Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 347, 2007 г.

П. П. Кулиш[1], **Н. Манойлович**[2]

КВАНТОВЫЕ АЛГЕБРЫ С КОЛЬЦОМ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ТИПА sl(2)

1. Введение

Развитие квантового метода обратной задачи (КМОЗ) [1–4] как алгебраического подхода к решению и построению интегрируемых квантовых систем привело к созданию теории квантовых групп [5–8].

Естественно, что теория представлений квантовых групп оказалась тесно связана со спектральной теорией интегралов движения квантовых систем. В частности, эта связь проявилась при комбинаторном подходе к вопросу о полноте собственных векторов изотропного магнетика Гейзенберга [9] с гамильтонианом

$$H_{XXX} = \sum_{n=1}^{N} (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z), \tag{1.1}$$

где σ_n^α, $\alpha = x, y, z$ – матрицы Паули.

С этой системой связаны три алгебры: sl(2)-алгебра Ли группы вращений, групповая алгебра $\mathbb{C}[S_N]$ симметрической группы S_N и бесконечномерная алгебра $\mathcal{Y}(\mathrm{sl}(2))$ – янгиан [7], определяемая соответствующей R-матрицей $R(\lambda) = \lambda I + \eta\mathcal{P}$, где $\mathcal{P} - 4 \times 4$ матрица перестановки в пространстве $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

Янгиан $\mathcal{Y}(\mathrm{sl}(2))$ является алгеброй динамической симметрии, которая содержит все динамические переменные нашей системы. Важно отметить, что для действия первых двух алгебр sl(2) и S_N на пространстве состояний $\mathcal{H} = \bigotimes_1^N \mathbb{C}^2$ имеется двойственность Фробениуса–Шура–Вейля. Она следует из того, что sl(2) и S_N являются централизаторами друг друга в этом пространстве.

[1]Работа частично поддержана грантами РФФИ 05-01-00922 и НШ-5403.2006.1.
[2]Работа частично поддержана грантом POCTI/MAT/58452/2004.

Как следствие гамильтониан, коммутируя с глобальными генераторами sl(2) : $S^\alpha = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^\alpha$, $\alpha = x, y, z$, является элементом $\mathbb{C}[S_N]$. Последнее видно и из выражения плотности H_{XXX} через операторы перестановки (генераторы симметрической группы S_N)

$$\sum_\alpha \sigma_n^\alpha \sigma_{n+1}^\alpha = 2\mathcal{P}_{n\,n+1} - I_{n\,n+1}.$$

Аналогичная ситуация имеет место и для анизотропного XXZ-магнетика

$$H_{XXZ} = \sum_{n=1}^{N-1} (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \Delta \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z) + \frac{(q - q^{-1})}{2} (\sigma_1^z - \sigma_N^z), \quad (1.2)$$

который коммутирует [10] с глобальными генераторами квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(\mathrm{sl}(2))$ [5]. Второй алгеброй вместо $\mathbb{C}[S_N]$ становится алгебра Темперли–Либа $TL_N(q)$, генераторы которой в этом пространстве $\mathcal{H} = \bigotimes_1^N \mathbb{C}^2$ совпадают с постоянной R-матрицей ($\omega(q) = q - 1/q$)

$$\check{R}_{XXZ}(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega(q) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Как и в случае XXX-магнетика плотность гамильтониана (1.2) выражается через генератор (1.3) алгебры $TL_N(q)$ ($\Delta = (q + q^{-1})/2$)

$$\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \Delta \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z + \frac{\omega(q)}{2} (\sigma_n^z - \sigma_{n+1}^z) = \\ = 2\check{R}_{XXZ}(q) - \left(\frac{\omega(q)}{2} + q \right) I_{n\,n+1}.$$

Алгеброй динамической симметрии для XXZ-магнетика будет квантовая аффинная алгебра $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathrm{sl}}(2))$.

Алгебра Темперли–Либа $TL_N(q)$ есть фактор-алгебра алгебры Гекке $\mathcal{H}_N(q)$ (см. раздел 2) и допускает R-матричное представление в пространстве $\mathcal{H} = \bigotimes_1^N \mathbb{C}^n$ с любым $n = 2, 3, \ldots$. Как следствие, можно построить интегрируемую спиновую цепочку [11]. Цель данной работы – описать квантовую алгебру $\mathcal{U}_q(n)$ симметрии такой спиновой системы и увидеть, что (категории) структуры конечномерных представлений этих алгебр $\mathcal{U}_q(n)$ и sl(2) совпадают. В этом случае $\mathcal{U}_q(n)$ и $TL_N(q)$ являются централизаторами друг друга в пространстве $\bigotimes_1^N \mathbb{C}^n$.

Отметим, что связь алгебры $TL_N(q)$ с интегрируемыми спиновыми системами активно использовалась во многих работах и монографиях (см., например, [12–17] и приведенные там ссылки).

Двойственная алгебра Хопфа $\mathcal{U}_q(n)^*$, была введена как квантовая группа невырожденной квадратичной формы в [18]. Категории комодулей $\mathcal{U}_q(n)^*$ и их обобщений изучались в [19, 20], где показано, что категория комодулей $\mathcal{U}_q(n)^*$ эквивалентна категория комодулей квантовой группы $SL_q(2)$.

Выражаем благодарность П. Етингофу и А. Мудрову за полезные обсуждения.

2. Алгебры Гекке и Темперли–Либа

Обе алгебры $\mathcal{H}_N(q)$ и $TL_N(q)$ являются факторалгебрами групповой алгебры группы кос $\mathcal{B}_N$, порождаемой $(N-1)$ образующей $\check{R}_j$, $j=1,2,\ldots,N-1$ их обратными $\check{R}_j^{-1}$ с соотношениями (см. [21])

$$\begin{aligned} \check{R}_j\check{R}_k &= \check{R}_k\check{R}_j, \quad |j-k|>1, \\ \check{R}_j\check{R}_k\check{R}_j &= \check{R}_k\check{R}_j\check{R}_k, \quad |j-k|=1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Алгебру Гекке $\mathcal{H}_N(q)$ получаем добавляя к этим соотношениям характеристическое уравнение на образующие

$$(\check{R}_j - q)(\check{R}_j + 1/q) = 0. \tag{2.2}$$

Известно, что $\mathcal{H}_N(q)$ изоморфна групповой алгебре $\mathbb{C}[S_N]$. Следовательно неприводимые представления алгебры Гекке как и S_N параметризуются диаграммами Юнга. В силу (2.2) $\check{R}$ можно записать используя два идемпотента P_+ и P_- $(P_+ + P_- = 1)$:

$$\check{R} = qP_+ - \frac{1}{q}P_- = qI - (q+\frac{1}{q})P_- := qI + X, \tag{2.3}$$

Подставляя выражение для $\check{R}$ в терминах X (2.3) в соотношение группы кос (2.1), получаем соотношение для X_j, X_k, $|j-k|=1$

$$X_jX_kX_j - X_j = X_kX_jX_k - X_k. \tag{2.4}$$

Если потребовать чтобы обе части (2.4) равнялись нулю, то приходим к факторалгебре алгебры Гекке – алгебре Темперли–Либа $TL_N(q)$. Она порождается генераторами X_j, $j = 1, 2, \ldots, N-1$ и соотношениями ($\nu(q) := q + 1/q$)

$$X_j^2 = -(q + \frac{1}{q})X_j = -\nu(q)X_j,$$

$$X_j X_k X_j = X_j, \quad |j - k| = 1. \tag{2.5}$$

Размерность алгебры Гекке $\mathcal{H}_N(q)$ как и симметрической группы S_N равна $N!$, а размерность $TL_N(q)$ равна числу Каталана $C_N = (2N)!/N!(N+1)!$. Для интегрируемых спиновых систем мы будем интересоваться представлениями $TL_N(q)$ в пространстве тензорного произведения $\mathcal{H} = \bigotimes_1^N \mathbb{C}^n$. Допустимое представление определяется обратимой $n \times n$ матрицей $b \in GL(n)$, которую можно рассматривать как n^2 компонентный вектор $\{b_{cd}\} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Обозначая $\bar{b} := b^{-1}$ и трактуя эту матрицу также как n^2 компонентный вектор $\{\bar{b}_{cd}\} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, генераторы X_j можно определить как

$$(X_j)_{cd,xy} = b_{cd}\bar{b}_{xy} \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}_j^n \bigotimes \mathbb{C}_{j+1}^n), \tag{2.6}$$

где указаны явно индексы пространств в тензорном произведении $\mathcal{H}$. Легко видеть, что второе из соотношений (2.5) выполняется, а первое сводится к определению параметра q ($\nu(q) = q + 1/q$):

$$X_j^2 = X_j \operatorname{tr} b^t\bar{b}, \quad \operatorname{tr} b^t\bar{b} = -(q + \frac{1}{q}) = -\nu(q). \tag{2.7}$$

Если воспользоваться R-матрицей, зависящей от спектрального параметра (бакстеризация $\check{R}(q)$)

$$\check{R}(u;q) = u\check{R}(q) - \frac{1}{u}(\check{R}(q))^{-1} = \omega(uq)I + \omega(u)X, \tag{2.8}$$

то соотношение (2.5) можно записать в виде

$$\check{R}_{12}(q^{-1};q)\check{R}_{23}(q^{-2};q)\check{R}_{12}(q^{-1};q) = 0. \tag{2.9}$$

В терминах постоянных R-матриц (генераторов $TL_N(q)$) это соотношение имеет вид ($|i-k| = 1$, $\check{R}_i := \check{R}_{i\,i+1}$)

$$(\check{R}_i - qI)(\nu(q)\check{R}_k - q^2 I)(\check{R}_i - qI) = 0 \tag{2.10}$$

Используя в (2.9) представление $\check{R}(u;q) = \omega(u)\check{R} + u^{-1}\omega(q)I$, или подставляя в (2.5) $X = \check{R} - qI$, получим равенство нулю q-антисимметризатора [4]

$$I - q^{-1}(\check{R}_{12}+\check{R}_{23}) + q^{-2}(\check{R}_{12}\check{R}_{23}+\check{R}_{23}\check{R}_{12}) - q^{-3}\check{R}_{12}\check{R}_{23}\check{R}_{12} = 0. \quad (2.11)$$

Таким образом, неприводимые представления $TL_N(q)$ параметризуются диаграммами Юнга, которые содержат только две строки.

Построенное представление (2.3), (2.6) является приводимым. Разложение этого представления на неприводимое будет рассмотрено в следующем разделе.

Отметим, что предложенное представление (2.3) алгебры $TL_N(q)$ при $n > 2$ не является квазиклассическим [4, 18].

3. Квантовая алгебра $\mathcal{U}_q(n)$

Согласно R-матричному подходу в теории квантовых групп [22] R-матрица определяет перестановочные соотношения генераторов квантовой алгебры $\mathcal{U}_q$ и дуальной алгебры Хопфа – квантовой группы $\mathcal{A}(R)$. В этой работе основное внимание будет уделено квантовой алгебре $\mathcal{U}_q$ и ее конечномерным представлениям V_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Генераторы $\mathcal{U}_q$ можно отождествить с матричными элементами L-оператора (L-матрицы), а перестановочные соотношения (закон умножения) следуют из аналога уравнения Янга–Бакстера

$$\check{R}_{12} L_{a_1 q} L_{a_2 q} = L_{a_1 q} L_{a_2 q} \check{R}_{12}, \quad (3.1)$$

где индексы a_1, a_2 относятся к двум вспомогательным простаранствам V_{a_i}, а индекс q к алгебре $\mathcal{U}_q$. Таким образом соотношение (3.1) принадлежит $\mathrm{End}(V_{a_1} \otimes V_{a_2}) \otimes \mathcal{U}_q$.

Обычно L – оператор является образом универсальной R-матрицы в каком-либо представлении по одному из факторов:

$$\mathcal{R}_{\mathrm{univ.}} = \sum_j \mathcal{R}_1^{(j)} \otimes \mathcal{R}_2^{(j)} := \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2 \in \mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q. \quad (3.2)$$

Последняя удовлетворяет аксиомам Дринфельда для квазитреугольных алгебр Хопфа [7, 21].

В частности,

$$(id \otimes \Delta)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}. \quad (3.3)$$

Вспомогательное пространство обычно выбирается как представление первого фактора, поэтому копроизведение генераторов $\mathcal{U}_q$ определяется матричным равенством

$$(id \otimes \Delta)L_{aq} = L_{aq_2}L_{aq_1} \in \mathrm{End}(V_a) \otimes \mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q. \qquad (3.4)$$

Проиллюстрируем это равенство на примере $V_a \simeq \mathbb{C}^3$, который будет более подробно рассмотрен в дальнейшем. Введем обозначения генераторов $\mathcal{U}_q$, $\{A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3\}$

$$L_{aq} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & B_3 \\ C_1 & A_2 & B_2 \\ C_3 & C_2 & A_3 \end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

Умножая две L-матрицы с элементами в соответствующих факторах $\mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q$, получим

$$\Delta(L_{ab}) = \sum_k L_{kb} \otimes L_{ak} = (1 \otimes L_{ak})(L_{kb} \otimes 1) \qquad (3.6)$$

Например, $B_1 = L_{12}$,

$$\Delta(B_1) = B_1 \otimes A_1 + A_2 \otimes B_1 + C_2 \otimes B_3. \qquad (3.7)$$

Центральный элемент получается из определяющего соотношения для $\mathcal{U}_q$ (3.1)

$$b^{-1}L_{aq}bL_{aq}^t = c_2 I, \qquad (3.8)$$

$$c_2 = (b^{-1})_{1k}L_{km}b_{mj}L_{1j}.$$

В случае трехмерного пространства $V_a \simeq V_q \simeq \mathbb{C}^3$ и матрицы b из работ [14, 15]

$$b_{ij} = p^{2-i}\delta_{i4-j} = (b^{-1})_{ij}, \qquad (3.9)$$

$$c_2 = p\{\frac{1}{p}A_3A_1 + C_2B_1 + pC_3B_3\}.$$

Параметры p и q связаны: $p^2+1+p^{-2} = -(q+q^{-1})$. Для конкретных 3×3 блоков L-оператора получаем $c_2 = qI_q$, где I_q – единичный оператор в $V_q = \mathbb{C}^3$. Вид генераторов $\{A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3\}$ при выбранной матрицы b (3.9) следует из выражений для $\check{R}$ и L-матрицы

$$X = |b> \otimes <\bar{b}| = \begin{pmatrix} 0 &&&&&&&& \\ & 0 &&&&&&& \\ && p^2 && p && 1 && \\ &&& 0 &&&&& \\ && p && 1 && 1/p && \\ &&&&& 0 &&& \\ && 1 && 1/p && 1/p^2 && \\ &&&&&&& 0 & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

$$L = \mathcal{P}\check{R} = \mathcal{P}(qI + X)$$

$$= \begin{pmatrix} q &&&&&&&& \\ & 0 && q &&&&& \\ && 1 && p^{-1} && q+p^{-2} && \\ & q && 0 &&&&& \\ && p && q+1 && p^{-1} && \\ &&&&& 0 && q & \\ && q+p^2 && p && 1 && \\ &&&&& q && 0 & \\ &&&&&&&& q \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Например, имеем

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & p^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

При выбранной матрице b (3.9) с R-матрицей (3.11) коммутирует $h \otimes 1 + 1 \otimes h$, где $h = \mathrm{diag}(1, 0, -1)$. В качестве вектора старшего спина (локальный вакуум соответствующей интегрируемой спиновой цепочки [3]) выберем вектор $\theta = (1, 0, 0)^t \in \mathbb{C}^3$ [11]. Действуя на тензорное произведение этих векторов $\theta \otimes \theta \in \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ копроизведениями понижающих операторов $\Delta(B_j)$, $j = 1, 2, 3$ получим новые векторы. Используя явный вид генераторов A_j, B_j, C_j в пространстве $\mathbb{C}^3$ можно убедиться, что векторы $(\Delta(B_i))^k \theta \otimes \theta$, $i = 1, 2$; $k = 1, 2, 3$ линейно-независимы. Вместе с векторами $\theta \otimes \theta$ и

$$\Delta(B_i)^4 \theta \otimes \theta \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

получаем подпространство размерности 8. Вектор $\Delta(B_3)\theta\otimes\theta$ есть линейная комбинация векторов $(\Delta(B_i))^2\theta\otimes\theta$, $i=1,2$. Вектор $|b>=(0\,0\,p|0\,1\,0|p^{-1}\,0\,0)^t$ задает одномерное инвариантное подпространство. Таким образом получено разложение

$$\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3=\mathbb{C}^8\oplus\mathbb{C}. \tag{3.13}$$

Это разложение можно получить и посредством проекторов P_+, P_- (2.3), (2.6), построенных по матрице (вектору) b (3.9). В силу коммутативности $\check{R}_{q_1q_2}$ с копроизведением (3.4), (3.6), соответствующие подпространства $P_\pm\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3$ – инвариантны.

Результат применения копроизведения Δ к генераторам $\mathcal{U}_q$ несколько раз в соответствии с (3.4) также можно записать в матричном виде

$$(id\otimes\Delta^N)L_{aq}=L_{aq_N}\ldots L_{aq_2}L_{aq_1}:=T^{(N)} \tag{3.14}$$

где $\Delta^N:\mathcal{U}_q\to(\mathcal{U}_q)^{\otimes N}$, $\Delta^1:=id$, $\Delta^2:=\Delta$, $\Delta^3:=(id\otimes\Delta)\circ\Delta$, etc. В общем случае тензорного представления алгебры $TL_N(q)$ с пространством $\mathbb{C}^n$ в узле, генераторы этой алгебры $\check{R}_{q_kq_{k+1}}:=\check{R}_{k,k+1}$ коммутируют с генераторами (3.14) глобального (диагонального) действия квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(n)$ в пространстве $\mathcal{H}=\bigotimes_1^N\mathbb{C}^n$. Таким образом, алгебры $TL_N(q)$ и $\mathcal{U}_q(n)$ являются коммутантами друг друга в пространстве $\mathcal{H}$. Тензорное представление $TL_N(q)$ в $\mathcal{H}$ раскладывается на неприводимые, кратности которых даются размерностями неприводимых представлений алгебры $\mathcal{U}_q(n)$, отвечающим тем же диаграммам Юнга

$$\mathcal{H}=\bigotimes_1^N\mathbb{C}^n=\bigoplus_k^N p_k(n)W_k(N)=\bigoplus_k^N\nu_k(N)V_k(n). \tag{3.15}$$

В этом разложении индекс k параметризует диаграммы Юнга с двумя строчками и N клетками, а кратности даются размерностями соответствующих неприводимых представлений

$$p_k(n)=\dim V_k(n),\quad \nu_k(N)=\dim W_k(N) \tag{3.16}$$

алгебр $\mathcal{U}_q(n)$ и $TL_N(q)$. Как и для неприводимых конечномерных представлений алгебры Ли $sl(2)$ $V_0(n)=\mathbb{C}$ одномерное представление (скаляр), а фундаментальное представление $\mathcal{U}_q(n)$ имеем размерность n, $V_1(n) \simeq \mathbb{C}^n$. Размерности остальных представлений следуют из отсутствия кратностей в разложении тензорного произведения $V_k(n)$ на фундаментальное $V_1(n)$ на два неприводимых как и для $sl(2)$ без кратностей

$$V_1(n) \otimes V_k(n) = V_{k+1}(n) \oplus V_{k-1}(n). \tag{3.17}$$

Для размерностей $p_k(n) = \dim V_k(n)$ получаем рекуррентное соотношение

$$n \cdot p_k(n) = p_{k+1}(n) + p_{k-1}(n) \tag{3.18}$$

с начальными условиями $p_{-1}(n) = 0$, $p_0(n) = 1$, дающее полиномы Чебышева второго рода

$$p_k(n) = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}, \quad n = 2\cos\theta.$$

Кратности $\nu_k(N)$ или размерности $W_k(N)$ в (3.15) даются числом путей, которыми можно достичь из начальной вершины диаграммы Браттели той вершины, которая соответствует диаграмме Юнга представления $W_k(N)$. Если $\lambda \vdash N$ есть разбиение числа N, $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 | \lambda_1 + \lambda_2 = N)$, то $k = \lambda_1 - \lambda_2$ и

$$\nu_k(N) = \nu_{k+1}(N-1) + \nu_{k-1}(N-1). \tag{3.19}$$

Выделение подпространств инвариантных относительно диагонального действия квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(n)$ в пространстве $\mathcal{H}$, можно получить и посредством проекторов (идемпотентов), которые строятся из элементов алгебры Темперли–Либа $TL_N(q)$. Используя R-матрицу, зависящую от спектрального параметра (2.8), проектор $P_N^{(+)}$ на симметрическое подпространство имеет вид [4, 23]

$$P_N^{(+)} \simeq P_{N-1}^{(+)} \check{R}_{N-1\,N}(q^{N-1}; q) P_{N-1}^{(+)}, \tag{3.20}$$

где $P_2^{(+)} := P_+ = I - P_-$, $P_- = -X/\nu(q)$.

Можно также построить квантовые пространства, ковариантные относительно действия (кодействия) алгебры $\mathcal{U}_q(n)$ (двойственной алгебры $\mathcal{U}_q(n)^*$ [19]). Для этого нужно рассмотреть тензорную алгебру $T(V)$ над фундаментальным представлением $V \simeq \mathbb{C}^n$ и профакторизовать ее по соответствующим идеалам. Обозначая базисные элементы (генераторы) V $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^t$ и выбирая соотношения, которые порождают идеал J, $(Z_1 Z_2 = Z \bigotimes Z)$

$$\check{R} Z_1 Z_2 = q Z_1 Z_2, \quad \text{или} \quad X Z_1 Z_2 = 0,$$

получаем аналог симметрической подалгебры $S(V) \simeq T(V)/J$. Идеал J порождается всего одним квадратичным соотношением $Z^t\bar{b}Z = 0$. Для аналога антисимметрической подалгебры $\Lambda(V) \simeq T(V)/J_-$ выбираем соотношение (см. (2.3))

$$\check{R}W_1W_2 \simeq \frac{-1}{q}W_1W_2, \quad \text{или} \quad (I - P_-)W_1W_2 = 0,$$

где использованы новые обозначения генераторов $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^t$. Среди квадратичных комбинаций есть только одна отличная от нуля: $W^t\bar{b}W = \sum w_\alpha(b^{-1})_{\alpha\beta}w_\beta$, и ряд Гильберта–Пуанкаре $\Lambda(V)$ равен $P_-(t) = 1 + nt + t^2$.

Литература

1. Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи.* — ТМФ, **40**, No. 2 (1979), 194–220.
2. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи и XYZ-модель Гейзенберга.* — УМН **34**, No. 5 (1979), 13–63.
3. L. D. Faddeev, *How Bethe ansatz works for integrable model.* — In: Quantum Symmetries/Symetries Quantiques. Proc. Les Houches summer school, LXIV. Eds. A.Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin. North-Holland, 1998, 149–211; hep-th/9605187.
4. P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments.* — In: Lect. Notes Phys. **151** (1982), 61–119.
5. П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, *Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордон и высшие представления.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **101** (1981), 101–110.
6. Е. К. Склянин, *Об алгебре порожденной квадратичными соотношениями.* — УМН **40**, No. 2 (1985), 263–270.
7. V. G. Drinfeld, *Quantum groups.* — In: Proc. Intern. Congress Math., Berkeley, CA, AMS, Providence, RI, (1987), 798–820.
8. M. Jimbo, *A q-difference analogue of $U(gl(N+1))$ and the Yang-Baxter equation.* — Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.
   M. Jimbo, *A_q-analogue of $U_q(gl(N+1))$, Hecke algebra and the Yang–Baxter equation.* — Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247–251.
9. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **109** (1981), 134–178; J. Sov. Math. **24** (1984), 241–271.
10. V. Pasquier, H. Saleur, *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups.* — Nucl. Phys. **B330** (1990), 523–556.
11. P. P. Kulish, *On spin systems related to Temperley–Lieb algebra.* — J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003), L489–L493.
12. R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics.* Academic Press (1982).
13. P. P. Martin, *Potts models and related problems in statistical mechanics.* World Scientific (1991).

14. M. T. Batchelor, A. Kuniba, *Temperley–Lieb lattice models arising from quantum groups.* — J. Phys. A: Math. Gen. **24** (1991), 2599–2614.
15. R. Koberle, A. Lima-Santos, *Exact solutions for A-D Temperley–Lieb models.* — J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996), 519–531.
16. J. de Gier, A. Nichols, P. Pyatov, V. Rittenbert, Magic in spectra of the XXZ quantum chain with boundaries at Delta 0 and Delta $-1/2$. — *Nucl. Phys.* **B729** (2005), 387–418.
17. A. Doikou, *Asymmetric twin representation: the transfer matrix symmetry.* — Symm. Integr. Geom.: Math. Applic. (SIGMA) **3** (2007) 009.
18. Д. И. Гуревич, *Алгебраические аспекты уравнения Янга–Бакстера.* — Алгебра и анализ **2** (1990), 119–148; Leningrad Math. J. **2** (1991), 801–828. M. Dubois-Violette, G. Launer, *The quantum group of a non-degenerate bilinear form.* — Phys. Lett. **B245** (1990), 175–177.
19. J. Bichon, *The representation category of the quantum group of a non-degenerate bilinear form.* — Comm. Algebra **31**, No. 10 (2003), 4831–4851; `math.QA/0111114`.
20. P. Etingof, V. Ostrik, *Module categories over representations of $SL_q(2)$ and graphs.* — Math. Res. Lett. **11**, No. 1 (2004), 103–114; `math. QA/0302130`.
21. V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum groups.* Cambridge University Press (1994).
22. Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантование групп Ли и алгебр Ли.* — Алгебра и анализ **1** (1989), 178–206; Leningrad Math. J. **1** (1990), 193–226
23. A. P. Isaev, *Quantum groups and Yang–Baxter equation.* — Preprint MPIM 04-132 (2004).

Kulish P. P., Manojlovic N. Quantum algebras with representation ring of sl(2) type.

A reducible representation of the Temperley–Lieb algebra is constructed on tensor product of n-dimensional spaces. One obtains as a centraliser of this action a quantum algebra (a quasitriangular Hopf algebra) with representation ring equivalent to the representation ring of the $sl(2)$ Lie algebra.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 31 августа 2007 г.

Университет Алгарве
факультет наук и технологии,
Португалия