Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 347, 2007 г.

И. А. Волков, И. А. Кушмар

О ПЕРИФЕРИЙНОЙ ЗОНЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИМПУЛЬСА В СЕТКЕ ИЗ ДВУХ СИСТЕМ СТРУН С СУЩЕСТВЕННО РАЗНЫМИ ИМПЕДАНСАМИ

В отсутствии универсальных методов решения задач для механических систем со многими степенями свободы, построение решений частных задач для систем с периодической структурой сводилось к искусству сведения их постановки (в рамках классической механики) к известным соотношениям для специальных функций. Примером может служить задача Боттема [1, 2] для малых колебаний сложного математического маятника – невесомой нити с прикрепленной к ней равными и равноотстоящими точечными массами.

Для двумерных систем – однородных струнных сеток – первые решения задач в классической постановке были построены [3] благодаря установленному рекуррентному соотношению для многочленов дискретной переменной Кравчука, совпадающему по виду с соотношением для смещений узлов сетки.

Поиск рекуррентных соотношений для классических ортогональных многочленов был обусловлен стремлением упрощения задачи путем возврата к непрерывным переменным при использовании асимптотических представлений решения. Последние удается получить с помощью известных [4, 5] предельных связей между многочленами Кравчука, Чебышева–Эрмита, Лаггера и Шарлье.

Асимптотическое представление, полученное из предельной связи первых двух из перечисленных многочленов, позволило провести континуализацию волновой задачи для струнной сетки и ее сопоставление с той же процедурой на физическом уровне строгости.

1. Функции влияния сосредоточенного импульса и ее асимптотическое представление

В приложении работы [3] приведено и другое точное решение в рамках классической механики – функция влияния сосредоточенного импульса для струнной сетки.

Исходная постановка подобных волновых задач в непрерывных переменных

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} - \frac{1}{\nu_1^2}\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = 0,\ n\ell_1 < x < (n+l)\ell_1,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ &\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} - \frac{1}{\nu_2^2}\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} = 0,\ m\ell_2 < y < (m+1)\ell_2,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned} \tag{1.1}$$

дополняется двумя условиями в узловых точках – равенства смещений струн и динамического равновесия

$$u_m(n\ell_1, t) = w_n(m\ell_2, t), \quad T_1 \frac{\partial u_m}{\partial x}\Big|_{x=n\ell_1-0}^{x=n\ell_1+0} + T_2\frac{\partial w_n}{\partial y}\Big|_{y=m\ell_2-0}^{y=m\ell_2+0} = 0 \tag{1.2}$$

и сводится к определению смещений в узлах $U(n, m, N)$.

В частности, функция влияния импульса, приложенного к одному из узлов сетки с единым временем τ прохождения возмущения между узлами, находится из решения задачи

$$\begin{gathered} U(n, m, N+1) + U(n, m, N-1) = \\ = \alpha_1[U(n+1, m, N) + U(n-1, m, N)] \\ +\alpha_2[U(n, m+1, N) + U(n, m-1, N)] \\ U(n, m, N<0) = 0, \quad U(0,0,0) = U(0,0,1) = 1 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь n, m и N – безразмерные целочисленные координаты (номера узлов) и время, за начало отсчета которых принимаются точка и момент приложения импульса ($n = m = N = 0$)

$$n = \Big[x/\ell_1\Big], \quad m = \Big[y/\ell_2\Big], \quad N = [t/\tau], \quad \tau = \ell_1/\nu_1 = \ell_2/\nu_2$$

Коэффициенты α_i – суть долевые импедансы струн обеих систем

$$\alpha_i = \frac{z_i}{z_1 + z_2}, \quad z_i = \sqrt{\rho_i T_i} \quad (i = 1, 2)$$

ρ_i, T_i и $\nu_i = \sqrt{T_i/\rho_i}$ – соответственно погонные плотность, натяжение и скорость распространения возмущений.

Установлено, что многочлены Кравчука $k_r(s,N)$, стандартно определяемые [4, 5] производящей функцией

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{N} k_r(s,N)z^r = (1+qz)^s(1-pz)^{N-s},\\ &s = 0,1,2,\ldots,N; p>0, q=1-p>0\end{aligned} \tag{1.4}$$

в нормированном виде именуемые функциями Кравчука (ФК)

$$K(r,s,N) = \left(C_N^s/C_N^r\right)^{1/2} p^{(s-r)/2}q^{(N-r-s)/2}k_r(s,N) \tag{1.5}$$

удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned}&K^2(r,s,N+1)+K^2(r-1,s-1,N-1)\\ &= p[K^2(r,s-1,N)+K^2(r-1,s,N)]\\ &+q[K^2(r,s,N)+K^2(r-1,s-1,N)].\end{aligned} \tag{1.6}$$

Равенство (1.6) с точностью до обозначений

$$r=(N-m-n)/2, \quad s=(N-m+n)/2, \quad p=\alpha_1, \quad q=\alpha_2 \tag{1.7}$$

совпадает с уравнением (1.3) и потому находим

$$\begin{aligned}&U(n,m,N) = K^2\left(\frac{N-m-n}{2}, \frac{N-m+n}{2}, N\right)\\ &+K^2\left(\frac{N-1-m-n}{2}, \frac{N-1-m+n}{2}, N-1\right)\end{aligned} \tag{1.8}$$

где одно из слагаемых – с полуцелыми значениями аргументов – по определению (1.4) равно нулю, а распределение смещений $U(n,m,N)$ узлов можно представить как совокупность двух квадратных матриц, вложенных одна в другую, с центральным элементом в точке приложения импульса.

Несмотря на простой аналитический вид решения (1.8), при малых значениях характеристического импеданса для одной из систем струн и соответствующего ему параметра p для многочленов Кравчука удобнее пользоваться их асимптотическими представлениями в полной аналогии с использованием распределения Пуассона вместо биноминального в теории вероятностей [6].

С этой целью воспользуемся обобщением Сегё [4] для классических многочленов Лагерра с целочисленными значениями верхнего индекса:

$$L_r^{(-k)}(\theta) = (-\theta)^k \frac{(r-k)!}{r!} L_{r-k}^{(k)}(\theta), \quad k = 1, 2, \ldots, r \tag{1.9}$$

которое позволяет с той же оговоркой сохранить стандартное [4, 5] их определение с помощью производящей функции

$$\sum_{r=0}^{\infty} L_r^{(k)}(\theta) z^r = (1-z)^{-k-1} e^{\theta z/(z-1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.10}$$

и ввести модификацию нормированного варианта многочленов

$$L(r, s, \theta) = \sqrt{r!/s!}\,\theta^{(s-r)/2} e^{-\theta/2} L_r^{(s-r)}(\theta), \quad r, s = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.11}$$

Удобство введения функций (1.11), которые по аналогии с функциями Кравчука будем называть функциями Лаггера (ФЛ), состоит в том, что для них формула (1.9) принимает вид соотношения симметрии

$$L(s, r, \theta) = (-1)^{s-r} L(r, s, \theta) \tag{1.12}$$

Отметим два существенных обстоятельства. Во-первых, многочлены Шарлье, связанные с многочленами Лагерра [5] формулой

$$C_r(s, \theta) = (-\theta)^{-r} r! L_r^{(s-r)}(\theta)$$

в нормированном виде совпадают в ФЛ с точностью до знака. Во-вторых, аналогичному (1.12) соотношению симметрии отвечают и функции Кравчука (1.5), а предельная связь между ними [4] приобретает бескоэффициентный вид

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ p \to 0}} K(r, s, N; p) = L(r, s, \theta), \quad \theta = pN > 0 \tag{1.13}$$

где аргументы r, s и θ фиксированы.

Формула (1.13) позволяет в компактном виде записать асимптотическое представление решения (1.8) в подвижных координатах, отсчитываемых от границы расширяющейся области возмущения. Предварительно условимся о терминологии и обозначениях: одну из образующих сетку систем струн с малым значением долевого импеданса ($\alpha_1 \approx 0$) будем называть слабой, а вторую – ($\alpha_2 \approx 1$) – основной. Номера n струн основной системы сохраним согласованными с (1.1) – (1.3) с отсчетом от "главной" ($n = 0$), непосредственно испытавшей воздействие импульса и занимающей в возмущенной зоне диагональное положение. (Равенство $r = s$, вытекающее из (1.7) при $n = 0$ и произвольных положительных N, можно интерпретировать как совпадение двух индексов элементов главной диагонали матрицы смещения узлов).

Нумерацию узловых точек на каждой струне основной системы условимся производить от узла, совпадающего в текущий момент с границей расширяющейся области возмущения.

В названных переменных асимптотическое представление смещений в узлах принимает наиболее простой вид

$$U_{\pm n}(2[k/2], \theta) = L^2([k/2], [k/2] + n, \theta), \quad n, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.14}$$

где квадратными скобками обозначена целая часть заключенного в них числа.

Для возможности сопоставлений приведем его вид и в стандартных обозначениях

$$U_{\pm n}(2[k/2], \theta) = \frac{[k/2]!}{([k/2] + n)!} \theta^n e^{-\theta} \{L^{(n)}_{[k/2]}(\theta)\}^2$$

В частности, для главной и двух соседних с ней струн ($n = \pm 1$) имеем

$$U_0(2[k/2], \theta) = L^2([k/2], [k/2], \theta) = e^{-\theta} \{L^{(0)}_{[k/2]}(\theta)\}^2$$

$$U_{\pm 1}(2[k/2], \theta) = L^2([k/2], [k/2] + 1, \theta) = \frac{[k/2]!}{([k/2] + 1)!} \theta e^{-\theta} \{L^{(1)}_{[k/2]}(\theta)\}^2$$

При $\theta > 0$ на главной струне сохраняется экспоненциально убывающий скачок смещения на границе возмущенной области, а общий волновой характер процесса в периферийной ($N \to \infty$) зоне возмущения, подтверждаемый нулями положительно определенной функции, обусловлен наличием слабой системы струн.

Графики квадратов многочленов Лагерра можно найти в научной литературе по квантовой механике (см., напр., [7]), поскольку они определяют радиальную составляющую плотности вероятности для атома водорода.

2. Линейное рекуррентное соотношение для квадратов нормированных многочленов Лагерра

Докажем, что квадраты ФЛ удовлетворяют линейному рекуррентному соотношению

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\theta}L^2(r,s,\theta)+L^2(r,s,\theta)-L^2(r,s-1,\theta)-L^2(r-1,s,\theta)\\ +L^2(r-1,s-1,\theta)-\frac{d}{d\theta}L^2(r-1,s-1,\theta)=0\end{gathered} \tag{2.1}$$

Будем исходить из четырех близких по структуре равенств, получаемых из известных [4, 5] формул для многочленов Лагерра и Шарлье с помощью соотношения симметрии (1.12)

$$2\frac{d}{d\theta}L(r,s,\theta)+L(r,s,\theta)=\sqrt{s/\theta}L(r,s-1,\theta)-\sqrt{r/\theta}L(r-1,s,\theta) \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}2\frac{d}{d\theta}L(r-1,s-1,\theta)-L(r-1,s-1,\theta)\\ =\sqrt{r/\theta}L(r,s-1,\theta)(r,s-1,\theta)-\sqrt{s/\theta}L(r-1,s,\theta)\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$L(r,s-1,\theta)=\sqrt{s/\theta}L(r,s,\theta)-\sqrt{r/\theta}L(r-1,s-1,\theta) \tag{2.4}$$

$$-L(r-1,s,\theta)=\sqrt{r/\theta}L(r,s,\theta)-\sqrt{s/\theta}L(r-1,s-1,\theta) \tag{2.5}$$

Нетрудно, например, убедиться, что формула дифференцирования

$$\frac{d}{d\theta}L_r^{(k)}(\theta)=-L_{r-1}^{(k+1)}(\theta) \tag{2.6}$$

для ФЛ принимает вид

$$2\theta\frac{d}{d\theta}L(r,s,\theta)+(r-s+\theta)L(r,s,\theta)+2\sqrt{r\theta}L(r-1,s,\theta)=0 \tag{2.7}$$

Если к данному равенству применить преобразование симметрии (1.12), то придем к аналогичному соотношению с измененным знаком перед третьим членом

$$2\theta\frac{d}{d\theta}L(s,r,\theta)+(r-s+\theta)L(s,r,\theta)-2\sqrt{r\theta}L(s,r-1,\theta)=0 \tag{2.8}$$

Возвращение к начальным обозначениям ($s \rightleftarrows r$) аргументов дает равенство

$$2\theta\frac{d}{d\theta}L(r,s,\theta)+(s-r+\theta)L(r,s,\theta)-2\sqrt{s\theta}L(r,s-1,\theta)=0 \tag{2.9}$$

а его сложение с исходным (2.7) приводит к формуле

$$2\theta\frac{d}{d\theta}L(r,s,\theta)+\theta\cdot L(r,s,\theta)-\sqrt{s\theta}L(r,s-1,\theta)+\sqrt{r\theta}L(r-1,s,\theta)=0 \tag{2.10}$$

эквивалентной уравнению (2.2).

Для вывода следующего уравнения (2.3) необходимо использовать связь между тремя последовательными многочленами Шарлье, которая для ФЛ принимает вид

$$\sqrt{(r+1)\theta}L(r+1,s,\theta)+(r-s+\theta)L(r,s,\theta)+\sqrt{r\theta}L(r-1,s,\theta)=0 \tag{2.11}$$

Повторяя процедуру использования соотношения симметрии (1.12) приходим к соотношению

$$\sqrt{(s+1)\theta}L(r,s+1,\theta)+(r-s-\theta)L(r,s,\theta)+\sqrt{s\theta}L(r,s-1,\theta)=0 \tag{2.12}$$

а их разность может быть записана в виде

$$\begin{aligned}&2\theta L(r,s,\theta)-\sqrt{s\theta}L(r,s-1,\theta)+\sqrt{r\theta}L(r-1,s,\theta)\\ &=\sqrt{(s+1)\theta}L(r,s+1,\theta)-\sqrt{(r+1)\theta}L(r+1,s,\theta)\end{aligned} \tag{2.13}$$

позволяющем простым вычитанием (2.13) из (2.10) получить второе соотношение (2.3) исходной системы с точностью до несущественного сдвига значений первых двух аргументов (r и s).

Два оставшихся соотношения (2.4) и (2.5) – суть парафразы связи между смежными многочленами Лагерра, записанные для ФЛ.

Теперь вывод соотношения (2.1) на базе формул (2.2)–(2.5) достаточно прост. Домножая равенство (2.2) на $L(r,s,\theta)$, находим выражение для первых двух слагаемых в уравнении (2.1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}L^2(r,s,\theta)+L^2(r,s,\theta)&=\sqrt{s/\theta}L(r,s-1,\theta)L(r,s,\theta)\\ &-\sqrt{r/\theta}L(r-1,s,\theta)L(r,s,\theta)\end{aligned} \tag{2.14}$$

Аналогично из равенства (2.3) получим выражение для двух последних членов в (2.1)

$$\begin{aligned}&L^2(r-1,s-1,\theta)-\frac{d}{d\theta}L^2(r-1,s-1,\theta)\\ &=\sqrt{s/\theta}L(r-1,s,\theta)L(r-1,s-1,\theta)\\ &-\sqrt{r/\theta}L(r,s-1,\theta)L(r-1,s-1,\theta)\end{aligned} \tag{2.15}$$

Таким образом, для доказательства справедливости рекуррентного соотношения (2.1) достаточно показать, что сумма правых частей в равенствах (2.14) и (2.15) за вычетом недостающей пары средних членов в (2.1) равна нулю

$$\begin{aligned}\sqrt{s/\theta}L(r,s-1,\theta)L(r,s,\theta)-\sqrt{r/\theta}L(r-1,s,\theta)L(r,s,\theta)\\ +\sqrt{s/\theta}L(r-1,s,\theta)L(r-1,s-1,\theta)\\ -\sqrt{r/\theta}L(r,s-1,\theta)L(r-1,s-1,\theta)\\ -L^2(r,s-1,\theta)-L^2(r-1,s,\theta)=0\end{aligned}$$

или в ином виде

$$\begin{aligned}L(r,s-1,\theta)[\sqrt{s/\theta}L(r,s,\theta)-\sqrt{r/\theta}L(r-1,s-1,\theta)-L(r,s-1,\theta)]\\ -L(r-1,s,\theta)[\sqrt{r/\theta}L(r,s,\theta)\\ -\sqrt{s/\theta}L(r-1,s-1,\theta)+L(r-1,s,\theta)]=0\end{aligned}$$

Данное равенство удовлетворяется тождественно поскольку выражения в квадратных скобках совпадают с членами равенств (2.4) и (2.5), что и завершает доказательство равенства (2.1) для случая, когда аргументы всех входящих в него членов находятся в области определения ФЛ (1.11). Если же данную область дополнить нулевыми значениями ФЛ до полного набора целочисленных значений аргументов r и s, включая отрицательные:

$$L(r<0,s<0,\theta)=L(0,s<0,\theta)=L(r<0,0,\theta)=0,$$

то равенство (2.1) будет удовлетворяться повсеместно ($-\infty < r,s<\infty$).

Для этого достаточно непосредственной проверкой убедиться в его достоверности в трех случаях:

1) $\frac{d}{d\theta}L^2(r,0,\theta)+L^2(r,0,\theta)-L^2(r-1,0,\theta)=0$
   при $L^2(r,0,\theta)=\frac{\theta^r}{r!}e^{-\theta}$, $r=1,2,\ldots$
2) $\frac{d}{d\theta}L^2(0,s,\theta)+L^2(0,s,\theta)-L^2(0,s-1,\theta)=0$
   при $L^2(0,s,\theta)=\frac{\theta^s}{s!}e^{-\theta}$, $s=1,2,\ldots$
3) $\frac{d}{d\theta}L^2(0,0,\theta)+L^2(0,0,\theta)=0$
   при $L^2(0,0,\theta)=e^{-\theta}$.

В физическом плане это подчеркивает, что полученные в разделе 1 формулы определяют форму первых периферийных волн, набегающих на невозмущенную до того область при достаточном удалении от точки приложения импульса. Кроме того, становится очевидным, что функции вида $L^2(r+r_0, s+s_0, \theta)$, где r_0 и s_0 – некоторые целочисленные величины, также удовлетворяют соотношению (2.1). А в силу его линейности по принципу суперпозиции могут быть построены и иные решения.

Можно, например, показать, что функция

$$F(r,s,\theta) = \sqrt{\theta/s}L(r,s,\theta)L(r,s-1,\theta), \quad s>0$$

доопределенная формулами

$$F(r,0,\theta) = \sum_{k=0}^{r} L^2(k,0,\theta), \quad F(r<0,\, s<0,\, \theta) = 0$$

представима в виде ряда

$$F(r,s,\theta) = L^2(0,s,\theta) + \sum_{k=1}^{r}[L^2(k,s,\theta) - L^2(k-1,s-1,\theta)]$$

и потому также повсеместно $(-\infty < r, s < \infty)$ отвечает соотношению вида (2.1).

Литература

1. O. Bottema, *Die Schwigungen eines zusammengesetzen Pendels.* — Jahresbezicht der Deutschen Mathematiker Vereinigung **42** (1932), Hf 1–4.
2. Р. Ф. Нагаев, К. Ш. Ходжаев, *Колебания механических систем с периодической структурой.* — Фан УзССР (1973), 272 с.
3. И. А. Волков, И. А. Кушмар, *Решение и континуализация волновой задачи для струнной сетки.* — Прикладная математика и механика **69**, No. 6 (2005), 1024–1031.
4. G. Szegö, *Orthogonal polynomials.* Amer. Math. Soc., N.Y. (1959).
   Г. Сегё, *Ортогональные многочлены.* Физматгиз, М. (1962), 500 с.
5. H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental functions*, vol. 2, N.Y. (1958).
   Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2, Наука, М. (1974), 296 с.
6. Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей.* М. (1961), 406 с.
7. Э. В. Шпольский, *Атомная физика*, т. 2, ГИТЛ, М.-Л. (1950), 718 с.

Volkov I. A., Kushmar I. A. About peripheral zone of disturbance from the local impulse in string mesh formed by two systems of strings with different impedances.

The base of work is recurrence relations of new type - relations for squares of normalized orthogonal polynomials with application to the problems of transverse oscillations of string mesh. The displacement function of the local impulse for string mech in the form of Kravchuk polynomials has been presented. Discrete variables of Kravchuk polynomials are dual numbers of nodal points and whole-number time, thouse counted from the place and time of application of impulse. With the use of the Szego generalization for Lageere's polynomials the asymptotical performance of influence function wenn strings of two systems differs essentially by ones characteristical impedances has been obtained. Entering of coordinates moving together with the expanding influence front helped for analyses of the displacement epure for the first waves and dynamic of them changes. The linear equation with the first derivatives for squares of normalized orthogonal Lagerr's polynomials in author modification that continualy described wave process in the whole has been derived.

ВНИГРИ
E-mail: ins@vnigri.spb.su

Поступило 14 июня 2007 г.