Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 347, 2007 г.

**П. А. Валиневич, С. Э. Деркачёв,
Д. Караханян, Р. Киршнер**

ФАКТОРИЗАЦИЯ $\mathcal{R}$-МАТРИЦЫ В СЛУЧАЕ КВАНТОВОЙ АЛГЕБРЫ $U_q(s\ell_3)$

1. Введение

Основным объектом в теории интегрируемых систем [2, 3] является $\mathcal{R}$-матрица. $\mathcal{R}$-матрица – это линейный оператор, который зависит от спектрального параметра u и действует в тензорном произведении двух пространств $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$. Оператор $\mathcal{R}$ является решением уравнения Янга–Бакстера [1, 3, 4, 6]

$$\mathcal{R}_{12}(u-v)\mathcal{R}_{13}(u)\mathcal{R}_{23}(v) = \mathcal{R}_{23}(v)\mathcal{R}_{13}(u)\mathcal{R}_{12}(u-v). \tag{1.1}$$

Все операторы действуют в общем тензорном произведении $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3$. Индексы ik показывают, что оператор $\mathcal{R}_{ik}$ действует нетривиально в тензорном произведении $\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_k$, а на оставшуюся часть тензорного произведения $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3$ продолжается как единичный оператор. Если третье пространство $\mathbb{V}_3$ соответствует фундаментальному представлению алгебры симметри, уравнение (1.1) сводится к более простому RLL-уравнению ($\mathrm{L}(u)$ – матрица Лакса)

$$\mathcal{R}_{12}(u-v)\,\mathrm{L}_1(u)\,\mathrm{L}_2(v) = \mathrm{L}_2(v)\,\mathrm{L}_1(u)\,\mathcal{R}_{12}(u-v),$$

которое будет использоваться как определяющее соотношение для универсальной R-матрицы [7]. Мы рассматриваем $s\ell(3)$-инвариантные решения уравнения Янга–Бакстера и, как естественное обобщение, решения уравнения Янга–Бакстера с деформированной алгеброй симметрии $U_q(s\ell_3$. В этом случае матрица

П. Валиневич благодарен фонду некоммерческих программ "Династия" и Международному центру фундаментальной физики в Москве за финансовую поддержку. Работа была выполнена при поддержке гранта РФФИ 06-01-00186а, DAAD Leonhard-Euler-Stipendienprogramm 2006 (П.В.), РФФИ 05-01-00922, NSh-5403.2006.1, DFG 436 Rus 17/4/07 (С.Д.), DFG 436 Arm 17/1/07 (Д.К.) и NTZ of Leipzig University.

Лакса $\mathrm{L}(u)$ зависит от трех параметров: двух параметров представления m_1, m_2 и спектрального параметра u. Мы будем использовать другую параметризацию матрицы Лакса $\mathrm{L}(u_1, u_2, u_3)$, где параметры u_1, u_2 и u_3 определены ниже (2.5). После выделения оператора перестановки $\mathcal{P}_{12}$ из $\mathcal{R}$-матрицы $\mathcal{R}_{12} = \mathcal{P}_{12}\check{\mathcal{R}}_{12}$ определяющее соотношение для оператора $\check{\mathcal{R}}_{12}$ переписывается в виде

$$\check{\mathcal{R}}_{12} \cdot \mathrm{L}_1(u_1, u_2, u_3)\mathrm{L}_2(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{L}_1(v_1, v_2, v_3)\mathrm{L}_2(u_1, u_2, u_3) \cdot \check{\mathcal{R}}_{12}.$$

Это уравнение допускает естественную интерпретацию [8, 10]: оператор $\check{\mathcal{R}}_{12}$ переставляет набор параметров u_1, u_2, u_3 первой матрицы Лакса с набором параметров v_1, v_2, v_3 входящих во вторую матрицу и соответствует специальной перестановке s из группы перестановок $\mathbf{S}_6$ шести параметров

$$(\overbrace{\underline{u_1, u_2, u_3}, \underline{v_1, v_2, v_3}}^{s}) \mapsto (\underline{v_1, v_2, v_3}, \underline{u_1, u_2, u_3}).$$

Произвольная перестановка из группы $\mathbf{S}_6$ строится из пяти элементарных перестановок s_i, переставляющих два ближайших элемента в наборе $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$: $\mathrm{s}_1\mathbf{u} = (u_2, u_1, u_3, v_1, v_2, v_3)$ и т.д. В частности $s = s_3 s_2 s_4 s_3 s_1 s_2 s_5 s_4 s_3$, поэтому естественно попытаться найти реализацию операторов $\mathcal{S}_i(\mathbf{u})$, представляющих элементарные перестановки

$$\begin{aligned}
&(\overbrace{u_1, u_2}^{s_1}, u_3,\ \overbrace{v_1, v_2}^{s_4}, v_3); && \mathcal{S}_1\, \mathrm{L}_1(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{L}_1(u_2, u_1, u_3)\mathcal{S}_1, \\
& && \mathcal{S}_4\, \mathrm{L}_2(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{L}_2(v_2, v_1, v_3)\mathcal{S}_4, \\
&(u_1, \overbrace{u_2, u_3}^{s_2}, v_1,\ \overbrace{v_2, v_3}^{s_5}); && \mathcal{S}_2\, \mathrm{L}_1(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{L}_1(u_1, u_3, u_2)\mathcal{S}_2, \\
& && \mathcal{S}_5\, \mathrm{L}_2(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{L}_2(v_1, v_3, v_2)\mathcal{S}_5, \\
&(u_1, u_2, \overbrace{u_3, v_1}^{s_3},\ v_2, v_3); && \mathcal{S}_3\, \mathrm{L}_1(u_1, u_2, u_3)\, \mathrm{L}_2(v_1, v_2, v_3) = \\
& && \mathrm{L}_1(u_1, u_2, v_1)\, \mathrm{L}_2(u_3, v_2, v_3)\mathcal{S}_3.
\end{aligned}$$

Эти уравнения проще, чем исходное уравнение для R-оператора и допускают замкнутое решение. Сам R-оператор строится как “составной объект” из операторов $\mathcal{S}_i$ [8, 9]

$$\check{\mathcal{R}}_{12}(u - v) = \mathcal{S}_3(s_2 s_4 s_3 s_1 s_2 s_5 s_4 s_3 \mathbf{u})\mathcal{S}_2(s_4 s_3 s_1 s_2 s_5 s_4 s_3 \mathbf{u})\cdot$$

$$\cdot\mathcal{S}_4(s_3s_1s_2s_5s_4s_3\mathbf{u})\mathcal{S}_3(s_1s_2s_5s_4s_3\mathbf{u})\mathcal{S}_1(s_2s_5s_4s_3\mathbf{u})\cdot$$

$$\cdot\mathcal{S}_2(s_5s_4s_3\mathbf{u})\mathcal{S}_5(s_4s_3\mathbf{u})\mathcal{S}_4(s_3\mathbf{u})\mathcal{S}_3(\mathbf{u}),$$

где мы явным образом указали, как меняются аргументы операторов $\mathcal{S}_i(\mathbf{u})$ в соответствии с уже произведенными перестановками.

План статьи следующий. В первой части работы рассмотрен пример $sl(3)$-инвариантного решения уравнения Янга–Бакстера [8, 9]. Во второй части рассматривается решение уравнения Янга–Бакстера с алгеброй симметрии $U_q(s\ell_3)$ [5, 6]. Все формулы первой части допускают естественное обобщение на случай деформированной алгебры $U_q(s\ell_3)$. В приложении собраны стандартные формулы, относящиеся к q-экспоненте и представлению генераторов алгебры $U_q(s\ell_3)$ разностными операторами.

2. $s\ell(3)$-инвариантная $\mathcal{R}$-матрица

Рассмотрим $s\ell(3)$-инвариантные решения уравнения Янга–Бакстера. В этом случае пространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ являются пространствами двух представлений алгебры $s\ell(3)$. Оператор $\mathcal{R}_{12}(u)$ коммутирует с генераторами алгебры $s\ell(3)$ действующими в тензорном произведении $\mathbb{V}_1\otimes\mathbb{V}_2$.

Существует два эквивалентных стандартных базиса генераторов алгебры $s\ell(3)$. Элементами базиса Картана–Вейля являются генераторы E_{ik}, i, $k=1,2,3$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\mathrm{E}_{ik},\mathrm{E}_{jp}]=\delta_{jk}\mathrm{E}_{ip}-\delta_{ip}\mathrm{E}_{jk}$$

и дополнительному условию $\mathrm{E}_{11}+\mathrm{E}_{22}+\mathrm{E}_{33}=0$. Базис Шевалле содержит минимальный набор генераторов, состоящий из двух $s\ell(2)$-троек e_1,f_1,h_1 и e_2,f_2,h_2 с коммутационными соотношениями

$$[e_1,f_1]=h_1,\quad [e_2,f_2]=h_2$$

$$[h_1,f_1]=-2f_1,\quad [h_1,e_1]=2e_1,\quad [h_1,f_2]=-f_2,\quad [h_1,e_2]=e_2$$

$$[h_2,f_2]=-2f_2,\quad [h_2,e_2]=2e_2,\quad [h_2,f_1]=-f_1,\quad [h_2,e_1]=e_1$$

и удовлетворяющих ограничениям в виде квадратичных

$$[e_1,f_2]=0,\quad [e_2,f_1]=0$$

и кубичных соотношений Серра

$$[e_1,[e_1,e_2]] = e_1^2 e_2 - 2e_2e_2e_1 + e_2e_1^2 = 0,$$

$$[e_2,[e_2,e_1]] = e_2^2 e_1 - 2e_1e_2e_1 + e_1e_2^2 = 0,$$

$$[f_1,[f_1,f_2]] = f_1^2 f_2 - 2f_2f_2f_1 + f_2f_1^2 = 0,$$

$$[f_2,[f_2,f_1]] = f_2^2 f_1 - 2f_1f_2f_1 + f_1f_2^2 = 0.$$

Элементы двух базисов связаны друг с другом следующим образом

$$\mathrm{E}_{11} = \frac{2\mathrm{h}_1}{3} + \frac{\mathrm{h}_2}{3}; \quad \mathrm{E}_{22} = \frac{\mathrm{h}_2}{3} - \frac{\mathrm{h}_1}{3}; \quad \mathrm{E}_{33} = -\frac{\mathrm{h}_1}{3} - \frac{2\mathrm{h}_2}{3}$$

$$\mathrm{E}_{12} = e_1,\ \ \mathrm{E}_{23} = e_2,\ \ \mathrm{E}_{21} = f_1,\ \ \mathrm{E}_{32} = f_2,\ \ \mathrm{E}_{13} = [e_1,e_2],\ \ \mathrm{E}_{31} = [f_2,f_1].$$

Если в качестве пространства $\mathbb{V}_2$ в тензорном произведении $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$, где действует оператор $\mathcal{R}_{12}(u)$, взять $\mathbb{C}^3$ - пространство фундаментального представления алгебры $s\ell(3)$, то $\mathcal{R}$-оператор можно реализовать в виде матрицы третьего порядка, матричные элементы которой будут операторами, действующими в пространстве $\mathbb{V}_1$. Эта матрица совпадает с матрицей Лакса $\mathrm{L}(u)$ и её вид хорошо известен [3, 4]. Матрица Лакса, действующая в тензорном произведении $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{C}^3$, имеет вид

$$\mathrm{L}(u) = \begin{pmatrix} u+\mathrm{E}_{11} & \mathrm{E}_{21} & \mathrm{E}_{31} \\ \mathrm{E}_{12} & u+\mathrm{E}_{22} & \mathrm{E}_{32} \\ \mathrm{E}_{13} & \mathrm{E}_{23} & u+\mathrm{E}_{33} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} u+\frac{2\mathrm{h}_1}{3}+\frac{\mathrm{h}_2}{3} & f_1 & [f_2,f_1] \\ e_1 & u+\frac{\mathrm{h}_2}{3}-\frac{\mathrm{h}_1}{3} & f_2 \\ [e_1,e_2] & e_2 & u-\frac{\mathrm{h}_1}{3}-\frac{2\mathrm{h}_2}{3} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где генераторы алгебры Ли $s\ell(3)$ реализуют представление в пространстве $\mathbb{V}_1$. Мы будем использовать представление $\mathbb{V}_{m_1,m_2}$ алгебры $s\ell(3)$ в пространстве полиномов, зависящих от трёх комплексных переменных $\mathbb{C}[x,y,z]$. Представление $\mathbb{V}_{m_1,m_2}$ содержит вектор младшего веса $\mathbf{e}_0 = 1$, который определяется соотношениями:

$$f_1 \cdot \mathbf{e}_0 = 0; \quad \mathrm{f}_2 \cdot \mathbf{e}_0 = 0 \quad \mathrm{h}_1 \cdot \mathbf{e}_0 = m_1\,\mathbf{e}_0; \quad \mathrm{h}_2 \cdot \mathbf{e}_0 = m_2\,\mathbf{e}_0.$$

На числа m_1 и m_2, параметризующие представление, не накладывается никаких ограничений: $m_k \in \mathbb{C}$, так что в случае общего положения представление $\mathbb{V}_{m_1,m_2}$ неприводимо и бесконечномерно. Генераторы алгебры $s\ell(3)$ в данном представлении являются дифференциальными операторами первого порядка: базис Картана–Вейля

$$\mathrm{E}_{21} = -\partial_x, \quad \mathrm{E}_{32} = -\partial_z - x\partial_y, \quad \mathrm{E}_{31} = -\partial_y, \tag{2.2a}$$

$$\mathrm{E}_{12} = x^2\partial_x + x(y\partial_y - z\partial_z) + y\partial_z + m_1 x,$$

$$\mathrm{E}_{23} = z^2\partial_z - y\partial_x + m_2 z \tag{2.2b}$$

$$\mathrm{E}_{13} = y(y\partial_y + z\partial_z + x\partial_x) - xz^2\partial_z + (m_1+m_2)y - m_2 xz,$$

$$\mathrm{E}_{11} = x\partial_x + y\partial_y + \frac{2m_1+m_2}{3} \tag{2.2c}$$

$$\mathrm{E}_{22} = -x\partial_x + z\partial_z + \frac{m_2-m_1}{3},$$

$$\mathrm{E}_{33} = -y\partial_y - z\partial_z - \frac{m_1+2m_2}{3}; \tag{2.2d}$$

базис Шевалле

$$f_1 = -\partial_x, \quad f_2 = -\partial_z - x\partial_y, \tag{2.3a}$$

$$e_1 = x^2\partial_x + x(y\partial_y - z\partial_z) + y\partial_z + m_1 x,$$

$$e_2 = z^2\partial_z - y\partial_x + m_2 z, \tag{2.3b}$$

$$\mathrm{h}_1 = 2x\partial_x + y\partial_y - z\partial_z + m_1,$$

$$\mathrm{h}_2 = 2z\partial_z + y\partial_y - x\partial_x + m_2. \tag{2.3c}$$

После подстановки этих выражений для генераторов в общую формулу получаем матрицу Лакса

$$L(u) =$$

$$\begin{pmatrix} u+\frac{2m_1}{3}+\frac{m_2}{3}+x\partial_x+y\partial_y & -\partial_x & -\partial_y \\ y\partial_z+x(x\partial_x+y\partial_y-z\partial_z+m_1) & u-\frac{m_1}{3}+\frac{m_2}{3}-x\partial_x+z\partial_z & -\partial_z-x\partial_y \\ \begin{matrix} y(x\partial_x+y\partial_y+z\partial_z+m_1+m_2) \\ -xz(z\partial_z+m_2) \end{matrix} & z(z\partial_z+m_2)-y\partial_x & u-\frac{m_1}{3}-\frac{2m_2}{3}-y\partial_y-z\partial_z \end{pmatrix}.$$

Получившаяся матрица представима в виде произведения треугольных матриц

$$\mathrm{L}(u) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 & -\partial_x - z\partial_y & -\partial_y \\ 0 & u_2 & -\partial_z \\ 0 & 0 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{2.4}$$

Спектральный параметр u и параметры представления m_1, m_2 собираются в комбинации u_1, u_2, u_3

$$u_3 = u - 2 + \frac{2m_1}{3} + \frac{m_2}{3}, \quad u_2 = u - 1 - \frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{3},$$
$$u_1 = u - \frac{m_1}{3} - \frac{2m_2}{3}, \tag{2.5}$$

от которых зависят только диагональные элементы центральной матрицы. Факторизованная форма оператора Лакса очень упрощает нахождение элементарных операторов перестановки.

Для недеформированного случая мы приводим только результат [8, 9]: решением уравнений

$$\mathcal{S}_1 \, \mathrm{L}_1(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{L}_1(u_2, u_1, u_3)\mathcal{S}_1,$$

$$\mathcal{S}_2 \, \mathrm{L}_1(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{L}_1(u_1, u_3, u_2)\mathcal{S}_2$$

являются операторы

$$\mathcal{S}_1 = \partial_{z_1}^{u_1 - u_2}, \quad \mathcal{S}_2 = (\partial_{x_1} + z_1 \partial_{y_1})^{u_2 - u_3}.$$

Операторы $\mathcal{S}_4$, $\mathcal{S}_5$ получаются из $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ очевидной заменой x_1, y_1, $z_1 \to x_2$, y_2, z_2 и u_1, u_2, $u_3 \to v_1$, v_2, v_3

$$\mathcal{S}_4 = \partial_{z_2}^{v_1 - v_2}, \quad \mathcal{S}_5 = (\partial_{x_2} + z_2 \partial_{y_2})^{v_2 - v_3}$$

Оператор $\mathcal{S}_3$ определяется уравнением

$$\mathcal{S}_3 \, \mathrm{L}_1(u_1, u_2, u_3) \, \mathrm{L}_2(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{L}_1(u_1, u_2, v_1) \, \mathrm{L}_2(u_3, v_2, v_3)\mathcal{S}_3$$

и является оператором умножения на функцию

$$\mathcal{S}_3 = (y_1 - y_2 - z_2(x_1 - x_2))^{u_3 - v_1}.$$

3. $U_q(s\ell_3)$-инвариантная $\mathcal{R}$-матрица

В базисе Шевалле алгебра $U_q(s\ell_3)$ определяется заданием элементов базиса e_1, f_1, h_1 и e_2, f_2, h_2 и соотношений между ними

$$q^{h_1} f_1 = q^{-2} f_1 q^{h_1}; \quad q^{h_1} f_2 = q f_2 q^{h_1}; \quad q^{h_2} f_1 = q f_1 q^{h_2}; \quad q^{h_2} f_2 = q^{-2} f_2 q^{h_2}$$

$$q^{h_1} e_1 = q^2 e_1 q^{h_1}; \quad q^{h_1} e_2 = q^{-1} e_2 q^{h_1}; \quad q^{h_2} e_1 = q^{-1} e_1 q^{h_2}; \quad q^{h_2} e_2 = q^2 e_2 q^{h_2}; \tag{3.1}$$

$$[e_1, f_1] = [h_1]_q, \quad [e_2, f_2] = [h_2]_q, \quad [e_1, f_2] = 0, \quad [e_2, f_1] = 0,$$

и дополнительных соотношений Серра

$$
\begin{aligned}
&e_1 f_2 = f_2 e_1, \quad e_1^2 e_2 - (q+q^{-1}) e_1 e_2 e_1 + e_2 e_1^2 = 0, \\
&e_2^2 e_1 - (q+q^{-1}) e_2 e_1 e_2 + e_1 e_2^2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&e_2 f_1 = f_1 e_2, \quad f_1^2 f_2 - (q+q^{-1}) f_1 f_2 f_1 + f_2 f_1^2 = 0, \\
&f_2^2 f_1 - (q+q^{-1}) f_2 f_1 f_2 + f_1 f_2^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Эквивалентная формулировка в базисе Картана–Вейля задается при помощи набора генераторов E_{ik}, удовлетворяющих соотношениям

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{E}_{kk}, \mathrm{E}_{ij}] = \delta_{ik} \mathrm{E}_{ij} - \delta_{jk} \mathrm{E}_{ij}, \quad [E_{ik}, E_{kj}] = [E_{ii} - E_{jj}]_q, \\
&[E_{12}, E_{32}] = 0, \quad [E_{21}, E_{23}] = 0, \\
&[E_{12}, E_{31}] = -q^{E_{11}-E_{22}} E_{32}, \quad [E_{23}, E_{31}] = E_{21} q^{E_{33}-E_{22}}, \\
&E_{12} E_{23} = q E_{23} E_{12} + E_{13}, \quad [E_{13}, E_{32}] = -q^{E_{22}-E_{33}} E_{12}, \\
&[E_{13}, E_{21}] = E_{23} q^{E_{11}-E_{22}}, \quad E_{32} E_{21} = q^{-1} E_{21} E_{32} + E_{31}, \\
&\mathrm{E}_{21} E_{31} = q^{-1} E_{31} \mathrm{E}_{21}, \quad \mathrm{E}_{32} E_{31} = q E_{31} \mathrm{E}_{32} \\
&\mathrm{E}_{12} E_{13} = q^{-1} E_{13} \mathrm{E}_{12}, \quad \mathrm{E}_{23} E_{13} = q E_{13} \mathrm{E}_{23}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Элементы двух базисов связаны друг с другом следующим образом

$$
\mathrm{E}_{11} = \frac{2\mathrm{h}_1}{3} + \frac{\mathrm{h}_2}{3}; \quad \mathrm{E}_{22} = \frac{\mathrm{h}_2}{3} - \frac{\mathrm{h}_1}{3}; \quad \mathrm{E}_{33} = -\frac{\mathrm{h}_1}{3} - \frac{2\mathrm{h}_2}{3}
$$

$$
\mathrm{E}_{12} = e_1, \quad \mathrm{E}_{23} = e_2, \quad \mathrm{E}_{21} = f_1, \quad \mathrm{E}_{32} = f_2,
$$

$$
\mathrm{E}_{13} = e_1 e_2 - q^{-1} e_2 e_1, \quad \mathrm{E}_{31} = f_2 f_1 - q f_1 f_2
$$

Соотношения в последней строке (3.2) эквивалентны соотношениям Серра. Матрица Лакса строится по правилу [11]

$$
L(u) = \begin{pmatrix} [u+E_{11}]_q & E_{21} q^{u+E_{11}} & E_{31} q^{u+E_{11}} \\ q^{-u-E_{11}} E_{12} & [u+E_{22}]_q & E_{32} q^{u+E_{22}} \\ q^{-u-E_{11}} E_{13} & q^{-u-E_{22}} E_{23} & [u+E_{33}]_q \end{pmatrix} = \tag{3.3}
$$

$$
\begin{pmatrix} [u+\frac{2h_1}{3}+\frac{h_2}{3}]_q & f_1 q^{u+\frac{2h_1}{3}+\frac{h_2}{3}} & (q f_2 f_1 - f_1 f_2) q^{u+\frac{2h_1}{3}+\frac{h_2}{3}} \\ q^{-u-\frac{2h_1}{3}-\frac{h_2}{3}} e_1 & [u-\frac{h_1}{3}+\frac{h_2}{3}]_q & f_2 q^{u-\frac{h_1}{3}+\frac{h_2}{3}} \\ q^{-u-\frac{2h_1}{3}-\frac{h_2}{3}} (q^{-1} e_1 e_2 - e_2 e_1) & q^{-u+\frac{h_1}{3}-\frac{h_2}{3}} e_2 & [u-\frac{h_1}{3}-\frac{2h_2}{3}]_q \end{pmatrix}. \tag{3.4}
$$

Как и в случае алгебры $s\ell(3)$ мы будем использовать представление $\mathbb{V}_{m_1,m_2}$ алгебры $U_q(s\ell_3)$ в пространстве полиномов, зависящих от трёх комплексных переменных $\mathbb{C}[x,y,z]$. Представление содержит вектор младшего веса $\mathbf{e}_0 = 1$

$$\mathrm{f}_1 \cdot \mathbf{e}_0 = 0; \quad \mathrm{f}_2 \cdot \mathbf{e}_0 = 0; \quad \mathrm{h}_1 \cdot \mathbf{e}_0 = m_1\, \mathbf{e}_0; \quad \mathrm{h}_2 \cdot \mathbf{e}_0 = m_2\, \mathbf{e}_0$$

и в случае общего положения ($m_k \in \mathbb{C}$) неприводимо и бесконечномерно. Генераторы алгебры $U_q(s\ell_3)$ в данном представлении задаются разностными операторами. Метод вывода выражений для генераторов кратко описан в Приложении, а здесь приводим только результат: базис Шевалле

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{1}{(q^{-2}-1)x}\left(q^{-2N_x}-1\right) \equiv -D_x, \\ f_2 &= -q^{N_x-N_y} D_z - xq^{N_x} D_y, \end{aligned} \tag{3.5a}$$

$$e_1 = yD_z q^{N_z-m_1} + \frac{x}{q-q^{-1}}(q^{2N_x+N_y-N_z+m_1} - q^{-N_y+N_z-m_1}), \tag{3.5b}$$

$$e_2 = -\frac{z}{q-q^{-1}}\left(q^{-m_2} - q^{2N_z+m_2}\right) - yq^{N_y+2N_z+m_2} D_x, \tag{3.5c}$$

$$\mathrm{h}_1 = 2N_x + N_y - N_z + m_1, \quad \mathrm{h}_2 = -N_x + N_y + 2N_z + m_2, \tag{3.5d}$$

базис Картана–Вейля

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{21} &= -D_x, \quad \mathrm{E}_{32} = -q^{N_x-N_y} D_z - xq^{N_x} D_y, \\ \mathrm{E}_{31} &= -q^{-N_x} D_y, \end{aligned} \tag{3.6a}$$

$$\mathrm{E}_{12} = yD_z q^{N_z-m_1} + \frac{x}{q-q^{-1}}\left(q^{2N_x+N_y-N_z+m_1} - q^{-N_y+N_z-m_1}\right), \tag{3.6b}$$

$$\mathrm{E}_{23} = -\frac{z}{q-q^{-1}}\left(q^{-m_2} - q^{2N_z+m_2}\right) - yq^{N_y+2N_z+m_2} D_x, \tag{3.6c}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{13} &= -\frac{y}{q-q^{-1}}\left(q^{-N_z-m_1-m_2} - q^{2N_x+2N_y+N_z+m_1+m_2}\right), \\ \mathrm{E}_{11} &= N_x + N_y + \frac{2m_1+m_2}{3}, \end{aligned} \tag{3.6d}$$

$$\mathrm{E}_{22} = -N_x + N_z + \frac{m_2-m_1}{3}, \quad \mathrm{E}_{33} = -N_y - N_z - \frac{m_1+2m_2}{3}. \tag{3.6e}$$

В пределе $q \to 1$ все выражения для генераторов очевидным образом переходят в соответствующие выражения для недеформированных генераторов алгебры $s\ell(3)$. После подстановки выражений для генераторов в общую формулу получаем матрицу Лакса (дальше везде $[\ ]_q$ заменяется на $[\ ]$)

$$\mathrm{L}(u) =$$

$$\begin{pmatrix} [u+\frac{2m_1}{3}+\frac{m_2}{3}+N_x+N_y] & -q^{u+\frac{2m_1}{3}+\frac{m_2}{3}+1}\frac{1}{x}[N_x]q^{N_y} & -q^{u+\frac{2m_1}{3}+\frac{m_2}{3}+1}\frac{1}{y}[N_y] \\ \begin{matrix} q^{-u-\frac{2m_1}{3}-\frac{m_2}{3}}\times \\ \big(\frac{y}{z}[N_z]q^{-N_x-N_y-m_1} \\ +x[N_x+N_y- \\ N_z+m_1]q^{-N_y-1}\big) \end{matrix} & [u-\frac{m_1}{3}+\frac{m_2}{3}-N_x+N_z] & \begin{matrix} -q^{u+1-\frac{m_1}{3}+\frac{m_2}{3}}\times \\ \big(\frac{1}{z}[N_z] \\ +\frac{x}{y}[N_y]q^{N_z}\big)\times \\ q^{-N_y} \end{matrix} \\ \begin{matrix} q^{-u-1}\big(y[N_x+N_y+N_z+ \\ m_1+m_2]-xz[N_z+m_2]\times \\ q^{N_x+m_1-1}\big)\times \\ q^{-\frac{2m_1}{3}-\frac{m_2}{3}} \end{matrix} & \begin{matrix} q^{\frac{m_1}{3}-\frac{m_2}{3}}\big(z[N_z+m_2]q^{N_x-1} \\ -\frac{y}{x}[N_x]q^{N_y+N_z+m_2}\big)q^{-u} \end{matrix} & [u-\frac{m_1}{3}-\frac{2m_2}{3}-N_y-N_z] \end{pmatrix}$$

Как и в недеформированном случае, матрица Лакса может быть расфакторизована в произведение треугольных матриц: $L(u) = MDN$

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ xq^{u_2-u_3-2-N_y+N_z} & 1 & 0 \\ yq^{-u_3-u_1-3+N_z} & zq^{u_1-u_2-2} & 1 \end{pmatrix}, \\ N &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ xq^{-2} & 1 & 0 \\ yq^{-2u_3-4-N_x} & zq^{N_x+N_y-2} & 1 \end{pmatrix}^{-1}; \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$D =$$

$$\begin{pmatrix} q^{-N_x+N_y}[u_3] & -\big(\frac{1}{x}[N_x]+\frac{z}{y}[N_y]q^{N_x-2}\big)q^{N_y+3+u_3} & -q^{u_3+3}\frac{1}{y}[N_y] \\ 0 & q^{N_x-N_z-1}[u_2] & -q^{u_2+2}\frac{1}{z}[N_z]q^{-N_y} \\ 0 & 0 & q^{-N_y+N_z}[u_1] \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

где мы используем те же параметры u_3,u_2 и u_1, как и в случае недеформированной алгебры (2.5).

Если сделать замену переменных $x \to xq^{u_3}$, $y \to yq^{u_3}$, что равносильно преобразованию матрицы Лакса

$$L(u_1, u_2, u_3) = q^{-u_3(N_x+N_y)} \cdot \ell(u_1, u_2, u_3) \cdot q^{u_3(N_x+N_y)}$$

то факторизованное представление для матрицы Лакса $\ell(u_1, u_2, u_3)$ можно преобразовать к виду $\ell(u_1, u_2, u_3)$=M(u_1, u_2)D(u_2)N(u_3), где

$$
\mathrm{M}(u_1,u_2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ xq^{u_2-2-N_y+N_z} & 1 & 0\\ yq^{-u_1-3+N_z} & zq^{u_1-u_2-2} & [u_1]\end{pmatrix},
$$

$$
\mathrm{N}(u_3)=\begin{pmatrix} [u_3] & 0 & 0\\ -xq^{u_3-2} & 1 & 0\\ -yq^{-u_3-4-N_x}+xzq^{u_3-3+N_x+N_y} & -zq^{N_x+N_y-2} & 1\end{pmatrix}
$$

$$
\mathrm{D}(u_2)= \tag{3.9}
$$

$$
\begin{pmatrix} q^{-N_x+N_y} & -\left(\frac{1}{x}[N_x]+\frac{z}{y}[N_y]q^{N_x-2}\right)q^{N_y+3} & -q^3\frac{1}{y}[N_y]\\ 0 & q^{N_x-N_z-1}[u_2] & -\frac{1}{z}[N_z]q^{u_2+2-N_y}\\ 0 & 0 & q^{-N_y+N_z}\end{pmatrix}.
$$

Данное представление удобно тем, что матрица $\mathrm{M}(u_1,u_2)$ не зависит от параметра u_3, так что характерные свойства наиболее "сложного" оператора $\mathcal{S}_3$ не изменяются по сравнению со случаем алгебры $s\ell(3)$. Исходные RLL-уравнения для оператора $\check{\mathcal{R}}_{12}$ преобразуются в уравнения

$$
\mathcal{R}\ \ell_1(u_1,u_2,u_3)\ell_2(v_1,v_2,v_3)=\ell_1(v_1,v_2,v_3)\ell_2(u_1,u_2,u_3)\ \mathcal{R}
$$

для преобразованного R-оператора

$$
\mathcal{R}=q^{v_3(N_{x_1}+N_{y_1})+u_3(N_{x_2}+N_{y_2})}\check{\mathcal{R}}_{12}q^{-u_3(N_{x_1}+N_{y_1})-v_3(N_{x_2}+N_{y_2})}.
$$

Дальше мы строим операторы $\mathcal{S}_i$ для преобразованной матрицы Лакса $\ell(u_1,u_2,u_3)$, а переход к исходному оператору $\check{\mathcal{R}}_{12}$ не представляет труда.

3.1. Операторы $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$

Данный параграф посвящен построению операторов $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$. Рассмотрим сначала случай, когда представление алгебры конечномерно, т.е. $m_{1,2}$ – целые отрицательные числа.

По "принципу соответствия" деформированные соотношения должны переходить в недеформированные при $q\to 1$. Поэтому естественно предположить, что операторы $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ имеют вид

$$
\mathcal{S}_1=D_1^{u_1-u_2},\quad \mathcal{S}_2=D_2^{u_2-u_3},
$$

$$
D_1=\frac{1}{z}[N_z]q^{\gamma},\quad D_2=\frac{1}{x}[N_x]q^{\alpha}+\frac{z}{y}[N_z]q^{\beta},
$$

а коммутационные соотношения с матричными элементами оператора Лакса являются естественными обобщениями формул для случая алгебры $s\ell(3)$ [9]

$$D_2\ell_{ik}(m_1,m_2) = \ell_{ik}(m_1+2,m_2-1)D_2 + \delta_i^2\delta_k^1[m_1]q^{\tau}, \qquad (3.1.1)$$

$$D_1\ell_{ik}(m_1,m_2) = \ell_{ik}(m_1-1,m_2+2)D_1 + \delta_i^3\delta_k^2[m_2]q^{\sigma}, \qquad (3.1.2)$$

где греческие буквы обозначают некоторую линейную комбинацию N_x, N_y и N_z. Легко видеть, что диагональные элементы Лакса удовлетворяют этому соотношению. Подставляя выражения для верхнетреугольных элементов оператора Лакса, соответствующих понижающим операторам, получим правила коммутации α, β, γ с переменными x, y и z, из которых однозначным образом находим $\gamma = -N_z$, $\alpha = N_z$, $\beta = N_x + N_z$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} D_2 &= \left(\frac{1}{x}[N_x]q^{-N_x} + \frac{z}{y}[N_y]\right) q^{N_x+N_z}; \\ D_1 &= \frac{1}{z}[N_z]q^{-N_z}. \end{aligned} \qquad (3.1.3)$$

Соотношения коммутации с элементами ℓ_{21} и ℓ_{32}

$$\begin{aligned} D_2^k\ell_{32}(m_1,m_2) &= \ell_{32}(m_1+2k,m_2-k)D_2^k, \\ D_1^k\ell_{21}(m_1,m_2) &= \ell_{21}(m_1-k,m_2+2k)D_1^k, \end{aligned} \qquad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned} &D_2^k\ell_{21}(m_1,m_2) = \\ &\qquad \ell_{21}(m_1+2k,m_2-k)D_2^k + [k][m_1+k-1]D_2^{k-1}q^{-3}, \end{aligned} \qquad (3.1.5)$$

$$\begin{aligned} D_1^k\ell_{32}(m_1,m_2) &= \ell_{32}(m_1-k,m_2+2k)D_1^k + \\ &+ [k][m_2+k-1]D_1^{k-1}q^{-u-2+\frac{m_1}{3}-\frac{m_2}{3}+N_x-N_z}. \end{aligned} \qquad (3.1.6)$$

Из этих соотношений следует что операторы $D_2^{1-m_1}$ и $D_1^{1-m_2}$ являются искомыми операторами. В случае, если m_i не являются целыми отрицательными числами, эти выражения понимаются в смысле аналитического продолжения следующим образом

$$\mathcal{S}_1 = z^{u_2-u_1}\mathbf{e}_{q^2}\left(q^{2(u_1-u_2)-2N_z}\right)\mathbf{e}_{q^2}^{-1}\left(q^{-2N_z}\right) \qquad (3.1.7)$$

$$\mathcal{S}_2 = \left(\frac{z}{y} q^{N_x+N_y+N_z}\right)^{u_2-u_3} \mathbf{e}_{q^2}\left(q^{2(u_2-u_3)}\mathbf{V}\right)\mathbf{e}^{-1}_{q^2}(\mathbf{V});$$

$$\mathbf{V} = q^{-2N_y} - \frac{qy}{zx}(1-q^{-2N_x})q^{-N_y}. \tag{3.1.8}$$

3.2. Оператор $\mathcal{S}_3$

Перечислим основные этапы вывода явной формулы для оператора $\mathcal{S}_3$ в случае алгебры $s\ell(3)$ и их естественное обобщение на случай деформированной алгебры $U_q(s\ell_3)$. Факторизованное представление для матрицы Лакса можно преобразовать к виду $\mathrm{L}(u_1,u_2,u_3) = \mathrm{M}(u_1)\,\mathrm{D}(u_2)\ \mathrm{N}(u_3)$, где

$$\mathrm{M}(u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & u_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D}(u_2) = \begin{pmatrix} 1 & -\partial_x - z\partial_y & -\partial_y \\ 0 & u_2 & -\partial_z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{N}(u_3) = \begin{pmatrix} u_3 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ -y+xz & -z & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{S}_3$ переставляет только параметры u_3 и v_1 в произведении матриц Лакса

$$\mathcal{S}_3\ \underline{\mathrm{M}_1(u_1)}\mathrm{D}_1(u_2)\mathrm{N}_1(u_3)\mathrm{M}_2(v_1)\mathrm{D}_2(v_2)\underline{\mathrm{N}_2(v_3)} =$$

$$= \underline{\mathrm{M}_1(u_1)}\mathrm{D}_1(u_2)\mathrm{N}_1(v_1)\mathrm{M}_2(u_3)\mathrm{D}_2(v_2)\underline{\mathrm{N}_2(v_3)}\ \mathcal{S}_3.$$

При условии, что оператор $\mathcal{S}_3$ коммутирует с крайними матрицами $\mathrm{M}_1(u_1)$ и $\mathrm{N}_2(v_3)$, уравнение существенно упрощается

$$\mathcal{S}_3\,\mathrm{D}_1(u_2)\mathrm{N}_1(u_3)\mathrm{M}_2(v_1)\mathrm{D}_2(v_2) = \mathrm{D}_1(u_2)\mathrm{N}_1(v_1)\mathrm{M}_2(u_3)\mathrm{D}_2(v_2)\,\mathcal{S}_3.$$

Технически более удобным оказывается эквивалентное уравнение

$$\mathrm{D}_1^{-1}(u_2)\mathcal{S}_3\mathrm{D}_1(u_2)\ \mathrm{N}_1(u_3)\mathrm{M}_2(v_1) = \mathrm{N}_1(v_1)\mathrm{M}_2(u_3)\ \mathrm{D}_2(v_2)\mathcal{S}_3\mathrm{D}_2^{-1}(v_2),$$

приводящее к двум условиям: $[\partial_{z_1},\mathcal{S}_3] = 0$, $[\partial_{x_2} + z_2\partial_{y_2},\mathcal{S}_3] = 0$ и системе уравнений

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}_3 & [\partial_{x_1} + z_1\partial_{y_1},\mathcal{S}_3] & [\partial_{y_1},\mathcal{S}_3] \\ 0 & \mathcal{S}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 & 0 & 0 \\ -x_{12} & 1 & 0 \\ -y_{12} + z_1x_{12} & -z_{12} & v_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ -x_{12} & 1 & 0 \\ -y_{12}+z_1x_{12} & -z_{12} & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{S}_3 & 0 & -[\partial_{y_2}, \mathcal{S}_3] \\ 0 & \mathcal{S}_3 & -[\partial_{z_2}, \mathcal{S}_3] \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_3 \end{pmatrix}$$

Коммутативность с крайними матрицами $\mathrm{M}_1(u_1)$ и $\mathrm{N}_2(v_3)$ означает, что $\mathcal{S}_3$ коммутирует с переменными x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, т.е. является оператором умножения на функцию. Вид этой функции однозначно фиксируется оставшимися уравнениями:

$$\mathcal{S}_3 = (y_1 - y_2 - z_2(x_1 - x_2))^{u_3 - v_1}.$$

В случае деформированной алгебры факторизованное представление для матрицы Лакса можно преобразовать к виду $\ell(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{M}(u_1, u_2)\,\mathrm{D}(u_2)\,\mathrm{N}(u_3)$ (3.9). Оператор $\mathcal{S}_3$ переставляет только параметры u_3 и v_1 в произведении матриц Лакса

$$\mathcal{S}_3\ \underline{\mathrm{M}_1(u_1,u_2)}\mathrm{D}_1(u_2)\mathrm{N}_1(u_3)\mathrm{M}_2(v_1,v_2)\mathrm{D}_2(v_2)\underline{\mathrm{N}_2(v_3)} =$$

$$= \underline{\mathrm{M}_1(u_1,u_2)}\mathrm{D}_1(u_2)\mathrm{N}_1(v_1)\mathrm{M}_2(u_3,v_2)\mathrm{D}_2(v_2)\underline{\mathrm{N}_2(v_3)}\ \mathcal{S}_3.$$

При условии, что оператор $\mathcal{S}_3$ коммутирует с крайними матрицами $\mathrm{M}_1(u_1, u_2)$ и $\mathrm{N}_2(v_3)$, уравнение существенно упрощается

$$\mathcal{S}_3\ \mathrm{D}_1(u_2)\mathrm{N}_1(u_3)\mathrm{M}_2(v_1,v_2)\mathrm{D}_2(v_2) = \mathrm{D}_1(u_2)\mathrm{N}_1(v_1)\mathrm{M}_2(u_3,v_2)\mathrm{D}_2(v_2)\ \mathcal{S}_3$$

Технически более удобным оказывается эквивалентное уравнение

$$\mathrm{D}_1^{-1}(u_2)\mathcal{S}_3\mathrm{D}_1(u_2)\ \mathrm{N}_1(u_3)\mathrm{M}_2(v_1,v_2) =$$
$$= \mathrm{N}_1(v_1)\mathrm{M}_2(u_3,v_2)\ \mathrm{D}_2(v_2)\mathcal{S}_3\mathrm{D}_2^{-1}(v_2),$$

приводящее к двум условиям

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_3 q^{N_{z_1}} = q^{N_{z_1}}\mathcal{S}_3; \\ &\frac{1}{y_2}\left(q^{-N_{y_2}}\mathcal{S}_3 q^{N_{y_2}} - q^{N_{y_2}}\mathcal{S}_3 q^{-N_{y_2}}\right) = \\ &= \frac{q^2}{x_2 z_2}\left(\mathcal{S}_3 - q^{-2N_{x_2}}\mathcal{S}_3 q^{2N_{x_2}}\right) q^{N_{y_2}} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

и системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{q}{y_1} q^{N_{x_1}}\left(q^{N_{y_1}}\mathcal{S}_3 q^{-N_{y_1}} - q^{-N_{y_1}}\mathcal{S}_3 q^{N_{y_1}}\right) = \\ &\qquad = \frac{1}{y_2}\left(q^{-N_{y_2}}\mathcal{S}_3 q^{N_{y_2}} - q^{N_{y_2}}\mathcal{S}_3 q^{-N_{y_2}}\right) q^{-N_{z_2}} \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$$\begin{aligned}&\left(x_1 q^{v_1-v_2-2}-x_2 q^{N_{z_2}-N_{y_2}}\right)\frac{1}{y_1}\left(\mathcal{S}_3-q^{2N_{y_2}}\mathcal{S}_3 q^{-2N_{y_2}}\right)q^{-N_{z_2}}=\\ =&\frac{q^2}{z_2}\left(q^{-N_{z_2}}\mathcal{S}_3 q^{N_{z_2}}-q^{N_{z_2}}\mathcal{S}_3 q^{-N_{z_2}}\right)\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x_1}\left(q^{N_{x_1}}\mathcal{S}_3 q^{-N_{x_1}}-q^{-N_{x_1}}\mathcal{S}_3 q^{N_{x_1}}\right)+\\ &\quad+\frac{1}{y_1}q^{v_1-v_2+N_{x_1}}\left(q^{N_{y_1}}\mathcal{S}_3 q^{-N_{y_1}}-q^{-N_{y_1}}\mathcal{S}_3 q^{N_{y_1}}\right)z_2=0\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

$$\begin{aligned}&q^{N_{x_1}+N_{x_2}-N_{z_2}}\mathcal{S}_3=\mathcal{S}_3 q^{N_{x_1}+N_{x_2}-N_{z_2}};\\ &\quad q^{N_{x_1}+N_{y_1}+N_{x_2}+N_{y_2}}\mathcal{S}_3=q^{u_3-v_1}\mathcal{S}_3 q^{N_{x_1}+N_{y_1}+N_{x_2}+N_{y_2}}\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned}&q^{-N_{x_1}}\mathcal{S}_3 q^{N_{x_1}}\left(x_1 q^{u_3}-x_2 q^{N_{z_2}-N_{y_2}+v_2}\right)=\\ &\quad=\left(x_1 q^{v_1}-x_2 q^{N_{z_2}-N_{y_2}+v_2}\right)q^{-N_{x_2}+N_{y_2}}\mathcal{S}_3 q^{N_{x_2}-N_{y_2}}\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

$$\begin{aligned}&q^{-N_{y_1}}\mathcal{S}_3 q^{N_{y_1}}\left(y_1 q^{-u_3-N_{x_1}}-y_2 q^{N_{z_2}-v_1+1}\right)=\\ &\quad=\left(y_1 q^{-v_1-N_{x_1}}-y_2 q^{N_{z_2}-u_3+1}\right)q^{-N_{x_2}+N_{y_2}}\mathcal{S}_3 q^{N_{x_2}-N_{y_2}}\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

При условии $[\mathcal{S}_3,\, q^{N_{z_1}}]=0$ коммутативность с крайними матрицами означает, что $\mathcal{S}_3$ коммутирует с $x_1 q^{-N_{y_1}}$, y_1, z_1 и x_2 , $y_2 q^{-N_{x_2}}$, $z_2 q^{N_{x_2}+N_{y_2}}$. Функция общего вида

$$\mathcal{S}_3=\mathcal{S}_3\left(x_1, y_1 q^{-N_{x_1}}; x_2 q^{N_{z_2}-N_{y_2}}, y_2 q^{N_{z_2}}, z_2\right)$$

обладает нужными свойствами коммутативности и совместна с системой оставшихся уравнений. Решение системы имеет вид

$$\mathcal{S}_3=\left(y_1 q^{-N_{x_1}}\right)^{u_3-v_1}\frac{\mathbf{e}_{q^2}\left(q^{u_3-v_1+1}\cdot\mathbf{U}\right)}{\mathbf{e}_{q^2}\left(q^{v_1-u_3+1}\cdot\mathbf{U}\right)};$$

$$\mathbf{U}=\frac{y_2}{y_1}q^{N_{x_1}+N_{z_2}+1}+\frac{z_2 x_1}{y_1}q^{N_{x_1}+u_3-v_2}-\frac{z_2 x_2}{y_1}q^{N_{x_1}-N_{y_2}+N_{z_2}}$$

Таким образом, нами получены замкнутые выражения для всех операторов $\mathcal{S}_i$. Дальше из этих элементарных строительных блоков по формуле (1.2) конструируется универсальная R-матрица.

Приложение

4.1. Функция $\mathbf{e}_q(x)$

В этом приложении мы собрали все необходимые формулы, относящиеся к функции $\mathbf{e}_q(x)$ [13]. Определение стандартных q-произведений

$$(x;q)_\infty = \prod_{k=0}^{+\infty}(1-q^k\cdot x);$$

$$(x;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-q^k\cdot x) = \frac{(x;q)_\infty}{(xq^n;q)_\infty}; \quad q\in\mathbb{C}, \quad |q|<1$$

Определение функции $\mathbf{e}_q(x)$

$$\mathbf{e}_q(x) \equiv \frac{1}{(x;q)_\infty}; \quad \mathbf{e}_q(qx) = (1-x)\cdot\mathbf{e}_q(x).$$

При помощи q-биномиальной формулы

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}\cdot z^n = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}; \quad |z|<1$$

выводятся следующие разложения в степенные ряды

$$\mathbf{e}_q(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(q;q)_n}; \quad \mathbf{e}_q^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n}{(q;q)_n}.$$

Эти формулы показывают, что можно единственным образом определить продолжение функции $\mathbf{e}_q(x)$

$$\mathbf{e}_{q^{-1}}(x) = \mathbf{e}_q^{-1}(qx)$$

так что рекуррентное соотношение $\mathbf{e}_q(qx) = (1-x)\cdot\mathbf{e}_q(x)$ сохраняется в области $|q|\neq 1$.

Формулы с некоммутирующими операторами $\mathbf{uv} = q\cdot\mathbf{vu}$

$$\mathbf{e}_q(\mathbf{v})\cdot\mathbf{e}_q(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_q(\mathbf{u}+\mathbf{v})$$

$$\mathbf{e}_q(\mathbf{u})\cdot\mathbf{e}_q(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_q(\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{vu}) = \mathbf{e}_q(\mathbf{v})\cdot\mathbf{e}_q(-\mathbf{vu})\cdot\mathbf{e}_q(\mathbf{u}) =$$

$$= \mathbf{e}_q(\mathbf{v}-\mathbf{vu})\cdot\mathbf{e}_q(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_q(\mathbf{v})\cdot\mathbf{e}_q(\mathbf{u}-\mathbf{vu})$$

4.2. Реализация генераторов $U_q(s\ell_3)$

В данном приложении мы строим реализацию генераторов $U_q(s\ell_3)$ в виде дифференциальных операторов, действующих на пространстве полиномов, зависящих от трёх комплексных переменных $\mathbb{C}[x,y,z]$ [12]. Проиллюстрируем его основную идею на примере алгебры $U_q(s\ell_2)$.

Алгебра $U_q(s\ell_2)$ порождается тремя элементами e, f, h и соотношениями

$$[e,f]=[2h]_q; \quad q^he=qeq^h; \quad q^hf=q^{-1}fq^h. \tag{4.1}$$

Пусть $|\mu\rangle$ вектор старшего веса: $e|\mu\rangle=0$, $h|\mu\rangle=m|\mu\rangle$; рассмотрим вектор $\mathbf{e}_{q^{-2}}(-z(1-q^{-2})f)|\mu\rangle$, где z – комплексная переменная. Представим действие оператора $A\in U_q(s\ell_2)$ на этот вектор как действие на тот же вектор некоторого дифференциального оператора a_z

$$A\cdot\mathbf{e}_{q^{-2}}(-z(1-q^{-2})f)|\mu\rangle=a_z\mathbf{e}_{q^{-2}}(-z(1-q^{-2})f)|\mu\rangle.$$

Если подействовать на этот вектор последовательно двумя элементами алгебры A и B, то получим

$$A\cdot B\cdot\mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})zf)|\mu\rangle=A\cdot b_z\mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})zf)|\mu\rangle=$$

$$b_zA\cdot\mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})zf)|\mu\rangle=b_za_z\mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})zf)|\mu\rangle, \tag{4.2}$$

т.е. элемент алгебры AB представляется оператором b_za_z, и, таким образом, получается обратный порядок сомножителей. Например, операторы e_z, f_z и h_z, соответствующие генераторам e, f и h алгебры $U_q(s\ell_2)$ будут удовлетворять

$$[e_z,f_z]=-[2h_z]_q; \quad q^{h_z}e_z=q^{-1}e_zq^{h_z}; \quad q^{h_z}f_z=qf_zq^{h_z} \tag{4.3}$$

вместо соотношений (4.1). Один из возможных выходов такой: будем рассматривать элементы e, f, h, удовлетворяющие “инвертированным” соотношениям (4.3) вместо (4.1). Тогда соответствующие им операторы e_z, f_z, h_z будут удовлетворять требуемым соотношениям (4.1).

Теперь перейдем непосредственно к вычислению операторов e_z, f_z, h_z. Как было сказано выше, пусть e, f, h удовлетворяют (4.3), тогда

$$q^h\mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})zf)|\mu\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{-2})^n(-z)^n}{\prod_{k=1}^n(1-q^{-2k})}q^hf^n|\mu\rangle=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{-2})^n(-z)^n}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^{-2k})} q^n q^h f^n |\mu\rangle =$$

$$= \mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})qzf)q^h|\mu\rangle = q^{N_z+m}\mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})zf)|\mu\rangle,$$

где введено обозначение $N_z \equiv z\partial_z$, а также было использовано $q^h f^n = q^n f^n q^h$. Следовательно $q^{h_z} = q^{N_z+m}$. Для вычисления e_z понадобится формула для коммутатора e и f^n:

$$ef^n - f^n e = -\frac{1}{q-q^{-1}}\left((q^2f)^{n-1}q^{2h} - q^{-2h}\right)\frac{1-q^{-2n}}{1-q^{-2}}. \qquad (4.4)$$

Используя её, получаем:

$$e\ \mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})zf)|\mu\rangle =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{-2})^n(-z)^n}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^{-2k})} ef^n|\mu\rangle = \mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})zf)e|\mu\rangle +$$
$$+\frac{z}{q-q^{-1}}\left(\mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})q^2zf)q^{2h} - \mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})zf)q^{-2h}\right)|\mu\rangle =$$
$$= \frac{z}{q-q^{-1}}\left(q^{2N_z+2m} - q^{-2m}\right)\mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})zf)|\mu\rangle. \qquad (4.5)$$

Таким образом, $e_z = \frac{z}{q-q^{-1}}\left(q^{2N_z+2m} - q^{-2m}\right)$ и, аналогично, $f_z = -\frac{1}{(q^{-2}-1)z}(q^{-2N_z}-1)$.

Матрица Лакса для $U_q(s\ell_2)$

$$L(u) = \begin{pmatrix} [u+h]_q & q^u f q^h \\ q^{-u}q^{-h}e & [u-h]_q \end{pmatrix}, \qquad (4.6)$$

может быть представлена в факторизованном виде, схожем с (3.7)–(3.8):

$$L(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ zq^{u_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{-N_z-1}[u_2]_q & -\frac{1}{z}[N_z]_q \\ 0 & q^{N_z}[u_1]_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zq^{u_2} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.7)$$

Для построения реализации алгебры $U_q(s\ell_3)$ нужны три переменные x, y, z (столько же, сколько в случае недеформированной алгебры). Вектор представления, на который будем действовать генераторами, выбирается в виде

$$\mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})xf_1)\mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})yf_{13})\mathbf{e}_{q^{-2}}(-(1-q^{-2})zf_2)|\mu\rangle, \qquad (4.8)$$

где $|\mu\rangle$ – снова старший вектор: $e_i|\mu\rangle = 0$, $h_i|\mu\rangle = m_i|\mu\rangle$, $i = 1, 2$. Следуя описанной выше процедуре, получаем генераторы в виде (3.6). Порядок экспонент в (4.8) может выбираться произвольным образом, также как и множители и знаки в их аргументах; наш выбор определяется требованием, чтобы в пределе $q \to 1$ выражения (3.6) переходили в недеформированные (2.2)–(2.3).

Литература

1. Л. И. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи и* **XYZ**-*модель Гейзенберга.* — Успехи мат. наук **34**, No. 5 (1979), 13–63.
2. L. D. Faddeev, *How algebraic Bethe anstz works for integrable model.* Les-Houches Lectures (1995), `hep-th/9605187`.
3. P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *On the solutions of the Yang–Baxter equation.* — Zap. Nauchn. Semin. LOMI **95** (1980), 129. *Quantum spectral transform method. Recent developments.* — Lect. Notes in Physics **151** (1982), 61.
4. M. Jimbo, *Introduction to the Yang–Baxter equation.* — Int. J. Mod. Phys **A 4**, (1983), 3759. *Yang–Baxter equation in integrable systems.* — M. Jimbo (ed.), Adv. Ser. Math. Phys. **10**, World Scientific (Singapore) (1990).
5. M. Jimbo, *A q-analogue of $U(gl(n+1))$, Hecke Algebra and the Yang–Baxter equation.* — Lett. Math. Phys. **11**, (1986), 247–252.
6. V. G. Drinfeld, *Hopf algebras and Yang–Baxter equation.* — Soviet Math. Dokl. **32** (1985), 254.
   V. G. Drinfeld, *Quantum Groups.* — in Proc. Int. Congress Math., Berkeley (1986), AMS, Providence RI (1987), p. 798.
7. P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, E. K. Sklyanin, *Yang–Baxter equation and representation theory.* — Lett. Math. Phys. **5** (1981), 393–403.
8. S. Derkachov, A. Manashov, *R-matrix and baxter Q-operators for the noncompact SL(N,C) invariant spin chain.* — SIGMA 2:084 (2006), `nlin.si/0612003`.
9. S. Derkachov, A. Manashov, *Baxter operators for the quantum sl(3) invariant spin chain.* — J. Phys. A **39** (2006), 13171, `nlin.si/0604018`.
10. S. Derkachov, D. Karakhanyan, R. Kirschner, *Yang–Baxter R-operators and parameter permutations.* — Nucl. Phys. **B785** (2007), 263–285 `hep-th/0703076`.
11. A. Klimyk, K. Schmudgen, *Quantum groups and their representations.* — Text and Monographs in Physics, Springer (1997).
12. L. C. Biedenharn, M. A. Lohe, *Quantum Group Symmetry and q-Tensor Algebras.* World Scientific, (1995).
    L. C. Biedenharn, M. A. Lohe, — Comm Math. Phys. **146** (1992), 483–504.
13. L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, *Quantum Dilogarithm.* — Mod. Phys. Lett. A **9** (1994), 427.
    A. N. Kirillov, *Dilogarithm identities.* — Progr. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995), 61–142, `hep-th/9408113`.
    A. Yu. Volkov, *Noncommutative Hypergeometry.* — `math.QA/0312084`.

Valinevich P. A., Derkachov S. E., Karakhanyan D., Kirschner R. Factorization of the $\mathcal{R}$-matrix for the algebra $U_q(s\ell_3)$.

The Yang–Baxter operator is obtained in terms a product of operators permuting representation parameters in the Lax operators.

The construction relies on a factorization of the Lax operator in triangular matrices.

Поступило 12 ноября 2007 г.

С.-Петербургский государственный университет

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Yerevan Physics Institute, Yerevan, Armenia

Institut für Theoretische Physik, Universität Leipzig, Leipzig, Germany