Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 347, 2007 г.

Е. Ш. Гутшабаш

О КАНОНИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЯХ МАГНЕТИКОВ

1. Введение

В наиболее общем случае все известные к настоящему времени вполне интегрируемые феноменологические модели магнетиков (спиновые системы) можно представить в виде:

$$\begin{gathered}\mathbf{S}_t = \mathbf{F}_0(x, y, \mathbf{S}, \mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_{xx}, \mathbf{S}_{yy}, \mathbf{S}_{xy}, \mathbf{J}, u, u_x, u_y, u_{xy}, \alpha^2),\\ u_{xx} + \alpha^2 u_{yy} = R_0(\mathbf{S}, \mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y),\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x, y, t)$ – вектор намагниченности, $\mathbf{F}_0(,)$ – некоторая вектор-функция, $u = u(x, y)$ – вспомогательное поле, $R_0(,)$ – скалярная функция, $\mathbf{J}$ – набор констант, характеризующих магнетик, $\alpha^2 = \pm 1$.

Более конкретно, функция $\mathbf{F}_0$, как правило, имеет вид:

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{S} \wedge \frac{\delta F_{\text{eff}}}{\delta \mathbf{S}} + \mathbf{F}_1, \tag{1.2}$$

где F_{eff} – функционал свободной энергии кристалла (здесь и всюду ниже символом δ/δ мы обозначаем вариационную производную), а первое слагаемое в целом было впервые введено Ландау и Лифшицем [1] для описания обменных взаимодействий.

Однако, часто представление (1.1)–(1.2) и связанные с ним соотношения оказываются неудобными с точки зрения решения различных задач. В связи с этим приходится обращаться к более приемлемым формам уравнений (1.1), что, в свою очередь, требует введения новых зависимых переменных.

По-видимому, впервые одна из таких переменных – стереографическая проекция – была использована в [2] для построения инстантонных решений в двумерной $O(3)$ – сигма-модели (двумерном стационарном ферромагнетике Гейзенберга). В дальнейшем она неоднократно применялась в самых разнообразных ситуациях (см., например, [3–5]).

В данной работе на примере трех моделей магнетиков – дефомированного магнетика Гейзенберга, магнетика Ландау–Лифшица и магнетика Ишимори – мы показываем конструктивность введения соответствующих канонических переменных, что позволяет, в частности, значительно упростить некоторые вычисления по сравнению с использованием переменной $\mathbf{S}$ и, что более существенно, выяснить ряд вопросов, важных как в математическом, так и физическом аспектах. Другим обстоятельством, также свидетельствующим в пользу перехода к новым переменным является то, что в них эти модели вкладываются в класс моделей, допускающих определенную дифференциально-геометрическую интерпретацию и особенно интенсивно изучаемых в последнее время [6].

Модель деформированного магнетика Гейзенберга была предложена в [7], где также методом обратной задачи было получено ее точное решение на тривиальном фоне, и, кроме того, вычислены законы сохранения. При этом было установлено, что любые локализованные в пространстве возмущения расплываются, т.е. решения оказываются неустойчивыми. А в [8] и [9] была установлена калибровочная эквивалентность этой модели и нелинейного уравнения Шредингера с интегральной нелинейностью. Метод матричного преобразования Дарбу был применен в работе [10], в которой также были вычислены точные решения модели на фоне новых спирально-логарифмических структур.

Уравнению Ландау–Лифшица посвящена обширная литература. В частности, лаксово представление для него (для случая полной анизотропии) впервые было получено в [11], где также были найдены законы сохранения, а в [12] – с помощью метода одевания – были построены солитонные решения. Гамильтоновы аспекты этого уравнения подробно рассмотрены в недавней работе [13].

Модель магнетика Ишимори рассматривалась во многих работах. В частности, в [14] методами обратной задачи и $\overline{\partial}$ – одевания были получены серии точных решений, а в [15] и [16] к ней применялось преобразование Дарбу, причем в [16] – на фоне спиральных структур. Отметим здесь также важную работу [5], в которой была доказана калибровочная эквивалентность модели Ишимори-II и возникающей в гидродинамике модели Дэви–Стюартсона-II.

План изложения настоящей работы следующий. В разделе 2 мы рассматриваем модель деформированного магнетика Гейзенберга, вводим канонические переменные, а также останавливаемся на вопросе устойчивости решений. В разделе 3 после получения уравнения Ландау–Лифшица в терминах стереографической проекции рассматривается стационарный вариант этого уравнения. Наконец, в разделе 4 после обсуждения физической интерпретации модели магнетика Ишимори и введения двух различных пар канонических переменных, а также записей в их терминах исходной модели и гамильтониана, мы вычисляем его на некоторых известных простейших решениях. В Приложении мы предъявляем пару Лакса для "расширенной" системы деформированного магнетика Гейзенберга.

2. Уравнение деформированного магнетика Гейзенберга

(a) *Канонические переменные.*

Рассмотрим уравнение одномерного деформированного ферромагнетика Гейзенберга [7][1]:

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} + \frac{1}{x}\mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x, \tag{2.1}$$

где $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} > 0$, x_1, x_2 – декартовы координаты на плоскости, $\mathbf{S}(x,t) = (S_1, S_2, S_3)$, $|\mathbf{S}| = 1$.

Фазовое пространство этого уравнения порождено начальными данными $(S_1,\ S_2,\ S_3)$ с учетом связи $|\mathbf{S}| = 1$. Скобки Пуассона канонических переменных S_i модели удовлетворяют обычным соотношениям:

$$\{S_i(x), S_j(y)\} = -\varepsilon_{ijk} S_k(x)\delta(x-y), \quad i,j,k = 1, 2.3, \tag{2.2}$$

где ϵ_{ijk} – полностью антисимметричный тензор 3-го ранга. При этом для любых двух функционалов F и G имеем

$$\{F,G\} = -\int\limits_0^\infty \epsilon_{ijk} S_k \frac{\delta F}{\delta S_i(x)} \frac{\delta G}{\delta S_j(x)}\, dx. \tag{2.3}$$

[1]Это уравнение можно рассматривать как цилиндрически-симметричную "редукцию" (2 + 1)-мерного неинтегрируемого уравнения Ландау–Лифшица: $\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge \triangle \mathbf{S}$. Связь последнего с системой связанных нелинейных уравнений Шредингера в размерности $(2+1)$ подробно обсуждалась в [17].

С учетом (2.2)–(2.3) уравнение (2.1) может быть представлено в гамильтоновой форме:

$$\mathbf{S}_t = \frac{1}{x}\{H, \mathbf{S}\}, \tag{2.4}$$

где H – гамильтониан системы, имеющий вид

$$H = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty x\mathbf{S}_x^2\,dx. \tag{2.5}$$

Введем новую зависимую комплекснозначную переменную:

$$w(x,t) = \frac{S_1 + iS_2}{1 - S_3}, \tag{2.6}$$

представляющую собой (в каждый фиксированный момент времени t) стереографическую проекцию сферы единичного радиуса на плоскость, $w : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

В терминах этой проекции уравнение (2.1) примет вид:

$$iw_t = w_{xx} - 2\frac{w_x^2\overline{w}}{1+|w|^2} + \frac{1}{x}w_x, \tag{2.7}$$

а соответствующие скобки Пуассона получаются из (2.2)[2]:

$$\begin{aligned} &\{w(x), w(y)\} = \{\overline{w}(x), \overline{w}(y)\} = 0,\\ &\{w(x), \overline{w}(y)\} = -\frac{i}{2}(1+|w|^2)^2\delta(x-y). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Скобка (2.3) перейдет в скобку

$$\{F, G\} = -\frac{i}{2}\int dx(1+|w(x)|^2)^2\Big[\frac{\delta F}{\delta w(x)}\frac{\delta G}{\delta \overline{w}(x)} - \frac{\delta F}{\delta \overline{w}(x)}\frac{\delta G}{\delta w(x)}\Big], \tag{2.9}$$

а эволюция системы будет описываться уравнением

$$iw_t = -\frac{1}{2x}(1+|w|^2)^2\frac{\delta H}{\delta \overline{w}(x)}, \tag{2.10}$$

[2]При выводе соотношений (2.8) использовались скобки $\{S_\pm(x), S_\pm(y)\} = 0$, $\{S_+(x), S_3(y)\} = -iS_+(x)\delta(x-y)$, $\{S_+(x), S_-(y)\} = 2iS_3(x)\delta(x-y)$, где $S_\pm = S_1 \pm iS_2$, а также правило Лейбница.

с гамильтонианом

$$H = 2\int\limits_0^\infty x\frac{w_x\overline{w}_x}{(1+|w|^2)^2}\,dx. \tag{2.11}$$

Следует отметить, что также представляет интерес “комплексное расширение” (2.1) – система[3]

$$ir_t = r_{xx} - \frac{2r_x^2 s}{1+rs} + \frac{1}{x}r_x, \quad is_t = -s_{xx} + \frac{2s_x^2 r}{1+rs} - \frac{1}{x}s_x. \tag{2.12}$$

Из (2.8) имеем выражения для скобок Пуассона переменных r и s:

$$\begin{aligned} \{r(x), s(y)\} &= -i(1+rs)^2\delta(x-y), \\ \{\overline{r}(x), \overline{s}(y)\} &= i(1+\overline{rs})^2\delta(x-y). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Система (2.12), наряду с уравнением (2.7), является вполне интегрируемой (см. Приложение) и гамильтоновой с гамильтонианом

$$H = \int\limits_0^\infty x\frac{r_x s_x}{(1+rs)^2}\,dx \tag{2.14}$$

и уравнениями движения

$$r_t = \frac{1}{x}\{H, r\}, \quad s_t = -\frac{1}{x}\{H, s\}, \tag{2.15}$$

которые следует рассматривать как модель связанной системы двух деформированных магнетиков Гейзенберга. Скобки (2.13) могут быть получены из выражения для симплектической 2-формы:

$$\Phi = i\int\limits_0^\infty \Big[\frac{dr\wedge ds}{(1+rs)^2} - \frac{d\overline{r}\wedge d\overline{s}}{(1+\overline{rs})^2)}\Big]dx, \quad \Phi = d\varphi, \tag{2.16}$$

где

$$\varphi = -i\int\limits_0^\infty \Big[\frac{ds}{s(1+rs)} - \frac{d\overline{s}}{\overline{s}(1+\overline{rs}))}\Big]dx, \tag{2.17}$$

[3] При отсутствии нелинейного слагаемого второе уравнение в (2.12) можно интерпретировать как свободное уравнение Шредингера с эффективной массой. Тогда, очевидно, первое уравнение получается с помощью операции комплексного сопряжения от второго.

причем (2.16) и (2.17) совпадают с соответствующими выражениями, полученными в [18] для стандартного магнетика Гейзенберга.

Заметим, далее, что уравнение (2.7) представляет собой бигамильтонову систему:

$$i\begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix}_t = G_1\begin{pmatrix} \frac{\delta H_1}{\delta w} \\ \frac{\delta H_1}{\delta \overline{w}} \end{pmatrix} = G_2\begin{pmatrix} \frac{\delta H_2}{\delta w} \\ \frac{\delta H_2}{\delta \overline{w}} \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

где $H_1 = H$ (формула (2.11)). Выражение для второго гамильтониана H_2 имеет вид:

$$H_2 = -i\int\limits_0^\infty x\frac{w_x\overline{w} - \overline{w}_x w}{(1+|w|^2)|w|^2}dx, \tag{2.19}$$

а $G_1 = G_1(w, \overline{w})$, $G_2 = G_2(w, \overline{w})$ – так называемые гамильтоновы операторы, причем

$$G_1 = \frac{1}{x(1+|w|^2)^2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Выражение для матричного оператора G_2 извлекается из результатов работы [19], касающихся стандартного магнетика Гейзенберга (оно оказывается, к сожалению, весьма громоздким и здесь мы приводить его не будем, подчеркнув лишь, что в его матричных элементах содержится как дифференциальный, так и интегральный операторы, т.е. присутствует нелокальность).

Соотношения (2.18)–(2.20) означают, что оператор рекурсии уравнения (2.7) представляется (в предположении, что $\det G_2 \neq 0$) как

$$R = G_1 G_2^{-1}. \tag{2.21}$$

Поскольку (2.7), как и (2.1) является вполне интегрируемой системой, оно допускает бесконечный набор интегралов движения $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ [7], находящихся в инволюции: $\{I_j, I_k\} = 0$. Это, в свою очередь, позволяет получить иерархию пуассоновых структур:

$$I_n = RI_{n-1}, \tag{2.22}$$

а также иерархию высших уравнений модели деформированного магнетика Гейзенберга ($j = 0, 1, \dots; t_0 = t$):

$$iw_{t_j} = R^j G_2 \frac{\delta H_2}{\delta \overline{w}}. \tag{2.23}$$

(b). *Устойчивость некоторых решений уравнения* (2.7).

Ввиду того, что уравнение (2.7) явно содержит независимую переменную x, то представляет интерес задача об устойчивости его стационарных решений. Для этого положим $w = w_{st} + \widetilde{w}$. Линеаризуя (2.7) вначале на тривиальном фоне $w_{st} = 0$, что в терминах вектора намагниченности соответствует вектору $\mathbf{S} = (0, 0, 1)$, получим:

$$i\widetilde{w}_t(x,t) = \widetilde{w}_{xx}(x,t) + \frac{1}{x}\widetilde{w}_x(x,t). \tag{2.24}$$

Будем предполагать, что $(x > 0)$

$$\widetilde{w}(x,0) = \widetilde{w}_0(x), \quad \widetilde{w}(0,t) = 0. \tag{2.25}$$

Уравнение (2.24) может быть решено методом преобразования Лапласа по t при дополнительном предположении, что $|\widetilde{w}(x,t)| < Me^{s_0 t}$, где константа $M > 0$, а $s_0 \geq 0$ – показатель роста. Решив получающееся в этом случае уравнение и выполнив обратное преобразование, найдем:

$$\overline{w}(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{p\,t}[(C_0(x,p))J_0(\sqrt{-ip}\,x)]\,dp, \tag{2.26}$$

где $J_0(.)$ – функция Бесселя,

$$C_0(x,p) = -i\int\limits_0^x e^{-\int\limits_0^x Q(\xi)\,d\xi}\,[\int\limits_0^x \frac{\widetilde{w}_0(y)}{J_0(\sqrt{-ip}\,y)}\,e^{\int\limits_0^y Q(s)\,ds}\,dy]\,dx, \tag{2.27}$$

$$Q(x) = 2\sqrt{-ip}\,(\ln J_0(\sqrt{-ip}\,x))_x + \frac{1}{x},$$

$\mathrm{Re}\,a > 0$, интегрирование ведется по любой прямой $\mathrm{Re}\,p = a > s_0 > 0$, а интеграл в (2.26) понимается в смысле главного значения. Нетрудно видеть, также, что логарифмические расходимости, возникающие в экспонентах при интегрировании на нижнем пределе в (2.28), взаимно уничтожаются.

Из (2.26) следует, что при фиксированном x функция $|\widetilde{w}(x,t)|$ растет при увеличении t, и, следовательно, как и в [7], получаем неустойчивость решения[4]: произвольное локализованное начальное возмущение системы со временем может неограниченно возрастать.

[4] Разумеется, здесь следует говорить о неустойчивости такого линеаризованного "неавтономного" уравнения.

Выясним теперь устойчивость стационарного состояния $w_{st} = ie^{i\theta(x)}$, где $\theta(x) = \ln(x) + \theta_0$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$ – константа. Такое решение представляет собой найденую в [10] так называемую спирально-логарифмическую структуру: $\mathbf{S} = (\sin\theta, \cos\theta, 0)$[5]. Линеаризуя, как и в предыдущем случае, уравнение (2.26) на этом фоне, будем иметь:

$$i\widetilde{w}_t(x,t) = \widetilde{w}_{xx}(x,t) + \frac{1}{x}\widetilde{w}_x - i\frac{e^{-i\theta(x)}}{x^2}. \qquad (2.28)$$

Это уравнение отличается от (2.24) лишь наличием неоднородного члена. Поэтому его общее решение будет суммой (2.26) и частного решения, отвечающего неоднородности. Следовательно, оно также, как и в случае тривиального фона будет неустойчивым.

Нетрудно показать, далее, что уравнение (2.7) допускает периодическое по t решение $w(x,t) = W(x)e^{ikt}$, где k – вещественная постоянная, а комплекснозначная функция $W(x)$ является решением (если оно существует) уравнения[6]:

$$W_{xx} - \frac{2W_x^2\overline{W}}{1+|W|^2} + \frac{1}{x}W_x + kW = 0, \qquad (2.29)$$

что иллюстрирует недостаточность исследования линеаризованной устойчивости.

Для исследования нелинейной неустойчивости необходимо использовать более тонкие методы (см., например, [20], и цитированную там литературу).

3. Магнетик Ландау–Лифшица

(а) *Канонические переменные.*

Полностью анизотропная модель магнетика Ландау–Лифшица имеет вид[7]

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S} \wedge J\mathbf{S}, \qquad (3.1)$$

[5] Используя (2.11), легко проверить, что на этом решении гамильтониан логарифмически расходится на обоих пределах, и, следовательно, требует регуляризации.

[6] В отсутствие нелинейного слагаемого здесь мы имеем стационарное уравнение Шредингера с эффективной массой и кулоновским потенциалом.

[7] Хорошо известно [21], что эта модель является одной из наиболее общих вполне интегрируемых в классе моделей, допускающих 2×2 представления Лакса.

где $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – диагональная 3×3 матрица, J_1, J_2, J_3 – константы анизотропии, $J_1 < J_2 < J_3$.

Гамильтониан (3.1) задается в виде:

$$H = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{S}_x^2 - \mathbf{S} J \mathbf{S}) dx, \tag{3.2}$$

или, используя введенную в (2.6) переменную w, в виде[8]:

$$H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{2(|w|_x^2 + \alpha(w^2 + \overline{w}^2) - \gamma |w|^2)}{(1 + |w|^2)^2} - \beta \Big) dx, \tag{3.3}$$

где

$$\alpha = \frac{J_2 - J_1}{4}, \quad \beta = \frac{J_3}{4}, \quad \gamma = J_3 - \frac{J_1 + J_2}{2}. \tag{3.4}$$

С учетом (2.9) отсюда следует уравнение движения для модели магнетика Ландау–Лифшица[9]

$$i w_t = i\{H, w\} = -\frac{1}{2}(1 + |w|^2)^2 \frac{\delta H}{\delta \overline{w}}, \tag{3.5}$$

или[10]

$$i w_t = w_{xx} - 2 \frac{\overline{w}(w_x^2 + \alpha) - \alpha w^3 - \gamma w}{1 + |w|^2} - \gamma w. \tag{3.6}$$

Рассмотрим одно из возможных следствий такой записи. Выполнив очевидные преобразования, из (3.6) будем иметь соотношение, содержащее лишь параметр α:

$$i(|w|^2)_t = (w_x \overline{w} - w \overline{w}_x)_x + 2 \frac{w^2 {\overline{w}^2}_x - \overline{w}^2 {w_x}^2}{1 + |w|^2} + 2\alpha(w^2 - \overline{w}^2). \tag{3.7}$$

Полагая $w = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho = \rho(x,t)$, $\varphi = \varphi(x,t)$, ρ, $\varphi \in \mathbb{R}$, получаем:

$$(\rho^2)_t = 2(\rho^2 \phi_x)_x - \frac{8\rho^3 \rho_x \phi_x}{1 + \rho^2} + 4\alpha \rho^2 \sin 2\phi. \tag{3.8}$$

[8] Здесь предполагается медленное убывание w, в быстроубывающем случае в плотность гамильтониана необходимо добавить величину $J_3 = 4\beta$.

[9] Заметим, что, как и в случае деформированного магнетика Гейзенберга, для (3.6) также можно получить соответствующее комплексное расширение (см. [18]); здесь мы на этом останавливаться не будем.

[10] Взяв комплексное сопряжение от этого уравнения и пренебрегая нелинейным слагаемым, получим нестационарное уравнение Шредингера с потенциалом $V = -\gamma = \mathrm{const}$.

Вводя еще переменные $R = \rho^2$ и $Q = 2\rho^2\phi_x$, найдем следующий “закон сохранения”:

$$R_t = Q_x - 2Q[\ln(1+R)]_x + 4\alpha R \sin\left(\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{Q}{R}\right) dx. \qquad (3.9)$$

Особенно просто он выглядит при $\alpha = 0$, что соответствует анизотропии типа “легкая плоскость”.

Аналогично соотношению (2.18), для (3.6) вводится бигамильтонова структура с $H_1 = H$, задаваемом формулой (3.3), гамильтонианом

$$H_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{w_x \overline{w} - \overline{w}_x w}{(1+|w|^2)|w|^2}\, dx, \qquad (3.10)$$

и гамильтоновыми операторами

$$G_1 = \frac{1}{(1+|w|^2)^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.11)$$

и G_2 (представляющим собой матричный интегродифференциальный оператор [22]). Оператор рекурсии в терминах переменных w и $\overline{w}$ выражается как

$$R = G_1 G_2^{-1}, \qquad (3.12)$$

и порождает иерархию пуассоновых структур вида (2.22) и высших уравнений Ландау–Лифшица вида (3.5).

(b). *Дисперсионное соотношение. Стационарное уравнение Ландау–Лифшица.*

Линеаризуя уравнение, комплексно сопряженное (3.6) и выбирая $\overline{w} = \overline{w}(x,t)$ в виде $\overline{w} \sim \exp\{i(kx - \omega t)\}$, будем иметь:

$$\omega = k^2 - \gamma, \qquad (3.13)$$

что дает дисперсионное соотношение для уравнения Ландау–Лифшица (оно характерно для магнетиков с обменным взаимодействием [23]). В этом случае для групповой скорости имеем: $v_g = \partial\omega/\partial k = 2k$, а фазовая равна $v_{ph} = \omega/k = k - \gamma/k$ (она обращается в бесконечность при $k = 0$), т.е. в системе присутствует дисперсия. При этом распространение волны намагниченности в рамках данной модели возможно при условии $k^2 > \gamma = J_3 - (J_1 + J_2)/2 > 0$.

Полагая в (3.6) $w = w(x - \mu t) = w(\xi)$, где $\mu = \mathrm{const}$ – скорость волны стационарного профиля, находим уравнение[11]

$$w_{\xi\xi} + i\mu w_\xi - 2\frac{\overline{w}(w_\xi^2 + \alpha) - \alpha w^3 - \gamma w}{1 + |w|^2} - \gamma w = 0. \tag{3.14}$$

Отсюда нетрудно получить:

$$(w_\xi \overline{w} - \overline{w}_\xi w)_\xi + i\mu\,(|w|^2)_\xi - 2\frac{w_\xi^2 \overline{w}^2 - \overline{w}_\xi^2 w^2}{1 + |w|^2} + 2\alpha(w^2 - \overline{w}^2) = 0. \tag{3.15}$$

Взяв $w(\xi) = \rho\, e^{i\phi}$, где $\rho = \rho(\xi)$, $\phi = \phi(\xi)$, $\rho \in \mathbb{R}_+$, $\phi \in \mathbb{R}$, из этого соотношения имеем:

$$2(\rho^2)_\xi \phi_\xi + 2\rho^2 \phi_{\xi\xi} + \mu(\rho^2)_\xi - 8\frac{\rho^3 \rho_\xi\, \phi_\xi}{1 + \rho^2} + 4\alpha \sin\, 2\phi = 0. \tag{3.16}$$

Пусть $\mu \neq 0$. Тогда, очевидно, значения $\rho = \mathrm{const}$, $\phi = \pi n/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, удовлетворяют (3.16). При $\phi = \phi_0 = \mathrm{const}$ получаем: $\rho^2 = \rho_0^2 - (4\alpha/\mu)\sin{(2\phi_0)}\xi$, где $\rho_0 = \mathrm{const}$; при $\rho = \widetilde{\rho}_0 = \mathrm{const}$ (3.16) сводится к уравнению маятника: $\phi_{\xi\xi} + (2\alpha/\widetilde{\rho}_0)\sin{(2\phi)} = 0$ (вопрос о существовании других решений остается открытым).

Пусть $\mu = 0$, тогда из (3.16) следует:

$$\frac{(\rho^2)_\xi}{\rho^2} - \frac{4\rho\rho_\xi}{1 + \rho^2} = C_1, \quad \phi_{\xi\xi} + C_1 \phi_\xi + 2\alpha \sin\, 2\phi = 0, \tag{3.17}$$

где C_1 – произвольная постоянная. Первое из этих уравнений легко интегрируется:

$$\rho_{1,2}(\xi) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4e^{-2(C_1\xi + C_2)}}\right)\, e^{C_1\xi + C_2}, \tag{3.18}$$

где C_2 - еще одна произвольная постоянная (предполагается, что $e^{-2(C_1\xi + C_2)} < 1/4$), а второе уравнение, совпадающее с уравнением динамики маятника с трением[12], допускает, в частности, решения вида $\phi = \pi n/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Таким образом, в случае общего положения (полной анизотропии) решения стационарного уравнения Ландау–Лифшица имеют

[11] Стационарные уравнения другого вида для уравнения Ландау–Лифшица, включая высшие, с позиций ли-алгебраического подхода были рассмотрены в [24].

[12] В частном случае $C_1 = 0$ это уравнение, очевидно, интегрируется в эллиптических функциях.

весьма нетривиальную структуру. Дальнейшее их изучение (это же касается и рассмотренной в предыдущем разделе модели деформированного магнетика Гейзенберга) позволило бы решить важную задачу теории динамических систем – построения фазового портрета уравнения (3.14), а затем и (3.6)[13].

4. Магнетик Ишимори

(a) *Физическая и геометрическая интерпретация.*

В терминах вектора намагниченности модель магнетика Ишимори имеет вид:

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge (\mathbf{S}_{xx} + \alpha^2 \mathbf{S}_{yy}) + u_y \mathbf{S}_x + u_x \mathbf{S}_y, \tag{4.1}$$

$$u_{xx} - \alpha^2 u_{yy} = -2\alpha^2 \mathbf{S}(\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y), \tag{4.2}$$

где $\mathbf{S}(x,y,t) = (S_1, S_2, S_3)$ – как и в предыдущих моделях – трехмерный вектор, $|\mathbf{S}| = 1$, $u = u(x,y,t)$ – вспомогательное скалярное вещественнозначное поле, параметр α^2 принимает значения ± 1. Случай $\alpha^2 = 1$ называется моделью магнетика Ишимори-I (MI-I), случай $\alpha^2 = -1$ – моделью MI-II. Таким образом, с математической точки зрения каждый из этих случаев отвечает разным типам уравнений (4.1) и (4.2).

Характерная черта модели (4.1)–(4.2) – наличие топологического заряда

$$Q_T = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathbf{S}(\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y)\, dx\, dy, \tag{4.3}$$

который сохраняется в процессе эволюции системы – инвариант движения – и представляет собой отображение единичной 2-сферы на 2-сферу: $\widetilde{S}^2 \to \widetilde{S}^2$. Такое отображение, как известно, характеризуется гомотопической группой $\pi_2(\widetilde{S}^2) = \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ – группа целых чисел, что означает, что величина Q_T должна быть целым числом. Скалярная функция $u = u(x,y,t)$, согласно уравнению (4.3), связана с плотностью производства топологического заряда, а производные u_x, u_y, входящие в (4.1), играют роль коэффициентов трения. Поэтому уравнение (4.1) можно интерпретировать как уравнение вынужденной (под действием силы

[13]Фазовые портреты уравнения (3.1) для случая частичной анизотропии исследовались в работе [25]. В случае полной анизотропии фазовый портрет, по-видимому, ранее не описывался.

трения) прецессии вектора намагниченности, а система уравнений (4.1)–(4.2), в целом, является самосогласованной.

Заметим, также, что с физической точки зрения, эта система наряду с локальным (обменным) взаимодействием содержит, как нетрудно видеть, нелокальное взаимодействие, механизм которого в настоящее время неясен. Тем не менее, поскольку устойчивые локализованные двумерные магнитные структуры наблюдаются в экспериментах, исследование подобных систем представляется вполне оправданным и необходимым. Некоторым доводом в пользу этого утверждения является уже упомянутая выше калибровочная эквивалентность моделей MI-II и DS-II, описывающей квазимонохроматические волны на поверхности жидкости [5], а также выявленная в [26] связь модели MI-I с двумерным нелинейным уравнением Шредингера с магнитным полем.

Кроме того, полезна и заслуживает внимания и другая – гидродинамическая - интерпретация модели (4.1)–(4.2). А именно, положим $u_y = -v_1$, $u_x = v_2$, так что $\mathbf{v}(x,y) = (v_1, v_2)$ – поле скоростей течения жидкости. Тогда модель MI можно переписать в виде:

$$\begin{gathered} \mathbf{S}_t + v_1\mathbf{S}_x - v_2\mathbf{S}_y = \mathbf{S}\wedge(\mathbf{S}_{xx} + \alpha^2\mathbf{S}_{yy}), \\ v_{2x} + \alpha^2 v_{1y} = -2\alpha^2\mathbf{S}(\mathbf{S}_x\wedge\mathbf{S}_y). \end{gathered} \tag{4.4}$$

Если, далее, ввести функцию тока течения: $v_1 = -\chi_{1y}$, $v_2 = \chi_{1x}$, то из (4.2) при $\alpha^2 = -1$ (модель MI-II) получаем уравнение Пуассона:

$$\chi_{1xx} + \chi_{1yy} = 2\mathbf{S}(\mathbf{S}_x\wedge\mathbf{S}_y), \tag{4.5}$$

т.е. стационарное (время t входит здесь как параметр) уравнение завихренности с правой частью – источником, величина которого пропорциональна плотности производства топологического заряда (подробности об уравнении гидродинамического вихря на плоскости можно найти в [27]).

Пусть $\widetilde{F}(x,y,t) = 2\mathbf{S}(\mathbf{S}_x\wedge\mathbf{S}_y)$. Взяв в качестве $\widetilde{F}(x,y,t)$ одно из выражений вида $\pm e^{\pm\chi_1}$, $e^{\chi_1} - e^{-2\chi_1}$, $\pm\mathrm{sh}\,\chi_1$, $\pm\mathrm{ch}\,\chi_1$, $\pm\sin\chi_1$, $\pm\cos\chi_1$, мы получим замкнутое вполне интегрируемое уравнение эллиптического типа на функцию χ_1, решение подходящей граничной задачи для которого, однако, должно удовлетворять дополнительному условию

$$\frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\triangle\chi_1(x,y)dx\,dy = N_0, \quad N_0\in\mathbb{Z}, \tag{4.6a}$$

или ($r=\sqrt{x^2+y^2}$)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{8\pi}\oint(\chi_{1x}dy-\chi_{1y}dx)=N_0. \qquad (4.6б)$$

(b). *Новые канонические переменные.*

Рассмотрим теперь переход к другим каноническим переменным. Перейдем вначале в (4.1)–(4.2) от переменной $\mathbf{S}$ к новым переменным p и q ($p,\, q\in\mathbb{R}$), полагая [28]:

$$S_3(x,y,t)=p(x,y,t),\quad S_+(x,y,t)=\sqrt{1-p^2(x,y,t)}\,e^{iq(x,y,t)}. \qquad (4.7)$$

Выражения для скобок Пуассона величин p и q следуют непосредственно из (2.2) с учетом двумерности:

$$\begin{gathered}\{p(\mathbf{r}),q(\mathbf{r}')\}=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\\ \{p(\mathbf{r}),p(\mathbf{r}')\}=\{q(\mathbf{r}),q(\mathbf{r}')\}=0,\quad \mathbf{r}=(x,y),\end{gathered} \qquad (4.8)$$

и, таким образом, для любых двух функционалов F и G получим:

$$\{F,G\}=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\Big[\frac{\delta F}{\delta p(\mathbf{r})}\frac{\delta G}{\delta q(\mathbf{r})}-\frac{\delta F}{\delta q(\mathbf{r})}\frac{\delta G}{\delta p(\mathbf{r})}\Big]\,dx\,dy. \qquad (4.9)$$

В терминах этих переменных модель MI (4.1)–(4.2) перепишется как гамильтонова система:

$$q_t=\frac{\delta H}{\delta p}=-\frac{p_{xx}+\alpha^2p_{yy}}{1-p^2}-\frac{p\,(p_x^2+\alpha^2p_y^2)}{(1-p^2)^2}-p\,(q_x^2+\alpha^2q_y^2)+u_yq_x+u_xq_y,$$

$$p_t=-\frac{\delta H}{\delta q}=(1-p^2)(q_{xx}+\alpha^2q_{yy})-2p\,(p_xq_x+\alpha^2p_yq_y)+u_yp_x+u_xp_y,$$

$$u_{xx}-\alpha^2u_{yy}=-2\alpha^2(p_yq_x-p_xq_y), \qquad (4.10)$$

а для топологического заряда будем иметь:

$$Q_T=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}(p_yq_x-p_xq_y)\,dx\,dy. \qquad (4.11)$$

Здесь гамильтониан H задается в виде[14]

$$H = H_1 + H_2, \quad H_1 = \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\Big[\frac{p_x^2+\alpha^2 p_y^2}{1-p^2} + (1-p^2)(q_x^2+\alpha^2 q_y^2)\Big]\,dxdy,$$

$$H_2 = \frac{1}{4}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}[\alpha^2 A^2 + B^2]\,dx\,dy, \tag{4.12}$$

где $A = u_x$, $B = -\alpha^2 u_y$, так, что $A_x + B_y = 2\alpha^2(p_x q_y - p_y q_x)$; при этом должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \frac{\delta A}{\delta p} &= C\delta_y(y-y')\delta(x-x'), \quad & \frac{\delta B}{\delta p} &= D\delta(y-y')\delta_x(x-x'), \\ \frac{\delta A}{\delta q} &= E\delta_y(y-y')\delta(x-x'), \quad & \frac{\delta B}{\delta q} &= F\delta(y-y')\delta_x(x-x'), \end{aligned} \tag{4.13}$$

где C, D, E, F – некоторые функции. Полагая $D = C$, $F = E$ и принимая во внимание (4.10), на функции $C = C(x,y,t)$ и $E = E(x,y,t)$ получим следующие соотношения (символ $<,>$ означает скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^2$, а T – транспонирование)

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, \Big(\frac{1}{2\alpha^2}q_y + C_y,\, \frac{1}{2\alpha^2}q_x - C_x\Big)^T\rangle = 0, \\ \langle \nabla u, \Big(-\frac{1}{2\alpha^2}p_y + E_y, -\frac{1}{2\alpha^2}p_x - E_x\Big)^T\rangle = 0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

откуда найдем:

$$\begin{aligned} C(x,y,t) = C_0(u(x,y)) + \frac{1}{2\alpha^2}\int\limits_s (u_x q_y + u_y q_x)ds, \\ E(x,y,t) = E_0(u(x,y)) + \frac{1}{2\alpha^2}\int\limits_s (u_x p_y + u_y p_x)ds, \end{aligned} \tag{4.15}$$

где C_0, E_0 – произвольные функционалы, а интегрирование ведется вдоль характеристик s уравнений (4.14). Считая что $E_0 = C_0$,

[14] В работе [29] было приведено выражение гамильтониана для так называемого модифицированного MI, отличающегося от (4.1) знаком в предпоследнем члене; поэтому гамильтониан для модели (4.1)–(4.2) как в терминах q, p, так и w, $\overline{w}$ (см. ниже) здесь получен, по-видимому, впервые. Кроме того, в отличие от модифицированной модели, в нашем случае, как нетрудно показать, не удается ввести переменные Клебша, используемые в гидродинамике.

будем иметь, что функционал C_0 должен удовлетворять дополнительному условию

$$\frac{\delta C_0}{\delta u}\Big(\frac{\delta u}{\delta q}-\frac{\delta u}{\delta p}\Big)=\frac{2}{\alpha^2}u_{xy}. \tag{4.16}$$

Но поскольку в ситуации общего положения $u_{xy}\neq 0$, то отсюда следует, что необходимо также выполнения еще одного условия: $\delta C_0/\delta u\neq 0$ (если, конечно, при этом $\delta u/\delta q\neq\delta u/\delta p$).

Перейдем теперь в (4.1)–(4.2) к переменной w, введенной в (2.6) (считая при этом, что $w=w(x,y,t)$)[15]:

$$\begin{gathered} iw_t=w_{xx}+\alpha^2w_{yy}-2\frac{\overline{w}(w_x^2+\alpha^2w_y^2)}{1+|w|^2}+i(u_xw_y+u_yw_x),\\ u_{xx}-\alpha^2u_{yy}=4i\alpha^2\frac{w_x\overline{w}_y-\overline{w}_xw_y}{(1+|w|^2)^2}. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Тогда для топологического заряда получим

$$Q_T=-\frac{i}{2\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{w_x\overline{w}_y-\overline{w}_xw_y}{(1+|w|^2)^2}\,dx\,dy. \tag{4.18}$$

Ненулевая скобка Пуассона для канонических переменных $w(x,y),\overline{w}(x,y)$ имеет вид, аналогичный (2.8):

$$\{w(x,y),\overline{w}(x',y')\}=-\frac{i}{2}(1+|w|^2)^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\quad \mathbf{r}=(x,y). \tag{4.19}$$

Это позволяет переписать (4.1)–(4.2) в виде явно гамильтоновой системы:

$$iw_t=-\frac{1}{2}(1+|w|^2)^2\,\frac{\delta H}{\delta\overline{w}}. \tag{4.20}$$

Здесь H – гамильтониан, задаваемый следующим образом:

$$\begin{gathered} H=H_1+H_2,\quad H_1=2\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{w_x\overline{w}_x+\alpha^2w_y\overline{w}_y}{(1+|w|^2)^2}\,dx\,dy,\\ H_2=\frac{1}{4}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}[\alpha^2u_x^2+u_y^2]\,dx\,dy, \end{gathered} \tag{4.21}$$

[15] Отображение $(w,\overline{w})\to(p,q)$ задается соотношениями: $q=-\arctan(i(w-\overline{w})/(w+\overline{w}))$, $p=(|w|^2-1)/(1+|w|^2)$.

причем при получении уравнений модели предполагается выполнение условий, аналогичных (4.13):

$$\begin{aligned}
\frac{\delta u_x}{\delta \overline{w}} &= -\frac{4iw_x}{\alpha^2(1+|w|^2)^2}\,\delta(x-x')\,\delta(y-y'),\\
\frac{\delta u_y}{\delta \overline{w}} &= -\frac{4iw_y}{(1+|w|^2)^2}\,\delta(x-x')\,\delta(y-y').
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Ясно, что все три представления модели MI: (4.1)–(4.2), (4.10) и (4.17) эквивалентны друг другу.

Заметим, также, что как и в двух предыдущих разделах, можно ввести "комплексное расширение" системы (4.17). Полагая формально $w_1 = \overline{w}$, получим:

$$iw_t = w_{xx} + \alpha^2 w_{yy} - 2\frac{w_1(w_x^2+\alpha^2 w_y^2)}{(1+ww_1)^2} + i(u_x w_y + u_y w_x),$$

$$iw_{1t} = -(w_{1xx} + \alpha^2 w_{1yy}) + 2\frac{w(w_{1x}^2+\alpha^2 w_{1y}^2)}{(1+ww_1)^2} + i(u_x w_{1y} + u_y w_{1x}),$$

$$u_{xx} - \alpha^2 u_{yy} = 4i\alpha^2 \frac{w_x w_{1y} - w_{1x} w_y}{(1+ww_1)^2}. \tag{4.23}$$

Эту систему можно интерпретировать как модель двух связанных магнетиков Ишимори. Вид нетривиальных скобок Пуассона для нее следует из (4.19):

$$\begin{aligned}
\{w(x,y), w_1(x',y')\} &= -\frac{i}{2}(1+ww_1)^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\\
\{\overline{w}(x,y), \overline{w}_1(x',y')\} &= \frac{i}{2}(1+\overline{ww}_1)^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),
\end{aligned} \tag{4.24}$$

а "топологический заряд" такой модели есть[16]

$$Q_T = -\frac{i}{2\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{w_x w_{1y} - w_{1x} w_y}{(1+ww_1)^2}\,dx\,dy. \tag{4.25}$$

Уравнения движения (4.23) являются гамильтоновыми:

$$iw_t = -\frac{1}{2}(1+ww_1)^2\frac{\delta H}{\delta w_1}, \quad iw_{1t} = \frac{1}{2}(1+ww_1)^2\frac{\delta H}{\delta w}, \tag{4.26}$$

[16] В случае общего положения: $w_1 \neq \overline{w}$ и, значит, Q_T может быть и комплексной, и нецелой величиной. Такая ситуация, включая интерпретацию величины Q_T, строго говоря, требует отдельного рассмотрения.

где

$$H = H_1 + H_2, \quad H_1 = 2 \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{w_x w_{1x} + \alpha^2 w_y w_{1y}}{(1 + w w_1)^2}\, dx\, dy,$$

$$H_2 = \frac{1}{4} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} [\alpha^2 u_x^2 + u_y^2]\, dx\, dy, \tag{4.27}$$

причем предполагается, что

$$\begin{aligned} \frac{\delta u_x}{\delta w_1} &= -\frac{4 i w_y}{\alpha^2 (1 + w w_1)^2}, \quad \frac{\delta u_y}{\delta w_1} = -\frac{4 i w_x}{(1 + w w_1)^2}, \\ \frac{\delta u_x}{\delta w} &= \frac{4 i w_{1y}}{\alpha^2 (1 + w w_1)^2}, \quad \frac{\delta u_y}{\delta w} = \frac{4 i w_{1x}}{(1 + w w_1)^2}. \end{aligned} \tag{4.27a}$$

Возвращаясь к (4.17), введем, далее, комплексные координаты $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, так что $\partial_z = 1/2(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\overline{z}} = 1/2(\partial_x + i\partial_y)$, $dx\, dy = (i/2) dz \wedge d\overline{z}$ и перепишем в этих переменных (4.18) и (4.21).

(i). Пусть $\alpha^2 = 1$, т.е. рассмотрим модель MI-I. В этом случае получаем:

$$\begin{aligned} i w_t &= 4 w_{z\overline{z}} - 8 \frac{w_z w_{\overline{z}}}{1 + |w|^2} \overline{w} - 2(w_z u_z - w_{\overline{z}} u_{\overline{z}}), \\ u_{zz} + u_{\overline{z}\overline{z}} &= 4 \frac{w_z \overline{w}_{\overline{z}} - w_{\overline{z}} \overline{w}_z}{(1 + |w|^2)^2}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Топологический заряд есть

$$Q_T = \frac{i}{2\pi} \int\int \frac{w_z \overline{w}_{\overline{z}} - w_{\overline{z}} \overline{w}_z}{(1 + |w|^2)^2}\, dz \wedge d\overline{z}, \tag{4.29}$$

а гамильтониан

$$H = 2i \int\int \frac{w_z \overline{w}_{\overline{z}} + w_{\overline{z}} \overline{w}_z}{(1 + |w|^2)^2}\, dz \wedge d\overline{z} + \frac{i}{2} \int\int u_z u_{\overline{z}}\, dz \wedge d\overline{z}. \tag{4.30}$$

(ii). Пусть $\alpha^2 = -1$. Тогда имеем модель MI-II:

$$\begin{aligned} i w_t &= 2(w_{zz} + w_{\overline{z}\overline{z}}) - 4 \frac{w_z^2 + w_{\overline{z}}^2}{1 + |w|^2} \overline{w} - 2(w_z u_z - w_{\overline{z}} u_{\overline{z}}), \\ u_{z\overline{z}} &= -2 \frac{w_z \overline{w}_{\overline{z}} - w_{\overline{z}} \overline{w}_z}{(1 + |w|^2)^2}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Выражение для топологического заряда совпадает с (4.29), а для гамильтониана имеем:

$$H = 2i \int\int \frac{w_z \overline{w}_z + w_{\overline{z}} \overline{w}_{\overline{z}}}{(1+|w|^2)^2}\, dz \wedge d\overline{z} - \frac{i}{4} \int\int (u_z^2 + u_{\overline{z}}^2)\, dz \wedge d\overline{z}. \quad (4.32)$$

Заметим еще, что гамильтониан магнетика MI-I и его топологический заряд, как это следует из (4.29) и (4.30), связаны между собой известным неравенством Богомольного – оценкой снизу для гамильтониана, справедливой, в том числе, и для динамических конфигураций:

$$H \geq 4\pi Q_T. \quad (4.33)$$

Из сравнения (4.29) и (4.32) видно, что для модели MI-II такой оценки нет.

(c). *Гамильтонианы и топологические заряды для некоторых простейших решений.*[17]

Уравнения (4.1)–(4.2) представляются как условия совместности переопределенной линейной матричной системы на функцию $\Psi = \Psi(x, y, t)$:

$$\Psi_y = \frac{1}{\alpha} S \Psi_x, \quad (4.34)$$

$$\Psi_t = -2iS\Psi_{xx} + Q\Psi_x, \quad (4.35)$$

где $Q = u_y I + \alpha^3 u_x S + i\alpha S_y S - iS_x$, $\Psi = \Psi(x,y,t) \in \mathrm{Mat}\,(2, \mathbb{C})$, $S = \sum_{i=1}^3 S_i \sigma_i$, σ_i – стандартные матрицы Паули, I – единичная 2×2 матрица. В силу своего определения матрица S обладает свойствами: $S = S^*$, $S^2 = I$, $\det S = -1$, $\mathrm{Sp}\, S = 0$ (символ $(*)$ означает эрмитовское сопряжение).

Приведем выражение матрицы S через переменную w, которое понадобится нам ниже:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{|w|^1 - 1}{1+|w|^2} & \frac{2\overline{w}}{1+|w|^2} \\ \frac{2w}{1+|w|^2} & -\frac{|w|^2-1}{1+|w|^2} \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

и рассмотрим несколько простейших примеров вычислений.

1. Пусть в (4.17) $\alpha^2 = -1$, т.е. рассмотрим модель MI-II. Тогда, как было показано в [26], с (4.31) совместны условия:

$$w_{\overline{z}} = 0, \quad w_z = 0. \quad (4.37)$$

[17]В случае модифицированного MI и для ряда других примеров аналогичные вычисления были выполнены в [29].

Первое из них означает наличие инстантонного сектора в модели MI-II, второе – антиинстантонного сектора. Рассмотрим инстантонный сектор, считая, что $w(z) = ((z-z_0)/\lambda)^n$ [30][18], где $n \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (величины z_0 и λ характеризуют положение и размер инстантона соответственно). Вычисление по соотношению (4.39) дает:

$$Q_T = \frac{i}{2\pi} \int\int \frac{|w_z|^2}{(1+|w|^2)^2}\, dz \wedge d\overline{z} = n. \tag{4.38}$$

а по (4.32): $H_1 = 0$. Для определения H_2 необходимо знать функцию u. С этой целью, используя второе уравнение (4.31) при $w_{\overline{z}} = 0$ и возвращаясь к декартовым координатам, имеем $(z_0 = x_0 + iy_0)$:

$$\triangle u = -8\lambda^{2n} \frac{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^n}{[\lambda^{2n} + [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^n]^2}, \tag{4.39}$$

откуда следует, что[19]

$$u(x,y) = -8\lambda^{2n} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} G_0(x-x', y-y') \times \\ \times \frac{[(x'-x_0)^2 + (y'-y_0)^2]^n}{[\lambda^{2n} + [(x'-x_0)^2 + (y'-y_0)^2]^n]^2}\, dx'\, dy', \tag{4.40}$$

где $G_0(x,y) = (1/2\pi)\ln(x^2+y^2)$ – функция Грина двумерного оператора Лапласа. Таким образом, для энергии инстантонного решения (формально) получаем[20]

$$H = \frac{1}{4} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} (u_y^2 - u_x^2)\, dx\, dy. \tag{4.41}$$

Весь инстантонный сектор задачи при этом разбивается на непересекающиеся классы, каждому из которых отвечает свое значение величины Q_T.

[18] Выбор более общего решения, например, в виде инстантона Белавина-Полякова (дробно-рациональной функции с комплексными полюсами) [2], к сожалению, значительно осложняет вычисления.

[19] Этот интеграл с помощью замены переменных можно привести к повторному, при этом внутренний интеграл сводится к контурному (по окружности единичного радиуса), который вычисляется явно, однако, остающийся интеграл в явном форме, по-видимому, не вычисляется.

[20] Положительная определенность гамильтониана, очевидно, будет гарантирована в той области, где $|u_y| > |u_x|$.

2. Рассмотрим модель MI-I ($\alpha^2 = 1$) и покажем, что аналогично предыдущему случаю в ней также существуют инстантонные решения[21],[22]. Действительно, при $w_{\overline{z}} = 0$, система (4.28) сводится к системе:

$$w_t = -2u_z w_z, \quad u_{zz} + u_{\overline{z}\overline{z}} = 4\frac{w_z \overline{w}_{\overline{z}}}{(1+|w|^2)^2}. \tag{4.42}$$

Дифференцируя первое из этих соотношений по $\overline{z}$, получим: $u_{z\overline{z}} = 0$, откуда видно, что совместность будет достигаться при условии

$$u_{xx} = 4\frac{w_z \overline{w}_{\overline{z}}}{(1+|w|^2)^2}, \tag{4.43}$$

или

$$u(x,y,t) = 4\int\limits_{-\infty}^{x} dx' \int\limits_{-\infty}^{x'} dx'' \frac{|w_z|^2}{(1+|w|^2)^2} + f_0(y,t)x + c_1, \tag{4.44}$$

где c_1 – произвольная постоянная, а $f_0(.,.)$ – произвольная функция. Для инстантонного решения $w(z)$ того же вида, что и в предыдущем случае: $Q_T = 0$, а для функции u имеем:

$$u(x,y,t) = \frac{4n^2}{\lambda^{2n}} \int\limits_{-\infty}^{x} dx' \int\limits_{-\infty}^{x'} dx'' \times \\ \times \frac{[(x''-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{n-1}}{[\lambda^{2n} + (|x''-x_0|^2 + |y-y_0|^2)^n]^2} + f_0(y,t)x + c_1. \tag{4.45}$$

Выражение для гамильтониана примет вид:

$$H = 4\pi n + \frac{1}{4}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy. \tag{4.46}$$

---

[21] Этот факт, ранее, по-видимому, не отмечавшийся в литературе, не является удивительным, если заметить, что в “статическом пределе” модель MI-I переходит в эллиптическую версию нелинейной $O(3)$ сигма-модели (двумерный изотропный ферромагнетик Гейзенберга), для которой впервые в [2] и были построены инстантонные решения. Заметим, также, что методом обратной задачи рассеяния она решалась в [31–32].

[22] С точки зрения многомерного метода обратной задачи и процедур “одевания” решений, в этом случае вместо переменных z и $\overline{z}$, более естественными оказываются характеристические переменные $\xi = (y-x)/2$ и $\eta = (x+y)/2$ (см. [14, 15]).

3. Вычислим топологический заряд и гамильтониан в случае, когда решение имеет вид спиральной структуры. А именно, положим $\mathbf{S} = (0, \sin\Phi_1, \cos\Phi_1)$, где $\Phi_1 = \delta_0 t + \alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0 \in \mathbb{R}$ – параметры, т.е. имеем решение, представляющее собой двумерную спиральную структуру [16]; при этом, согласно (2.6) (см.также (4.36)), $w(z, \overline{z}) = i\tan(\Phi_1/2)$, $\Phi_1 = \delta_0 t + \alpha z + \overline{\alpha z} + \gamma_0$, $\alpha = \alpha_0/2 + \beta_0/(2i)$. Тогда из (4.29) следует, что $Q_T = 0$.

Для определения функции $u = u(x, y, t)$ необходимо подставить функцию $w(z, \overline{z}))$ в уравнения (4.28) ((4.31)), в результате чего для u мы получим два линейных уравнения. Из требования их совместности и после интегрирования находим ($\alpha^2 = -1$) (см. [16]):

$$u(x, y) = g_0(y + \frac{\beta_0}{\alpha_0}x) + \int\limits_s g_1(y(s') + \frac{\beta_0}{\alpha_0}x(s'), t)\, ds', \tag{4.47}$$

где g_0, g_1 – произвольные функции, причем g_0 постоянна на характеристике $y + (\beta_0/\alpha_0)x = \mathrm{const}$, а s – характеристика, по которой ведется интегрирование.

Аналогично, при $\alpha^2 = 1$ имеем:

$$u(x, y) = g_2(y - \frac{\beta_0}{\alpha_0}x) + \int\limits_{s_1} g_3(y(s') - \frac{\beta_0}{\alpha_0}x(s'), t)\, ds', \tag{4.48}$$

где g_2, g_3 также произвольные функции, g_2 постоянна на характеристике s_1 $y - (\beta_0/\alpha_0)x = \mathrm{const}$.

Подстановка $w = w(z, \overline{z})$ в (4.30) и в (4.32) (в обоих случаях – MI-I и MI-II) приводит к расходящейся части гамильтониана H_1, а, значит, в силу конечности функционала H_2, и к расходимости, в целом, гамильтониана H.

4. Как было впервые показано в [33] (см., также [14, 16]), в безотражательном секторе модели MI-II система (4.34)–(4.35) может быть приведена к виду:

$$\widetilde{\Psi}_{\overline{z}} = 0, \quad \widetilde{\Psi}_t + 2i\widetilde{\Psi}_{zz} = 0. \tag{4.49}$$

В свою очередь, эта система имеет хорошо известные полиномиальные решения, описывающие вихревые состояния ($\widetilde{\Psi} =$

$\{\widetilde{\Psi}_{ij}\}, i,j=1,2,\ \widetilde{\Psi}_{22}=\overline{\widetilde{\Psi}}_{11},\ \widetilde{\Psi}_{12}=-\overline{\widetilde{\Psi}}_{21}$) (см. [33]):

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}_{11}(z,t)&=\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{m+2n=j}\frac{a_j}{m!n!}\Big(-\frac{1}{2}z\Big)^m\Big(-\frac{1}{2}it\Big)^n,\\ \widetilde{\Psi}_{21}(z,t)&=\sum_{j=0}^{M_1}\sum_{m+2n=j}\frac{b_j}{m!n!}\Big(-\frac{1}{2}z\Big)^m\Big(-\frac{1}{2}it\Big)^n,\end{aligned}\tag{4.50}$$

где N_1, M_1 - натуральные числа, $M_1=N_1-1$, a_j, b_j – некоторые комплексные числа, а внутренние суммирования ведутся по всем возможным комбинациям чисел m, $n\geq 0$, таким, что $m+2n=j$. В частности, в простейшем случае ($N_1=1$) отсюда следует

$$\widetilde{\Psi}_{11}=a_0+a_1z,\quad \widetilde{\Psi}_{21}=b_0.\tag{4.51}$$

Используем теперь одевающее (например, по Дарбу [16]) соотношение для матрицы S[23]: $\widetilde{S}=\widetilde{\Psi}S^{(1)}\widetilde{\Psi}^{-1}$, где $S^{(1)}$ – затравочное решение системы (4.1)–(4.2), в предположении, что $S^{(1)}=\sigma_3$. Это приводит к так называемому "одноламповому" (lump) стационарному решению, которое мы запишем сразу через стереографическую проекцию:

$$w(z,\overline{z})=\frac{\overline{b}_0}{\overline{a}_1(\overline{z}-\overline{z}_0)+\overline{d}_0},\tag{4.52}$$

где $d_0=a_0-a_1z_0$, z_0 – координата центра вихря на комплексной плоскости.

Известно [33], что для такого решения $Q_T=1$. Найдем функцию $u=u(x,y)$. Второе уравнение (4.31) в этом случае сводится к следующему:

$$u_{z\overline{z}}=\frac{2|a_1|^2|b_0|^2}{(|a_1(z-z_0)+d_0|^2+|b_0|^2)^2}.\tag{4.53}$$

Отсюда

$$u(x,y)=2|a_1|^2|b_0|^2\iint\limits_{\mathbb{R}^2}G_0(x-x',y-y')\times \\ \times\frac{1}{(|a_1(z'-z_0)+d_0|^2+|b_0|^2)^2}\,dx'\,dy'.\tag{4.54}$$

[23] Его структура одинакова, по крайней мере, для всех моделей магнетиков, рассматриваемых в данной работе, а также для всех известных методов их решений.

Таким образом, из (4.32) (с учетом того, что $H_1 = 0$) получаем гамильтониан однолампового решения:

$$H = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} (u_y^2 - u_x^2)\, dx\, dy. \tag{4.55}$$

Как и для соотношения (4.41), положительная определенность (4.55) будет заведомо достигаться в области на плоскости, для которой выполнено условие $|u_y| > |u_x|$.

5. Заключение

Из результатов, касающихся магнетика Ишимори, видно, в частности, что даже на простейших решениях гамильтонианы и топологические заряды далеко не всегда могут быть вычислены аналитически и требуют (для конкретных начально-граничных задач) численных реализаций. В связи с этим особый интерес, на наш взгляд, здесь представляла бы проверка выдвинутой в [16] гипотезы о возможности фазового перехода в этой модели, сопровождаемого изменениями топологии и свойств симметрии системы.

Еще одно замечание относится к "расширенным" системам (2.12) и (4.23). Если исходные системы калибровочно эквивалентны нелинейному уравнению Шредингера с интегральной нелинейностью [8, 9] и системе Деви–Стюартсона-II (в случае MI-II) [5] соответственно, то интересным и важным представляется вопрос о поиске объектов, калибровочно эквивалентных таким расширенным системам.

В целом же, развитые здесь представления, как мы надеемся, могут быть полезны как для исследования других $(1+1)$-мерных, так и более реалистичных $(2+1)$- и $(3+1)$-мерных моделей магнетиков, сигма-моделей и киральных полей, включая неинтегрируемые случаи.

Автор глубоко признателен П. П. Кулишу за поддержку.

Приложение

Приведем выражение для лаксовой пары системы (2.12). Для этого введем предварительно матричнозначную функцию $D =$

$D(x,t) \in \mathrm{Mat}\,(2,\mathbb{C}),\ x > 0$, имеющую вид:

$$D(x,t) = \begin{pmatrix} \frac{sr-1}{1+sr} & \frac{2s}{1+sr} \\ \frac{2r}{1+sr} & -\frac{sr-1}{1+sr} \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

Матрица D обладает свойствами: $D^2 = I$, $\mathrm{Sp}\, D = 0$, $\det D = -1$, однако, в отличие от матрицы S (см, например, (4.36) или замечания непосредственно перед этой формулой), не является эрмитовой. Прямым вычислением можно убедиться, что (2.12) является условием совместности переопределенной линейной матричной системы уравнений[24]:

$$\Psi_x = -\frac{i}{2}\lambda D\Psi, \quad \Psi_t = \Big(\frac{\lambda}{2}D_x D + \frac{i}{2}\lambda^2 D\Big)\Psi, \tag{A.2}$$

где $\Psi = \Psi(x,t,\lambda) \in \mathrm{Mat}\,(2,\mathbb{C})$, $\lambda = \lambda(x,t,u)$, $u \in \mathbb{C}$. Это означает, что параметр u играет роль "скрытого" спектрального параметра, при этом выполняются условия:

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{x}, \quad \lambda_t = -\frac{2\lambda^2}{x}, \tag{A.3}$$

или

$$\lambda = \frac{x}{2(t+u)}, \tag{A.4}$$

а матрица D удовлетворяет уравнению:

$$iD_t = \frac{1}{2}[D, D_{xx}] - \frac{1}{x}D_x D. \tag{A.5}$$

Таким образом, мы имеем неизоспектральную деформацию ассоциированной линейной системы (случай модели одного деформированного магнетика Гейзенберга рассматривался в [8]). Заметим, также, что в полном объеме метод обратной задачи к подобным системам пока не применялся.

Литература

1. Л. Д. Ландау, — Собрание трудов, Наука (1969), 128–143.
2. А. А. Белавин, А. М. Поляков, — Письма в ЖЭТФ **22** (1975), 503–506.
3. А. М. Переломов, — УФН **134** (1990), 577–609.
4. Ю. М. Изюмов, Ю. Н. Скрябин, — Статистическая механика магнитоупорядоченных систем, Наука (1987).

[24] При $D = S$ и $\lambda = \mathrm{const}$ эта пара переходит в пару для стандартного одномерного магнетика Гейзенберга [21].

5. В. Д. Липовский, А. В. Широков, – Функц. анализ и его прилож. **23** (1989), 65.
6. О. И. Мохов, *Симплектическая и пуассонова геометрия на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые уравнения* — Институт Компьютерных исследований, Москва–Ижевск (2004).
7. А. В. Михайлов, А. И. Яремчук, — Письма в ЖЭТФ **36** (1982), 78.
8. С. П. Бурцев, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, — ТМФ **70** (1987), 323.
9. K. Porsezian, M. Lakshmanan, — J. Math. Phys. **32**, (1991), 2923.
10. Е. Ш. Гутшабаш, — Письма в ЖЭТФ **73** (2001), 317–319.
11. E. K. Sklyanin, Preprint No. E-3-79 LOMI (1979).
12. А. И. Бобенко, — Зап. научн. семин. ЛОМИ **123** (1983), 58.
13. Niam-Ning Huang, Hao Cai and ot., `arxiv:nlin.SI/0509042`.
14. B. G. Konopelchenko, Solitons in Multidimensions. World Scientific (1993).
15. Е. Ш. Гутшабаш, — Зап. научн. семин. ПОМИ **17** (2002), 155–168.
16. Е. Ш. Гутшабаш, — Письма в ЖЭТФ **78** (2003), 1257.
17. Qing Ding, `arxiv.math.DG/0504288`.
18. A. N. Leznov, A. V. Razumov, — J. Math. Phys. **35** (1994), 1738.
19. Е. В. Ферапонтов, — ТМФ **91** (1992), 452.
20. В. Г. Маханьков, Ю. П. Рыбаков, В. И. Санюк, — УФН **162** (1994), 121–148.
21. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теопии солитонов*. Наука, М. (1986).
22. E. Barouch, A. Fokas, V. Papageorgiou, — J. Math. Phys. **29** (1988), 2628.
23. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, — Статистическая физика. Ч. 2, Наука, М. (1978).
24. В. Г. Барьяхтар, Е. Д. Белоколос, П. И. Голод, — В сб.: Современные проблемы теории магнетизма **30**, Киев, Наукова думка (1986).
25. В. М. Елеонский, Н. Н. Кирова, Н. Е. Кулагин, — ЖЭТФ **79** (1980), 321.
26. В. С. Михалев, — Зап. научн. семин. ЛОМИ **189** (1991), 75.
27. Е. Ш. Гутшабаш, — Зап. научн. семин. ПОМИ **19** (2006), 119–133.
28. H. C. Fogedby, — J. Phys. A: Math. Gen. **13** (1980), 1467–1499.
29. L. Martina, G. Profilo, G. Soliani, L. Solombrino, — Phys. Rev. B, **49** (1994), 12915.
30. Р. Раджараман, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля.* Мир, М. (1985).
31. Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, — ТМФ **90** (1992), 175.
32. Г. Г. Варзугин, Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, — ТМФ **104** (1995), 513.
33. Y. Ishimori, — Progr. Teor. Phys **72** (1984), 33.

Gutshabash E. Sh. On canonical variables for integrable models of magnets.

Three integrable models - the deformed Heisenberg, Landau–Lifschits and Ishimori magnets are written in terms of the stereographic projection. The Hamiltonians of these models are obtained and certain questions related to the existence of exact solutions are studied. In particular, the stability of solitions is studied for the Heisenberg marnet, simplest stationary solutions are obtained for the Landau–Lifschitz magnet, and Hamiltonians and topological charges are calculated for several known solutions of the Ishimori model.

НИИ Физики им. В. А. Фока
С.-Петербургский государственный
университет

Поступило 15 июля 2007 г.