Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 347, 2007 г.

Н. М. Боголюбов, К. Малышев

О ВЫЧИСЛЕНИИ АСИМПТОТИК ДВУХТОЧЕЧНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОДНОМЕРНОГО БОЗЕ-ГАЗА В УДЕРЖИВАЮЩЕМ ПОТЕНЦИАЛЕ

1. Введение

Проблемы, связанные с описанием бозе-конденсации в пара́х щелочных металлов, удерживаемых в магнито-оптических ловушках, привлекают значительное внимание [1–3]. В частности, это касается систем эффективно одномерных [4–6]. В качестве теоретической основы успешно используются модели бозе-полей с дельта-образным межчастичным взаимодействием во внешних потенциалах. В одномерном случае уместно ожидать, что наличие внешнего потенциала приводит к результатам, которые согласуются с трансляционно-инвариантным описанием, основанным на квантовом нелинейном уравнении Шредингера [7].

Данная работа продолжает статьи [8–10], в которых рассматривается бозе-газ со слабым отталкиванием во внешнем гармоническом потенциале. Указанные работы связаны с вычислением асимптотик температурных корреляционных функций. При этом используется подход функционального интегрирования [11–15]. Для оценки двухточечного коррелятора применяется функциональный вариационный подход, предложенный в [16]. Рассмотрены пределы, когда убывание абсолютной температуры к нулю происходит либо быстрее, либо медленнее, чем убывание обратного размера области, занимаемой квази-конденсатом. Для вычисления коррелятора фаз применяются тэта-функции Якоби. Показано, что учет внешнего потенциала приводит к координатной зависимости критического показателя, характеризующего степенную асимптотику двухточечного коррелятора.

Статья организована следующим образом. Раздел 1 имеет

Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 07-01-00358, и программой НШ-5403.2006.1.

вводный характер. Эффективное действие модели получено в разделе 2 с использованием приближения Томаса–Ферми. Вариационный принцип, предложенный в [16], используется в разделе 3. Раздел 4 посвящен конкретным оценкам как в однородном пределе, так и для неоднородного слабо-взаимодействующего бозе-газа. Обсуждение в разделе 5 завершают статью.

2. Эффективное действие и приближение Томаса–Ферми

Рассмотрим одномерный бозе-газ со слабым отталкиванием на вещественной оси $\mathbb{R} \ni x$, удерживаемый внешним потенциалом $V(x) \equiv \frac{1}{2}\, m\Omega^2 x^2$. Статистическую сумму Z запишем в виде функционального интеграла [11–15]:

$$Z = \int \mathrm{e}^{S[\psi,\overline{\psi}]} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\overline{\psi}, \tag{1}$$

где $S[\psi,\overline{\psi}]$ – функционал действия:

$$S[\psi,\overline{\psi}] = \int\limits_0^\beta \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}x \Big\{ \overline{\psi}(x,\tau) \Big(\frac{\partial}{\partial \tau} - \mathcal{H} \Big) \psi(x,\tau) - \frac{g}{2} \left|\psi(x,\tau)\right|^4 \Big\}. \tag{2}$$

Гамильтониан $\mathcal{H}$ в (2) имеет вид:

$$\mathcal{H} \equiv \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu + V(x), \tag{3}$$

где m – масса бозе-частиц, μ – химический потенциал, g – константа связи ($g > 0$). Интегрирование в (1) идет по комплекснозначным функциям $\overline{\psi}(x,\tau)$, $\psi(x,\tau)$, которые достаточно быстро убывают при $x \to \pm\infty$ и периодичны с периодом $\beta = (k_B T)^{-1}$ по переменной $\tau \in [0,\beta]$ (k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура).

При достаточно низких температурах поля $\overline{\psi}(x,\tau)$, $\psi(x,\tau)$ можно представить в виде сумм двух слагаемых [11, 13]:

$$\psi(x,\tau) = \psi_o(x,\tau) + \psi_e(x,\tau), \quad \overline{\psi}(x,\tau) = \overline{\psi}_o(x,\tau) + \overline{\psi}_e(x,\tau), \tag{4}$$

где $\overline{\psi}_o(x,\tau)$, $\psi_o(x,\tau)$ отвечают *квази-конденсату* [9]. Известно, что в одномерных системах невозможно явление бозе-конденсации, связанной с макроскопическим заполнением низшего квантового уровня [11, 13]. С другой стороны, нетривиальность основного состояния одномерного газа бозе-частиц, взаимодействующих через дельта-образный потенциал, позволяет говорить о существовании квази-конденсата [7]. Поля $\overline{\psi}_e(x,\tau)$, $\psi_e(x,\tau)$ в (4) отвечают высокоэнергетичным возбуждениям.

Для исследования интеграла (1) применим последовательное интегрирование сначала по высокоэнергетичным, а затем – по низкоэнергетичным возбуждениям [11, 13]. Вывод эффективного действия S_{eff}, основанный на подстановке (4) в (2), означает использование подхода разложения по петлям [17]. Интегрирование по $\overline{\psi}_e$, ψ_e приводит к функционалу эффективного действия квази-конденсатных полей $S_{\text{eff}}[\psi_o,\overline{\psi}_o]$:

$$S_{\text{eff}}[\psi_o,\overline{\psi}_o] = \log \int \mathrm{e}^{\widetilde{S}[\psi_o+\psi_e,\overline{\psi}_o+\overline{\psi}_e]} \mathcal{D}\psi_e \mathcal{D}\overline{\psi}_e, \tag{5}$$

где тильда в $\widetilde{S}$ означает, что поля $\overline{\psi}_e$, ψ_e учитываются только до второго порядка.

Выпишем действие $\widetilde{S}$ более подробно:

$$\widetilde{S} = S_{\text{cond}} + S_{\text{free}} + S_{\text{int}}, \tag{6}$$

где S_{cond} – функционал действия квази-конденсатных переменных:

$$S_{\text{cond}}[\psi_o,\overline{\psi}_o] \equiv \int\limits_0^\beta \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}x \Big\{ \overline{\psi}_o(x,\tau)\widehat{K}_+ \psi_o(x,\tau) - \frac{g}{2}\left|\psi_o(x,\tau)\right|^4 \Big\}, \tag{7}$$

и функционал действия надконденсатных возбуждений S_{free} имеет вид:

$$S_{\text{free}}[\psi_e,\overline{\psi}_e] \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}x \,(\overline{\psi}_e,\psi_e)\widehat{G}^{-1} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \overline{\psi}_e \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Здесь, $\widehat{G}^{-1}$ – матрично-дифференциальный оператор,

$$\widehat{G}^{-1} \equiv \widehat{G}_0^{-1} - \widehat{\Sigma}, \tag{9}$$

где

$$\widehat{G}_0^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \widehat{K}_+ & 0 \\ 0 & \widehat{K}_- \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\Sigma} \equiv g \begin{pmatrix} 2|\psi_o|^2 & \psi_o^2 \\ (\overline{\psi}_o)^2 & 2|\psi_o|^2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Действие $S_{\rm int}$ (6) отвечает взаимодействию высокоэнергетичных возбуждений с квази-конденсатом:

$$S_{\rm int}[\psi_o,\overline{\psi}_o,\psi_e,\overline{\psi}_e] \equiv \int\limits_0^\beta \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}x \Big\{ \overline{\psi}_e(x,\tau)\big[\widehat{K}_+ - g\overline{\psi}_o\psi_o\big]\psi_o(x,\tau) + \psi_e(x,\tau)\big[\widehat{K}_- - g\overline{\psi}_o\psi_o\big]\overline{\psi}_o(x,\tau)\Big\}. \quad (11)$$

В (7), (10), (11) используются операторы $\widehat{K}_\pm \equiv \pm\dfrac{\partial}{\partial\tau} - \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ – гамильтониан (3).

Определим $\overline{\psi}_o$, ψ_o из условия стационарности функционала $S_{\rm cond}$ (7). Соответствующее требование $\delta(S_{\rm cond}[\psi_o,\overline{\psi}_o]) = 0$ приводит к паре уравнений Гросса–Питаевского [1]:

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu - V(x)\Big)\psi_o - g\,(\overline{\psi}_o\psi_o)\,\psi_o = 0,\\ \Big(-\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu - V(x)\Big)\overline{\psi}_o - g\,(\overline{\psi}_o\psi_o)\,\overline{\psi}_o = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Соблюдение уравнений (12) ведет к тому, что вклад, проистекающий от $S_{\rm int}$ (11), выпадает из (6). В ведущем приближении, поля ψ_e, $\overline{\psi}_e$ описываются действием $S_{\rm free}$ (8), которое зависит от $\overline{\psi}_o$, ψ_o через посредство матрицы собственно-энергетических частей $\widehat{\Sigma}$ (10). В интересующем нас случае большого количества частиц в магнито-оптической ловушке уместно воспользоваться приближением *Томаса–Ферми* [1, 2]. Это приближение состоит в отбрасывании кинетического члена в (12), что приводит к решению:

$$\overline{\psi}_o\psi_o = \rho_{\rm TF}(x;\mu) \equiv \frac{1}{g}\,\big(\mu - V(x)\big)\Theta\big(\mu - V(x)\big), \quad (13)$$

где Θ – функция Хевисайда.

Интегрирование в (5) гауссово и мы получаем:

$$S_{\rm eff}[\psi_o,\overline{\psi}_o] \equiv S_{\rm cond}[\psi_o,\overline{\psi}_o] - \frac{1}{2}\,\log\mathrm{Det}\big(\widehat{G}^{-1}\big), \quad (14)$$

Для придания смысла выражению (14) требуется регуляризация. Оператор $\widehat{G}^{-1}$ записан в виде уравнения Дайсона (9), которое определяет матрицу $\widehat{G}$ функций Грина полей $\overline{\psi}_e$, ψ_e. Пользуясь теорией возмущений по параметру g, в ведущем приближении получаем:

$$-\frac{1}{2}\log \mathrm{Det}\big(\widehat{G}^{-1}\big) \approx -\beta F_{\mathrm{nc}}(\mu) - 2g\int\limits_0^\beta \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}x\, \rho_{\mathrm{nc}}(x)\overline{\psi}_o\psi_o, \tag{15}$$

где $F_{\mathrm{nc}}(\mu)$ имеет смысл свободной энергии неидеального газа надконденсатных возбуждений [9, 10]. Плотность надконденсатных возбуждений есть $\rho_{\mathrm{nc}}(x) \equiv -\mathcal{G}_\pm(x,\tau;x,\tau)$. Соответствующие функции Грина $\mathcal{G}_\pm$ определяются уравнениями:

$$\big(\widehat{K}_\pm - 2g\rho_{\mathrm{TF}}(x;\mu)\big)\mathcal{G}_\pm = \delta(x-x')\delta(\tau-\tau'), \tag{16}$$

где используется $\rho_{\mathrm{TF}}(x;\mu)$ (13). При очень низких температурах и достаточно далеко от границы области, занимаемой квазиконденсатом, плотность $\rho_{\mathrm{nc}}(x)$ может быть приближенно заменена на $\rho_{\mathrm{nc}}(0)$ [18].

Введем переменные "плотность–фаза":

$$\psi_o(x,\tau) = \sqrt{\rho(x,\tau)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,\tau)}, \quad \overline{\psi}_o(x,\tau) = \sqrt{\rho(x,\tau)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(x,\tau)}, \tag{17}$$

и получим однопетлевое эффективное действие в новых переменных [9, 10]:

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{eff}}[\rho,\varphi] &= -\beta F_{\mathrm{nc}}(\mu) + \mathrm{i}\int\limits_0^\beta \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}x \Big\{\rho\partial_\tau\varphi + \frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x(\rho\partial_x\varphi)\Big\} \\ &+ \int\limits_0^\beta \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}x \Big\{\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\sqrt{\rho}\,\partial_x^2\sqrt{\rho} - \rho(\partial_x\varphi)^2\Big) + (\Lambda - V)\rho - \frac{g}{2}\,\rho^2\Big\}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\Lambda = \mu - 2g\rho_{\mathrm{nc}}(0)$ – ренормированный химический потенциал, и приняты сокращенные обозначения для частных производных. Эффективное действие (18) остается справедливым и для $V = 0$.

Условие стационарности $\delta\big(S_{\mathrm{eff}}[\rho,\varphi]\big) = 0$ приводит к паре уравнений типа Гросса–Питаевского:

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\partial_\tau\varphi + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\partial_x^2\sqrt{\rho} - (\partial_x\varphi)^2\right) + \Lambda - V(x) - g\rho = 0, \\ &-\mathrm{i}\partial_\tau\rho + \frac{\hbar^2}{m}\,\partial_x\left(\rho\partial_x\varphi\right) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Приближение Томаса–Ферми позволяет отбросить $(\partial_x^2\sqrt{\rho})/\sqrt{\rho}$ в первом из уравнений (19). Решение, удовлетворяющее условию $\partial_\tau\rho = 0 = \partial_\tau\varphi$, приводит к следующему профилю квази-конденсата, занимающему при нулевой температуре область $|x| \leqslant R_c$:

$$\rho_{\mathrm{TF}}(x) \equiv \frac{\Lambda}{g}\,\widetilde{\rho}_{\mathrm{TF}}(x) = \frac{\Lambda}{g}\,\left(1-\frac{x^2}{R_c^2}\right)\Theta\left(1-\frac{x^2}{R_c^2}\right). \tag{20}$$

Параметр R_c определяет границу области квази-конденсата: $R_c^2 \equiv \dfrac{2\Lambda}{m\Omega^2}$.

Пусть $\rho_0(x,\tau)$ обозначает некоторое решение уравнений (19), которое может быть представлено, по аналогии с разделением полей (4), в следующем виде:

$$\rho_0(x,\tau) = \rho_{\mathrm{TF}}(x) + \pi_0(x,\tau). \tag{21}$$

Допустим, что для представления (21) допустима линеаризация уравнений (19) в окрестности решения $\rho_0 = \rho_{\mathrm{TF}}(x)$, $\varphi = \mathrm{const}$. После замены $\pi_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}u(x)$ получаем уравнение типа Лежандра:

$$-\frac{\omega^2}{\hbar^2 v^2}\,u(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(1-\frac{x^2}{R_c^2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\right) = 0, \tag{22}$$

где v имеет смысл скорости звука в центре ловушки:

$$v^2 \equiv \frac{\rho_{\mathrm{TF}}(0)g}{m} = \frac{\Lambda}{m}. \tag{23}$$

Рассмотрим уравнение (22) для $x \in [-R_c, R_c] \subset \mathbb{R}$ и выполним в нем аналитическое продолжение $\omega \to \mathrm{i}E$. Многочлены Лежандра $P_n(x/R_c)$ являются решениями уравнения (22), если и только если

$$\left(\frac{R_c}{\hbar v}\right)^2 E^2 \equiv \frac{2}{\hbar^2\Omega^2}\,E^2 = n(n+1), \quad n \geq 0. \tag{24}$$

Иными словами, спектр надконденсатных возбуждений имеет вид: $E_n = \hbar\Omega\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}$, $n \geqslant 0$, [19].

3. Двухточечные корреляционные функции

Определим двухточечную корреляционную функцию $\Gamma(x_1,\tau_1;x_2,\tau_2)$ с помощью отношения двух функциональных интегралов:

$$\Gamma(x_1,\tau_1;x_2,\tau_2)=\frac{\int\overline{\psi}(x_1,\tau_1)\psi(x_2,\tau_2)\mathrm{e}^{S[\psi,\overline{\psi}]}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}}{\int\mathrm{e}^{S[\psi,\overline{\psi}]}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}}, \tag{25}$$

где действие $S[\psi,\overline{\psi}]$ определяется в (2). Нас интересует поведение коррелятора (25) для расстояний значительно меньших, чем размер области квази-конденсата. При достаточно низких температурах, основной вклад в поведение корреляторов происходит за счет низколежащих возбуждений [11, 13].

Воспользуемся последовательным интегрированием сначала по $\overline{\psi}_e$, ψ_e, а затем – по $\overline{\psi}_o$, ψ_o. Вариационный подход [16] приводит в основном приближении к следующей оценке для (25) [9, 10]:

$$\begin{aligned}\Gamma(x_1,\tau_1;x_2,\tau_2)&\simeq\sqrt{\rho_{\mathrm{TF}}(x_1)\rho_{\mathrm{TF}}(x_2)}\\&\times\exp\bigl(-S_{\mathrm{eff}}[\rho_0,\varphi_0]+S_{\mathrm{eff}}[\rho_1,\varphi_1]-\mathrm{i}\varphi_1(x_1,\tau_1)+\mathrm{i}\varphi_1(x_2,\tau_2)\bigr).\end{aligned}\tag{26}$$

Здесь $S_{\mathrm{eff}}[\rho,\varphi]$ – эффективное действие (18) и ρ_{TF} определяется в (20). При выводе (26) учтено, что флуктуации плотности подавлены при достаточно низких температурах [18]. Поля ρ_0, φ_0 в (26) определяются из уравнений (19), а поля ρ_1, φ_1 определяются условием экстремальности:

$$\delta\bigl(S_{\mathrm{eff}}[\rho,\varphi]-\mathrm{i}\varphi(x_1,\tau_1)+\mathrm{i}\varphi(x_2,\tau_2)\bigr)=0. \tag{27}$$

Представим решение $\rho_1(x,\tau)$ в следующем виде: $\rho_1(x,\tau)=\rho_{\mathrm{TF}}(x)+\pi_1(x,\tau)$. Тогда, с учетом линеаризации в окрестности $\rho_{\mathrm{TF}}(x)$, получаем следующую пару уравнений:

$$\begin{gathered}\mathrm{i}\partial_\tau\varphi_1-g\pi_1-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_x\varphi_1\right)^2=0,\\-\mathrm{i}\partial_\tau\pi_1+\frac{\hbar^2}{m}\partial_x\left(\rho_{\mathrm{TF}}\partial_x\varphi_1\right)=\mathrm{i}\delta(x-x_1)\delta(\tau-\tau_1)-\mathrm{i}\delta(x-x_2)\delta(\tau-\tau_2).\end{gathered}\tag{28}$$

Уравнения (28) позволяют [9, 10] определить поле φ_1, фигурирующее в (26).

Окончательно, после ряда преобразований записываем (26) в следующем виде [9, 10]:

$$\Gamma(x_1,\tau_1;x_2,\tau_2) \simeq \sqrt{\widetilde{\rho}(x_1)\widetilde{\rho}(x_2)}\, \exp\Big(-\frac{1}{2}\left(G(x_1,\tau_1;x_2,\tau_2)+G(x_2,\tau_2;x_1,\tau_1)\right)\Big). \quad (29)$$

В (29) используется функция Грина $G(x,\tau;x',\tau')$, имеющая смысл корреляционной функции фаз [20], и $\widetilde{\rho}(\cdot)$ – перенормированная плотность неоднородного квази-конденсата. Функция $G(x,\tau;x',\tau')$ удовлетворяет *неоднородному уравнению Стрингари*:

$$\frac{1}{\hbar^2 v^2}\,\partial_\tau^2 G(x,\tau;x',\tau') + \partial_x\left(\left(1-\frac{x^2}{R_c^2}\right)\partial_x G(x,\tau;x',\tau')\right) = \frac{g}{\hbar^2 v^2}\delta(x-x')\delta(\tau-\tau'). \quad (30)$$

4. Асимптотики корреляционных функций

Асимптотическое поведение приближенного выражения (29) определяется свойствами решений неоднородного уравнения Стрингари (30). Перейдем к решению уравнения (30).

4.1. Пространственно-однородный бозе-газ

Вдали от границы квази-конденсата (т.е. при $|x| \ll R_c$), уравнение (30) приближенно принимает вид:

$$\frac{1}{\hbar^2 v^2}\,\partial_\tau^2 G(x,\tau;x',\tau') + \partial_x^2 G(x,\tau;x',\tau') = \frac{g}{\hbar^2 v^2}\,\delta(x-x')\delta(\tau-\tau'). \quad (31)$$

Рассмотрим уравнение (31) на множестве функций, периодических по каждому из аргументов $(x,\tau) \in [-R_c,R_c]\times[0,\beta]$. Используем в правой части (31) периодические δ-функции. Представим решение в виде двойного ряда Фурье:

$$G(x,\tau;x',\tau') = \left(\frac{-g}{2\beta R_c}\right)\sum_{\omega,k}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\tau-\tau')+\mathrm{i}k(x-x')}}{\omega^2+E_k^2}, \quad (32)$$

где суммирование выполняется по частотам $\omega = (2\pi/\beta)l$, $l \in \mathbb{Z}$, и по волновым числам $k = (\pi/R_c)n$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом $E_k = \hbar v k$ означает энергию квазичастиц. Представление (32) требует регуляризации, состоящей в отбрасывании вклада для $\omega = k = 0$.

Чтобы вычислить функцию Грина (32) и исследовать ее асимптотическое поведение, введем в рассмотрение следующий двойной ряд:

$$\mathcal{Z}_2(l) = \mathcal{Z}_2(\mathbf{a}, \mathbf{x} \,|\, l) \equiv \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}{}' \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a_1 x_1 n_1 + a_2 x_2 n_2)}}{\big((a_1 n_1)^2 + (a_2 n_2)^2\big)^l}, \tag{33}$$

где $\Re l > 1$[1] и суммирование идет по целочисленным значениям компонент двумерного "вектора" $\mathbf{n}$: $\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Для сокращенной записи параметров суммы $\mathcal{Z}_2$ (33) введены также двумерные обозначения $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a}$ (с положительными компонентами a_1, $a_2 > 0$). Штрих у знака суммирования означает регуляризацию (слагаемое при $\mathbf{n} = (0,0)$ пропущено). С точностью до переобозначений, ряд $\mathcal{Z}_2(\mathbf{a}, \mathbf{x} \,|\, l)$ (33) совпадает с соответствующей дзета-функцией Эпштейна второго порядка [21]. Ряд $\mathcal{Z}_2(l)$ абсолютно сходится и аналитичен по l в полуплоскости $\Re l > 1$. Функциональное выражение для $\mathcal{Z}_2(l)$ (33) может быть полезным для вычисления как некоторых корреляционных функций, так и некоторых статсумм (при $x_1 = x_2 = 0$) [22, 23].

Суммирование проведем, пользуясь приемом, который стандартен при изучении дзета-функций Эпштейна. А именно, представим знаменатель в (33) с помощью интеграла типа Меллина ($\Re l > 0$, $a > 0$):

$$a^{-l} = \Gamma^{-1}(l) \int\limits_0^\infty s^{l-1} \mathrm{e}^{-s\,a} \mathrm{d}s. \tag{34}$$

Получаем регуляризованный ответ:

$$\mathcal{Z}_2(l) = \Gamma^{-1}(l) \int\limits_0^\infty s^{l-1} \Big[\vartheta_3\Big(\frac{a_1 x_1}{2\pi}\Big|\, \mathrm{i}\frac{s}{\pi} a_1^2\Big)\, \vartheta_3\Big(\frac{a_2 x_2}{2\pi}\Big|\, \mathrm{i}\frac{s}{\pi} a_2^2\Big) - 1\Big] \mathrm{d}s, \tag{35}$$

где использована ϑ-функция Якоби $\vartheta_3(z|\,\widehat{\tau})$ (П1), определенная в Приложении (некоторые формулы, связанные с ϑ-функциями, также приведены в Приложении).

Дальнейшая стратегия состоит в применении модулярного преобразования:

$$\vartheta_3(z|\,\widehat{\tau}) = \Big(\frac{\mathrm{i}}{\widehat{\tau}}\Big)^{1/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi z^2/\widehat{\tau}} \vartheta_3\Big(\frac{z}{\widehat{\tau}}\Big| -\frac{1}{\widehat{\tau}}\Big) \tag{36}$$

[1] $\Re$ и $\Im$ обозначают, соответственно, вещественную и мнимую части комплексного числа.

по отношению к каждой из ϑ-функций в (35). Выполним преобразование (36) для ϑ-функции, зависящей от a_1. После этого, результат интегрирования по s выражается через модифицированную функцию Бесселя $K_{l-1/2}$. Получаем:

$$\mathcal{Z}_2(l) = \frac{-1}{\Gamma(2l+1)}\Big(\frac{2\pi \mathrm{i}}{a_1}\Big)^{2l} B_{2l}\Big(\frac{a_1 x_1}{2\pi}\Big) + \frac{4}{\Gamma(l)}\Big(\frac{\pi}{a_1 a_2}\Big)^{l}\Big(\frac{a_2}{a_1}\Big)^{1/2} \tag{37}$$
$$\times\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\cos\big(a_2 x_2 n_2\big)}{n_2^{l-1/2}}\Big| k + \frac{a_1 x_1}{2\pi}\Big|^{l-1/2} K_{l-1/2}\Big(2\pi\frac{a_2}{a_1} n_2 \Big| k + \frac{a_1 x_1}{2\pi}\Big|\Big),$$

где $a_1 x_1 \in [0, 2\pi]$ и $B_{2l}(\cdot)$ – многочлен Бернулли [21]. При $x_1 = x_2 = 0$, представление (37) воспроизводит соответствующие соотношения [22]. Представление (37) при x_1, $x_2 \neq 0$ может быть использовано для получения асимптотик $\mathcal{Z}_2$ (33) при $a_1 \ll a_2 \ll 1$. Преобразование (36) может быть выполнено в другом сомножителе в (35). При этом возникнет представление, приспособленное для изучения асимптотического поведения при $a_2 \ll a_1 \ll 1$. Соответствующий ответ возникает из (37) при перестановке индексов $1 \longleftrightarrow 2$. Для дальнейшего исследования (37), уместно представить $K_{l-1/2}$ в виде некоторого ряда (в виде конечной суммы при целых l), как это сделано в [22] для случая $x_1 = x_2 = 0$.

Рассмотрим (37) при $l = 1$ и воспользуемся тем, что

$$K_{1/2}(z) = \Big(\frac{\pi}{2z}\Big)^{1/2} \mathrm{e}^{-z}, \qquad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}. \tag{38}$$

В итоге, получаем для $G(x,\tau;x',\tau')$ (32) два представления. Одно из них имеет вид:

$$G(x,\tau;x',\tau') = \\ = (-g)\Big(\frac{\beta}{4R_c}\big(\Im(z-z')\big)^2 + \frac{1}{2\pi\hbar v}\log\Big|\frac{\eta(\widehat{\tau})}{\vartheta_1(z-z'\,|\,\widehat{\tau})}\Big|\Big), \tag{39}$$

где функции $\vartheta_1(z|\widehat{\tau})$ и $\eta(\widehat{\tau})$ определены в Приложении. Параметры $\widehat{\tau}$ и z введены следующим образом:

$$\widehat{\tau} \equiv \mathrm{i}\frac{2R_c}{\beta\hbar v}, \qquad z \equiv \beta^{-1}\big(\tau + \mathrm{i}\frac{x}{\hbar v}\big). \tag{40}$$

Другое представление принимает вид:

$$G(x,\tau;x',\tau') = \\ = (-g)\Big(\frac{\beta}{4R_c}\big(\Re(z-z')\big)^2 + \frac{1}{2\pi\hbar v}\log\Big|\frac{\eta(-1/\widehat{\tau})}{\vartheta_1(\frac{z-z'}{\widehat{\tau}}\,|\,\frac{-1}{\widehat{\tau}})}\Big|\Big), \tag{41}$$

где $\widehat{\tau}$ и z определены в (40). Использование преобразования

$$\begin{aligned} &\eta(-1/\widehat{\tau}) = (-\mathrm{i}\widehat{\tau})^{1/2}\eta(\widehat{\tau}), \\ &\mathrm{i}\vartheta_1\Big(\frac{z-z'}{\widehat{\tau}}\Big| -\frac{1}{\widehat{\tau}}\Big) = (-\mathrm{i}\widehat{\tau})^{1/2}\exp\Big(\mathrm{i}\pi\frac{(z-z')^2}{\widehat{\tau}}\Big)\vartheta_1\big(z-z'\,\big|\,\widehat{\tau}\big) \end{aligned} \tag{42}$$

позволяет установить, что представления (39) и (41) совпадают.

Используя определение (П2) и соотношение (П3), можно переписать (39) следующим образом:

$$\begin{aligned} G(x,\tau;x',\tau') = (-g)\Big(&\frac{\beta}{4R_c}\big(\Im(z-z')\big)^2 - \frac{1}{2\pi\hbar v}\log\big(2\pi Q_0^2\big) \\ &+ \frac{|\widehat{\tau}|}{12\hbar v} + \frac{1}{2\pi\hbar v}\log\Big|\frac{\partial_z\vartheta_1(0|\widehat{\tau})}{\vartheta_1(z-z'\,|\,\widehat{\tau})}\Big|\Big). \end{aligned} \tag{43}$$

Пользуясь в (43) известным разложением (П4), получаем при $\dfrac{1}{|\widehat{\tau}|} = \dfrac{\beta\hbar v}{2R_c} \ll 1$:

$$\begin{aligned} G(x,\tau;x',\tau') \simeq (-g)\Big[&\frac{\beta}{4R_c}\big(\Im(z-z')\big)^2 \\ &+\frac{|\widehat{\tau}|}{12\hbar v} - \frac{1}{2\pi\hbar v}\log\big(2\big|\sinh\left(\mathrm{i}\pi(z-z')\right)\big|\big)\Big]. \end{aligned} \tag{44}$$

Аналогично, с помощью (П4) получаем из (41) оценку при $|\widehat{\tau}| \ll 1$:

$$\begin{aligned} G(x,\tau;x',\tau') \simeq (-g)\Big[&\frac{\beta}{4R_c}\big(\Re(z-z')\big)^2 \\ &+ \frac{1}{12\hbar v|\widehat{\tau}|} - \frac{1}{2\pi\hbar v}\log\Big(2\Big|\sinh\Big(\mathrm{i}\pi\frac{z-z'}{\widehat{\tau}}\Big)\Big|\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{45}$$

Полученные соотношения (44), (45) полностью согласуются с [9, 10] и позволяют оценивать $\Gamma(x_1,\tau_1;x_2,\tau_2)$ в пределе убывающей температуры и растущего объема квази-конденсата.

Использование (44) в представлении (29) приводит к ответу для $\beta\hbar v/R_c \ll 1$:

$$\Gamma(x_1,\tau_1;x_2,\tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\widetilde{\rho}(x_1)\widetilde{\rho}(x_2)}}{\Big|\sinh\dfrac{\pi}{\hbar\beta v}\big(|x_1-x_2| + \mathrm{i}\hbar v(\tau_1-\tau_2)\big)\Big|^{g/2\pi\hbar v}}. \tag{46}$$

Далее, применяя (45), получаем в пределе $R_c/(\beta\hbar v) \ll 1$:

$$\Gamma(x_1,\tau_1;x_2,\tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\widetilde{\rho}(x_1)\widetilde{\rho}(x_2)}}{\left|\sinh\dfrac{\mathrm{i}\pi}{2R_c}\left(|x_1-x_2|+\mathrm{i}\hbar v(\tau_1-\tau_2)\right)\right|^{g/2\pi\hbar v}}. \tag{47}$$

Из (46) и (47) следует, что при нулевой температуре и в бесконечном объеме двухточечный коррелятор ведет себя следующим образом:

$$\Gamma(x_1,\tau_1;x_2,\tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\widetilde{\rho}(x_1)\widetilde{\rho}(x_2)}}{\left||x_1-x_2|+\mathrm{i}\hbar v(\tau_1-\tau_2)\right|^{1/\theta}}. \tag{48}$$

Параметр θ принимает значение: $\theta \equiv 2\pi\hbar v/g$. Аргументы предполагаются достаточно близкими друг к другу.

4.2. Бозе-газ в гармоническом потенциале при $k_BT \gg \hbar v/R_c$

Будем искать функцию Грина, описываемую уравнением (30), где $\delta(\tau-\tau')$ – периодическая δ-функция на отрезке мнимого времени $[0,\beta]$ и $\delta(x-x')$ – обычная δ-функция на вещественной прямой $\mathbb{R}$ с носителем в точке x'. Решение (30) может быть представлено рядом Фурье:

$$G(x,\tau;x',\tau') = \frac{1}{\beta}\sum_{\omega} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\tau-\tau')}G_\omega(x,x'), \tag{49}$$

где $\omega = (2\pi/\beta)l$, $l\in\mathbb{Z}$. Спектральная плотность $G_\omega(x,x')$ (49) подчиняется неоднородному уравнению

$$-\frac{\omega^2}{\hbar^2v^2}G_\omega(x,x')+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(1-\frac{x^2}{R_c^2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_\omega(x,x')\right) = \frac{g}{\hbar^2v^2}\,\delta(x-x'). \tag{50}$$

Известно [21], что функции Лежандра $P_\nu(x)$ и $Q_\nu(x)$ определены при $|x|<1$ и связаны с соответствующим однородным уравнением (22) (при надлежащем продолжении $\omega\to\mathrm{i}E$). Они связаны также с функцией Лежандра $\mathfrak{Q}_\nu(z)$, определенной на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $z=1$. На краях разреза имеют место следующие предельные соотношения [21]:

$$\mathfrak{Q}_\nu(x\pm\mathrm{i}0) = Q_\nu(x)\mp\mathrm{i}\frac{\pi}{2}P_\nu(x). \tag{51}$$

Окончательно, получаем следующее выражение для $G_\omega(x,x')$:

$$G_\omega(x,x') = \begin{cases} (-\mathrm{i})\dfrac{gR_c}{\pi\hbar^2 v^2}\mathfrak{Q}_\nu\Big(\dfrac{x}{R_c}+\mathrm{i}0\Big)\mathfrak{Q}_\nu\Big(\dfrac{x'}{R_c}-\mathrm{i}0\Big), & x > x', \\ (-\mathrm{i})\dfrac{gR_c}{\pi\hbar^2 v^2}\mathfrak{Q}_\nu\Big(\dfrac{x}{R_c}-\mathrm{i}0\Big)\mathfrak{Q}_\nu\Big(\dfrac{x'}{R_c}+\mathrm{i}0\Big), & x < x', \end{cases} \tag{52}$$

где

$$\nu \equiv -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \Big(\frac{R_c}{\hbar v}\Big)^2 \omega^2}.$$

Интересующее нас поведение $G_\omega(x,x')$ для $x,x' \in [-R_c, R_c]$ описывается решением (52) с учетом соотношений (51).

Сильное неравенство $k_B T \gg \hbar v/R_c$ приводит к оценке для ненулевых частот: $|\omega| \gg \hbar v/(2R_c)$. В этом случае можно воспользоваться в (52) известными асимптотиками функций Лежандра [24] и получить $G(x,\tau;x',\tau')$ (49) в следующем виде:

$$G(x,\tau;x',\tau') \simeq \frac{\Lambda}{2\pi\hbar v \rho(x,x')} \log\Big\{2\Big|\sinh\frac{\pi}{\hbar\beta v}\big(|x-x'| + \mathrm{i}\hbar v(\tau-\tau')\big)\Big|\Big\}, \tag{53}$$

где v определяется в (23) и

$$\rho(x,x') \equiv \frac{\Lambda}{g}\Big(1 - \frac{x^2 + x'^2}{4R_c^2}\Big). \tag{54}$$

Назовем предел *квазиоднородным*, если координаты x, x' удовлетворяют неравенствам: $x,\ x' \ll R_c$, $|x-x'| \ll \frac{1}{2}(x+x')$ и $|x-x'| \ll R_c$. Тогда плотность (54) принимает вид:

$$\rho(x,x') \approx \frac{\Lambda}{g}\Big(1 - \frac{S^2}{2R_c^2}\Big),$$

где $S \equiv \frac{1}{2}(x+x')$.

С учетом (53) оценка (29) принимает вид:

$$\Gamma(x_1,\tau_1;x_2,\tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\widetilde{\rho}(x_1)\widetilde{\rho}(x_2)}}{\Big|\sinh\dfrac{\pi}{\hbar\beta v}\big(|x_1-x_2| + \mathrm{i}\hbar v(\tau_1-\tau_2)\big)\Big|^{1/\theta(x,x')}}, \tag{55}$$

где введен зависящий от координат параметр $\theta(x,x')$:

$$\theta(x,x') \equiv \frac{2\pi\hbar\rho(x,x')}{mv}. \tag{56}$$

При выполнении условия:

$$\frac{|x_1 - x_2|}{\hbar\beta v}, \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{\beta} \ll 1 \ll \frac{R_c}{\hbar\beta v}, \tag{57}$$

асимптотическое соотношение (55) упрощается:

$$\Gamma(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\widetilde{\rho}(x_1)\widetilde{\rho}(x_2)}}{\big||x_1 - x_2| + \mathrm{i}\hbar v(\tau_1 - \tau_2)\big|^{1/\theta(x,x')}}. \tag{58}$$

Асимптотика (58) аналогична оценке (48) для однородного газа.

4.3. Бозе-газ в гармоническом потенциале при $k_B T \ll \hbar v/R_c$

Определяемые с помощью многочленов Лежандра функции

$$\widetilde{P}_n(x) \equiv \sqrt{n + \frac{1}{2}}\, P_n\Big(\frac{x}{R_c}\Big), \quad n \geqslant 0,$$

составляют полную ортонормальную систему в пространстве $L_2\,[-R_c, R_c]$. Это позволяет рассмотреть решение уравнения (30), задаваемое двойным рядом Фурье:

$$G(x, \tau; x', \tau') = \Big(\frac{-g}{\beta R_c}\Big) \sum_{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{P}_n(x)\widetilde{P}_n(x')}{\omega^2 + E_n^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\tau - \tau')}, \tag{59}$$

где суммирование $\sum\limits_{\omega}$ идет по бозевским частотам (см. (32), (49)). Принято обозначение для уровней энергии (24):

$$E_n = \hbar\Omega \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{\alpha}, \tag{60}$$

где $\alpha \equiv R_c/(\hbar v)$.

Воспользуемся техникой, использованной в разделе 4.1, и получим следующее регуляризованное выражение для $G(x, \tau; x', \tau')$ (59):

$$G(x, \tau; x', \tau') = \Big(\frac{-g}{\beta R_c}\Big) \bigg[\frac{\beta^2}{4} B_2\Big(\frac{\Delta\tau}{\beta}\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{P}_n(x)\widetilde{P}_n(x') \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sE_n^2} \vartheta_3\Big(\frac{\Delta\tau}{\beta}\Big|\, \mathrm{i}\frac{s}{\pi}\Big(\frac{2\pi}{\beta}\Big)^2\Big)\mathrm{d}s\bigg]. \tag{61}$$

Выполняем для ϑ_3 модулярное преобразование, интегрируем по s и получаем:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sE_n^2}\vartheta_3\Big(\frac{\Delta\tau}{\beta}\Big|\,\mathrm{i}\frac{s}{\pi}\Big(\frac{2\pi}{\beta}\Big)^2\Big)\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{\beta}{2E_n}\Big[\coth\Big(\frac{\beta}{2}E_n\Big)\cosh(E_n\Delta\tau)-\sinh(E_n\Delta\tau)\Big], \quad (62)$$

где $\Delta\tau \equiv |\tau-\tau'|$. Исследуем представление, задаваемое (61), (62), в случае $\beta/\alpha \gg 1$. Это означает, что $k_BT \ll \hbar\Omega$ и $\beta E_n \gg 1$, $\forall n \geqslant 1$. Получаем из (61), (62):

$$G(x,\tau;x',\tau') = \frac{-g\beta}{4R_c}\Big[\Big(\frac{1}{2}-\frac{\Delta\tau}{\beta}\Big)^2-\frac{1}{12}\Big]$$
$$-\frac{g}{2\hbar v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}}P_n\Big(\frac{x}{R_c}\Big)P_n\Big(\frac{x'}{R_c}\Big)\exp\Big(-\sqrt{n(n+1)}\,\frac{\Delta\tau}{\alpha}\Big). \quad (63)$$

Разницу между двумя соседними уровнями (60) можно оценить при $\forall n > 1$:

$$E_{n+1}-E_n \approx \frac{1}{\alpha}\Big[1+\frac{1}{8n^2}-\frac{1}{4n^3}+\dots\Big]. \quad (64)$$

Соотношение (64) показывает, что уровни (60) приближенно равноотстоящие, если $n > n_0$ при достаточно больших n_0. В свою очередь, имеет место следующее соотношение:

$$\frac{n+1/2}{\sqrt{n(n+1)}} = 1+\frac{1}{8n^2}-\frac{1}{8n^3}+\dots. \quad (65)$$

Замечательно, что слагаемые $\propto n^{-1}$ отсутствуют как в (64), так и в (65). В рассматриваемой задаче возможна оценка с *логарифмической точностью*, так как обратные степени n могут быть опущены как в (64) так и в (65) при достаточно больших n. Сходимость ряда (63) при этом не нарушается, так как $\Delta\tau \neq 0$.

При достаточно больших n имеет место следующая асимптотика многочленов Лежандра [21]:

$$P_n(\cos\vartheta) =$$
$$\sqrt{\frac{2}{\pi n\sin\vartheta}}\cos\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\vartheta-\frac{\pi}{4}\Big]+O(n^{-3/2}), \quad 0<\vartheta<\pi. \quad (66)$$

Представим суммирование по n в (63) в виде двух суммирований: $\sum\limits_{n=1}^{n_0}$ и $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty}$. Предположим, что при $n > n_0$ можно воспользоваться оценкой (66) (обозначаемой ниже $\overline{P}_n(\cos\vartheta)$). Тогда, используя (64) и (65), получаем $G(x,\tau;x',\tau')$ (63) в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
G(x,\tau;x',\tau') \approx{}& \frac{-g\beta}{4R_c}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{\Delta\tau}{\beta}\right)^2-\frac{1}{12}\right] \\
&-\frac{g}{2\hbar v}\sum_{n=1}^{n_0}\left[\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}}P_n\Big(\frac{x}{R_c}\Big)P_n\Big(\frac{x'}{R_c}\Big)\exp\Big(-\sqrt{n(n+1)}\,\frac{\Delta\tau}{\alpha}\Big)\right. \\
&\qquad\left.-\overline{P}_n\Big(\frac{x}{R_c}\Big)\overline{P}_n\Big(\frac{x'}{R_c}\Big)\exp\Big(-\big(n+\frac{1}{2}\big)\,\frac{\Delta\tau}{\alpha}\Big)\right] \\
&-\frac{g}{2\hbar v}\,\mathrm{e}^{-\Delta\tau/(2\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}t^n\overline{P}_n\Big(\frac{x}{R_c}\Big)\overline{P}_n\Big(\frac{x'}{R_c}\Big),
\end{aligned}
\tag{67}
$$

где $t \equiv \exp(-\Delta\tau/\alpha)$, и n_0 предполагается зафиксированным при конечном значении. Выражение (67) имеет место, когда τ и τ' близки либо к нулю, либо к β. Кроме того, $\tau \neq \tau'$ для сохранения сходимости (67).

Предположим малость x/R_c, x'/R_c и $\Delta\tau/\alpha$ (квазиоднородный предел). Тогда в ведущем приближении в (67) доминирует третье слагаемое, и возникает логарифмическая оценка:

$$
G(x,\tau;x',\tau') \simeq \frac{-\Lambda}{2\pi\hbar v\rho(x,x')}\,\log\frac{R_c}{\big||x-x'|+\mathrm{i}\hbar v(\tau-\tau')\big|}. \tag{68}
$$

Здесь $\rho(x,x')$ определяется в (64), и предполагается, что

$$
u_* \equiv \frac{\big||x-x'|+\mathrm{i}\hbar v(\tau-\tau')\big|}{R_c} \ll 1. \tag{69}
$$

Кроме того, выполненяется следующее условие:

$$
1 \ll n_0 < \frac{1}{u_*} \ll \frac{1}{u_*}\log\frac{1}{u_*}. \tag{70}
$$

При ограниченности отклонений между пространственными аргументами x и x', рост R_c означает соответствующее увеличение верхней границы для допустимых значений n_0. Благодаря (70), оценка (68) не зависит явно от конкретного выбора n_0. В асимптотическом пределе, коэффициент перед логарифмом в

(68) переходит в критический показатель $-1/\theta$, где $\theta = 2\pi\hbar v/g$ (см. (48)).

Окончательно, возникает следующая оценка:

$$\Gamma(x_1,\tau_1;x_2,\tau_2) \simeq \frac{\sqrt{\widetilde{\rho}(x_1)\widetilde{\rho}(x_2)}}{\big||x_1-x_2| + \mathrm{i}\hbar v(\tau_1-\tau_2)\big|^{1/\theta(x,x')}}, \tag{71}$$

где $\theta(x,x')$ определяется соотношением (56). Соотношение (71) представляет основной результат в пределе $k_B T \ll \hbar v/R_c$. Вывод оценки (71) аналогичен переходу от (47) к (48). Оценки (58) и (71) показывают, что в термодинамическом пределе и при нулевой температуре двухточечная корреляционная функция $\Gamma(x_1,\tau_1;x_2,\tau_2)$ ведет себя степенным образом.

5. Заключение

Рассмотрен пространственно-неоднородный одномерный бозе-газ со слабым отталкиванием, находящийся во внешнем гармоническом потенциале. Исследуется асимптотическое поведение двухточечной корреляционной функции в пределе, когда размер области, занимаемой квази-конденсатом, растет и абсолютная температура стремится к нулю. Показано, что в указанном пределе корреляционная функция ведет себя степенным образом. В отличие от случая однородного распределения квази-конденсата, критический показатель оказывается зависящим от пространственных аргументов коррелятора. Именно наличие удерживающего потенциала приводит к функциональной зависимости критического показателя.

Приложение

В данном Приложении приведены некоторые соотношения, известные для тэта-функций Якоби [21]. Введем комплексные параметры: z, $\widehat{\tau} \in \mathbb{C}$, $\Im\widehat{\tau} > 0$, и параметр $q = e^{\mathrm{i}\pi\widehat{\tau}}$. С помощью этих параметров определяем ϑ-функции Якоби,

$$\vartheta_1\big(z\big|\,\widehat{\tau}\big) = -\mathrm{i}\sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2}(-1)^{r-1/2}q^{r^2}e^{2\pi\mathrm{i}zr},$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2(z|\,\widehat{\tau}) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} q^{r^2} e^{2\pi i z r}, \\ \vartheta_3(z|\,\widehat{\tau}) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} e^{2\pi i z n}, \\ \vartheta_4(z|\,\widehat{\tau}) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi i z n}, \end{aligned} \tag{П1}$$

и η-функцию Дедекинда [23]:

$$\eta(\widehat{\tau}) = q^{1/12} Q_0, \quad Q_0 \equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}). \tag{П2}$$

Для η-функции (П2) имеет место следующее соотношение [23]:

$$\eta(\widehat{\tau}) = \Big(\frac{\partial_z \vartheta_1(0|\widehat{\tau})}{2\pi}\Big)^{1/3}. \tag{П3}$$

Известно также следующее разложение [21]:

$$\log\Big|\,\frac{\partial_z \vartheta_1(0|\widehat{\tau})}{\vartheta_1(z|\,\widehat{\tau})}\Big| = \log\frac{\pi}{\sin(\pi z)} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \frac{1-\cos(2\pi z n)}{2n}. \tag{П4}$$

Литература

1. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, — Rev. Mod. Phys. **71** (1999), 463.
2. C. J. Pethic, H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases.* Cambridge University Press, Cambridge (2002).
3. T. Donner, S. Ritter, T. Bourdel, A. Öttl, M. Köhl, T. Esslinger, — Science **315** (2007), 1556.
4. D. M. Gangardt, G. V. Shlyapnikov, — Phys. Rev. Lett. **90** (2003), 010401.
5. K. V. Kheruntsyan, D. M. Gangardt, P. D. Drummond, G. V. Shlyapnikov, — Phys. Rev. A **71** (2005), 053615.
6. C. Gils, L. Pollet, A. Vernier, F. Herbert, G. G. Batrouni, M. Troyer, *Quantum Monte Carlo study of a 1D phase-fluctuating condensate.* `arXiv:cond-mat/0701441` (2007).
7. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions.* Cambridge University Press, Cambridge (1993).
8. N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, V. S. Kapitonov, C. Malyshev, J. Timonen, — Europhys. Lett. **55** (2001), 755.
9. N. M. Bogoliubov, C. Malyshev, R. K. Bullough, J. Timonen, — Phys. Rev. A **69** (2004), 023619.
10. Н. М. Боголюбов, К. Малышев, — Алгебра и Анализ **17** (2005), 84.

11. V. N. Popov, *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics.* D. Reidel, Dordrecht, etc. (1983).
12. L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration.* J. Wiley & Sons, New York, etc. (1981).
13. V. N. Popov, *Functional Integrals and Collective Excitations.* Cambridge University Press, Cambridge (1987, 1990).
14. V. N. Popov, V. S. Yarunin, *Collective Effects in Quantum Statistics of Radiation and Matter.* Kluwer, Dordrecht, etc. (1988).
15. H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets.* World Scientific, Singapore, etc. (1990, 1995, 2004).
16. В. Н. Попов, — Зап. научн. семин. ПОМИ **150** (1986), 87.
17. C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory.* McGraw-Hill, New York (1980).
18. M. Naraschewski, D. M. Stamper-Kurn, — Phys. Rev. A **58** (1998), 2423.
19. S. Stringari, — Phys. Rev. A **58** (1998), 2385.
20. В. Н. Попов, — Теор. Мат. Физ. **11** (1972), 354.
21. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions.* McGraw-Hill, New York (1953).
22. E. Elizalde, A. Romeo, — Rev. Math. Phys. **1** (1989), 113.
23. P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory.* Springer, New York, etc. (1997).
24. E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics.* Cambridge University Press, Cambridge (1931).

Bogoliubov N. M., Malyshev C. On the calculation of the asymptotics of the two-point correlation function of the one-dimensional Bose gas in the trapping potential.

The quantum field-theoretical model, which describes spatially nonhomogeneous one-dimensional repulsive Bose gas in an external harmonic potential is considered. The two-point correlation function is calculated in the framework of the functional integration. The corresponding functional integrals are estimated by means of the stationary phase approximation. The asymptotical estimates are obtained in the limit when the temperature is going to zero while the volume occupied by the quasi-condensate is increased. The power-law behavior is found for the correlation function in this limit. It is demonstrated that the power-law behavior is governed by the critical exponent dependent on the spatial arguments.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 2 июня 2006 г.