иметь не только вещественные, но и комплексные собственные числа, к операторам сплетания первого порядка и неприводимым операторам сплетания второго порядка I, II и III рода [21, 22].

Ниже будет использоваться класс K потенциалов $V(x)$ таких, что:

1) $V(x)$ – вещественнозначная функция из $C^{\infty}_{\mathbb{R}}$;

2) существуют $R_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ (R_0 и ε зависят от $V(x)$) такие, что для любого $|x| \geqslant R_0$ имеет место неравенство $V(x) \geqslant \varepsilon$;

3) функции

$$\left(\int\limits_{\pm R_0}^{x} \sqrt{|V(x_1)|}dx_1 \right)^2 \left(\frac{|V'(x)|^2}{|V(x)|^3} + \frac{|V''(x)|}{|V(x)|^2} \right) \tag{1}$$

ограничены соответственно при $x \geqslant R_0$ и $x \leqslant -R_0$.

Кроме того, здесь будут обсуждаться нормируемость либо ненормируемость функций на $+\infty$ и/или на $-\infty$, а также формальные присоединенные функции, которые определяются следующим образом.

Функция $f(x)$ называется *нормируемой на* $+\infty$ (*на* $-\infty$), если существует вещественное R_+ (R_-) такое, что

$$\int\limits_{R_+}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx < +\infty \quad \left(\int\limits_{-\infty}^{R_-} |f(x)|^2\, dx < +\infty \right). \tag{2}$$

В противном случае $f(x)$ называется *ненормируемой на* $+\infty$ (*на* $-\infty$.)

Функция $\psi_{n,i}(x)$ называется *формальной присоединенной функцией i-го порядка* гамильтониана h для спектрального числа λ_n, если

$$(h - \lambda_n)^{i+1}\psi_{n,i} \equiv 0, \quad (h - \lambda_n)^{i}\psi_{n,i} \equiv 0,$$

где слово “формальный” подчеркивает, что эта функция не обязательно нормируема (не обязательно принадлежит $L_2(\mathbb{R})$). В частности, присоединенная функция нулевого порядка $\psi_{n,0}$ является формальной собственной функцией h (не обязательно нормируемым решением однородного уравнения Шрёдингера).

Статья построена следующим образом. Сначала приводится ряд утверждений, проясняющих основные свойства гамильтонианов с потенциалами из класса K и посвящённых замкнутости (инвариантности) класса K при сплетаниях, асимптотикам формальных присоединённых функций, свойствам последовательности формальных присоединённых функций при действии на неё оператором сплетания, спектральным свойствам сплетаемых гамильтонианов. Затем доказываются вспомогательные леммы о приводимости операторов, сплетающих гамильтонианы с потенциалами из класса K. И наконец, излагаются основные утверждения (теоремы 2 и 3) о приводимости указанных операторов сплетания.

2. Основные свойства гамильтонианов с потенциалами из класса K

Доказательства всех приводимых в этом разделе лемм, кроме леммы 6, и теоремы 1 приведены в [23, 24].

2.1. Замкнутость класса потенциалов K при сплетаниях

Замкнутость (инвариантность) класса потенциалов K при сплетаниях следует из леммы 1.

Лемма 1. *Пусть:* (1) $h^+ = -\partial^2 + V_1(x)$, $\partial \equiv d/dx$, $V_1(x) \in K$; (2) $h^- = -\partial^2 + V_2(x)$, *потенциал* $V_2(x)$ *является вещественным и принадлежит* $C_{\mathbb{R}}$; (3) $q_N^- h^+ = h^- q_N^-$, *где* q_N^- *– дифференциальный оператор* N*-го порядка с коэффициентами из* $C_{\mathbb{R}}^2$; (4) *любое собственное число матрицы* $\mathbf{S}$ *оператора* q_N^- *удовлетворяет одному из условий: либо* $\lambda \leqslant 0$ *либо* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$.

Тогда: (1) $V_2(x) \in K$; (2) *коэффициенты* q_N^- *принадлежат* $C_{\mathbb{R}}^\infty$; (3) $h^+ q_N^+ = q_N^+ h^-$, *где* $q_N^+ = (q_N^-)^t$, *причём коэффициенты* q_N^+ *также принадлежат* $C_{\mathbb{R}}^\infty$.

2.2. Асимптотики формальных присоединённых функций

Асимптотическое поведение формальных присоединённых функций гамильтониана h с потенциалом из K описывает

Лемма 2. *Пусть:* (1) $h = -\partial^2 + V(x)$, $V(x) \in K$; (2) $\lambda \in \mathbb{C}$ *и либо* $\lambda \leqslant 0$ *либо* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$; (3) *ветви функций* $\sqrt{V(x) - \lambda}$ *и* $\sqrt[4]{V(x) - \lambda}$

однозначно определены при $|x| \geqslant R_0$ *условием* $|\arg[V(x)-\lambda]| < \pi$;
(4)[1] $\xi_{\uparrow\downarrow}(x) = \pm \int\limits_{\pm R_0}^{x} \sqrt{|V(x_1)|}\, dx_1$, $\xi_{\uparrow\downarrow}(x;\lambda) = \pm \int\limits_{\pm R_0}^{x} \sqrt{V(x_1)-\lambda}\, dx_1$,
$\eta_{\uparrow\downarrow}(x) = \pm \int\limits_{\pm R_0}^{x} dx_1/\sqrt{|V(x_1)|}$.

Тогда существуют счётные последовательности: $\varphi_{n,\uparrow\downarrow}(x)$ *формальных присоединённых функций* h *для спектрального числа* λ, *нормируемых на* $\pm\infty$, *и* $\widehat{\varphi}_{n,\uparrow\downarrow}(x)$ *формальных присоединённых функций, ненормируемых на* $\pm\infty$, *такие что:*

$$h\varphi_{0,\uparrow\downarrow} = \lambda\varphi_{0,\uparrow\downarrow}, \quad (h-\lambda)\varphi_{n,\uparrow\downarrow} = \varphi_{n-1,\uparrow\downarrow}, \quad n \geqslant 1, \tag{3}$$

$$h\widehat{\varphi}_{0,\uparrow\downarrow} = \lambda\widehat{\varphi}_{0,\uparrow\downarrow}, \quad (h-\lambda)\widehat{\varphi}_{n,\uparrow\downarrow} = \widehat{\varphi}_{n-1,\uparrow\downarrow}, \quad n \geqslant 1; \tag{4}$$

если $\pm \int\limits_{\pm R_0}^{\pm\infty} dx_1/\sqrt{|V(x_1)|} < +\infty$, *то при* $x \to \pm\infty$,

$$\varphi_{n,\uparrow\downarrow}(x) = \tag{5}$$
$$\frac{1}{n!\,\sqrt[4]{V(x)-\lambda}} \left(\pm \frac{1}{2} \int\limits_{\pm\infty}^{x} \frac{dx_1}{\sqrt{V(x_1)-\lambda}} \right)^n e^{-\xi_{\uparrow\downarrow}(x;\lambda)} \left[1 + O\left(\frac{1}{\xi_{\uparrow\downarrow}(x)} \right) \right],$$

$$\widehat{\varphi}_{n,\uparrow\downarrow}(x) = \tag{6}$$
$$\frac{1}{n!\,\sqrt[4]{V(x)-\lambda}} \left(\mp \frac{1}{2} \int\limits_{\pm\infty}^{x} \frac{dx_1}{\sqrt{V(x_1)-\lambda}} \right)^n e^{\xi_{\uparrow\downarrow}(x;\lambda)} \left[1 + O\left(\frac{1}{\xi_{\uparrow\downarrow}(x)} \right) \right],$$

$$\varphi'_{n,\uparrow\downarrow}(x) = \tag{7}$$
$$\mp \frac{1}{n!} \sqrt[4]{V(x)-\lambda} \left(\pm \frac{1}{2} \int\limits_{\pm\infty}^{x} \frac{dx_1}{\sqrt{V(x_1)-\lambda}} \right)^n e^{-\xi_{\uparrow\downarrow}(x;\lambda)} \left[1 + O\left(\frac{1}{\xi_{\uparrow\downarrow}(x)} \right) \right]$$

и если $\pm \int\limits_{\pm R_0}^{\pm\infty} dx_1/\sqrt{|V(x_1)|} = +\infty$, *то*

$$\varphi_{n,\uparrow\downarrow}(x) = \tag{8}$$
$$\frac{1}{n!\,\sqrt[4]{V(x)-\lambda}} \left(\pm \frac{1}{2} \int\limits_{\pm R_0}^{x} \frac{dx_1}{\sqrt{V(x_1)-\lambda}} \right)^n e^{-\xi_{\uparrow\downarrow}(x;\lambda)} \left[1 + O\left(\frac{\ln \eta_{\uparrow\downarrow}(x)}{\eta_{\uparrow\downarrow}(x)} \right) \right],$$

[1] Здесь и ниже значку $\uparrow(\downarrow)$ соответствуют верхние (нижние) знаки в правых частях.

$$\widehat{\varphi}_{n,\uparrow\downarrow}(x) = \tag{9}$$
$$\frac{1}{n!\,\sqrt[4]{V(x)-\lambda}}\Bigl(\mp\frac{1}{2}\int\limits_{\pm R_0}^{x}\frac{dx_1}{\sqrt{V(x_1)-\lambda}}\Bigr)^n e^{\xi_{\uparrow\downarrow}(x;\lambda)}\Bigl[1+O\Bigl(\frac{\ln\eta_{\uparrow\downarrow}(x)}{\eta_{\uparrow\downarrow}(x)}\Bigr)\Bigr],$$

$$\varphi'_{n,\uparrow\downarrow}(x) = \tag{10}$$
$$\mp\frac{1}{n!}\sqrt[4]{V(x)-\lambda}\Bigl(\pm\frac{1}{2}\int\limits_{\pm R_0}^{x}\frac{dx_1}{\sqrt{V(x_1)-\lambda}}\Bigr)^n e^{-\xi_{\uparrow\downarrow}(x;\lambda)}\Bigl[1+O\Bigl(\frac{\ln\eta_{\uparrow\downarrow}(x)}{\eta_{\uparrow\downarrow}(x)}\Bigr)\Bigr].$$

Следствие 1. *Если $V(x)\in K$ и $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$, то с учётом (5) и (7) ((8) и (10))*[2]

$$\lim_{x\to\pm\infty}[\varphi'_{0,\uparrow\downarrow}(x)\varphi^*_{0,\uparrow\downarrow}(x)-\varphi_{0,\uparrow\downarrow}(x)\varphi'^*_{0,\uparrow\downarrow}(x)] =$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\Bigl\{e^{-2\operatorname{Re}\xi_{\uparrow\downarrow}(x;\lambda)}\Bigl[\mp\frac{\sqrt[4]{V(x)-\lambda}}{\sqrt[4]{V(x)-\lambda^*}}(1+o(1))$$
$$\pm\frac{\sqrt[4]{V(x)-\lambda^*}}{\sqrt[4]{V(x)-\lambda}}(1+o(1))\Bigr]\Bigr\} = 0. \tag{11}$$

Таким образом, если $V(x)\in K$ и $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$, то вронскиан W функции из $\ker(h-\lambda)$, нормируемой на одной из бесконечностей, (обозначим эту функцию φ) и сопряжённой функции стремится к нулю на той же бесконечности и в силу монотонности iW ($iW' = i(\varphi''\varphi^*-\varphi\varphi''^*) = 2\operatorname{Im}\lambda|\varphi|^2$) не имеет нулей. Отметим, что в общем случае вопреки [25], это утверждение не всегда справедливо. Например, у гамильтониана

$$h = -\partial^2-\alpha^2e^{2\beta x}+2\alpha\delta e^{\beta x},\quad \alpha\in\mathbb{R},\quad \beta>0,\quad \alpha\delta>0$$

для спектрального параметра $\lambda=\delta^2-\frac{\beta^2}{4}-i\beta\delta$ существует формальная собственная функция $\varphi(x)=\exp[i\frac{\alpha}{\beta}e^{\beta x}-(i\delta+\frac{\beta}{2})x]$, экспоненциально стремящаяся к нулю при $x\to+\infty$, но вронскиан

$$W(x)=\varphi'(x)\varphi^*(x)-\varphi(x)\varphi'^*(x)=2i(\alpha-\delta e^{-\beta x})$$

[2] Для того, чтобы строго доказать, что приводимый ниже предел равен нулю, достаточно воспользоваться помимо приводимой ниже цепочки равенств вторым пунктом определения K и полученной в [24] оценкой $\operatorname{Re}\sqrt{V(x)-\lambda}\geqslant C_\lambda\sqrt{|V(x)|}$, справедливой для фиксированных $V(x)\in K$ и λ, удовлетворяющего условию $\lambda\geqslant 0$ либо $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$, при некотором $C_\lambda>0$ и любом $|x|\geqslant R_0$.

при $x \to +\infty$ не стремится к нулю и имеет корень.

Следствие 2. *В условиях леммы 2 любая формальная присоединённая функция n-го порядка гамильтониана h, нормируемая на $\pm\infty$, для спектрального числа λ такого, что либо $\lambda \leqslant 0$ либо $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, может быть представлена в виде*

$$\sum_{j=0}^{n} a_{j,\uparrow\downarrow}\varphi_{j,\uparrow\downarrow}(x), \quad a_{j,\uparrow\downarrow} = \mathrm{Const}, \quad a_{n,\uparrow\downarrow} \neq 0, \tag{12}$$

а любая присоединённая функция n-го порядка гамильтониана h, ненормируемая на $\pm\infty$, для того же спектрального числа λ может быть представлена следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{n} \big(b_{j,\uparrow\downarrow}\varphi_{j,\uparrow\downarrow}(x) + c_{j,\uparrow\downarrow}\widehat{\varphi}_{j,\uparrow\downarrow}(x)\big), \tag{13}$$

где $b_{j,\uparrow\downarrow}, c_{j,\uparrow\downarrow} = \mathrm{Const}$ и либо $b_{n,\uparrow\downarrow} \neq 0$ либо $c_{n,\uparrow\downarrow} \neq 0$.

2.3. Действие оператора сплетания на последовательность формальных присоединённых функций

Свойства последовательности формальных присоединённых функций при действии на неё оператором сплетания описывает

Лемма 3. *Пусть:* (1) *выполнены условия леммы* 1*;* (2) *$\varphi_n(x)$, $n = 0, \ldots, M$ – последовательность формальных присоединённых функций h^+ для спектрального числа λ:*

$$h^+\varphi_0 = \lambda\varphi_0, \quad (h^+ - \lambda)\varphi_n = \varphi_{n-1}, \quad n \geqslant 1,$$

где либо $\lambda \leqslant 0$ либо $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Тогда:

(1) *существует m такое, что $0 \leqslant m \leqslant \min\{M+1, N\}$,*

$$q_N^-\varphi_n \equiv 0, \quad n < m$$

и

$$\psi_l = q_N^-\varphi_{m+l}, \quad l = 0, \ldots, M-m$$

– последовательность формальных присоединённых функций h^- для спектрального числа λ:

$$h^-\psi_0 = \lambda\psi_0, \quad (h^- - \lambda)\psi_l = \psi_{l-1}, \quad l \geqslant 1;$$

(2) *если функция $\varphi_n(x)$ при заданном $0 \leqslant n \leqslant M$ нормируема на $+\infty$ (на $-\infty$), то $q_N^-\varphi_n$ также нормируема на $+\infty$ (на $-\infty$).*

Следствие 3. *Поскольку h^+ является оператором сплетания для самого себя и оба собственных числа его матрицы* $\mathbf{S}$ *нулевые, постольку если $\varphi_n(x)$ нормируема на $+\infty$ (на $-\infty$), то $\varphi_j(x)$, $j=0$, $\dots$ $n-1$ также нормируемы на $+\infty$ (на $-\infty$).*

Следствие 4. *Пусть $\varphi^-_{i,j}(x)$ – канонический базис в $\ker q_N^-$, т.е. матрица* $\mathbf{S}$ *оператора q_N^- имеет в этом базисе канонический вид:*

$$h^+\varphi^-_{i,0}=\lambda_i\varphi^-_{i,0},\ \ (h^+-\lambda_i)\varphi^-_{i,j}=\varphi^-_{i,j-1},$$
$$i=1,\dots,n,\quad j=1,\dots,k_i-1,\ \ \sum_{i=1}^{n}k_i=N.$$

Тогда существуют числа $k^+_{i\uparrow}$ и $k^+_{i\downarrow}$ такие, что $0\leqslant k^+_{i\uparrow,\downarrow}\leqslant k_i$ и для любого i функции

$$\varphi^-_{i,j}(x),\quad j=0,\dots,k^+_{i\uparrow,\downarrow}-1$$

нормируемы на $\pm\infty$, а функции

$$\varphi^-_{i,j}(x),\quad j=k^+_{i\uparrow,\downarrow},\dots,k_i-1$$

ненормируемы на $\pm\infty$. Независимость чисел $k^+_{i\uparrow,\downarrow}$ от выбора канонического базиса в том случае, когда q_N^- неминимизируем, вытекает из нижеследующей леммы 4.

Лемма 4. *Если в условиях леммы 1 оператор сплетания q_N^- неминимизируем, то любые две принадлежащие $\ker q_N^-$ формальные присоединённые функции h^+ одного и того же порядка для одного и того же спектрального числа λ либо одновременно нормируемы на $+\infty$ либо одновременно ненормируемы на $+\infty$. То же справедливо и на $-\infty$.*

2.4. Утверждения о спектре сплетаемых гамильтонианов

Нижеследующая лемма 5 показывает взаимосвязь в поведении на $\pm\infty$ элементов канонических базисов взаимно транспонированных операторов сплетания.

Лемма 5. *Пусть:* (1) *выполнены условия леммы* 1; (2) $\{\varphi^-_{i,j}\}$ *и* $\{\varphi^+_{i,j}\}$ *– канонические базисы $\ker q_N^-$ и $\ker q_N^+$ соответственно;* (3) q_N^- *неминимизируем;* (4) k_i *– алгебраическая кратность собственного числа λ_i матрицы* $\mathbf{S}$ *оператора q_N^-. Тогда для любых i и j функция $\varphi^-_{i,j}(x)$ нормируема (ненормируема) на $+\infty$ тогда и только тогда,* *когда $\varphi^{+}_{i,k_i-j-1}(x)$ ненормируема (нормируема) на $+\infty$. То же справедливо и на $-\infty$.*

Следствие 5. *Ненормируемой на обеих бесконечностях среди функций $\varphi^{-}_{i,j}(x)$ ($\varphi^{+}_{i,j}(x)$) (с фиксированным i) может быть только $\varphi^{-}_{i,k_i-1}(x)$ ($\varphi^{+}_{i,k_i-1}(x)$). Таким образом, с учётом следствия 3 одно из чисел $k^{+}_{i\uparrow,\downarrow}$ (с фиксированным i) не меньше чем k_i-1, а другое не больше 1. Соответственно функции $\varphi^{-}_{i,j}(x)$ ($\varphi^{+}_{i,j}(x)$), $j=1, \ldots, k_i-2$ на одной из бесконечностей (одной и той же для любого j) нормируемы, а на другой ненормируемы. При этом если функции $\varphi^{-}_{i,j}(x)$ нормируемы на $+\infty$ (на $-\infty$), то функции $\varphi^{+}_{i,j}(x)$ нормируемы на $-\infty$ (на $+\infty$).*

Следствие 6. *Если $\varphi^{-}_{i,0}(x)$ ($\varphi^{+}_{i,0}(x)$) ненормируема на обеих бесконечностях, то $k_i=1$.*

Следствие 7. *Если обе функции $\varphi^{-}_{i,0}(x)$ и $\varphi^{+}_{i,0}(x)$ нормируемы на обеих бесконечностях, то $k_i \geqslant 2$.*

Следствие 8. *Если $\operatorname{Im}\lambda_i \neq 0$, то функции $\varphi^{-}_{i,j}(x)$ ($\varphi^{+}_{i,j}(x)$), $j = 0, \ldots k_i-1$ с учётом следствия 3 на одной из бесконечностей (одной и той же для любого j) нормируемы, а на другой ненормируемы. При этом, если функции $\varphi^{-}_{i,j}(x)$ нормируемы на $+\infty$ (на $-\infty$), то функции $\varphi^{+}_{i,j}(x)$ нормируемы на $-\infty$ (на $+\infty$).*

Связь спектров сплетаемых гамильтонианов с поведением на $\pm\infty$ элементов канонического базиса ядра оператора сплетания выявляет

Теорема 1. *Пусть:* (1) *выполнены условия леммы* 5; (2) $\nu_\pm(\lambda)=1$, *если λ – собственное число $h^{\pm}$ и $\nu_\pm(\lambda)=0$ в противном случае;* (3) $n_\pm(\lambda)=n_0(\lambda)=0$, *если λ не является собственным числом матрицы* $\mathbf{S}$ *оператора q^{-}_N, а в случае $\lambda=\lambda_i$ (где λ_i – одно из собственных чисел матрицы* $\mathbf{S}$ *оператора q^{-}_N) число $n_\pm(\lambda_i)$ равно количеству нормируемых на обеих бесконечностях функций среди $\varphi^{\mp}_{i,j}(x)$, $j=0, \ldots, k_i-1$ и $n_0(\lambda_i)$ равно числу нормируемых только на одной из бесконечностей функций среди $\varphi^{\mp}_{i,j}(x)$, $j=0, \ldots, k_i-1$. Тогда для любого λ такого, что либо $\lambda \leqslant 0$, либо $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ имеет место равенство*

$$\nu_+(\lambda)-n_+(\lambda)=\nu_-(\lambda)-n_-(\lambda). \qquad (14)$$

Более того, если для некоторого λ выполнено условие $n_0(\lambda) > 0$, то для этого λ справедливы равенства

$$\nu_+(\lambda) - n_+(\lambda) = \nu_-(\lambda) - n_-(\lambda) = 0.$$

Взаимосвязь принадлежности волновой функции и энергии связанного состояния гамильтониана соответственно ядру и спектру матрицы $\mathbf{S}$ оператора сплетания раскрывает

Лемма 6. *В условиях леммы 1 для того, чтобы волновая функция связанного состояния $h^{\pm}$ принадлежала $\ker q_N^{\mp}$, необходимо и достаточно, чтобы энергия этого связанного состояния входила в спектр матрицы $\mathbf{S}$ оператора $q_N^{\mp}$.*

Доказательство. Ограничимся доказательством для случая с h^+ и q_N^-, т.к. случай с h^- и q_N^+ рассматривается аналогично.

Необходимость. Пусть h^+ имеет связанное состояние с энергией E, описываемое волновой функцией $\varphi(x)$, причём $q_N^-\varphi = 0$. Покажем, что E принадлежит спектру матрицы $\mathbf{S}$ оператора q_N^-. Действительно, пусть λ_i – собственное число матрицы $\mathbf{S}$ оператора q_N^- – имеет кратность k_i, $i = 1, \ldots, n$ так, что $k_1 + \ldots + k_n = N$. Тогда, в силу теоремы 1 из [22]

$$0 = q_N^+ q_N^- \varphi = \prod_{i=1}^{n} (h^+ - \lambda_i)^{k_i} \varphi = \prod_{i=1}^{n} (E - \lambda_i)^{k_i} \varphi, \tag{15}$$

откуда и следует, что E принадлежит спектру матрицы $\mathbf{S}$ оператора q_N^-.

Достаточность. Пусть теперь E принадлежит спектру матрицы $\mathbf{S}$ оператора q_N^-. Покажем, что $q_N^-\varphi = 0$. Пусть

$$q_N^- = p_M^- P(h^+), \tag{16}$$

где $P(h^+)$ – многочлен и p_M^- – неминимизируемый оператор, сплетающий h^+ и h^- ($p_M^- h^+ = h^- p_M^-$). Если E – корень P, то утверждение доказано. Поэтому перейдём к случаю, когда $P(E) \neq 0$. Заметим, что в этом случае E принадлежит спектру матрицы $\mathbf{S}$ оператора p_M^-, т.к. в силу теоремы 1 из [22] спектр матрицы $\mathbf{S}$ оператора q_N^- совпадает с корнями полинома $P_N(h^+) = q_N^+ q_N^-$, спектр матрицы $\mathbf{S}$ оператора p_M^- совпадает с корнями полинома $P_M(h^+) = p_M^+ p_M^-$, $p_M^+ = (p_M^-)^t$ и

$$P_N(h^+) = q_N^+ q_N^- = P(h^+) p_M^+ p_M^- P(h^+) = P^2(h^+) P_M(h^+). \tag{17}$$

Пусть $q_N^-\varphi \neq 0$. Тогда $p_M^-\varphi \neq 0$ также, т.к. в противном случае $q_N^-\varphi = P(h^-)p_M^-\varphi = 0$. В силу леммы 3 $p_M^-\varphi$ – собственная функция h^-, принадлежащая $\ker p_M^+$, т.к. $p_M^+p_M^-\varphi = P_M(E)\varphi = 0$. Последнее противоречит утвержению (14) теоремы 1, т.к. в рассматриваемом случае $\nu_+(E) = \nu_-(E) = 1$ и в силу лемм 4 и 5 $n_+(E) = 0$, $n_-(E) = 1$ ($n_\pm(E)$ в рассматриваемом случае соответствуют p_M^-, а не q_N^-). Лемма 6 доказана.

Следствие 9. *Для того, чтобы $h^\pm$ имел связанное состояние на уровне $E = \lambda_i$ в силу лемм 5 и 6 необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi_{i,k_i-1}^+(x)$ ($\varphi_{i,k_i-1}^-(x)$) была ненормируемой на обеих бесконечностях.*

Следствие 10. *Пусть хотя бы один из коэффициентов $q_N^\mp$ имеет нетривиальную мнимую часть и $k_N^\mp$ и $p_M^\mp$ – дифференциальные операторы с вещественными коэффициентами такие, что $q_N^\mp = k_N^\mp + ip_M^\mp$. Тогда (см. [26]) операторы $k_N^\mp$ и $p_M^\mp$ сплетают те же гамильтонианы, что и $q_N^\mp$. При этом, поскольку волновую функцию связанного состояния всегда можно выбрать вещественной, постольку любая волновая функция связанного состояния, принадлежащая $\ker q_N^\mp$, принадлежит и $\ker k_N^\mp$ и $\ker p_M^\mp$. Следовательно, любое собственное число матрицы $\mathbf{S}$ оператора $q_N^\mp$, являющееся энергией связанного состояния $h^\pm$, входит и в спектры матриц $\mathbf{S}$ операторов $k_N^\mp$ и $p_M^\mp$.*

3. Леммы о частичной приводимости операторов сплетания

Лемма 7. *Если в условиях леммы 5 оператор сплетания q_N^- имеет вещественные коэффициенты и $\operatorname{Im}\lambda_l \neq 0$, то q_N^- можно представить в виде произведения двух операторов сплетания k_{N-2}^- и p_2^- так, что:* (1)

$$q_N^- = k_{N-2}^-p_2^-, \quad h_0p_2^- = p_2^-h^+, \quad h^-k_{N-2}^- = k_{N-2}^-h_0, \qquad (18)$$

где h_0 – гамильтониан, потенциал которого принадлежит K;

(2) *p_2^- – вещественно неприводимый оператор сплетания второго порядка I рода с вещественными коэффициентами из $C_{\mathbb{R}}^\infty$, спектр матрицы $\mathbf{S}$ которого состоит из λ_l и λ_l^*;*

(3) *k_{N-2}^- – оператор сплетания $N-2$-го порядка с вещественными коэффициентами из $C_{\mathbb{R}}^\infty$.*

Доказательство. Принимая во внимание вещественность коэффициентов q_N^-, будем без ограничения общности предполагать, что базис $\{\varphi_{i,j}^-\}$ в ядре q_N^- выбран так, что $\varphi_{i,j}^-$, отвечающие вещественным λ_i, вещественны, а $\varphi_{i,j}^-$ и $\varphi_{k,j}^-$, отвечающие комплексно сопряжённым числам λ_i и $\lambda_k = \lambda_i^*$, связаны соотношением $\varphi_{k,j}^- = \varphi_{i,j}^{-*}$.

Используя описанную в лемме 1 из [26] процедуру, q_N^- можно представить в виде

$$q_N^- = k_{N-2}^- p_2^-, \tag{19}$$

где p_2^- – дифференциальный оператор второго порядка, базис в ядре которого состоит из $\varphi_{l,0}^-(x)$ и $\varphi_{l,0}^{-*}(x)$, а k_{N-2}^- – дифференциальный оператор $N-2$-го порядка, базис в ядре которого состоит из $p_2^-\varphi_{i,j}^-$ кроме $p_2^-\varphi_{l,0}^- = 0$ и $p_2^-\varphi_{l,0}^{-*} = 0$. При этом в силу указанной леммы p_2^- и k_{N-2}^- сплетают соответственно h^+ и h^- с некоторым гамильтонианом h_0 так, что выполнены равенства (18).

Обозначим $W_k(x)$ и $W_p(x)$ вронскианы элементов указанных выше базисов соответственно $\ker k_{N-2}^-$ и $\ker p_2^-$. Тогда, в силу соотношения (11) из [22] потенциал $V_0(x)$ гамильтониана h_0 связан с $V_{1,2}(x)$ соотношениями

$$V_0(x) = V_1(x) - 2[\ln W_p(x)]'', \quad V_2(x) = V_0(x) - 2[\ln W_k(x)]''. \tag{20}$$

В силу следствия 8 функция $\varphi_{l,0}^-(x)$ нормируема на одной из бесконечностей. Поэтому в силу следствия 1 вронскиан $W_p(x)$ не имеет нулей. Из этого, а также из того, что $\varphi_{l,0}^-(x) \in C_{\mathbb{R}}^\infty$, следует, что $V_0(x)$ (см. (20)) и коэффициенты

$$p_2^- = \frac{1}{W_p(x)} \begin{vmatrix} \varphi_{l,0}^{-*}(x) & \varphi_{l,0}^{-\prime *}(x) & \varphi_{l,0}^{-\prime\prime *}(x) \\ \varphi_{l,0}^-(x) & \varphi_{l,0}^{-\prime}(x) & \varphi_{l,0}^{-\prime\prime}(x) \\ 1 & \partial & \partial^2 \end{vmatrix} \tag{21}$$

принадлежат $C_{\mathbb{R}}^\infty$. При этом вещественность коэффициентов p_2^- следует из того, что сопряжение этих коэффициентов равносильно перестановке двух строк в обоих определителях в (21), а вещественность $V_0(x)$ следует из (20) и из того, что $W_p(x)$, очевидно, чисто мнимый. Принадлежность $V_0(x)$ множеству K следует из доказанного и из леммы 1.

Отсутствие нулей у $W_k(x)$ следует из бесконечной гладкости $V_0(x)$ и $V_2(x)$ и из того, что общее решение (20) имеет вид

$$W_k(x) = C_1 \exp\left\{C_2 x + \frac{1}{2}\int\limits_0^x dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2\,[V_0(x_2) - V_2(x_2)]\right\},$$

где $C_1 \neq 0$ и C_2 – постоянные. Бесконечная гладкость коэффициентов k^-_{N-2} следует из отсутствия у $W_k(x)$ нулей, из бесконечной гладкости $W_k(x)$ (как вронскиана функций из $C^\infty_{\mathbb{R}}$) и из представления k^-_{N-2} аналогичного (21). Вещественность коэффициентов k^-_{N-2} очевидным образом следует из вещественности коэффициентов q^-_N и p^-_2. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Если в условиях леммы 5, во-первых, λ_M – наименьшее вещественное собственное число матрицы $\mathbf{S}$ оператора q^-_N и, во-вторых, λ_M лежит ниже энергии основного состояния h^-, то q^-_N можно представить в виде произведения двух операторов сплетания k^-_{N-1} и p^-_1 так, что:* (1)

$$q^-_N = k^-_{N-1} p^-_1, \quad h_0 p^-_1 = p^-_1 h^+, \quad h^- k^-_{N-1} = k^-_{N-1} h_0, \qquad (22)$$

где h_0 – гамильтониан, потенциал которого принадлежит K;

(2) *p^-_1 – оператор сплетания первого порядка с вещественными коэффициентами из $C^\infty_{\mathbb{R}}$, матрица $\mathbf{S}$ которого состоит из λ_M;*

(3) *k^-_{N-1} – оператор сплетания $N-1$-го порядка с коэффициентами из $C^\infty_{\mathbb{R}}$;*

(4) *если λ_M является (не является) энергией связанного состояния h^+, то элемент базиса $\ker p^-_1$ нормируем на обеих (только на одной из) бесконечностях(-ей).*

Если коэффициенты q^-_N вещественны, то вещественны также и коэффициенты k^-_{N-1}.

Доказательство. В силу условия и лемм 3 и 6 число λ_M лежит не выше энергии основного состояния h^+. Функция $\varphi^-_{M,0}(x)$ в силу условия и леммы 5 не может быть ненормиремой на обеих бесконечностях. Но нормируемая хотя бы на одной из бесконечностей формальная собственная функция h^+, отвечающая спектральному числу, лежащему не выше энергии основного состояния, не может иметь нулей и отличается от вещественнозначной функции (если такое отличие вообще имеется) только постоянным сомножителем. Следовательно, оператор

$$p_1^- = \partial - \frac{\varphi_{M,0}^{-\prime}}{\varphi_{M,0}^-} \tag{23}$$

имеет вещественные коэффициенты из $C_{\mathbb{R}}^\infty$. Этот оператор в соответстви с описанной в лемме 1 из [26] процедурой может быть отфакторизован от q_N^- так, что имеют место равенства (22), где k_{N-1}^- – оператор сплетания $N-1$-го порядка с коэффициентами из $C_{\mathbb{R}}^\infty$ и h_0 – гамильтониан, потенциал которого $V_0(x)$ в силу соотношения (11) из [22] равен

$$V_0(x) = V_1(x) - 2[\ln \varphi_{M,0}^-(x)]''. \tag{24}$$

Вещественность и бесконечная глакость $V_0(x)$ следуют из (24), из отсутствия у $\varphi_{M,0}^-(x)$ нулей, из того, что $V_1(x) \in K$, а $\varphi_{M\,0}^-(x) \in C_{\mathbb{R}}^\infty$ и из того, что $\varphi_{M,0}^-(x)$ пропорциональна вещественнозначной фунуции. Принадлежность $V_0(x)$ множеству K следует из доказанного и из леммы 1. Справедливость четвёртого утверждения следует из того, что $\varphi_{M,0}^-(x)$ нормируема по крайней мере на одной из бесконечностей и из леммы 6. Если коэффициенты q_N^- вещественны, то вещественными, очевидно, являются и коэффициенты k_{N-1}^-. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть:* (1) *потенциал гамильтониана h^+ принадлежит K; потенциал гамильтониана h_1 вещественен и принадлежит $C_{\mathbb{R}}^1$; потенциал гамильтониана h^- вещественен и принадлежит $C_{\mathbb{R}}$;*

(2) *$\varphi_0(x)$ – волновая функция основного состояния h^+ так, что*

$$h^+\varphi_0 = E_{0+}\varphi_0, \quad E_{0+} \leqslant 0; \tag{25}$$

гамильтонианы h^+ и h_1 сплетаются оператором $p_{11}^- = \partial - \varphi_0'/\varphi_0$ так, что

$$p_{11}^- h^+ = h_1 p_{11}^-; \tag{26}$$

(3) *$\psi(x)$ – нормиремая только на одной из бесконечностей функция из $\ker(h_1 - \lambda)$, $\lambda < E_{0+}$; гамильтонианы h_1 и h^- сплетаются оператором $k_{11}^- = \partial - \psi'/\psi$ так, что*

$$k_{11}^- h_1 = h^- k_{11}^-. \tag{27}$$

Тогда: (1) *потенциалы* h^- *и* h_1 *принадлежат* K*; коэффициенты* p_{11}^- *и* k_{11}^- *вещественны и принадлежат* $C_{\mathbb{R}}^\infty$*;*

(2) *функция* $(p_{11}^-)^t\psi$ *не имеет нулей и является нормируемым только на одной из бесконечностей (на той же, что и* ψ*) элементом* $\ker(h^+ - \lambda)$*;*

(3) *оператор*

$$p_{12}^- = \partial - \frac{(p_{11}^+\psi)'}{p_{11}^+\psi}, \quad p_{11}^+ = (p_{11}^-)^t \tag{28}$$

имеет вещественные коэффициенты из $C_{\mathbb{R}}^\infty$ *и сплетает* h^+ *с гамильтонианом* $h_2 = \lambda + p_{12}^-(q_{12}^-)^t$ *так, что*

$$p_{12}^- h^+ = h_2 p_{12}^-; \tag{29}$$

потенциал h_2 *принадлежит* K*; матрица* $\mathbf{S}$ *оператора* p_{12}^- *состоит из* λ*;*

(4) $p_{12}^-\varphi_0$ *является волновой функцией основного состояния* h_2 *с энергией* E_{0+}*;*

(5) *оператор*

$$k_{12}^- = \partial - \frac{(p_{12}^-\varphi_0)'}{p_{12}^-\varphi_0}$$

имеет вещественные коэффициенты из $C_{\mathbb{R}}^\infty$ *и сплетет* h_2 *с* h^- *так, что*

$$k_{12}^- h_2 = h^- k_{12}^-; \tag{30}$$

матрица $\mathbf{S}$ *оператора* k_{12}^- *состоит из* E_{0+}*;*

(6) *имеет место равенство*

$$k_{11}^- p_{11}^- = k_{12}^- p_{12}^-. \tag{31}$$

Справедливость леммы 9 очевидным образом следует из лемм 1 и 3, из теоремы 1 из [22], из стандартной конструкции, описывающей сплетание гамильтонианов операторами первого порядка [1–8, 11–14, 21] и из элементарных сведений о корнях формальных собственных функций гамильтониана [27].

Лемма 10. *Если в условиях леммы 1 порядок* $N = 3$*, оператор* q_3^- *имеет вещественные коэффициенты и является неминимизируемым и* λ *– наименьшее вещественное собственное число матрицы* $\mathbf{S}$ *оператора* q_3^-*, то существуют операторы сплетания первого порядка* $p_1^\pm$ *и* $k_1^\pm$ *и второго порядка* $p_2^\pm$ *и* $k_2^\pm$ *такие, что:*

(1) $p_1^{\pm}$, $k_1^{\pm}$, $p_2^{\pm}$ *и* $k_2^{\pm}$ *имеют вещественные коэффициенты из* $C_{\mathbb{R}}^{\infty}$*;*
(2)

$$p_1^+ = (p_1^-)^t, \quad k_1^+ = (k_1^-)^t, \quad p_2^+ = (p_2^-)^t, \quad k_2^+ = (k_2^-)^t; \tag{33}$$

(3) *матрицы* $\mathbf{S}$ *операторов* $p_1^{\pm}$ *и* $k_1^{\pm}$ *состоят из* λ*;*
(4)

$$q_3^- = k_2^- p_1^- = k_1^- p_2^-, \quad q_3^+ = p_1^+ k_2^+ = p_2^+ k_1^+, \tag{34}$$

причём потенциалы промежуточных гамильтонианов, отвечающих этим факторизациям, принадлежат K*;*

(5) *если алгебраическая кратность* λ *в спектре матрицы* $\mathbf{S}$ *оператора* q_3^- *равна* 1*, то для того, чтобы элемент базиса* $\ker p_1^-$ *был нормируем (ненормируем) на* $+\infty$ *необходимо и достаточно, чтобы элемент базиса* $\ker k_1^-$ *был нормируем (ненормируем) на* $+\infty$*; то же справеливо и на* $-\infty$*; то же справедливо для* p_1^+ *и* k_1^+*.*

Доказательство. Первые четыре утвержения следуют из доказанной в [22] теоремы 3 и из леммы 1. При доказательстве пятого утверждения ограничимся рассмотрением только случая с p_1^-, k_1^- и с $x \to +\infty$, т.к. другие случаи рассматриваются аналогично. Пусть $\varphi(x)$ – элемент базиса $\ker p_1^-$. Тогда, поскольку матрица $\mathbf{S}$ оператора p_1^- состоит из λ, постольку $h^+\varphi = \lambda\varphi$. Пусть также λ_1 и λ_2 – два других собственных числа матрицы $\mathbf{S}$ оператора q_3^-, а $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – два дргих элемента канонического базиса $\ker q_3^-$, причём по условию $\lambda \neq \lambda_{1,2}$. Поскольку $q_3^- = k_1^- p_2^-$, $q_3^- \varphi = 0$ и базис в $\ker p_2^-$ состоит из $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, постольку

$$\psi = p_2^- \varphi \not\equiv 0 \tag{35}$$

– элемент базиса k_1^-. С другой стороны, в силу теоремы 1 из [22]

$$p_2^+ \psi = p_2^+ p_2^- \varphi = (h^+ - \lambda_1)(h^+ - \lambda_2)\varphi = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\varphi \not\equiv 0. \tag{36}$$

Из равенств (35), (36) и леммы 3 следует, что нормируемость $\varphi(x)$ на $+\infty$ равносильна нормируемости $\psi(x)$ на $+\infty$. Лемма 10 доказана.

4. Теоремы о полной приводимости операторов сплетания

Теорема 2. *Пусть:* (1) $h^+ = -\partial^2 + V_1(x)$*,* $V_1(x) \in K$*; потенциал* $V_2(x)$ *гамильтониана* h^- *вещественен и непрерывен;*

(2) h^+ *и* h^- *сплетаются неминимизируемым дифференциальным оператором* N*-го порядка* q_N^- *с коэффициентами из* $C^2_{\mathbb{R}}$ *так, что*

$$q_N^- h^+ = h^- q_N^-; \tag{37}$$

(3) *алгебраическая кратность* λ_i – i*-го собственного числа матрицы* $\mathbf{S}$ *оператора* q_N^- – *равна* k_i, $i = 1, \ldots, n$ *так, что* $k_1+\cdots+k_n = N$*; все числа* λ_i *вещественны и удовлетворяют неравенствам*

$$0 \geqslant \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n; \tag{38}$$

(4) Λ – *спектр матрицы* $\mathbf{S}$ *оператора* q_N^-*;*

(5) $E_{i\pm}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ – *энергия* i*-го снизу связанного состояния* $h^\pm$*;* $N^\pm$ – *количество связанных состояний* $h^\pm$*, энергии которых входят в* Λ*;* $N_\pm$ – *количество связанных состояний* $h^\pm$ *с энергиями, не превосходящими* λ_1*;*

(6)

$$P_\pm(E) = \prod_{E_{i\pm}<\lambda_1, E_{i\pm}\notin\Lambda} (E_{i\pm} - E). \tag{39}$$

Тогда: (1) $V_2(x) \in K$*; коэффициенты* q_N^- *принадлежат* $C^\infty_{\mathbb{R}}$ *и являются вещественными;* $q_N^+ = (q_N^-)^t$ *имеет вещественные коэффициенты из* $C^\infty_{\mathbb{R}}$ *и сплетает* h^+ *и* h^- *так, что*

$$h^+ q_N^+ = q_N^+ h^-; \tag{40}$$

(2) $P_+(E) \equiv P_-(E)$*; степень* $P_\pm(E)$ *равна* $N_+ - N^+ = N_- - N^-$*;*

(3) *оператор* $q_N^\mp P_\pm(h^\pm)$ *сплетает* h^+ *и* h^- *и может быть представлен в виде произведения* $N + N_+ + N_- - N^+ - N^-$ *операторов сплетания первого порядка с вещественными коэффициентами из* $C^\infty_{\mathbb{R}}$ *так, что:*

(а) *потенциалы всех промежуточных гамильтонианов принадлежат* K*;*

(б) *собственное число матрицы* $\mathbf{S}$ l*-го (справа) оператора в рассматриваемой факторизации равно* $E_{l-1,\pm}$, $l = 1, \ldots, N_\pm$ *и элемент базиса ядра этого оператора нормируем на обеих бесконечностях;*

(в) *собственное число матрицы* $\mathbf{S}$ l*-го (слева) оператора в рассматриваемой факторизации равно* $E_{l-1,\mp}$, $l = 1, \ldots, N_\mp$ *и элемент базиса ядра этого оператора ненормируем на обеих бесконечностях;*

(г) *множество собственных чисел матриц* $\mathbf{S}$ *операторов с* $N_\pm + 1$*-го по* $N_\pm + N - N^+ - N^-$*-ый (справа) в рассматриваемой факторизации совпадает с*[3] $\Lambda \setminus (\{E_{i+}\} \cup \{E_{i-}\})$, *причём собственное число матрицы* $\mathbf{S}$ *оператора в этой группе с увеличением номера оператора (справа налево) не убывает; элемент базиса ядра любого оператора в этой группе нормируем только на одной из бесконечностей.*

Доказательство. То, что $V_2(x) \in K$, коэффициенты $q_N^\pm$ принадлежат $C_{\mathbb{R}}^\infty$ и имеет место равенство (40), следует из леммы 1. Вещественность коэффициентов $q_N^\pm$ докажем ниже.

Для оказательства второго утвержения, очевидно, достаточно показать, что если $E_{i\pm} < \lambda_1$ и $E_{i\pm} \notin \Lambda$, то существует $E_{j\mp}$ такое, что $E_{j\mp} = E_{i\pm}$. Справедливость этого следует из лемм 3 и 6. Таким образом, второе утверждение доказано.

То, что операторы $q_N^\mp P_\pm(h^\pm)$ сплетают h^+ и h^- очевидно.

В $\ker(q_N^\mp P_\pm(h^\pm))$ в силу определения $P_\pm$ и леммы 6 входят волновые функции $N_\pm$ нижних связанных состояний $h^\pm$. При этом, если учесть неминимизируемость $q_N^\mp$, канонический базис в $\ker(q_N^\mp P_\pm(h^\pm))$ можно выбрать так, чтобы в него входили все эти волновые функции. Используя стандартную процедуру, описанную в лемме 1 из [26], от $q_N^\mp P_\pm(h^\pm)$ можно последовательно справа отщеплять операторы первого порядка, базис в ядре каждого из которых состоит из волновой функции основного состояния $h^\pm$ или соответствующего промежуточного гамильтониана. При этом в вещественности и бесконечной гладкости коэффициентов отщепляемых операторов сплетания и в том, что потенциалы промежуточных гамильтонианов принадлежат K, можно легко убедиться по индукции с помощью рассуждений из доказательства леммы 8. Таким образом, утверждение 3(б) доказано и получившийся в итоге промежуточный гамильтониан $h_0^\pm$ таков, что его основное состояние лежит выше λ_1.

Обозначим $k_\mp$ получившийся после осуществления указанной процедуры остаток от $q_N^\mp P_\pm(h^\pm)$. Этот оператор сплетает $h_0^\pm$ с $h^\mp$ так, что $k_\mp h_0^\pm = h^\mp k_\mp$, $h_0^\pm k_\mp^t = k_\mp^t h^\mp$. Таким образом, в силу

[3] В этой формуле следует учитывать кратность собственных чисел: если λ входит в Λ с алгебраической кратностью K_1, в $\{E_{i+}\}$ с кратностью K_2 и в $\{E_{i-}\}$ с кратностью K_3 (K_2 и K_3, очевидно, могут принимать лишь значения 0 и 1), то в $\Lambda \setminus (\{E_{i+}\} \cup \{E_{i-}\})$ число λ входит с кртностью $K_1 - K_2 - K_3$, если $K_1 > K_2 + K_3$, либо не входит, если $K_1 \leqslant K_2 + K_3$.

леммы 3 и отсутствия у $h_0^{\mp}$ уровней энергии, лежащих не выше λ_1, волновые функции $N_{\mp}$ нижних состояний $h^{\mp}$ входят в $\ker k_{\mp}^t$. С другой стороны, в силу неминимизируемости $q_N^{\mp}$, теоремы 2 из [22] и описанного в лемме 1 из [26] правила преобразования жордановой формы матрицы $\mathbf{S}$ оператора сплетания при отщеплении от последнего оператора сплетания первого порядка, получаем, что $k_{\mp}$, а тем самым и $k_{\mp}^t$ неминимизиремы. Следовательно, волновые функции $N_{\mp}$ нижних связанных состояний $h^{\mp}$ входят в канонический базис $\ker k_{\mp}^t$. Используя ту же процедуру отщепления, что и выше, а также, учитывая, что произведение элементов базисов $\ker(\partial - \chi(x))$ и $\ker(\partial - \chi(x))^t$ равно постоянной, убеждаемся в справедливости утверждения 3(в).

Обозначим $r_{\mp}$ остаток от $k_{\mp}$ после отщепления операторов, указанных в утверждении 3(в). Этот оператор снова (в силу упомянутого правила преобразования жордановой формы и теоремы 2 из [22]) является неминимизируемым. Из этого, из леммы 8 и из того, что $r_{\mp}$ по построению сплетают гамильтонианы, основные состояния которых лежат выше λ_1, следуют утверждения 3(г) и 3(а).

Вещественность коэффициентов $q_N^{\mp}$ очевидным образом следует из вещественности коэффициентов всех операторов, входящих в полученные факторизации $q_N^{\mp} P_{\pm}(h^{\pm})$ и из вещественности коэффициентов $P_{\pm}(h^{\pm})$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть:* (1) $h^+ = -\partial^2 + V_1(x)$, $V_1(x) \in K$; *потенциал* $V_2(x)$ *гамильтониана* h^- *веществен и непрерывен;*

(2) h^+ *и* h^- *сплетаются неминимизируемым дифференциальным оператором* N*-го порядка* q_N^- *с вещественными коэффициентами из* $C_{\mathbb{R}}^2$ *так, что*

$$q_N^- h^+ = h^- q_N^-; \tag{41}$$

(3) *алгебраическая кратность* λ_i – i*-го собственного числа матрицы* $\mathbf{S}$ *оператора* q_N^- – *равна* k_i, $i = 1, \ldots, n$ *так, что* $k_1 + \cdots + k_n = N$*; среди чисел* λ_i *имеется* M *вещественных и* L *пар взаимно комплексно сопряжённых так, что* $M + 2L = n$*; вещественным* λ_i *соответствуют номера* $i = 1, \ldots, M$*, причём* $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, $i = 1, \ldots, M-1$*;*

(4) *если* λ_1 *вещественно, то* $\lambda_1 \leqslant 0$*;*

(5) $E_{i\pm}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ – *энергия* i*-го снизу связанного состояния* $h^{\pm}$*;* $K_{\pm} = \max\{i : \lambda_i > E_{0\pm}\}$*, если* $\lambda_1 > E_{0\pm}$*, и* $K_{\pm} = 0$*, если* $\lambda_1 \leqslant E_{0\pm}$

либо $\operatorname{Im}\lambda_1 \neq 0$.

Тогда: (1) $V_2(x) \in K$; *коэфициенты* q_N^- *принадлежат* $C_{\mathbb{R}}^\infty$; $q_N^+ = (q_N^-)^t$ *имеет вещественные коэффициенты из* $C_{\mathbb{R}}^\infty$ *и сплетает* h^+ *и* h^- *так, что*

$$h^+ q_N^+ = q_N^+ h^-; \tag{42}$$

(2) $q_N^\mp$ *можно представить в виде произведения вещественно неприводимых операторов сплетания первого и второго поряка с вещественными коэффициентами из* $C_{\mathbb{R}}^\infty$ *так, что:*

(а) *потенциалы всех промежуточных гамильтонианов принадлежат* K;

(б) *первые*

$$J_1 = \sum_{i=M+1}^{M+L} k_i \tag{43}$$

операторов справа в рассматриваемой факторизации $q_N^\mp$ *имеют порядок 2 и являются вещественно неприводимыми операторами I рода; при этом можно добиться того, чтобы соответствующие этим операторам пары взаимно сопряжённых собственных чисел матрицы* $\mathbf{S}$ *оператора* q_N^- *шли в произвольном порядке;*

(в) *вторая (справа) группа операторов в рассматриваемой факторизации состоит из*

$$J_{2\mp} = N - 2J_1 - 2J_{3\mp}, \tag{44}$$

где

$$J_{3\mp} = \Big[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K_\mp} k_i\Big] \tag{45}$$

операторов первого порядка, причём

(i) *в случае, когда* $\sum\limits_{i=1}^{K_\mp} k_i$ *чётна, собственное число матрицы* $\mathbf{S}$ *оператора* q_N^-, *соответствующее* l*-му (справа) из этих операторов, не превосходит собственного числа, соответствующего* $l+1$*-му оператору,* $l = 1, \ldots, J_{2\mp} - 1$;

(ii) *в случае, когда* $\sum\limits_{i=1}^{K_\mp} k_i$ *нечётна, собственное число матрицы* $\mathbf{S}$ *оператора* q_N^-, *соответствующее* l*-му (справа) из этих операторов, не превосходит собственного числа, соответствующего* $l+1$*-му* *оператору, $l = 1, \ldots, J_{2\mp} - 2$; собственным числом, соответствющим $J_{2\mp} - 1$-му оператору, является $\lambda_{K_\mp}$, а собственным числом, соответствующим $J_{2\mp}$-му оператору, является $\lambda_{K_\mp+1}$, равное в этом случае $E_{0\mp}$;*

(г) *третья (справа) и последняя группа операторов в рассматриваемой факторизации состоит из $J_{3\mp}$ вещественно неприводимых операторов* II *и* III *рода, причём наибольшее из собственных чисел матрицы* **S** *оператора q_N^-, соответствующих l-му (справа) из этих операторов, не превосходит наименьшего из собственных чисел матрицы* **S** *оператора q_N^-, соответствующих $l+1$-му из этих операторов, $l = 1, \ldots, J_{3\mp} - 1$.*

Замечание 1. Если $E_{0\mp}$ не является собственным числом матрицы **S** оператора q_N^-, то $\sum\limits_{i=1}^{K_\mp} k_i$ чётна, т.к. в противном случае собственное число $q_N^\mp q_N^\pm \equiv \prod_{i=1}^n (h^\mp - \lambda_i)^{k_i}$ на волновой функции основного состояния $h^\mp$ было бы отрицательным.

Доказательство. Ограничимся доказательством для случая с q_N^-, т.к. доказательство для случая с q_N^+ аналогично. Справедливость первого утверждения следует из леммы 1. Справедливость утверждения 2(б) следует из леммы 7. Справедливость утверждения 2(в) в части, относящейся к операторам сплетания, собственные числа матриц **S** которых лежат ниже E_{0-}, следует из леммы 8. Из лемм 7 и 8 следует также принадлежность множеству K потенциалов соответствующей части промежуточных гамильтонианов. Таким образом, доказательство сведено к случаю $L = 0$, $\lambda_M = \lambda_n \geqslant E_{0-}$, что и будет предполагаться ниже.

Опишем сначала основную идею дальнейшего доказательства. Идея состоит в том, чтобы воспользоваться полученной в теореме 2 факторизацией оператора $q_N^- P_+(h^+)$ на три группы операторов сплетания первого порядка и с помощью последовательных рефакторизаций (осуществляемых с помощью лемм 9 и 10) последовательно переставлять каждый оператор из правой группы с операторами средней группы до тех пор, пока этот оператор (при каждой рефакторизации он, конечно, будет изменяться, но его матрица **S** будет оставаться неизменной) либо не займёт подходящее ему место в средней группе (если собственное число его матрицы **S** принадлежит спектру матрицы **S** оператора q_N^-) либо не пройдёт среднюю группу насквозь. Параллельно следует переставлять и операторы из левой группы (собственные числа матриц **S** которых принадлежат спектру матрицы **S** оператора q_N^-) с операторами средней группы до тех пор, пока они не займут подходящие им места. При этом прошедшие насквозь среднюю группу операторы из правой группы при встрече с операторами из левой группы, имеющими те же матрицы **S**, что и перемещённые операторы, будут образовывать разности собственных чисел и гамильтонианов, давая возможность минимизировать $q_N^- P_+(h^+)$ до q_N^- и, тем самым, получить в итоге искомую факторизацию q_N^-.

Теперь подробнее. Будем последовательно сверху вниз перебирать все уровни энергии супергамильтониана H, лежащие не выше λ_1. Рассмотрим сначала случай с самым верхним из этих уровней $E_{\max}$. Если $E_{\max}$ совпадает с одним из собственных чисел матрицы **S** оператора q_N^- так, что $E_{\max} = \lambda_i$, то поступим следующим образом.

(а) Если $E_{\max}$ принадлежит спектру h^+, то соответствующий $E_{\max}$ оператор из правой группы факторизации из теоремы 2 (он, очевидно, является в правой группе самым левым) с помощью леммы 9 переставляем с операторами средней группы справа налево до тех пор, пока он не будет переставлен с самым левым из операторов, отвечающих λ_{i+1}.

(б) Если $E_{\max}$ не принадлежит спектру h^+, то среди сомножителей правой группы нет сомножителя, отвечающего $E_{\max}$, и справа налево с сомножителями средней группы не переставляем ничего.

(в) Если $E_{\max}$ принадлежит спектру h^-, то соответствующий $E_{\max}$ оператор левой группы (он, очевидно, является в левой группе самым правым) с помощью леммы 10 переставляем с операторами средней группы слева направо до тех пор, пока он не будет переставлен с самым правым из операторов, отвечающих λ_{i-1} (если $k_1 + \cdots + k_{i-1}$ чётно) либо до тех пор, пока соседним справа от него не окажется самый правый из операторов, отвечающих λ_{i-1} (если $k_1 + \cdots + k_{i-1}$ нечётно). Отметим, что при каждой перестановке в этом случае два оператора первого порядка, бывшие до перестновки справа от перемещаемого оператора из левой группы, оказываясь после перестановки с ним слева от него, образуют вещественно неприводимый оператор второго порядка II или III рода. Это объясняется тем, что оба собственных числа матрицы **S** этого оператора после перестановки оказываются выше энергии основного состояния (рождаемого перемещённым оператором из левой группы, т.к. элемент его ядра в силу теоремы 2 и леммы 10 ненормируем на обеих бесконечностях) и соответственно элементы канонического базиса ядра рассматриваемого оператора, являющиеся формальными собственными функциями соответствующего промежуточного гамильтониана, не могут не иметь нулей.

(г) Если $E_{\max}$ не принадлежит спектру h^-, то среди сомножителей левой группы нет сомножителя, отвечающего $E_{\max}$, и слева направо с сомножителями средней группы не переставляем ничего.

Рассмотрим теперь случай, когда $E_{\max}$ не принадлежит спектру матрицы $\mathbf{S}$ оператора q_N^-. В этом случае найдётся i такое, что $\lambda_i > E_{\max} > \lambda_{i+1}$ (либо $i = n = M$ и $\lambda_i > E_{\max}$). Кроме того в этом случае уровень $E_{\max}$ имеется у обоих гамильтонианов $h^\pm$ (см. второе утверждение теоремы 2) и, во избежание отрицательности антикоммутатора суперзарядов на волновой функции H с уровня $E_{\max}$, выполнено условие

$$k_1 + \cdots + k_i \quad \text{— чётно.} \tag{46}$$

В данном случае самый левый из сомножителей правой группы соответствует $E_{\max}$. Этот сомножитель с помощью леммы 9 переставляем с сомножителями средней группы до тех пор, пока не будет совершена перестановка с самым левым из сомножителей, соответствующих λ_{i+1}. Далее перестановки совершаются с помощью леммы 10. При этом перемещение рассматриваемого оператора из правой группы через всю среднюю группу возможно в силу условия (46). Отметим, что при каждой перестановке с помощью леммы 10 справа от протаскиваемого оператора будут получаться уже не два отдельных оператора первого порядка, а единый вещественно неприводимый оператор II или III рода. Это объясняется тем, что оба собственных числа матрицы $\mathbf{S}$ последнего оператора после перестановки оказываются выше энергии основного состояния (рождаемого перемещённым оператором из правой группы, т.к. элемент его ядра в силу теоремы 2 и лемм 9 и 10 нормируем на обеих бесконечностях) и соответственно элементы канонического базиса ядра рассматриваемого оператора, являющиеся формальными собственными функциями соответствующего промежуточного гамильтониана, не могут не иметь нулей.

После перемещения через среднюю группу оператор из правой группы оказывается рядом с оператором сплетания из левой группы, матрица **S** которого имеет тот же вид, что и у перемещённого оператора. При этом произведение данных операторов, в силу теоремы 2 из [22] и правила преобразования матрицы **S** оператора сплетания при отщеплении от него оператора сплетания первого порядка (см. доказательство леммы 1 в [26]), представляет собой разность $E_{\max}$ и промежуточного гамильтониана. Эта разность с помощью соотношений сплетания может быть перемещена на границу рассматриваемой факторизации и отщеплена.

Далее действуем таким же образом по индукции. При этом в итоге получается искомая факторизация q_N^-. Теорема 3 доказана.

Я благодарю А. А. Андрианова за многочисленные обсуждения и полезные замечания.

Литература

1. F. Cooper, B. Freedman, — Ann. Phys. (NY) **146** (1983), 262.
2. А. А. Андрианов, Н. В. Борисов, М. В. Иоффе, — Письма в ЖЭТФ **39** (1984), 93; Phys. Lett. A **105** (1984), 19; ТМФ **61** (1984), 183.
3. B. Mielnik, — J. Math. Phys. **25** (1984), 3387.
4. M. M. Nieto, — Phys. Lett. B **145** (1984), 208.
5. D. J. C. Fernández, — Lett. Math. Phys. **8** (1984), 337 [physics/0006119].
6. A. Lahiri, P. K. Roy, B. Bagchi, — Int. J. Mod. Phys. A **5** (1990), 1383.
7. F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, — Phys. Rept. **251** (1995), 267.
8. В. Г. Багров, Б. Ф. Самсонов, — ЭЧАЯ **28** (1997), 374.
9. A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, V. P. Spiridonov, — Phys. Lett. A **174** (1993), 273.
10. A. A. Andrianov, F. Cannata, — J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 10297.
11. E. Schrödinger, — Proc. Roy. Irish Acad. A **47** (1941), 53 [physics/9910003].
12. L. Infeld, T. E. Hull, — Rev. Mod. Phys. **23** (1951), 21.
13. А. А. Андрианов, Н. В. Борисов, М. В. Иоффе, М. И. Эйдес, — ТМФ **61** (1985), 17; Phys. Lett. A **109** (1985), 143.
14. C. V. Sukumar, — J. Phys. A: Math. Gen. **18** (1985), L57; 2917.
15. M. M. Crum, — Quart. J. Math. (Oxford) **6** (1955), 121 [physics/9908019].
16. М. Г. Крейн, — ДАН СССР, **113** (1957), 970.
17. Л. Д. Фаддеев, — УМН, **14** (1959), 57 [J. Math. Phys. **4** (1963), 72].
18. V. B. Matveev, M. Salle, *Darboux transformations and solitons.* — Springer, Berlin (1991).
19. A. A. Andrianov, F. Cannata, J.-P. Dedonder, M. V. Ioffe, — Int. J. Mod. Phys. A **10** (1995), 2683.
20. B. F. Samsonov, – Phys. Lett. A **263** (1999), 274.
21. A. A. Andrianov, F. Cannata, — J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 10297.

22. А. А. Андрианов, А. В. Соколов, — Зап. научн. семин. ПОМИ **335** (2006), 22.
23. A. A. Andrianov, F. Cannata, A. V. Sokolov, — Nucl. Phys. B **773** [PM] (2007), 107; preprint (2006) `math-ph/0610024`.
24. A. V. Sokolov, — Nucl. Phys. B **773** [PM] (2007), 137; preprint (2006) `math-ph/0610022`.
25. D. J. C. Fernández, R. Muñoz, and A. Ramos, — Phys. Lett. A **308** (2003), 11; preprint (2002) `quant-ph/0212026`.
26. A. A. Andrianov, A. V. Sokolov, — Nucl. Phys. B **660** (2003), 25.
27. Ф. А. Березин, М. А. Шубин, *Уравнение Шрёдингера.* — Изд-во МГУ, М. (1983).

Sokolov A. V. Factorization of nonlinear supersymmetry in one-dimensional quantum mechanics II: proofs of theorems on reducibility.

In this part we continue the investigation of factorization of supersymmetric transformations in one-dimensional Quantum Mechanics into chains of elementary Darboux transformations with nonsingular coefficients. The definition is given for the potential class invariant against Darboux–Crum transformations and, further on, a number of lemmas and theorems substantiating the conjectures set forth on reducibility of differential operators for spectral equivalence transformations is proven. The analysis in general case is performed with all necessary proofs.

НИИ Физики им. В. А. Фока
С.-Петербургский государственный
университет

Поступило 2 июня 2006 г.