Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 347, 2007 г.

А. Г. Быцко, И. Е. Шендерович

О СТРУННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ БЕТЕ В $\mathcal{N}=4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

1. Введение

Интегрируемые модели типа спиновых цепочек появляются в некоторых задачах физики высоких энергий в качестве моделей эффективного взаимодействия. Например, гамильтониан XXX-цепочки с некомпактным представлением спина $s=-1$ возникает при описании рассеяния адронов на высоких энергиях [1, 2] и при описании смешивания составных операторов при перенормировке в QCD [3].

Смешивание составных операторов при перенормировке в теории суперсимметричного поля Янга–Миллса также приводит к появлению спиновой цепочки XXX типа, но с компактным представлением. В этой теории можно рассмотреть локально-инвариантные операторы вида

$$\mathcal{O} = \operatorname{tr}\,(Z^{J_1} W^{J_2} + \text{перестановки}) \tag{1}$$

где Z и W — два комплексных скалярных поля из супермультиплета. Конформные размерности Δ этих операторов составляют спектр оператора дилатации D. Смешивание операторов (1) в процессе перенормировки удобно описывать с помощью аналогии с квантовой спиновой цепочкой длины $L = J_1 + J_2$, где каждому оператору типа Z сопоставляется спин, направленный вверх, а каждому оператору типа W – спин, направленный вниз. Таким образом, состояние $ZZZWWZWZ$ соответствует цепочке следующего вида: $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\,|\rangle$. Важное наблюдение, сделанное в [4], состоит в том, что в $su(2)$ секторе в однопетлевом приближении (то есть, в первом порядке по $\lambda = g_{YM}^2 N$, где g_{YM} – Янг–Миллсовская константа связи, а N – число цветов) оператор дилатации D выражается через XXX гамильтониан спина

Работа первого автора была поддержана грантом РФФИ 05-01-00922, грантом НШ 5403.2006.1, грантом Фонда содействия отечественной науке; второго автора – грантом Фонда Династия.

$s{=}\frac{1}{2}$ для описанной выше цепочки:

$$D = \text{const} - \lambda\, H_{\text{XXX}} + O(\lambda^2). \tag{2}$$

Соответственно, в этом приближении определение спектра оператора D сводится к исследованию уравнений Бете для магнетика Гейзенберга (см. [5–7]),

$$\left(\frac{u_j + i/2}{u_j - i/2}\right)^L = \prod_{k\neq j} \frac{u_j - u_k + i}{u_j - u_k - i}, \tag{3}$$

где u_i – быстроты элементарных возбуждений.

В работах, последовавших за [4], были найдены двух- и трехпетлевые поправки к формуле (2) и было показано, что соответствующие выражения также являются интегрируемыми гамильтонианами для спиновой цепочки (но описывающими взаимодействие уже нескольких соседних узлов). В этих приближениях спектр оператора D определяется уже не уравнениями (3), а их “деформациями”, явно содержащими параметр λ в левой части. Предполагая, что интегрируемость оператора D имеет место во всех порядках, Beisert, Dippel и Staudacher [8] аргументировали, что точные уравнения Бете, определяющие спектр D, имеют вид

$$\left(\frac{x(u_j + i/2)}{x(u_j - i/2)}\right)^L = \prod_{k\neq j} \frac{u_j - u_k + i}{u_j - u_k - i}, \tag{4}$$

где

$$x(u) = \frac{1}{2}\left(u + \sqrt{u^2 - \chi^2}\right), \quad \chi^2 \equiv \frac{\lambda}{4\pi^2}. \tag{5}$$

Для спиновой цепочки длины L спектр гамильтониана ограничен значениями энергии ферромагнитого и антиферромагнитого вакуумов. Соответственно, спектр оператора D, т.е. размерности операторов (1), лежит в интервале

$$L \leqslant \Delta \leqslant \Delta_{\max}. \tag{6}$$

Здесь нижняя граница очевидно следует из структуры ферромагнитого вакуума (все спины направлены вверх), а определение верхней границы требует нетривиального вычисления энергии антиферромагнитого вакуума. В работах [9] и [10] значение $\Delta_{\max}$ было найдено в термодинамическом пределе с помощью стандартной техники перехода к пределу $L \to \infty$ в уравнениях Бете.

При этом предполагалось, что, как и для уравнений (3), антиферромагнитный вакуум соответствует заполнению 1-струнами, т.е. вещественными корнями уравнения (4). Однако, как показывает пример XXX магнетика старшего спина [11, 12], антиферромагнитный вакуум для уравнений Бете, отличающихся в левой части от (3), может иметь и другую структуру, например, заполняться струнами длины больше 1.

Целью данной работы является доказательство существования решений – струн длины больше 1 для уравнения (4) в термодинамическом пределе и проверка предположения о структуре антиферромагнитного вакуума.

2. Существование струнных решений

Чтобы сделать из $x(u)$ однозначную аналитическую функцию, мы выберем в $\mathbb{C}$ разрез $[-\chi,\chi]$ и зададим значения $x(u)$ на $\mathbb{C}/[-\chi,\chi]$ следующим образом:

$$x(u)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{r_1}\,e^{\frac{i}{2}\theta_1}+\sqrt{r_2}\,e^{\frac{i}{2}\theta_2}\right)^2, \tag{7}$$

где $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ и $\theta_1, \theta_2 \in]-\pi,\pi]$ определяются из соотношений $u=\chi+r_1e^{i\theta_1}=-\chi+r_2e^{i\theta_2}$. Отметим, что при таком определении знаки мнимых частей u и $x(u)$ совпадают, то есть $x(u)$ отображает точку из верхней полуплоскости в верхнюю, а из нижней полуплоскости в нижнюю.

Докажем теперь, что для любого $\delta>0$ выполняются следующие соотношения

$$\left|\frac{x(u+i\delta)}{x(u-i\delta)}\right| \quad \begin{cases} >1, & \text{при} \quad \operatorname{Im}u>0,\\ =1, & \text{при} \quad \operatorname{Im}u=0,\\ <1, & \text{при} \quad \operatorname{Im}u<0. \end{cases} \tag{8}$$

Обозначим $s=\mathrm{Re}(u)$, $t=\mathrm{Im}(u)$, $a=\mathrm{Re}\big(x(u)\big)$, $b=\mathrm{Im}\big(x(u)\big)$. Из формулы (7) видно, что $|x(u)|$ является непрерывной по u функцией (в частности, и тогда, когда u пересекает разрез), а также, что $|x(\overline{u})|=|x(u)|$. То есть, при фиксированном s функция $|x(s+it)|$ является непрерывной и симметричной по t. Мы докажем, что эта функция выпукла вниз, из чего (8) будет очевидным следствием.

Из (5) следует, что обратная к $x(u)$ функция имеет вид $u(x)=$

$x + \frac{\chi^2}{4x}$. Отсюда легко вывести следующие соотношения:

$$s = \left(1 + \frac{\chi^2}{a^2+b^2}\right) a, \quad t = \left(1 - \frac{\chi^2}{a^2+b^2}\right) b. \tag{9}$$

Пусть ∂_t обозначает частную производную по t (т.е. $\partial_t s = 0$). Применяя ее к (9) и решая систему уравнений для $\partial_t a$ и $\partial_t b$, находим

$$\partial_t a = \frac{2\chi^2 ab}{D}, \quad \partial_t b = \frac{1}{D} \left((a^2+b^2)^2 + \chi^2(b^2-a^2)\right), \tag{10}$$

где $D = ((\chi-a)^2+b^2)((\chi+a)^2+b^2)$. Отсюда получаем:

$$\partial_t |x(u)|^2 = 2\,\frac{a^2+b^2}{D}\,(a^2+b^2+\chi^2)\,b. \tag{11}$$

В силу замечания, сделанного после уравнения (7), t и b имеют одинаковый знак. Тем самым, выражение (11) положительно в верхней полуплоскости и отрицательно в нижней. Следовательно, функция $|x(u)|$ выпукла вниз по $\mathrm{Im}(u)$, что и завершает доказательство соотношений (8).

Соотношения (8) позволяют перенести анализ комплексных корней уравнений (3) (см. [5]) на случай уравнений (4). Именно, из (8) следует, что при $L \to \infty$ модуль левой части (4) стремится к ∞ для $\mathrm{Im}(u_j) > 0$ и к 0 при $\mathrm{Im}(u_j) < 0$. Это означает, что правая часть имеет, соответственно, полюс или ноль, т.е. должен существовать также и корень $u_j - i$ в первом случае и $u_j + i$ во втором. Тем самым, как и в случае XXX магнетика, в термодинамическом пределе корни уравнения (4) группируются в струны – цепочки вида $u_{j,m} = u_j + im$, где $u_j \in \mathbb{R}$ и $2m \in \mathbb{Z}$.

3. Плотность в случае струн нечетной длины

3.1. Уравнение для центра струн

Исследуем вопрос о максимальной энергии в случае, когда вакуумное состояние заполнено струнами длины $2n+1$, где n – целое. Их число ν_n фиксируется соотношением $(2n+1)\nu_n = L$. Следуя [5–7], перемножим уравнения Бете (4) вдоль одной струны длины $2n+1$. Заметим, что, так как правая часть в этих уравнениях не отличается от аналогичной правой части в "недеформированных" уравнениях Бете, то струны будут иметь такой же вид, как и в случае XXX-магнетика, то есть $u_j = u_j^n + im$, $m \in \mathbb{Z}$.

Далее, перейдя к термодинамическому пределу ($L \to \infty$) мы получим, что центры струн распределятся по вещественной оси с некоторой плотностью. Эта плотность удовлетворяет интегральному уравнению, которое легко решается. По этой плотности можно легко вычислить энергию основного состояния (см. [6]).

Таким образом, для центра струн получим следующее уравнение:

$$\frac{i}{2} L \ln \frac{x\left(u_j^n + (2n+1)\frac{i}{2}\right)}{x\left(u_j^n - (2n+1)\frac{i}{2}\right)} = \pi Q_j^n + \sum_{k=1}^{\nu_n} \Phi_{n,n}(u_j^n - u_k^n), \tag{12}$$

где

$$\Phi_{n,n} = \operatorname{arctg} \frac{u}{2n+1} + 2 \sum_{m=0}^{2n-1} \operatorname{arctg} \frac{u}{m+1}. \tag{13}$$

3.2. Действие Янга

Для доказательства единственности решения уравнений (12) при данном наборе целых чисел Q_j^n можно воспользоваться тем, что, как и в случае XXX магнетика [7], существует функционал S (называемый действием Янга), для которого эти уравнения являются условием экстремума, $\partial_{u_\alpha} S = 0$. Рассмотрим квадратичную форму для матрицы вторых производных для S:

$$\sum_{\alpha,\beta} v_\alpha \frac{\partial^2 S}{\partial_{u_\alpha} \partial_{u_\beta}} v_\beta = \frac{i}{2} L \sum_\alpha \partial_{u_\alpha} \ln \frac{x(u_\alpha + \frac{i}{2}(2n+1))}{x(u_\alpha - \frac{i}{2}(2n+1))} v_\alpha^2 + \sum_{\alpha > \beta} \frac{1}{(u_\alpha - u_\beta)^2 + 1} (v_\alpha - v_\beta)^2, \tag{14}$$

где $v_\alpha \in \mathbb{R}$. Второе слагаемое, очевидно, всегда положительно. Докажем положительность первого:

$$\frac{i}{2} \partial_s \ln \frac{x(s+it)}{x(s-it)} = \partial_s \arctan \frac{a}{b} = \frac{b \partial_s a - a \partial_s b}{(a^2 + b^2)} = \frac{a \partial_t a + b \partial_t b}{(a^2 + b^2)} = \frac{\partial_t |x(s+it)|^2}{2(a^2+b^2)}. \tag{15}$$

Здесь мы использовали те же обозначения, что и в части 2 и применили уравнения Коши для производных аналитической функции. Соотношение (11) показывает, что (15) положительно при $b > 0$. Таким образом, квадратичная форма (14) положительно определена и, следовательно, действие S имеет единственный минимум.

3.3. Термодинамический предел

Перейдём теперь к термодинамическому пределу. Устремим $L \to \infty$, и продифференцируем уравнение (12) по u. Левая часть при этом даст:

$$l.h.s. = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{(2n+1)}{2}i+u\right)^2-\chi^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{(2n+1)}{2}i-u\right)^2-\chi^2}}\right). \tag{16}$$

Введём плотность $\rho(u)$:

$$\rho(u) = \frac{1}{\left(\dfrac{du}{dq}\right)_{q=q(u)}}, \tag{17}$$

где $q(u) = Q/L$. Видно, что эта функция в самом деле играет роль плотности чисел $q(u)$ в интервале du. После её введения правая часть уравнения (12) будет выглядеть так:

$$r.h.s. = \pi\rho(u) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu\,\rho(\mu)\left[\frac{2n+1}{(2n+1)^2+(u-\mu)^2}\right.$$
$$\left. + 2\sum_{m=0}^{2n-1}\frac{m+1}{(m+1)^2+(u-\mu)^2}\right]. \tag{18}$$

Получившееся интегральное уравнение решается методом Фурье. Вычислим интеграл вида

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{\infty} du \frac{\mathrm{e}^{iku}}{\sqrt{(u+il)^2-\chi^2}} \\
&= \theta(-kl)\mathrm{e}^{-|kl|}\oint\frac{dq}{q}\exp\left(ik\left(q+\frac{\chi^2}{4q}\right)\right) \\
&= \mathrm{sign}\,(-l)\theta(-kl)\mathrm{e}^{-|kl|}\int\limits_0^{2\pi} id\varphi\mathrm{e}^{ik\chi\cos\varphi} \\
&= 2\pi i\,\mathrm{sign}\,(-l)\theta(-kl)\mathrm{e}^{-|kl|}J_0(\chi k),
\end{aligned} \tag{19}$$

где J_0 – функция Бесселя. Таким образом, левая часть нашего интегрального уравнения после преобразования Фурье будет выглядеть так:

$$F[l.h.s] = \pi\mathrm{e}^{-\frac{2n+1}{2}|k|}J_0(\chi k). \tag{20}$$

Обратимся теперь к правой части. Интеграл Фурье разбивается на слагаемые типа

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mu\, \rho(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{iku} \frac{A}{A^2+(u-\mu)^2} du$$
$$= \pi \int_{-\infty}^{\infty} d\mu\, \rho(\mu) \mathrm{e}^{i\mu k} \mathrm{e}^{-|k|A} = \pi \mathrm{e}^{-|k|A} \widetilde{\rho}(k), \quad (21)$$

где $\widetilde{\rho}(k)$ – Фурье-образ функции плотности $\rho(u)$. Эти слагаемые суммируются в прогрессию:

$$\pi\widetilde{\rho}(k) \left(2 \sum_{m=0}^{2n-1} \mathrm{e}^{-|k|(m+1)} + \mathrm{e}^{-|k|(2n+1)} \right)$$
$$= \pi\widetilde{\rho}(k) \left(\frac{2-\mathrm{e}^{-2n|k|}-\mathrm{e}^{-(2n+1)|k|}}{\mathrm{e}^{|k|}-1} \right). \quad (22)$$

Для Фурье-образа плотности $\widetilde{\rho}(k)$ мы получаем в итоге следующее выражение:

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}(k) &= J_0(\chi k) \frac{\mathrm{e}^{|k|}-1}{\mathrm{e}^{-\frac{2n+1}{2}|k|}(1+\mathrm{e}^{|k|})(\mathrm{e}^{(2n+1)|k|}-1)} \\ &= \frac{J_0(\chi k)\tanh\dfrac{|k|}{2}}{2\sinh\left(n+\frac{1}{2}\right)|k|}. \end{aligned} \quad (23)$$

Решение для интегрального уравнения получается таким:

$$\rho(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(\chi k)\tanh\dfrac{|k|}{2}}{2\sinh\left(n+\frac{1}{2}\right)|k|} \mathrm{e}^{iku} dk. \quad (24)$$

Заметим, что при $n = 0$ (струны единичной длины) оно переходит в выражение для плотности, полученное в работах [9, 10].

4. Энергия струн нечетной длины

Вычислим теперь максимальную энергию (или, что то же самое, максимальную размерность оператора дилатации $\Delta_{\max}$) состояния, заполненного струнами длины $2n+1$, где n целое. Дисперсия в рассматриваемой теории отличается от дисперсии модели магнетика и соответствующее выражение для плотности энергии имеет вид [9]

$$\frac{\Delta_{\max}}{L} = 1 + \frac{i\lambda}{8\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} du\, \rho(u) \left(\frac{1}{x\left(u + \frac{2n+1}{2} i\right)} - \frac{1}{x\left(u - \frac{2n+1}{2} i\right)} \right). \quad (25)$$

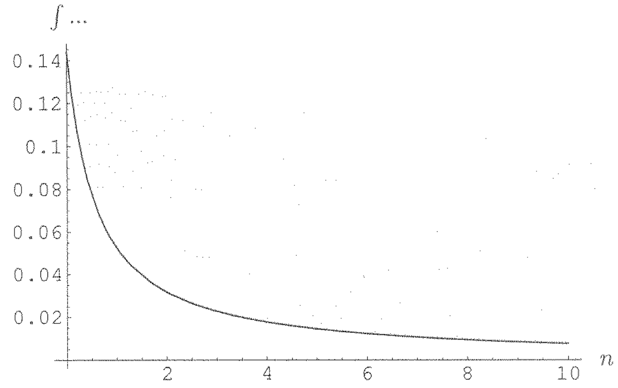
Подставляя сюда выражение для плотности из (24), получаем:

$$\frac{\Delta_{\max}}{L} = 1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dk}{k} \frac{J_0(\chi k) J_1(\chi k) \tanh \dfrac{k}{2}}{\mathrm{e}^{(2n+1)k} - 1}. \quad (26)$$

Здесь мы использовали следующее соотношение:

$$\frac{\chi^2 i}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{(u - il)^2 - \chi^2}} - \frac{1}{\sqrt{(u + il)^2 - \chi^2}} \right) = \frac{1}{2} \chi \partial_\chi \left[\frac{\chi^2}{2i} \left(\frac{1}{x(u + il)} - \frac{1}{x(u - il)} \right) \right]. \quad (27)$$

Ниже приводится график зависимости интеграла во втором слагаемом формулы (26) от длины струны (при фиксированном λ).



Видно, что максимум интеграла (а вместе с тем и максимум $\Delta_{\max}$) достигается при $n = 0$. Строгое доказательство монотонного убывания $\Delta_{\max}$ при росте n дано в Приложении. Таким образом, мы доказали, что состояние с наибольшей энергией в секторе струн нечетной длины действительно соответствует струнам длины 1, как и предполагалось в работах [9, 10]. Однако, ниже мы покажем, что настоящий антиферромагнитный вакуум, возможно, соответствует струнам длины 2.

5. Струны четной длины

Фаза функции $x(u)$, в отличии от её модуля, не является непрерывной и испытывает скачок, когда u пересекает разрез. Используя формулу (7), легко вывести, что для $u \in [-\chi, \chi]$ имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \ln \frac{x(u - i\epsilon)}{x(u + i\epsilon)} = 2i\, \nu_\epsilon \arctan \frac{\sqrt{\chi^2 - u^2}}{u}, \tag{28}$$

где $\nu_\epsilon = -1$, если ϵ стремится к нулю слева и $\nu_\epsilon = 1$, если ϵ стремится к нулю справа.

Для цепочки большой но конечной длины L корни уравнений Бете группируются в струны лишь с точностью до экспоненциальных поправок: $u_{j,m} = u_j + i(m + \epsilon_m)$, где m целые или полуцелые и $\epsilon_m = O(e^{-\omega_m L})$, $\omega_m > 0$. Полная "энергия" струны есть $\mathcal{E}_j = \frac{i}{2} \sum\limits_m \Big(\frac{1}{x(u_{j,m} + \frac{i}{2})} - \frac{1}{x(u_{j,m} - \frac{i}{2})} \Big)$. Вычисляя эту величину с учетом соотношения (28) для струны четной длины, мы замечаем, что корни

$$u_j + i\Big(\frac{1}{2} + \epsilon\Big), \quad u_j - i\Big(\frac{1}{2} + \epsilon\Big) \tag{29}$$

дают дополнительный вклад:

$$\mathcal{E}_j = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{i}{2} \bigg(\frac{1}{x(u_j - i\epsilon)} - \frac{1}{x(u_j + i\epsilon)} + \frac{1}{x(u_j + \frac{2n+1}{2} i)} - \frac{1}{x(u_j - \frac{2n+1}{2} i)} \bigg). \tag{30}$$

Здесь важно отметить, что в режиме, соответствующем $\nu_\epsilon = -1$, первые два члена в (30) дают отрицательный вклад в $\mathcal{E}_j$. Более того, нетрудно проверить, что в этом режиме $\mathcal{E}_j$ положительна не на всей вещественной оси. Соответственно, антиферромагнитный вакуум в этом случае имеет более сложную структуру – он заполняется струнами только в той области, где $\mathcal{E}_j > 0$. В данной работе мы ограничимся рассмотрением режима, соответствующего $\nu_\epsilon = 1$. Отметим, что в этом случае доказательство выпуклости действия Янга, данное в части 3.2, остается в силе.

Беря произведение левых частей уравнения Бете (4) вдоль струны четной длины и учитывая дополнительные вклады от корней (29), мы находим, что левая часть уравнения для центров струн имеет вид

$$\lim_{\epsilon\nearrow 0}\left(\frac{x(u_j-i\epsilon)}{x(u_j+i\epsilon)}\right)^L\left(\frac{x(u_j+\frac{i}{2}(2n+1))}{x(u_j-\frac{i}{2}(2n+1))}\right)^L. \tag{31}$$

Беря логарифм от этого выражения, мы получаем уравнения (12), но с дополнительное слагаемым в левой части. Дифференцируя (28) по u, вычисляя затем преобразование Фурье,

$$F\Big[\partial_u \lim_{\epsilon\to 0}\ln\frac{x(u-i\epsilon)}{x(u+i\epsilon)}\Big] = -2i\,\nu_\epsilon\int\limits_{-\chi}^{\chi}\frac{e^{iku}\,du}{\sqrt{\chi^2-u^2}} = -2\pi i\,\nu_\epsilon\,J_0(\chi k), \tag{32}$$

и сравнивая с формулой (19), мы видим, что для струн четной длины в режиме $\nu_\epsilon=1$ уравнение (20) принимает вид

$$F[l.h.s] = \pi\big(e^{-\frac{2n+1}{2}|k|}+1\big)J_0(\chi k). \tag{33}$$

Повторяя теперь вычисление Фурье–образа плотности как в части 3.3, находим

$$\rho_\epsilon(u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{J_0(\chi k)\big(1+e^{\frac{2n+1}{2}|k|}\big)\tanh\frac{|k|}{2}}{2\sinh\left(n+\frac{1}{2}\right)|k|}\,e^{iku}dk. \tag{34}$$

Из формулы (33) видно, что учёт дополнительных вкладов от корней (29) даёт такой же результат, как если бы вакуум был заполнен смесью струн длины $(2n+1)$ и струн длины 0 (что формально соответствует $n=-\frac{1}{2}$). В этом контексте отметим, что выражения вида (31) возникают в левой части уравнений Бете для цепочек с чередующимися спинами (см., например [13, 14]).

Формула (30) означает, что для вычислении полной энергии цепочки надо заменить выражение (25) на

$$\frac{\Delta}{L} = 1+\frac{i\chi^2}{2}\lim_{\epsilon\nearrow 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}du\,\rho_\epsilon(u)\left(\frac{1}{x(u-i\epsilon)}-\frac{1}{x(u+i\epsilon)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{x\left(u+\frac{2n+1}{2}i\right)}-\frac{1}{x\left(u-\frac{2n+1}{2}i\right)}\right). \tag{35}$$

Подставляя сюда (34) и выполняя то же вычисление, что и в части 4, мы получаем

$$\frac{\Delta}{L} = 1 + 2\chi \int\limits_0^\infty \frac{dk}{k}\, J_0(\chi k) J_1(\chi k)\, \tanh\frac{k}{2}\, \coth\frac{(2n+1)k}{4}. \tag{36}$$

С помощью подхода, изложенного в Приложении, можно показать, что при $n \geq \frac{1}{2}$ выражение (36) монотонно убывает с ростом n. Его максимальное значение при $n = \frac{1}{2}$ имеет вид

$$\frac{\Delta_{\max}}{L} = 1 + 2\chi \int\limits_0^\infty \frac{dk}{k}\, J_0(\chi k) J_1(\chi k). \tag{37}$$

Для сравнения этого выражения с величиной $\frac{\Delta_{\max}}{L}$, соответствующей струнам длины 1 можно вычесть значение (26) для $n = 0$ из (37). Результат имеет вид интеграла в (38) с положительной монотонно убывающей по k функцией $f(k)$. Как показано в Приложении, такой интеграл положителен.

Таким образом, заполнение вакуума струнами длины 2 в режиме $\nu_\epsilon = 1$ дает большее значение для $\frac{\Delta_{\max}}{L}$, чем заполнение струнами длины 1. Однако, вопрос о том, какой именно режим в действительности реализуется для струн четной длины в термодинамическом пределе остается открытым. Его решение требует довольно тонкого анализа экспоненциальных поправок ϵ в (29) при $L \to \infty$.

Приложение

Обозначим $\alpha = (2n+1)$, $\chi = \sqrt{\lambda}/(2\pi)$ и выполним в (26) замену переменной, $k' = \chi k$. Тогда

$$\partial_\alpha\Big(\frac{\Delta_{\max}}{L}\Big) = -2 \int\limits_0^\infty dk\, J_0(k)\, J_1(k)\, f(k), \tag{38}$$

где

$$f(k) = \left(\frac{1}{e^{\frac{k}{\chi}} + 1}\right)\left(\frac{e^{\frac{\alpha k}{\chi}}}{e^{\frac{\alpha k}{\chi}} - 1}\right)\left(\frac{e^{\frac{k}{\chi}} - 1}{e^{\frac{\alpha k}{\chi}} - 1}\right). \tag{39}$$

В такой записи очевидно, что $f(k)$ монотонно убывает с ростом k при всех $\alpha > 1$ и $\chi > 0$. Используя это, мы докажем, что интеграл в (38) положителен.

Пусть $0 < t_1 < t_3 < t_5 \ldots$ – упорядоченные по возрастанию корни $J_0(t)$, а $0 = t_0 < t_2 < t_4 \ldots$ – упорядоченные по возрастанию корни $J_1(t)$. Из соотношения

$$\partial_t J_0(t) = -J_1(t) \tag{40}$$

следует, что $t_{2n} < t_{2n+1} < t_{2n+2}$. Поскольку функция $J_0(t)J_1(t)$ положительна на $]t_{2n}, t_{2n+1}[$ и отрицательна на $]t_{2n+1}, t_{2n+2}[$, а функция $f(k)$ положительна и монотонно убывает при всех $k > 0$, мы имеем следующую оценку:

$$\int_0^\infty dk\, J_0(k)\, J_1(k)\, f(k) = \sum_{n=0}^\infty \int_{t_{2n}}^{t_{2n+2}} dk\, J_0(k)\, J_1(k)\, f(k) >$$

$$> \sum_{n=0}^\infty \Big[f(t_{2n+1}) \int_{t_{2n}}^{t_{2n+2}} dk\, J_0(k)\, J_1(k) \Big] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty \Big[f(t_{2n+1}) \left(J_0^2(t_{2n}) - J_0^2(t_{2n+2}) \right) \Big]. \tag{41}$$

В последнем равенстве мы использовали соотношение (40). Поскольку корни $J_1(t)$ являются точками локальных экстремумов для $J_0(t)$, а значения $|J_0(t)|$ в этих точках образуют убывающую последовательность, мы заключаем, что сумма в правой части (41), а тем самым и исходный интеграл положительны. Таким образом, $\partial_\alpha \left(\frac{\Delta_{\max}}{L} \right) < 0$, т.е. $\frac{\Delta_{\max}}{L}$ монотонно убывает с ростом n.

Литература

1. L. N. Lipatov, *High energy asymptotics of multi-color QCD and exactly solvable lattice models.* **hep--th/9311037**.
2. L. D. Faddeev, G. P. Korchemsky, *High energy QCD as a completely integrable model.* — Phys. Lett. **B342** (1995), 311–322.
3. V. M. Braun, S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *Integrability of three particle evolution equations in QCD.* – Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 2020–2023.
4. J. A. Minahan, K. Zarembo, *The Bethe ansatz for $\mathcal{N}$=4 super Yang–Mills.* — JHEP **0303** (2003), 013.
5. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **109** (1981), 134–178.
6. L. D. Faddeev, *How algebraic Bethe ansatz works for integrable model.* — in: Symétries quantiques, Les Houches, 1995 (North–Holland, Amsterdam, 1998), pp. 149–219; **hep-th/9605187**.

7. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* Наука, М., 1992.
8. N. Beisert, V. Dippel, M. Staudacher, *A novel long range spin chain and planar $\mathcal{N}$=4 super Yang–Mills.* — JHEP **0407** (2004), 075.
9. K. Zarembo, *Antiferromagnetic operators in $\mathcal{N}$=4 supersymmetric Yang–Mills theory.* — Phys. Lett. **B634** (2006), 552–556.
10. A. Rej, D. Serban, M. Staudacher, *Planar $\mathcal{N}$=4 gauge theory and the Hubbard model.* — JHEP **0603** (2006), 018.
11. L. A. Takhtajan, *The picture of low-lying excitations in the isotropic Heisenberg chain of arbitrary spins.* — Phys. Lett. **A87** (1981/82), 479–482.
12. H. M. Babujian, *Exact solution on the one-dimensional isotropic Heisenberg chain with arbitrary spin S.* — Phys. Lett. **A90** (1982), 479–482.
13. H. J. de Vega, L. Mezincescu, R. I. Nepomechie, *Thermodynamics of integrable chains with alternating spins.* — Phys. Rev. **B49** (1994), 13223–13226.
14. A. G. Bytsko, A. Doikou, *Thermodynamics and conformal properties of* XXZ *chains with alternating spins.* — J. Phys. **A37** (2004), 4465–4492.

Bytsko A. G., Shenderovich I. E. On string solutions of Bethe equations in $\mathcal{N}=4$ supersymmetric Yang–Mills theory.

The Bethe equations, arising in the description of the spectrum of the dilatation operator for the $su(2)$ sector of the $\mathcal{N}=4$ supersymmetric Yang–Mills theory, are considered in the antiferromagnetic regime. These equations are deformation of those for the Heisenberg XXX magnet. It is proven that in the thermodynamic limit the roots of the deformed equations group into strings. It is proven that the corresponding Yang's action is convex, which implies uniqueness of solution for centers of the strings. The state formed of strings of length $(2n+1)$ is considered and the density of their distribution is found. It is shown that the energy of such a state decreases as n grows. It is observed that nonanalyticity of the left hand side of the Bethe equations leads to an additional contribution to the density and energy of strings of even length. Whence it is concluded that the antiferromagnetic vacuum is formed of either strings of length 1 or strings of length 2 depending on behaviour of the exponential corrections to string solutions in the thermodynamic limit.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский государственный
университет, физический факультет

Поступило 12 октября 2007 г.